中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040401

阿波羅圓漣漪

學校名稱：國立新竹高級中學

作者：	指導老師：
高二 洪梓翔 高二 萬原府	許燦煌

關鍵詞： 鏡射圈、阿波羅球面、共軸圓系

摘要

在平面上，有 A，B 兩點及一直線 L，欲在直線 L 上找一點 P，使得 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的比值最大或最小，亦即將 $\overline{PB}$ 視爲一單位，若 $\overline{PA}$ 爲 $\overline{PB}$ 的 λ 倍，那麼 λ 的最大或最小值爲何？

動點 P 除了在平面的直線上變動外，也可能在圓、橢圓、拋物線、其他封閉圖形如圓的部分圖形或封閉區域如三角形區域內變動，甚至在空間中的直線、圓、平面、球面或封閉區域如四面體的表面上變動，我們都努力地試著尋求 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大或最小值。

壹、　研究動機

某公司有一工廠，董事會決議要在某一筆直的公路上找一賣場，使工廠與賣場的距離是公司與賣場距離的最小倍數。設公司位於 A，工廠位在 B，公路爲 L，賣場位在 P，若以公司與賣場的距離 $\overline{PA}$ 爲基準（即一個單位），且工廠與賣場的距離 $\overline{PB}$ 等於 $\overline{PA}$ 的 λ 倍，欲使 λ 之值最小，應如何選定場址？還有 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值是最小值的倒數嗎？ $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最小值與 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值有何關係？

除了賣場在筆直的公路上，也可能在環狀的道路上，或其他圖形上，雖然遇到了許多困難，我們還是竭盡所能的思考各種解決之道。底下是我們努力的成果報告。

貳、　研究目的

1. 探討阿波羅圓的基本性質。
2. 在平面上給定二點 A，B 及一直線 L，在 L 上找一點 P，使 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的比值最大或最小，並研究動點 P 具有哪些性質。還有，$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ 的最大、最小值與 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大、最小值有何關係？
3. 探討動點 P 在平面上的圓、橢圓、拋物線或三角形邊上變動時，$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 比值的最大或最小值。
4. 探討動點 P 在空間中的直線、平面、球面、圓或四面體表面上變動時，$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 比值的最大或最小值。

參、　研究設備及器材

電腦、Cabri 3D、Geometer’s Sketchpad (簡稱 GSP)、白紙、筆、Word

肆、　研究過程

一、阿波羅圓的基本性質

> 設 $A(a_1,a_2)$，$B(b_1,b_2)$ 爲兩定點，$P(x,y)$ 爲座標平面上任一點，滿足 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\lambda(\lambda\neq 1)$ 的 P 點所形成的圖形稱爲阿波羅圓。

令 $\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}=k$

$\Rightarrow\quad C_k:(k-1)x^2+(k-1)y^2-2(b_1k-a_1)x-2(b_2k-a_2)y=-(b_1{}^2+b_2{}^2)k+a_1{}^2+a_2{}^2$

當 $k=1$ 時，$C_1:2(b_1-a_1)x+2(b_2-a_2)y=\frac{1}{2}(b_1{}^2+b_2{}^2-a_1{}^2-a_2{}^2)$。$C_1$ 表 $\overline{AB}$ 的垂直平分線

當$k\neq 1$時，C_k爲阿波羅圓:

$$\left(x-\frac{b_1k-a_1}{k-1}\right)^2+\left(y-\frac{b_2k-a_2}{k-1}\right)^2=\frac{(a_1{}^2+a_2{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2-2a_1b_1-2a_2b_2)k}{(k-1)^2}=\frac{\overline{AB}^2\times k}{(k-1)^2}$$

C_k的圓心$D(\frac{b_1k-a_1}{k-1},\frac{b_2k-a_2}{k-1})$，半徑$r_k=\dfrac{\overline{AB}\times\sqrt{k}}{|k-1|}$

（一）當$k>1$時，k值愈大，C_k的半徑愈小，圓心愈靠近B，而且永遠在B的右方。

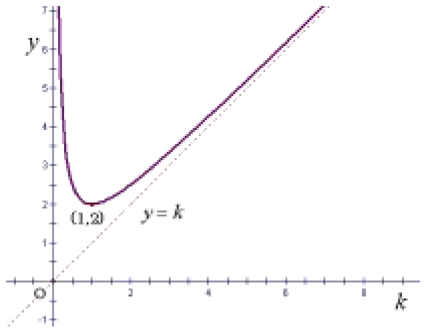
當$0<k<1$時，k值愈小，C_k的半徑愈小，圓心愈靠近A，而且永遠在A的左方。

半徑r_k，$r_k{}^2=\overline{AB}^2\cdot\dfrac{k}{k^2-2k+1}=\overline{AB}^2\cdot\dfrac{1}{k-2+\frac{1}{k}}=\dfrac{\overline{AB}^2}{(k+\frac{1}{k})-2}$

證明：

設$y=k+\frac{1}{k}\,(k>0)$，由算幾不等式得：$y=k+\frac{1}{k}\geq 2\sqrt{k\times\frac{1}{k}}=2$，而$y=2$時$k=1$，

k與y的關係如下圖:



而圓心$D=(b_1+\dfrac{b_1-a_1}{k-1},b_2+\dfrac{b_2-a_2}{k-1})=(a_1+\dfrac{(a_1-b_1)k}{1-k},a_2+\dfrac{(a_2-b_2)k}{1-k})$

設$b_1\geq a_1$，$b_2\geq a_2$

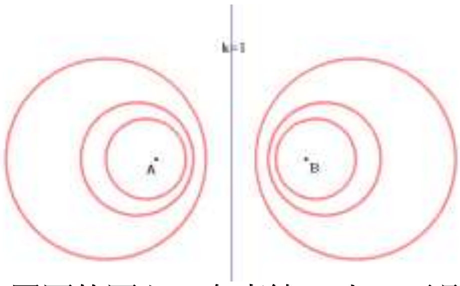
當$k>1$時，k值愈大，C_k的半徑愈小，圓心愈靠近B，而且永遠在B的右方

當$0<k<1$時，k值愈小，C_k的半徑愈小，圓心愈靠近A，而且永遠在A的左方

當$k\to\infty$時，半徑$r_k\to 0$，圓心$D\to B$；當$k\to 0$時，半徑$r_k\to 0$，圓心$D\to A$

(並非共軸圓系，因$(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+k(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$中的參數$k\in\mathbb{R}$，兩極點也非極限點。)

如下圖：



（二）阿波羅圓的圓心D在直線AB上，而且是在$\overline{AD}:\overline{DB}=k:1$的外分點上。

並且C_k與$C_{\frac{1}{k}}$半徑相等。

證明：

$$\overline{OD}=(\frac{b_1k-a_1}{k-1},\frac{b_2k-a_2}{k-1})=(b_1+\frac{b_1-a_1}{k-1},b_2+\frac{b_2-a_2}{k-1})=\overline{OB}+\frac{1}{k-1}\overline{AB}$$

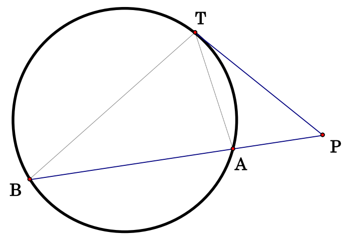
又$\overline{OD}=(\dfrac{b_1k-a_1}{k-1},\dfrac{b_2k-a_2}{k-1})=(a_1+\dfrac{k(a_1-b_1)}{1-k},a_2+\dfrac{k(a_2-b_2)}{1-k})=\overline{OA}+\dfrac{1}{1-k}\overline{BA}$

即$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\sqrt{k}$，阿波羅圓的圓心$D$在直線$AB$上，而且是在$\overline{AD}:\overline{DB}=k:1$的外分點上；

即$k>1$時，圓心D在B的右方外分；$0<k<1$時，圓心D在A的左方外分。

而半徑$r_k=\overline{AB}\sqrt{\dfrac{k}{k^2-2k+1}}=\overline{AB}\sqrt{\dfrac{1}{k-2+\frac{1}{k}}}=\dfrac{\overline{AB}}{\left|\sqrt{k}-\sqrt{\frac{1}{k}}\right|}$，因此，$C_k$與$C_{\frac{1}{k}}$半徑相等。

（三）任意一個阿波羅圓都是A、B兩點的鏡射圈，即A、B對任一個阿波羅圓互爲鏡像點。



證明：

設A、B爲圓上兩點，P爲圓外一點且$\overline{PT}$爲切線，

由$\triangle PTB \sim \triangle PAT$可得：$\overline{PT}:\overline{PA}=\overline{PB}:\overline{PT}$即$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$

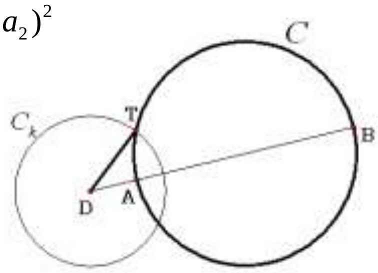
反之，若A爲圓上兩點，P爲圓外一點，T爲切點，

P、A、B三點共線，且$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$，則$B$爲圓$C$上一點。

理由如下：設$\overleftrightarrow{PA}$交圓C於B'，則$\overline{PA}\times\overline{PB'}=\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}\Rightarrow\overline{PB}=\overline{PB'}$

故$B=B'$即B在圓C上。

設C_k爲任一阿波羅圓，C爲過A且與C_k正交的圓，$D(\dfrac{b_1k-a_1}{k-1},\dfrac{b_2k-a_2}{k-1})$爲$C_k$的圓心。



$$\begin{aligned}\because\ \overline{DA}\times\overline{DB}&=\sqrt{(a_1+\frac{(a_1-b_1)k}{1-k}-a_1)^2+(a_2+\frac{(a_2-b_2)k}{1-k}-a_2)^2}\\&\quad\times\sqrt{(b_1+\frac{b_1-a_1}{k-1}-b_1)^2+(b_2+\frac{b_2-a_2}{k-1}-b_2)^2}\\&=\left|\frac{k}{1-k}\right|\cdot\overline{AB}\times\left|\frac{\overline{AB}}{k-1}\right|\\&=\frac{\overline{AB}^2k}{(k-1)^2}\ (\because k>0)\\&=r_k^{\ 2}\end{aligned}$$

又C與C_k正交，所以$r_k^{\ 2}=\overline{DT}^2$，故$\overline{DT}^2=\overline{DA}\times\overline{DB}$($T$爲切點)。

由前述知圓C過B，因此A、B對C_k鏡射。

二、動點 P 在直線上

先看一個例子：

設$A(0,1)$，$B(1,2)$爲坐標平面上兩點，$L:y=0(x$軸$)$，欲在直線L上找一點P，使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的值最大(或最小)。

設$P(t,0)$爲x軸上一個動點，

令 $\left(\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\dfrac{t^2+1}{(t-1)^2+4}=k$

$\Rightarrow(k-1)t^2-2kt+(5k-1)=0$

當$k=1$時，$t=2$，即$\overline{AB}$的中垂線$x+y=2$與x軸相交於$P(2,0)$，

可使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$

當$k\neq1$時，$\because t\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\therefore\frac{D}{4}=k^2-(k-1)(5k-1)\geq0\\&\Rightarrow\quad 4k^2-6k-1\leq0\\&\Rightarrow\quad\frac{3-\sqrt{5}}{4}\leq k\leq\frac{3+\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

故$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$有最大值$\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，這時$t=\dfrac{k}{k-1}=2+\sqrt{5}$

阿波羅圓$\left(\text{圓心}(2+\sqrt{5},3+\sqrt{5})\text{，半徑}3+\sqrt{5}\right)$與$x$軸相切於$(2+\sqrt{5},0)$

又$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$有最小值$\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，此時$t=\dfrac{k}{k-1}=2-\sqrt{5}$

阿波羅圓$\left(\text{圓心}(2-\sqrt{5},3-\sqrt{5})\text{，半徑}3-\sqrt{5}\right)$與$x$軸相切於$(2-\sqrt{5},0)$

（一）一般情形討論：

設 $A(a_1,a_2)$，$B(b_1,b_2)$，$L: cx+dy+e=0$，欲在直線 L 上找一點 P，使 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的值最大(或最小)。

設 $P(x_0+dt, y_0-ct)$ 爲 L 上的動點，其中 $(x_0, y_0)\in L$

令 $\left(\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\dfrac{(x_0-a_1+dt)^2+(y_0-a_2-ct)^2}{(x_0-b_1+dt)^2+(y_0-b_2-ct)^2}=k$

$$\Rightarrow (k-1)(c^2+d^2)t^2+2\left\{\left[d(x_0-b_1)-c(y_0-b_2)\right]k-d(x_0-a_1)+c(y_0-a_2)\right\}t$$
$$+\left[(x_0-b_1)^2+(y_0-b_2)^2\right]k-(x_0-a_1)^2-(y_0-a_2)^2=0$$

當 $k=1$ 時，$\overline{AB}$ 之中垂線交 L 於 P 點（設 $\overleftrightarrow{AB}$ 不垂直 L），可使 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$

當 $k\neq 1$ 時，$\because t\in\mathbb{R}$

$$\therefore \frac{D}{4}=\left\{\left[d(x_0-b_1)-c(y_0-b_2)\right]k-d(x_0-a_1)+c(y_0-a_2)\right\}^2$$
$$-(c^2+d^2)(k-1)\left\{\left[(x_0-b_1)^2+(y_0-b_2)^2\right]k-(x_0-a_1)^2-(y_0-a_2)^2\right\}\geq 0$$

$$\Rightarrow\left\{\left[d(x_0-b_1)-c(y_0-b_2)\right]^2-(c^2+d^2)\left[(x_0-b_1)^2+(y_0-b_2)^2\right]\right\}k^2$$
$$+\left\{2\left[d(x_0-b_1)-c(y_0-b_2)\right]\left[c(y_0-a_2)-d(x_0-a_1)\right]\right.$$
$$\left.+(c^2+d^2)\left[(x_0-a_1)^2+(y_0-a_2)^2+(x_0-b_1)^2+(y_0-b_2)^2\right]\right\}k$$
$$+\left[c(y_0-a_2)-d(x_0-a_1)\right]^2-(c^2+d^2)\left[(x_0-a_1)^2+(y_0-a_2)^2\right]\geq 0$$

其中 k^2 項係數：$d^2(x_0{}^2-2x_0b_1+b_1{}^2)+c^2(y_0{}^2-2y_0b_2+b_2{}^2)-2cd(x_0y_0-x_0b_2-y_0b_1+b_1b_2)$

$$-(c^2+d^2)(x_0{}^2+y_0{}^2-2x_0b_1-2y_0b_2+b_1{}^2+b_2{}^2)$$
$$=-(c^2x_0{}^2+2cdx_0y_0+d^2y_0{}^2)-(c^2b_1{}^2+2cdb_1b_2+d^2b_2{}^2)+2dy_0(cb_1+db_2)+2cx_0(cb_1+db_2)$$
$$=-(cx_0+dy_0)^2-(cb_1+db_2)^2+2(cb_1+db_2)(cx_0+dy_0)$$
$$=-\left[(cx_0+dy_0)-(cb_1+db_2)\right]^2=-(cb_1+db_2+e)^2$$

k 項係數：$2cd(x_0-b_1)(y_0-a_2)-2d^2(x_0-a_1)(x_0-b_1)-2c^2(y_0-a_2)(y_0-b_2)$

$$+2cd(x_0-a_1)(y_0-b_2)+(c^2+d^2)\left[(x_0-a_1)^2+(y_0-a_2)^2+(x_0-b_1)^2+(y_0-b_2)^2\right]$$
$$=c^2\left[(y_0-a_2)-(y_0-b_2)\right]^2+d^2\left[(x_0-a_1)-(x_0-b_1)\right]^2+2cd(x_0-a_1)(y_0-b_2)$$
$$+2cd(x_0-b_1)(y_0-a_2)+c^2\left[(x_0-a_1)^2+(x_0-b_1)^2\right]+d^2\left[(y_0-a_2)^2+(y_0-b_2)^2\right]$$
$$=c^2(a_2-b_2)^2+d^2(a_1-b_1)^2+\left[c(x_0-b_1)+d(y_0-a_2)\right]^2+\left[c(x_0-a_1)+d(y_0-b_2)\right]^2$$
$$=c^2(a_2-b_2)^2+d^2(a_1-b_1)^2+(cb_1+da_2+e)^2+(ca_1+db_2+e)^2$$
$$=(c^2+d^2)\left[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\right]-c^2(a_1-b_1)^2-d^2(a_2-b_2)^2$$
$$+(cb_1+da_2+e)^2+(ca_1+db_2+e)^2$$
$$=(c^2+d^2)\overline{AB}^2+2c^2a_1b_1+2d^2a_2b_2+2cd(b_1a_2+a_1b_2)+2ce(a_1+b_1)+2de(a_2+b_2)+2e^2$$
$$=(c^2+d^2)\overline{AB}^2+2ca_1(cb_1+db_2+e)+2da_2(cb_1+db_2+e)+2e(cb_1+db_2+e)$$
$$=(c^2+d^2)\overline{AB}^2+2(cb_1+db_2+e)(ca_1+da_2+e)$$

常數項：$c^2(y_0-a_2)^2+d^2(x_0-a_1)^2-2cd(x_0-a_1)(y_0-a_2)$

$$-(c^2+d^2)\left[(x_0-a_1)^2+(y_0-a_2)^2\right]$$
$$=-d^2(y_0-a_2)^2-c^2(x_0-a_1)^2-2cd(x_0-a_1)(y_0-a_2)$$
$$=-\left[c(x_0-a_1)+d(y_0-a_2)\right]^2=-\left[cx_0+dy_0-(ca_1+da_2)\right]^2$$
$$=-(ca_1+da_2+e)^2$$

整理一下，得

$$(cb_1+db_2+e)^2k^2-\left[(c^2+d^2)\overline{AB}^2+2(cb_1+db_2+e)(ca_1+da_2+e)\right]k+(ca_1+da_2+e)^2\leq 0$$

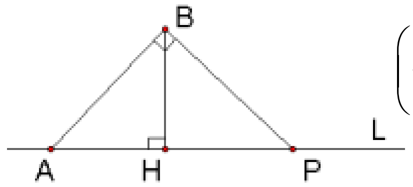
(i)　當 A，B 均在 L 上時：$(c^2+d^2)\overline{AB}^2k\geq 0$

$\therefore\ \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最小值爲 0，無最大値。

(ii) 當 A 在直線 L 上，而 B 不在直線 L 上時：$(cb_1+db_2+e)^2k^2-(c^2+d^2)\overline{AB}^2k\le 0$

$$\therefore\ \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{的最大值}=\frac{\sqrt{c^2+d^2}\cdot\overline{AB}}{|cb_1+db_2+e|}=\frac{\overline{AB}}{d(B,L)}\text{，而最小值}=0$$

如下圖：



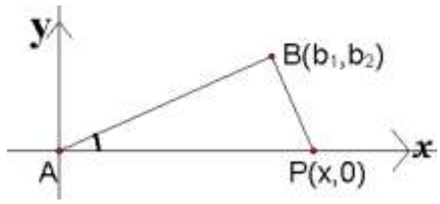
$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{的最大值}=\frac{\overline{AB}}{d(B,L)}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}}=\csc A\right)$$

〈另解〉由正弦定理，

(1) $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sin B}{\text{定值}}$ $\left(\begin{array}{l}\tan A=\dfrac{b_2}{b_1}\text{，}b_1,b_2>0\\ \sin A=\dfrac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\end{array}\right)$

當 $\sin B=1$ 即 $\angle B=90°$ 時

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值 $=\csc A$



(2) $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{\text{定值}}{\sin B}$

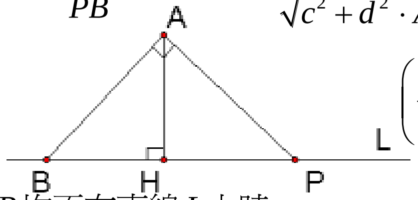
當 $\sin B=1$ 即 $\angle B=90°$ 時

$\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ 的最小值 $=\sin A$

(iii) 當 B 在直線 L 上，而 A 不在直線 L 上時：$(c^2+d^2)\overline{AB}^2k-(ca_1+da_2+e)^2\ge 0$

$$\therefore\ \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{的最小值}=\frac{|ca_1+da_2+e|}{\sqrt{c^2+d^2}\cdot\overline{AB}}=\frac{d(A,L)}{\overline{AB}}\text{，但無最大值。}$$

參考右圖：



$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{的最小值}=\frac{d(A,L)}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\sin B\right)$$

(iv) 當 A，B 均不在直線 L 上時，

$$D=\left[(c^2+d^2)\overline{AB}^2+2(cb_1+db_2+e)(ca_1+da_2+e)\right]^2-4(cb_1+db_2+e)^2(ca_1+da_2+e)^2$$

$$=(c^2+d^2)^2\overline{AB}^4+4(cb_1+db_2+e)(ca_1+da_2+e)(c^2+d^2)\overline{AB}^2$$

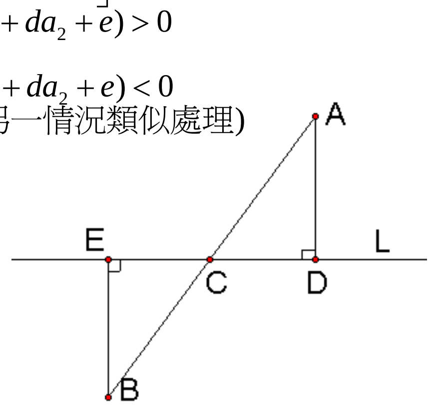
$$=(c^2+d^2)^2\overline{AB}^2\left[\overline{AB}^2+\frac{4(cb_1+db_2+e)\cdot(ca_1+da_2+e)}{c^2+d^2}\right]$$

若 A，B 在直線 L 同一側時，$(cb_1+db_2+e)\cdot(ca_1+da_2+e)>0$

所以，$D>0$

若 A，B 在直線 L 相異側時，$(cb_1+db_2+e)\cdot(ca_1+da_2+e)<0$

此時，設 $cb_1+db_2+e>0$，$ca_1+da_2+e<0$ (另一情況類似處理)



而 $\overline{AB}^2+\dfrac{4(cb_1+db_2+e)\cdot(ca_1+da_2+e)}{c^2+d^2}$

$$=\overline{AB}^2-\frac{4\left(cb_1+db_2+e\right)\left[-(ca_1+da_2+e)\right]}{c^2+d^2}$$

$$=\overline{AB}^2-4\times\frac{|cb_1+db_2+e|}{\sqrt{c^2+d^2}}\times\frac{|ca_1+da_2+e|}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

$=\left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)^2-4\overline{AD}\times\overline{BE}$ 其中 C 為 $\overline{AB}$ 與 L 的交點，D，E 分別為 A，B 在直線 L 上的投影，如右上圖。

$$\ge\left(\overline{AD}+\overline{BE}\right)^2-4\overline{AD}\times\overline{BE}=\left(\overline{AD}-\overline{BE}\right)^2\ge 0$$

等號成立於C、D、E三點重合，且$\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{DB}$

即直線L爲$\overline{AB}$的垂直平分線，亦即$k=1$。此與假設不合，所以，$D>0$。

設k的二次方程式有兩相異實根α，β(設$\alpha>\beta$)

因 $\alpha+\beta=\dfrac{2(cb_1+db_2+e)(ca_1+da_2+e)+(c^2+d^2)\overline{AB}^2}{(cb_1+db_2+e)^2}>0$

（將上述中4改爲2）

$$\alpha\beta=\frac{(ca_1+da_2+e)^2}{(cb_1+db_2+e)^2}>0$$

所以，α，β爲相異兩正根。

接著求k的二次方程式的兩根：

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{2(cb_1+db_2+e)^2}\Bigg[2(cb_1+db_2+e)(ca_1+da_2+e)+(c^2+d^2)\overline{AB}^2\\&\quad+(c^2+d^2)\overline{AB}\sqrt{\overline{AB}^2+4\cdot\frac{(cb_1+db_2+e)(ca_1+da_2+e)}{c^2+d^2}}\Bigg]\\&=\frac{c^2+d^2}{2(cb_1+db_2+e)^2}\times\Bigg[2\cdot\frac{cb_1+db_2+e}{\sqrt{c^2+d^2}}\cdot\frac{ca_1+da_2+e}{\sqrt{c^2+d^2}}+\overline{AB}^2\\&\quad+\overline{AB}\sqrt{\overline{AB}^2+4\cdot\frac{cb_1+db_2+e}{\sqrt{c^2+d^2}}\cdot\frac{ca_1+da_2+e}{\sqrt{c^2+d^2}}}\Bigg]\\&=\frac{1}{2[d(B,L)]^2}\times\left[\left(2pq+\overline{AB}^2\right)+\overline{AB}\sqrt{\overline{AB}^2+4pq}\right]\end{aligned}$$

其中$p=\dfrac{cb_1+db_2+e}{\sqrt{c^2+d^2}}$，$q=\dfrac{ca_1+da_2+e}{\sqrt{c^2+d^2}}$

同理 $\beta=\dfrac{1}{2[d(B,L)]^2}\times\left[\left(2pq+\overline{AB}^2\right)-\overline{AB}\sqrt{\overline{AB}^2+4pq}\right]$

所以，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值爲$\sqrt{\alpha}$，此時阿波羅圓與直線$L$相切於點$(x_0+d\alpha,y_0-c\alpha)$，

而$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值爲$\sqrt{\beta}$，此時阿波羅圓與直線$L$相切於點$(x_0+d\beta,y_0-c\beta)$。

檢視一下，上述結果是否正確。看一開始所舉的那個例子：

$A(0,1)$，$B(1,2)$，$L:y=0(x軸)$，欲在直線L上找一點P，使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$最大或最小。

因A，B都在L(x軸)的上方，所以p，q分別爲B與A到L的距離。

$$\alpha=\frac{2\times2\times1+\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}\sqrt{2+4\times2\times1}}{2\times2^2}=\frac{6+2\sqrt{5}}{8}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

$$\beta=\frac{6-2\sqrt{5}}{8}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

故$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值爲$\sqrt{\alpha}=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，而最小值爲$\sqrt{\beta}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

與前述答案相符。

（二）性質：

性質 1：因A與B對任意一個阿波羅圓互爲鏡像點，所以過A，B兩點的圓必與阿波羅圓正交，若此圓過切點$T_1(x_0+d\alpha,y_0-c\alpha)$必過$T_2(x_0+d\beta,y_0-c\beta)$。

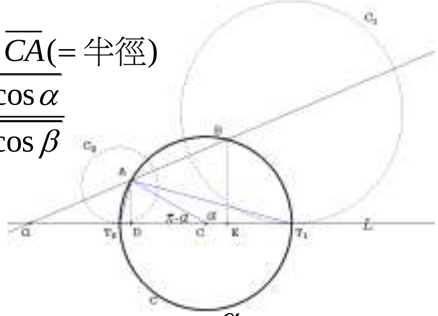
所以，以$\overline{T_1T_2}$爲直徑的圓必過A，B兩點。

理由是：因圓C與C_2正交，所以過交點T_2的切線互相垂直，

而圓C在T_2的切線垂直L，亦即$\overline{T_1T_2}$爲圓C的直徑，故圓C過T_2。

性質 2：現在考慮以 $\overline{T_1T_2}$ 爲直徑且過 A，B 兩點的圓。

設 $\overline{AB}$ 中垂線交 L 於 C，並設 $\alpha=\angle ACT_1$，$\beta=\angle BCT_1$，$r=\overline{CA}$(=半徑)



那麼，$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值 $=\frac{\overline{T_1A}}{\overline{T_1B}}=\frac{\sqrt{r^2+r^2-2r^2\cos\alpha}}{\sqrt{r^2+r^2-2r^2\cos\beta}}=\frac{\sqrt{2-2\cos\alpha}}{\sqrt{2-2\cos\beta}}$

$$=\frac{\sqrt{2-2(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{2-2(1-2\sin^2\frac{\beta}{2})}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最小值 $=\frac{\overline{T_2A}}{\overline{T_2B}}=\frac{\sqrt{r^2+r^2-2r^2\cos(\pi-\alpha)}}{\sqrt{r^2+r^2-2r^2\cos(\pi-\beta)}}=\frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{\sqrt{2+2\cos\beta}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$

設 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 L 於 G，則 $Max(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}})\times Min(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}})=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\times\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{GA}}{\overline{GB}}$

∴ $Max(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}})\times Min(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}})=\frac{\overline{T_1A}}{\overline{T_1B}}\times\frac{\overline{T_2A}}{\overline{T_2B}}=\frac{\overline{GA}}{\overline{GB}}=$ 常數(前提：$\overline{AB}$ 與 L 相交但不垂直)

由(一)的討論：$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 最大值與最小值的乘積 $=\sqrt{\alpha\beta}=\frac{|ca_1+da_2+e|}{|cb_1+db_2+e|}=\frac{d(A,L)}{d(B,L)}=\frac{\overline{GA}}{\overline{GB}}$

兩者有異曲同工之妙。

性質 3：$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ 的最大值爲 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 最小值的倒數，而 $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ 的最小值爲 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 最大值的倒數。

證明：$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}Max=\frac{\overline{T_2B}}{\overline{T_2A}}=\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$，$Min=\frac{\overline{T_1B}}{\overline{T_1A}}=\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

或將 $p.7$ 中 $A(a_1,a_2)$ 與 $B(b_1,b_2)$ 互換，在 k 的二次方程式中 k^2 項與常數項互換，k 項不變，

$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}Max=\frac{X}{\sqrt{2}d(B,L)}$，$Min=\frac{Y}{\sqrt{2}d(B,L)}$，其積 $=\frac{XY}{2[d(B,L)]^2}=\frac{d(A,L)}{d(B,L)}$

而 $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}Max=\frac{X}{\sqrt{2}d(A,L)}$，$Min=\frac{Y}{\sqrt{2}d(A,L)}$ 其中 $X=\sqrt{2pq+\overline{AB}^2+\overline{AB}\sqrt{\overline{AB}^2+4pq}}$

$$Y=\sqrt{2pq+\overline{AB}^2-\overline{AB}\sqrt{\overline{AB}^2+4pq}}$$

$\Rightarrow\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}Max\right)\times\left(\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}Min\right)=\frac{XY}{2d(B,L)\times d(A,L)}=\frac{d(B,L)}{d(B,L)}=1$

也可說明 $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ 的最小值是 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 最大值的倒數。

（三）舉例說明：

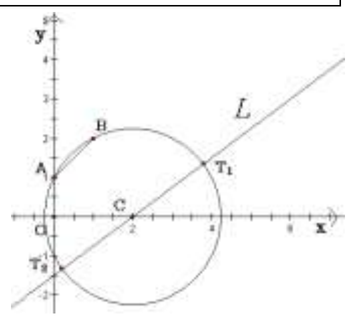
1. 設 $A(0,1)$，$B(1,2)$，$L:3x-4y=6$，欲在直線 L 上找一點 P，使 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 最大或最小。

$\overline{AB}$ 的中垂線 : $x+y=2$ 交 L 於 $C(2,0)$

$r=\overline{CA}=\overline{CB}=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{OT_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CT_1}=(2,0)+\sqrt{5}(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=(2+\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}})$

$\overrightarrow{OT_2}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CT_2}=(2,0)+\sqrt{5}(\frac{-3}{5},\frac{-4}{5})=(2-\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{-3}{\sqrt{5}})$



$$\therefore \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{最大值}=\frac{\overline{T_1A}}{\overline{T_1B}}=\frac{\sqrt{(2+\frac{4}{\sqrt{5}})^2+(\frac{3}{\sqrt{5}}-1)^2}}{\sqrt{(1+\frac{4}{\sqrt{5}})^2+(\frac{3}{\sqrt{5}}-2)^2}}=\frac{\sqrt{10+\frac{10}{\sqrt{5}}}}{\sqrt{10-\frac{4}{\sqrt{5}}}}=\sqrt{\frac{5\sqrt{5}+5}{5\sqrt{5}-2}}$$

$$=\frac{1}{11}\sqrt{5(27+7\sqrt{5})}=\frac{1}{11}\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{54+14\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{22}(7+\sqrt{5})$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{最小值}=\frac{\overline{T_2A}}{\overline{T_2B}}=\frac{\sqrt{(2-\frac{4}{\sqrt{5}})^2+(\frac{-3}{\sqrt{5}}-1)^2}}{\sqrt{(1-\frac{4}{\sqrt{5}})^2+(\frac{-3}{\sqrt{5}}-2)^2}}=\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-5}{5\sqrt{5}+2}}=\frac{\sqrt{10}}{22}(7-\sqrt{5})$$

$$Max(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}})\times Min(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}})=\frac{\overline{T_1A}}{\overline{T_1B}}\times\frac{\overline{T_2A}}{\overline{T_2B}}=\frac{\sqrt{10}}{22}(7+\sqrt{5})\times\frac{\sqrt{10}}{22}(7-\sqrt{5})=\frac{10}{11}$$

令 $G\begin{cases}3x-4y=6\\x-y=-1\end{cases}\Rightarrow G(-10,-9)$

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GB}}=\frac{\sqrt{(-10)^2+(-9-1)^2}}{\sqrt{(-10-1)^2+(-9-2)^2}}=\frac{10\sqrt{2}}{11\sqrt{2}}=\frac{10}{11}=\frac{\overline{T_1A}}{\overline{T_1B}}\times\frac{\overline{T_2A}}{\overline{T_2B}}\text{ 也等於}\frac{d(A,L)}{d(B,L)}$$

或利用向量：$\overline{CT_1}=(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}})$，$\overline{CT_2}=(\frac{-4}{\sqrt{5}},\frac{-3}{\sqrt{5}})$，$\overline{CA}=(-2,1)$，$\overline{CB}=(-1,2)$

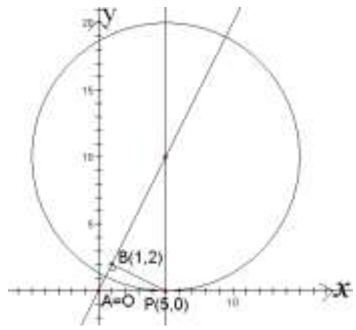
$$\cos\alpha=\cos(\angle ACT_1)=\frac{-5}{5\sqrt{5}}\text{，}\cos\beta=\cos(\angle BCT_1)=\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

$$Max=\frac{\overline{T_1A}}{\overline{T_1B}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1+\frac{5}{5\sqrt{5}}}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\frac{2}{5\sqrt{5}}}{2}}}=\sqrt{\frac{5\sqrt{5}+5}{5\sqrt{5}-2}}$$

$$Min=\frac{\overline{T_2A}}{\overline{T_2B}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\frac{5}{5\sqrt{5}}}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\frac{2}{5\sqrt{5}}}{2}}}=\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-5}{5\sqrt{5}+2}}$$

還有，$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$的最大值$=\frac{\overline{T_2B}}{\overline{T_2A}}=\sqrt{\frac{5\sqrt{5}+2}{5\sqrt{5}-5}}=\frac{\sqrt{10}}{20}(7+\sqrt{5})$

$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$的最小值$=\frac{\overline{T_1B}}{\overline{T_1A}}=\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-2}{5\sqrt{5}+5}}=\frac{\sqrt{10}}{20}(7-\sqrt{5})$



（例二附圖）

2. 再看A在直線L上的情形。

設$A(0,0)$，$B(1,2)$，$L: y=0$，欲在直線L上找一點P，使$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$最大(或最小)。

設$P(t,0)$為L上的動點，

由一般情形的討論(ii)得$4k^2-5k\le 0$

$$\therefore\ 0\le k\le\frac{5}{4}$$

因此，$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值$=\frac{\sqrt{5}}{2}$，此時阿波羅圓：$(x-5)^2+(y-10)^2=10^2$與$L$相切於$P(5,0)$

$\overline{PB}\perp\overleftrightarrow{AB}$且$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值$=\csc A$，而$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值$=0$，也可看作阿波羅圓（點圓）與$L$相切於$(0,0)$，如右上圖。還有，$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$的最小值$=\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，沒有最大值。

（四）特殊情形：考慮$\overleftrightarrow{AB}\perp L$(即$\overline{AB}$的中垂線平行$L$)的情形。

設$A(0,1)$，$B(0,2)$，而L為x軸，欲在直線L上找一點P，使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$最大(或最小)。

當$P=O$時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\dfrac{1}{2}$為最小值，因$\dfrac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2}=\dfrac{\overline{OA}^2+\overline{OP}^2}{\overline{OB}^2+\overline{OP}^2}>\dfrac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2}$

由正弦定理，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{\sin(\angle PBA)}{\sin(\angle PAB)}<\dfrac{\sin(\angle QBA)}{\sin(\angle QAB)}=\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$

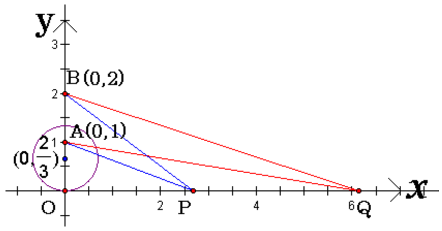
欲得$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值，$P$應往$x$軸正向移動至無窮遠處。

$\overline{AB}$的中垂線與x軸亦相交於無窮遠處，所以有一個半徑無窮大，而圓心在無窮遠的圓，此圓將過A，B兩點。

事實上，設$P(t,0)$，則

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2+4}}=\sqrt{1-\frac{3}{t^2+4}}<1$$

當$t\to\infty$時$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$，所以，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$沒有最大值。



而在$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{1}{2}$時，阿波羅圓為$x^2+(y-\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{4}{9}$與$L$($x$軸)相切於$O(0,0)$。如上圖。

動點P在平面的直線上的討論也可利用第九項〝動點P在平面上〞的情況，只是將阿波羅球面改為阿波羅圓即可。

三、動點 P 在空間中的直線上

（一） 一般情形討論：

在三維空間中，設$A(a_1,a_2,a_3)$，$B(b_1,b_2,b_3)$，欲在直線$L:\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\ \ (t\in\mathbb{R})\\ z=z_0+nt\end{cases}$

上找一點P使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的值最大或最小，其解法與平面的處理如出一轍，只是將阿波羅圓換成阿波羅球面而已。

（二） 舉例說明：

設$A(0,0,1)$，$B(2,4,3)$，$L:x$軸，欲在直線L上找一點P，使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$最大(或最小)。

設$P(t,0,0)$為L上的動點。

令$\left(\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\dfrac{t^2+1}{(t-2)^2+16+9}=k$

$\Rightarrow (k-1)t^2-4kt+(29k-1)=0$

當$k=1$時，$t=7$，即取$P(7,0,0)$可使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$

當$k\neq1$時，$\because t\in\mathbb{R}$，

$$\therefore \frac{D}{4}=4k^2-(k-1)(29k-1)\geq0\Rightarrow 25k^2-30k+1\leq0$$

$$\Rightarrow \frac{3-2\sqrt{2}}{5}\leq k\leq\frac{3+2\sqrt{2}}{5}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}\leq\sqrt{k}\leq\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}}$$

而當$k=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{5}$時，$t=\dfrac{4k}{2(k-1)}=\dfrac{2k}{k-1}=\dfrac{\frac{6+4\sqrt{2}}{5}}{\frac{-2+2\sqrt{2}}{5}}=7+5\sqrt{2}$

$k=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{5}$時，$t=\dfrac{\frac{6-4\sqrt{2}}{5}}{\frac{-2-2\sqrt{2}}{5}}=7-5\sqrt{2}$

$\therefore$ 取 $P(7+5\sqrt{2},0,0)$ 時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值為 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}}$

取 $P(7-5\sqrt{2},0,0)$ 時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最小值為 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}$

仿平面阿波羅圓的作法，先作 $\overline{AB}$ 的垂直平分面，其與直線 L 的交點就是球心 O'，以 $\overline{O'A}$ 為半徑得一球面 S，S 與 L 的交點即為最大值及最小值的 P 點

$\overline{AB}$ 的垂直平分面 : $x+2y+z=7$

而 x 軸: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$，聯立解之，得交點 $O'(7,0,0)$

而阿波羅球面與 x 軸的切點為 $T_1(7+5\sqrt{2},0,0)$ 及 $T_2(7-5\sqrt{2},0,0)$

以 $\overline{T_1T_2}$ 為直徑的球面方程式為 $(x-7)^2+y^2+z^2=50$

所以，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值為 $\dfrac{\overline{T_1A}}{\overline{T_1B}}=\dfrac{\sqrt{(7+5\sqrt{2})^2+1}}{\sqrt{(5+5\sqrt{2})^2+16+9}}=\dfrac{\sqrt{100+70\sqrt{2}}}{\sqrt{100+50\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}}$

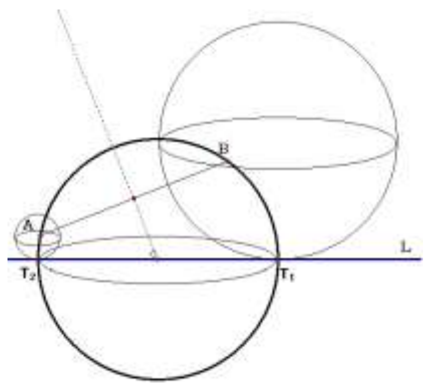
$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最小值為 $\dfrac{\overline{T_2A}}{\overline{T_2B}}=\dfrac{\sqrt{(7-5\sqrt{2})^2+1}}{\sqrt{(5-5\sqrt{2})^2+16+9}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}$

再以正餘弦的半角計算：

因 A 與 L 所在的圓(大圓)上，$O'(7,0,0)$，$T_1(7+5\sqrt{2},0,0)$，$T_2(7-5\sqrt{2},0,0)$

所以，$\overrightarrow{O'T_1}=(5\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{O'T_2}=(-5\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{O'A}=(-7,0,1)$，

另在 B 與 L 所在的圓上，$\overrightarrow{O'B}=(-5,4,3)$



故 $\cos\alpha=\cos(\angle AO'T_1)=\dfrac{-35\sqrt{2}}{\left(\sqrt{50}\right)^2}=\dfrac{-7}{10}\sqrt{2}$

$\cos\beta=\cos(\angle BO'T_1)=\dfrac{-25\sqrt{2}}{\left(\sqrt{50}\right)^2}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore \text{ 最大值}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\sqrt{\dfrac{1+\frac{7}{10}\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{10+7\sqrt{2}}{10+5\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{而 最小值}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\sqrt{\dfrac{1-\frac{7}{10}\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}}==\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}$$

雖然 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $L(x$ 軸$)$ 歪斜，但我們利用 A 與 L 所在的大圓計算 $\cos\alpha$，再利用 B 與 L 所在的大圓計算 $\cos\beta$。

至於第二項導出的公式中 $d(B,L)=\dfrac{|cb_1+db_2+e|}{\sqrt{c^2+d^2}}$

在空間中並不是點 B 到直線 L 的距離，所以不能套用它的結果。

四、動點 P 在平面的圓上

（一）一般情形討論：

設 $A(a_1,a_2)$，$B(b_1,b_2)$，$C:(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$，欲在圓 C 上找一點 P 使 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 最小或最大。

設 $P(x,y)$ 為圓 C 上的動點，

$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}=\frac{\left[(x-c_1)-(a_1-c_1)\right]^2+\left[(y-c_2)-(a_2-c_2)\right]^2}{\left[(x-c_1)-(b_1-c_1)\right]^2+\left[(y-c_2)-(b_2-c_2)\right]^2}$$

$$=\frac{-2(a_1-c_1)(x-c_1)-2(a_2-c_2)(y-c_2)+(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2+r^2}{-2(b_1-c_1)(x-c_1)-2(b_2-c_2)(y-c_2)+(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2+r^2}$$

設上式 $=k$

令 $L_k:\left[2(a_1-c_1)(x-c_1)+2(a_2-c_2)(y-c_2)-(a_1-c_1)^2-(a_2-c_2)^2-r^2\right]$

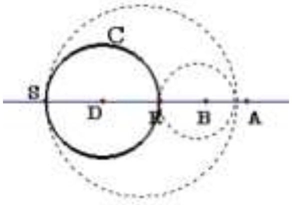
$\qquad +k\left[-2(b_1-c_1)(x-c_1)-2(b_2-c_2)(y-c_2)+(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2+r^2\right]=0$

設兩直線 $L_1:2(a_1-c_1)(x-c_1)+2(a_2-c_2)(y-c_2)-(a_1-c_1)^2-(a_2-c_2)^2-r^2=0$

與 $L_2:-2(b_1-c_1)(x-c_1)-2(b_2-c_2)(y-c_2)+(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2+r^2=0$

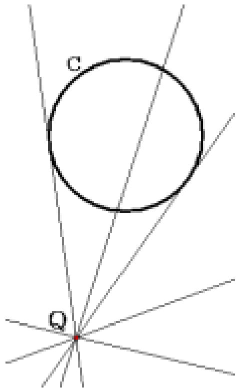
若 $L_1 // L_2$ 即 $(a_1-c_1,a_2-c_2)//(b_1-c_1,b_2-c_2)$，亦即 $\overline{AD}//\overline{BD}$ 其中 $D(c_1,c_2)$ 爲圓 C 的圓心。

設 A，B，D 的關係如下圖：



因阿波羅圓的半徑愈大，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 愈小。所以，當圓 C 上取 R 時，$\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ 最大，取 S 時，$\dfrac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$ 最小。

若 $L_1 \not\parallel L_2$，設 L_1、L_2 相交於 Q，則 L_k 表過 Q 的直線系，因 P 在圓 C 上變動，L_k 必與圓 C 相切或相交，所以，



$$d(D,L_k)\le r$$

$$\Rightarrow \frac{\left|-(a_1-c_1)^2-(a_2-c_2)^2-r^2+k\left[(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2+r^2\right]\right|}{\sqrt{\left[2(a_1-c_1)-2k(b_1-c_1)\right]^2+\left[2(a_2-c_2)-2k(b_2-c_2)\right]^2}}\le r$$

$$\Rightarrow\left\{\left[(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2+r^2\right]^2-4r^2\left[(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2\right]\right\}k^2$$
$$+\left\{2\left[(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2+r^2\right]\left[-(a_1-c_1)^2-(a_2-c_2)^2-r^2\right]\right.$$
$$\left.+8r^2\left[(a_1-c_1)(b_1-c_1)+(a_2-c_2)(b_2-c_2)\right]\right\}k$$
$$+\left[(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2+r^2\right]^2-4r^2\left[(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2\right]\le 0$$

$$\Rightarrow\left[(\overline{BD}^2+r^2)^2-4r^2\overline{BD}^2\right]k^2-2\left[(\overline{BD}^2+r^2)(\overline{AD}^2+r^2)-4r^2(\overline{AD}\cdot\overline{BD})\right]k$$
$$+(\overline{AD}^2+r^2)^2-4r^2\overline{AD}^2\le 0$$

$$\Rightarrow(\overline{BD}^2-r^2)^2k^2-2\left[r^4+r^2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{BD})-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2\right]k$$
$$+(\overline{AD}^2-r^2)^2\le 0$$

$$\Rightarrow(\overline{BD}^2-r^2)^2k^2-2(r^4+r^2\overline{AB}^2-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2)k+(\overline{AD}^2-r^2)^2\le 0$$

$$\left(\because\ \overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{BD}=\left|\overline{AD}-\overline{BD}\right|^2=\left|\overline{AB}\right|^2\right)$$

(i) 當 A、B 均在圓 C 上時，$\overline{AD}=\overline{BD}=r$，又 $\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{BD}=\left|\overline{AD}-\overline{BD}\right|^2=\left|A\right.$

所以上列不等式可化爲 $-2r^2\overline{AB}^2k\le 0$ 即 $k\ge 0$

故 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最小值 0，無最大值。

(ii) 當 A 在圓 C 上而 B 不在圓 C 上時，$\overline{AD}=r$，常數項 $=0$

$$\therefore k\text{ 項係數爲}-2(r^4+r^2\overline{AB}^2-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2)$$
$$=-2\left[r^4+r^2\overline{AB}^2-r^2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-\overline{AB}^2)+r^2\times\overline{BD}^2\right]$$
$$=-2r^2(r^2+\overline{AB}^2-r^2-\overline{BD}^2+\overline{AB}^2+\overline{BD}^2)$$
$$=-4r^2\overline{AB}^2$$

$\therefore k$ 的二次不等式爲：$(\overline{BD}^2-r^2)^2k^2-4r^2\overline{AB}^2k\le 0$

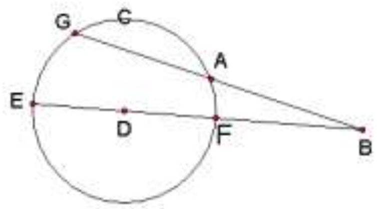
這時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最小值爲 0，最大值爲 $\dfrac{2r\overline{AB}}{\left|\overline{BD}^2-r^2\right|}$

若 B 在圓 C 外，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值爲 $\dfrac{2r\overline{AB}}{\overline{BD}^2-r^2}=\dfrac{2r\overline{AB}}{(\overline{BD}+r)(\overline{BD}-r)}$

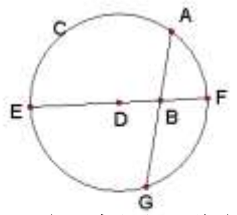
$$=\frac{2r\times\overline{BA}\times\overline{BG}}{\overline{BE}\times\overline{BF}\times\overline{BG}}=\frac{2r}{\overline{BG}}$$

若B在圓C內，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值為$\dfrac{2r\overline{AB}}{(r+\overline{BD})(r-\overline{BD})}=\dfrac{2r\times\overline{AB}\times\overline{BG}}{\overline{BE}\times\overline{BF}\times\overline{BG}}=\dfrac{2r}{\overline{BG}}$

如下圖：



（B 在圓 C 外）



（B 在圓 C 內）

(iii)當B在圓C上而A不在圓C上時，$\overline{BD}=r$，k^2項係數$=0$

k項係數為$-2(r^4+r^2\overline{AB}^2-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2)$

$$=-2r^2(r^2+\overline{AB}^2-r^2-\overline{AD}^2+\overline{AB}^2+\overline{AD}^2)$$

$$=-4r^2\overline{AB}^2$$

$$\therefore\quad -4r^2\overline{AB}^2k+(\overline{AD}^2-r^2)^2\le 0$$

這時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值為$\dfrac{\left|\overline{AD}^2-r^2\right|}{2r\overline{AB}}$，但無最大值。

(iv)當A、B均不在圓C上時，

$$\frac{D}{4}=\left[r^4+r^2\overline{AB}^2-r^2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-\overline{AB}^2)+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2\right]^2-(\overline{BD}^2-r^2)^2(\overline{AD}^2-r^2)^2$$

$$=\left[r^4+r^2(2\overline{AB}^2-\overline{AD}^2-\overline{BD}^2)+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2\right]^2-\left[(r^2-\overline{BD}^2)(r^2-\overline{AD}^2)\right]^2$$

$$=\left\{\left[r^4+r^2(2\overline{AB}^2-\overline{AD}^2-\overline{BD}^2)+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2\right]-\left[(r^2-\overline{BD}^2)(r^2-\overline{AD}^2)\right]\right\}$$

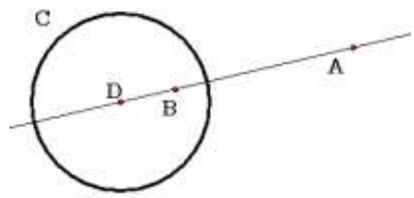
$$\times\left\{\left[r^4+r^2(2\overline{AB}^2-\overline{AD}^2-\overline{BD}^2)+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2\right]+\left[(r^2-\overline{BD}^2)(r^2-\overline{AD}^2)\right]\right\}$$

$$=4r^2\overline{AB}^2\left[r^4-r^2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-\overline{AB}^2)+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2\right]$$

$$=4r^2\overline{AB}^2\left[r^4-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\left|\overline{AD}\right|^2\times\left|\overline{BD}\right|^2\right]$$

$$\ge 4r^2\overline{AB}^2\left[r^4-2r^2\left|\overline{AD}\right|\left|\overline{BD}\right|+\left|\overline{AD}\right|^2\times\left|\overline{BD}\right|^2\right]$$

$$=4r^2\overline{AB}^2\times(r^2-\overline{AD}\times\overline{BD})^2\ge 0$$



其中等號發生在$\overline{AD}$與$\overline{BD}$平行且同向，又A、B兩點中有一點在圓C內，一點在圓C外，如右上圖。此時$L_1 // L_2$，與所設不合。

所以，k的二次方程式有兩實根k_1、k_2(設$k_1>k_2$)

$$k_1=\frac{\left[r^4+r^2\overline{AB}^2-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2+2r\cdot\overline{AB}\sqrt{r^4-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2}\right]}{(\overline{BD}^2-r^2)^2}$$

$$k_2=\frac{\left[r^4+r^2\overline{AB}^2-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2-2r\cdot\overline{AB}\sqrt{r^4-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2}\right]}{(\overline{BD}^2-r^2)^2}$$

$$k_1+k_2=\frac{2(r^4+r^2\overline{AB}^2-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\left|\overline{AD}\right|^2\times\left|\overline{BD}\right|^2)}{(\overline{BD}^2-r^2)^2}>\frac{2\left[r^2\overline{AB}^2+(r^2-\overline{AD}\times\overline{BD})^2\right]}{(\overline{BD}^2-r^2)^2}>0$$

$$k_1\times k_2=\frac{(\overline{AD}^2-r^2)^2}{(\overline{BD}^2-r^2)^2}>0$$

$$\therefore k_1>k_2>0$$

$\therefore\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值為$\sqrt{k_1}$，最小值為$\sqrt{k_2}$。

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{的最大值為}\sqrt{k_1}\begin{cases}\text{當}k_1(\overline{BD}^2+r^2)-(\overline{AD}^2+r^2)>0\text{時，阿波羅圓與圓}C\\ \text{相切於點}(r\times\dfrac{(a_1-c_1)-k_1(b_1-c_1)}{p_1},r\times\dfrac{(a_2-c_2)-k_1(b_2-c_2)}{p_1})\\ \text{當}k_1(\overline{BD}^2+r^2)-(\overline{AD}^2+r^2)<0\text{時，阿波羅圓與圓}C\\ \text{相切於點}(r\times\dfrac{k_1(b_1-c_1)-(a_1-c_1)}{p_1},r\times\dfrac{k_1(b_2-c_2)-(a_2-c_2)}{p_1})\end{cases}$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{的最小值為}\sqrt{k_2}\begin{cases}\text{當}k_2(\overline{BD}^2+r^2)-(\overline{AD}^2+r^2)>0\text{時，阿波羅圓與圓}C\\ \text{相切於點}(r\times\dfrac{(a_1-c_1)-k_2(b_1-c_1)}{p_2},r\times\dfrac{(a_2-c_2)-k_2(b_2-c_2)}{p_2})\\ \text{當}k_2(\overline{BD}^2+r^2)-(\overline{AD}^2+r^2)<0\text{時，阿波羅圓與圓}C\\ \text{相切於點}(r\times\dfrac{k_2(b_1-c_1)-(a_1-c_1)}{p_2},r\times\dfrac{k_2(b_2-c_2)-(a_2-c_2)}{p_2})\end{cases}$$

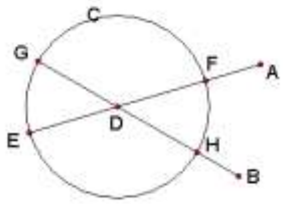
$$\text{其中 } p_1=\sqrt{[(a_1-c_1)-k_1(b_1-c_1)]^2+[(a_2-c_2)-k_1(b_2-c_2)]^2}$$

$$p_2=\sqrt{[(a_1-c_1)-k_2(b_1-c_1)]^2+[(a_2-c_2)-k_2(b_2-c_2)]^2}$$

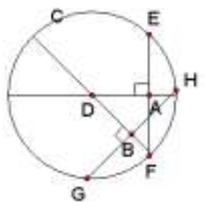
若 A，B 均在圓 C 外時，$\sqrt{k_1k_2}=\dfrac{\overline{AD}^2-r^2}{\overline{BD}^2-r^2}=\dfrac{(\overline{AD}+r)\times(\overline{AD}-r)}{(\overline{BD}+r)\times(\overline{BD}-r)}=\dfrac{\overline{AE}\times\overline{AF}}{\overline{BG}\times\overline{BH}}=\left(\dfrac{A\text{到圓}C\text{的切線長}}{B\text{到圓}C\text{的切線長}}\right)^2$

若 A，B 均在圓 C 內時，$\sqrt{k_1k_2}=\dfrac{r^2-\overline{AD}^2}{r^2-\overline{BD}^2}=\dfrac{\overline{AE}^2}{\overline{BG}^2}=\dfrac{\left(2\overline{AE}\right)^2}{\left(2\overline{BG}\right)^2}=\left(\dfrac{\overline{EF}}{\overline{GH}}\right)^2=\left(\dfrac{\text{過}A\text{的弦長}}{\text{過}B\text{的弦長}}\right)^2$

如下圖：



（A，B 均在圓 C 外）



（A，B 均在圓 C 內）

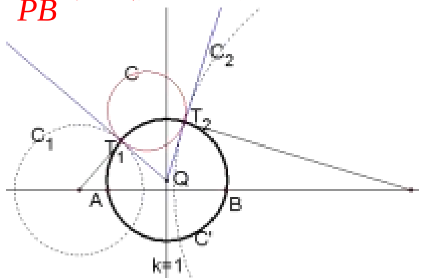
（ $\overline{EF}$ 、$\overline{GH}$ 分別為垂直 $\overline{AD}$ 、$\overline{BD}$ 的弦 ）

（二）性質：

性質 1：

觀察上述 k 的二次方程式，當 $A(a_1,a_2)$，$B(b_1,b_2)$ 互換時，k^2 項係數與常數項互換，而 k 項係數不變。這與動點 P 在平面上的直線變動時相當，

即 $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ 的最大值為 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 最小值的倒數，而 $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ 的最小值為 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 最大值的倒數。



性質 2：

設 $L_1 \nparallel L_2$，若 L_1 與 L_2 相交於 Q，過 Q 做圓 C 的兩切線，設切點為 T_1 、T_2，則 A、B、T_1 、T_2 四點共圓，且 Q 為此圓的圓心。

理由是：因 A 與 B 對任意一個阿波羅圓互為鏡像點，設過 A、B 兩點的圓 C' 與兩阿波羅圓 C_1，C_2 正交，如上圖。若 C' 與 C_1，C_2 的交點依次為 T_1，T_2 ，則過 T_1，T_2 的切線過 C' 圓的圓心，因此這兩切線的交點就是圓 C' 的圓心 Q。

若 $L_1 // L_2$，阿波羅圓與圓 C（圓心為 D）相切的切點為 R 及 S，此四點 A、B、R、S 共線，請參考第11頁上方附圖。

（三）舉三個例子說明：

1. $\boxed{\text{設} A(-2,-3)\text{，}B(2,-3)\text{欲在圓}C: x^2+y^2=1\text{上找一點}P\text{使}\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{最大(或最小)。}}$

解法一：利用直線系

設 $P(x,y)$ 為圓 C 上一點

$$\Rightarrow \left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{(x+2)^2+(y+3)^2}{(x-2)^2+(y+3)^2}=\frac{4x+6y+14}{-4x+6y+14}=\frac{2x+3y+7}{-2x+3y+7}$$

設 $\dfrac{2x+3y+7}{-2x+3y+7}=k$

$\Rightarrow L_k: 2x+3y+7+k(2x-3y-7)=0$

L_k 為過兩直線 $\begin{cases}2x+3y+7=0\\2x-3y-7=0\end{cases}$ 的交點 $Q(0,\frac{-7}{3})$ 的直線系。

欲求得最大(或最小)的 k 值，L_k 必與圓 C 相切。($k=0$ 時 $L_k=L_0: 2x+3y+7=0$ 不與圓 C 相交，而 $k=1$ 時 $L_1: x=0$ 與圓 C 相交於兩點)

令 $d(O,L_k)=1$

$\Rightarrow \dfrac{|7-7k|}{\sqrt{(2+2k)^2+(3-3k)^2}}=1$

$\Rightarrow (7-7k)^2=(2+2k)^2+(3-3k)^2$

$\Rightarrow 9k^2-22k+9=0$

$\therefore\quad k=\dfrac{11\pm2\sqrt{10}}{9}$

故 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值為 $\sqrt{\dfrac{11+2\sqrt{10}}{9}}=\dfrac{1}{3}(\sqrt{10}+1)$，這時阿波羅圓與圓 C 相切於點 $(\frac{2}{7}\sqrt{10},\frac{-3}{7})$

最小值為 $\sqrt{\dfrac{11-2\sqrt{10}}{9}}=\dfrac{1}{3}(\sqrt{10}-1)$，這時阿波羅圓與圓 C 相切於點 $(\frac{-2}{7}\sqrt{10},\frac{-3}{7})$

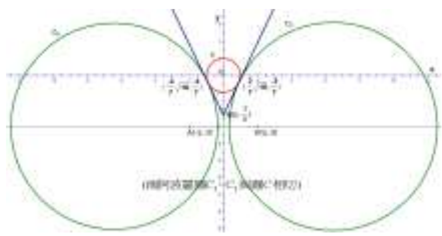
解法二：利用圓的參數式

設 $P(\cos\theta,\sin\theta)$

$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{(\cos\theta+2)^2+(\sin\theta+3)^2}{(\cos\theta-2)^2+(\sin\theta+3)^2}=\frac{4\cos\theta+6\sin\theta+14}{-4\cos\theta+6\sin\theta+14}$$

$$=\frac{2\cos\theta+3\sin\theta+7}{-2\cos\theta+3\sin\theta+7}=k$$

以圖形說明：



$\therefore\ (2+2k)\cos\theta+(3-3k)\sin\theta=7k-7$

$\Rightarrow \sqrt{(2+2k)^2+(3-3k)^2}\cos(\theta-\alpha)=7k-7$

$\Rightarrow \dfrac{|7-7k|}{\sqrt{(2+2k)^2+(3-3k)^2}}=|\cos(\theta-\alpha)|\le1$

以下處理與上述直線系解法相同。

解法三：利用一般情形討論的結果

解法四：請參考第13頁的附圖

因圓心 Q 在 $\overline{AB}$ 的中垂線上，設 $Q(0,t)$

$\overline{QS}=\overline{QB}\Rightarrow t^2-1=4+(t+3)^2$

$\Rightarrow t=\dfrac{-7}{3}$

過 $Q(0,\frac{-7}{3})$ 的切點弦為 $\dfrac{-7}{3}y=1\Rightarrow y=\dfrac{-3}{7}$，得兩切點 $T_1(\frac{2}{7}\sqrt{10},\frac{-3}{7})$、$T_2(\frac{-2}{7}\sqrt{10},\frac{-3}{7})$

再計算 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值 $=\dfrac{\overline{T_1A}}{\overline{T_1B}}=\sqrt{\dfrac{\left(2+\frac{2}{7}\sqrt{10}\right)^2+\left(3-\frac{3}{7}\right)^2}{\left(2-\frac{2}{7}\sqrt{10}\right)^2+\left(3-\frac{3}{7}\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{10+\sqrt{10}}{10-\sqrt{10}}}=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{10}+1\right)$

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最小值 $=\dfrac{\overline{T_2A}}{\overline{T_2B}}=\sqrt{\dfrac{10-\sqrt{10}}{10+\sqrt{10}}}=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{10}-1\right)$

2. $\boxed{\text{設}A(1,0)\text{，}B(3,4)\text{，欲在圓}C:(x-2)^2+y^2=5\text{上找一點}P\text{使}\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{最大(或最小)。}}$

由點到圓心的距離，可判斷A在圓C內，B在圓C外。

設$P(x,y)$爲圓C上一點

$$\Rightarrow\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{(x-1)^2+y^2}{(x-3)^2+(y-4)^2}=\frac{2x+2}{-2x-8y+26}=\frac{x+1}{-x-4y+13}$$

設上式$=k\Rightarrow(x+1)+k(x+4y-13)=0$

令圓心$(2,0)$到上列直線之距離等於半徑$\sqrt{5}$

即 $$\frac{|3-11k|}{\sqrt{(k+1)^2+(4k)^2}}=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow\quad 9k^2-19k+1=0$$

$$\therefore\quad k=\frac{19\pm\sqrt{325}}{18}$$

$\therefore\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值爲$\sqrt{\dfrac{19+\sqrt{325}}{18}}=\sqrt{\dfrac{38+2\sqrt{325}}{36}}=\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$，

此時阿波羅圓與圓C相切於點$\left(2+\dfrac{\sqrt{5}(11+\sqrt{13})}{\sqrt{742+182\sqrt{13}}},\dfrac{4\sqrt{5}(5+\sqrt{13})}{\sqrt{742+182\sqrt{13}}}\right)$

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值爲$\sqrt{\dfrac{19-\sqrt{325}}{18}}=\sqrt{\dfrac{38-2\sqrt{325}}{36}}=\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$，

此時阿波羅圓與圓C相切於點$\left(2+\dfrac{\sqrt{5}(11-\sqrt{13})}{\sqrt{742-182\sqrt{13}}},\dfrac{4\sqrt{5}(5-\sqrt{13})}{\sqrt{742-182\sqrt{13}}}\right)$

3. $\boxed{\text{設}A(1,0)\text{，}B(0,2)\text{，欲在圓}C:x^2+y^2=1\text{上找一點}P\text{使}\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{最大(或最小)。}}$

點$A(1,0)$在圓C上，由上述討論(ii)得$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值爲$\dfrac{2\times\sqrt{5}}{4-1}=\dfrac{2}{3}\sqrt{5}$

這時阿波羅圓與圓C相切於點$\left(\dfrac{-9}{41},\dfrac{40}{41}\right)$。

最後，交代一下前面的漏網之魚：當$L_1//L_2$時，L_k表一平行線系，利用$d(D,L_k)\le r$，也可得到前述k的二次不等式。

所以，這是個十分完美的方程式！

五、動點 P 在球面上

（一）一般情形討論：

設 $A(a_1,a_2,a_3)$，$B(b_1,b_2,b_3)$，$C(c_1,c_2,c_3)$，球面$S:(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2=r^2$，球心$D(c_1,c_2,c_3)$，欲在球面$S$上找一點$P$使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的比值最大或最小。

設$P(x,y,z)$

$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2}{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2}$$

$$=\frac{\left[(x-c_1)-(a_1-c_1)\right]^2+\left[(y-c_2)-(a_2-c_2)\right]^2+\left[(z-c_3)-(a_3-c_3)\right]^2}{\left[(x-c_1)-(b_1-c_1)\right]^2+\left[(y-c_2)-(b_2-c_2)\right]^2+\left[(z-c_3)-(b_3-c_3)\right]^2}$$

$$=\frac{-2(a_1-c_1)(x-c_1)-2(a_2-c_2)(y-c_2)-2(a_3-c_3)(z-c_3)+(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2+}{-2(b_1-c_1)(x-c_1)-2(b_2-c_2)(y-c_2)-2(b_3-c_3)(z-c_3)+(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2+}$$

令上式等於k，即可得過二平面交線的平面系或兩平行平面的平面系，

因P在球面S上變動，所以球心D到此平面系的距離小於或等於半徑r，

仿動點P在圓C上變動時的情形可得：

$$\left(\overline{BD}^2-r^2\right)^2k^2-2\left[r^4+r^2\overline{AB}^2-2r\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2\right]k+\left(\overline{AD}^2-r^2\right)^2\le0$$

依 A、B 是否在球面 S 上有四種情形，其結果都與「動點在圓上變動」的結論相當，舉其中的 A 在球面 S 上，而 B 不在球面 S 上的情形討論如下：

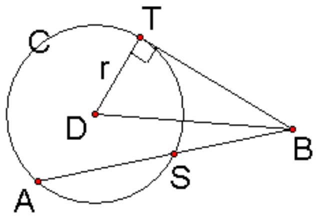
$$\left(\overline{BD}^2 - r^2\right)^2 k^2 - 4r^2\,\overline{AB}^2 k = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le k \le \left(\frac{2r\overline{AB}}{\overline{BD}^2 - r^2}\right)^2$$

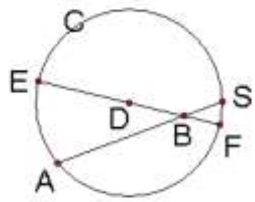
所以，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最小值爲 0，最大值 $= \dfrac{2r\overline{AB}}{\left|\overline{BD}^2 - r^2\right|}$

考慮 A、B、D 所決定的平面上，其與球面 S 截出一個大圓 C，若直線交 AB 於 S，如下圖，則

$$\text{最大值} = \frac{2r\overline{AB}}{\left|\overline{BD}^2 - r^2\right|} = \frac{2r\cdot\overline{AB}}{\overline{AB}\cdot\overline{BS}} = \frac{2r}{\overline{BS}}$$



$\left(\begin{array}{l} B\text{在圓}C\text{外，} \\ \overline{BD}^2 - r^2 = \overline{BT}^2 = \overline{AB}\times\overline{BS} \end{array}\right)$



$\left(\begin{array}{l} B\text{在圓}C\text{內，} \\ r^2 - \overline{BD}^2 = \left(r+\overline{BD}\right)\left(r-\overline{BD}\right) \\ = \overline{BE}\times\overline{BF} = \overline{AB}\times\overline{BS} \end{array}\right)$

現在就上述兩平面相交的情況討論。在 A、B 與球面 S 的球心 D 所決定的平面 E 中，若平面系的交線與平面 E 相交於 Q，自 Q 作大圓（平面 E 與 S 的截圓）的切線，切點爲 T_1、T_2，由第 13 頁知 A、B、T_1、T_2 四點共圓，且 Q 爲此圓的圓心，利用這個性質可求出 T_1、T_2，進而找出最大值及最小值。

（二）舉例說明：

設 $A(2,0,0)$，$B(-1,2,3)$ 欲在球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 上找一點 P，使 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的值最大或最小。

解法一：

設 $P(x,y,z)$ 爲 S 上一點

$$\Rightarrow \left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2 = \frac{(x-2)^2+y^2+z^2}{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2} = \frac{-4x+5}{2x-4y-6z+15}$$

設上式 $=k$，那麼

$E_k: (-4x+5) - k(2x-4y-6z+15) = 0$

E_k 表過兩平面 $\begin{cases} -4x+5=0 \\ 2x-4y-6z+15=0 \end{cases}$ 交線 L 的平面系

其中直線 $L: \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} \\ y = \dfrac{35}{8} - 3t \text{，} t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$

因 $P(x,y,z)$ 爲球面 S 上一點，故欲得 k 的最大值或最小值，必須使 E_k 與 S 相切，即 S 的球心到 E_k 的距離等於半徑 1。

$$\frac{|5-15k|}{\sqrt{(-2k-4)^2+(4k)^2+(6k)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 25(3k-1)^2 = (2k+4)^2 + 16k^2 + 36k^2$$

$$\Rightarrow \quad 169k^2 - 166k + 9 = 0$$

$$\therefore \quad k = \frac{83 \pm 2\sqrt{1342}}{169}$$

故 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值為 $\dfrac{\sqrt{83+2\sqrt{1342}}}{13}=\dfrac{\sqrt{61}+\sqrt{22}}{13}$ 而最小值為 $\dfrac{\sqrt{61}-\sqrt{22}}{13}$。

而阿波羅球面與球面 S 相切於 $\left(\dfrac{-421-2\sqrt{1342}}{200+15\sqrt{1342}},\dfrac{166+4\sqrt{1342}}{200+15\sqrt{1342}},\dfrac{249+6\sqrt{1342}}{200+15\sqrt{1342}}\right)$

及 $\left(\dfrac{421-2\sqrt{1342}}{-200+15\sqrt{1342}},\dfrac{-166+4\sqrt{1342}}{-200+15\sqrt{1342}},\dfrac{-249+6\sqrt{1342}}{-200+15\sqrt{1342}}\right)$

解法二：

$A(2,0,0)$、$B(-1,2,3)$ 及 S 的球心 $D(0,0,0)$ 落在平面 $E:3y-2z=0$ 上，

若 E 與解法一中 L 交於 $Q(\frac{65}{52},\frac{70}{52},\frac{105}{52})$，自 Q 作 S 的切線其切點所成的圖形是一個圓，

此圓落在平面：$65x+70y+105z=52$ 上，解 $\begin{cases}65x+70y+105z=52\\3y=2z\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 即可得：

$T_1\left(\dfrac{-421-2\sqrt{1342}}{200+15\sqrt{1342}},\dfrac{166+4\sqrt{1342}}{200+15\sqrt{1342}},\dfrac{249+6\sqrt{1342}}{200+15\sqrt{1342}}\right)$ 及 $T_2\left(\dfrac{421-2\sqrt{1342}}{-200+15\sqrt{1342}},\dfrac{-166+4\sqrt{1342}}{-200+15\sqrt{1342}},\dfrac{-249+6\sqrt{1342}}{-200+15\sqrt{1342}}\right)$

而 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值為 $\dfrac{\overline{T_1A}}{\overline{T_1B}}=\sqrt{\dfrac{83+2\sqrt{1342}}{169}}=\dfrac{1}{13}(\sqrt{61}+\sqrt{22})$，最小值為 $\dfrac{\overline{T_2A}}{\overline{T_2B}}=\dfrac{1}{13}(\sqrt{61}-\sqrt{22})$

六、動點 P 在拋物線上

（一）舉例說明：

設 $A(0,2)$，$B(0,-2)$，欲在拋物線 $\Gamma: x^2=4y$ 上找一點 P，使 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的值最大或最小。

設 Γ 上一點 $P(2t,t^2)$，

$$\Rightarrow\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{4t^2+(t^2-2)^2}{4t^2+(t^2+2)^2}=\frac{t^2+4}{t^4+8t^2+4}$$

設上式 $=k\Rightarrow(k-1)t^4+8kt^2+4(k-1)=0$

當 $k=1$ 時， $t^2=0$，取 $P(0,0)$ 可使 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$，圖形說明如下：

當 $k\neq1$ 時， $\dfrac{D}{16}=4k^2-(k-1)^2\geq0$

$\Rightarrow(3k-1)(k+1)\geq0$

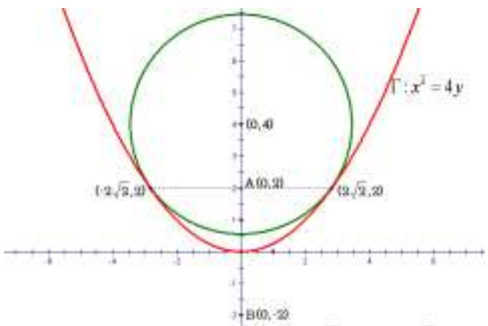
$\Rightarrow k\geq\dfrac{1}{3}\ or\ k\leq-1$

又 $t^2\geq0$，故兩根之和及兩根之積均為正數

$\therefore\ \dfrac{-8k}{k-1}>0\Rightarrow0<k<1$

綜合上列條件，得 $\dfrac{1}{3}\leq k\leq-1$

所以，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值1，而最小值為 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。



阿波羅圓與拋物線相切於(0,0)、$(2\sqrt{2},2)$及$(-2\sqrt{2},2)$

七、動點 P 在橢圓上

（一）舉例說明：

設 $A(0,0)$，$B(4,0)$，欲在橢圓 $E:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上找一點 P，使 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的值最大或最小。

設 $P(x,y)$ 爲橢圓 E 上一點，故滿足 $y^2=4(1-\dfrac{x^2}{9})$，

$$\therefore\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{(x-4)^2+y^2}=\frac{x^2+4(1-\frac{x^2}{9})}{(x-4)^2+4(1-\frac{x^2}{9})}=\frac{\frac{5x^2}{9}+4}{\frac{5x^2}{9}-8x+20}=\frac{5x^2+36}{5x^2-72x+180}$$

設上式 $=k\Rightarrow 5(k-1)x^2-72kx+36(5k-1)=0$

當 $k=1$ 時，在橢圓 E 上取 $P(2,\dfrac{2}{3}\sqrt{5})\ or\ P(2,\dfrac{-2}{3}\sqrt{5})$ 可使 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$

當 $k\neq 1$ 時，因 $x\in\mathbb{R}$，所以

$$\frac{D}{144}=36k^2-5(k-1)(5k-1)\geq 0$$

$$\Rightarrow 11k^2+30k-5\geq 0$$

$$\Rightarrow k\geq\frac{-15+2\sqrt{70}}{11}\ or\ k\leq\frac{-15-2\sqrt{70}}{11}(\text{不合})$$

但 $P(x,y)$ 爲橢圓 E 上的點，所以 $-3\leq x\leq 3$，即

$$-3\leq\frac{36k\pm 6\sqrt{11k^2+30k-5}}{5(k-1)}\leq 3$$

$$\Rightarrow\frac{-5}{2}\leq\frac{6k\pm\sqrt{11k^2+30k-5}}{k-1}\leq\frac{5}{2}$$

當 $k>1$ 時，$\dfrac{-5}{2}(k-1)\leq 6k\pm\sqrt{11k^2+30k-5}\leq\dfrac{5}{2}(k-1)$

$$\Rightarrow\frac{-17k+5}{2}\leq\pm\sqrt{11k^2+30k-5}\leq\frac{-7k-5}{2}$$

因 $k>1$，故取負，得：$\dfrac{17k-5}{2}\geq\sqrt{11k^2+30k-5}\geq\dfrac{7k+5}{2}$

解之，得　$1<k\leq 9$

當 $0<k<1$ 時，$\dfrac{-5}{2}(k-1)\geq 6k\pm\sqrt{11k^2+30k-5}\geq\dfrac{5}{2}(k-1)$

$$\Rightarrow\frac{-17k+5}{2}\geq\pm\sqrt{11k^2+30k-5}\geq\frac{-7k-5}{2}$$

取正號時，$\dfrac{-17k+5}{2}\geq\sqrt{11k^2+30k-5}\ (k<\dfrac{5}{17})$

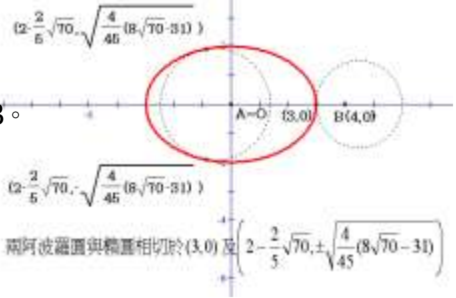
取負號時，$\dfrac{17k-5}{2}\leq\sqrt{11k^2+30k-5}\leq\dfrac{7k+5}{2}\ (k\geq\dfrac{5}{17})$

解之，得　$0<k\leq\dfrac{9}{49}$ 或 $\dfrac{5}{17}\leq k<1$

所以，　k 的最大值爲 9，最小值爲 $\dfrac{-15+2\sqrt{70}}{11}$

因此，　$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最小值爲 $\sqrt{\dfrac{-15+2\sqrt{70}}{11}}$，而最大值爲 3。

圖形如下：



另設 $P(3\cos\theta,2\sin\theta)$，以參數 θ 處理，得

$$\cos\theta=\frac{12k\pm 2\sqrt{11k^2+30k-5}}{5(k-1)}$$

因 $|\cos\theta|\leq 1$，接下來處理與上述處理方式相同。

八、動點 P 在圓（空間中的圓）上

（一）舉例說明：

設 $A(1,0,2)$，$B(0,2,1)$，欲在圓 $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z=0\end{cases}$ 上找一點 P，使 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的值最大或最小。

設 $P(x,y)$ 為圓 C 上一點，那麼

$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{(x-1)^2+y^2+(z-2)^2}{x^2+(y-2)^2+(z-1)^2}=\frac{-2x+6}{-4x-2z+6}=\frac{x-3}{2y+z-3}$$

設上式 $=k\Rightarrow E_k:(x-3)-k(2y+z-3)=0$

E_k 表包含直線 $L:\begin{cases}x-3=0\\ 2y+z-3=0\end{cases}$ 的平面系。

而 L 與平面 $z=0$ 的交點 $\begin{cases}x-3=0\\ 2y+z-3=0\\ z=0\end{cases}$ 即 $Q(3,\frac{3}{2},0)$

設在平面 $z=0$ 上過 Q 且與圓 C 相切的直線為 l，且其切點為 (a,b,c)，那麼

$$\begin{cases}a(a-3)+b(b-\frac{3}{2})+c^2=0\\ a^2+b^2+c^2=1\\ c=0\end{cases}$$

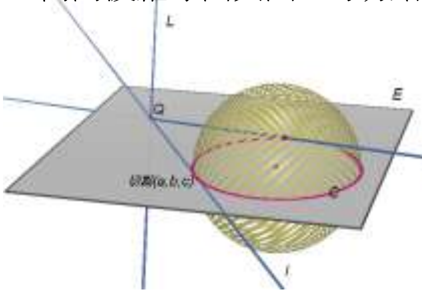
解之，得切點 $(a,b,c)=(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}},0)\ or\ (\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0)$

所以，$k=\dfrac{a-3}{2b-3}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{5}}-3}{\frac{-4}{\sqrt{5}}-3}=\dfrac{3\sqrt{5}-1}{3\sqrt{5}+4}=\dfrac{49-15\sqrt{5}}{29}$

或 $k=\dfrac{\frac{-1}{\sqrt{5}}-3}{\frac{4}{\sqrt{5}}-3}=\dfrac{3\sqrt{5}+1}{3\sqrt{5}-4}=\dfrac{49+15\sqrt{5}}{29}$

因此，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值為 $\sqrt{\dfrac{49+15\sqrt{5}}{29}}$，最小值為 $\sqrt{\dfrac{49-15\sqrt{5}}{29}}$

而阿波羅球面與圓 C 的切點為 $(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}},0)$ 或 $(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0)$



圓 C 與 L 的平面系 E_k 相切時有最大值及最小值。
當 E_k 取 l 與 L 所決定的平面時，會與圓 C 相切，
故 l 與圓 C 相切的切點就是產生最大（最小）值的點。

九、動點 P 在平面上

一般來講，空間中的平面是平面上的直線的延伸，它們有許許多多共同的性質，既然如此，動點 P 在平面上的直線（第二項）是利用直線的參數處理。那麼，空間中的平面也可用平面的參數來處理，但平面有兩個參數，如何利用判別式呢？百思不得其解，最後想到平面上的阿波羅圓與所給直線相切時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 有最大或最小值，在空間中的平面是否也可以考慮阿波羅球面與所給平面相切呢？

（一）一般情形討論：

> 設$A(a_1,a_2,a_3)$，$B(b_1,b_2,b_3)$，平面$E: cx+dy+ez+f=0$，欲在平面E上找一點P使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$之值最大或最小。

設$P(x,y,z)$為平面E上的動點，

$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2}{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2}$$

令上式$=k \Rightarrow S_k:(k-1)x^2+(k-1)y^2+(k-1)z^2-2(b_1k-a_1)x-2(b_2k-a_2)y-2(b_3k-a_3)z$
$=-(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)k+a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2$，$S_k$即為阿波羅球面。

若$\overleftrightarrow{AB}\perp E$，即$\overleftrightarrow{AB}//(c,d,e)$，設直線$AB$交平面$E$於$Q$，

當A介於B，Q之間時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值為$\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$，無最大值。

當B介於A，Q之間時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值為$\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$，無最小值。

當$k=1$時，若$\overleftrightarrow{AB}\not\perp E$，

則$S_1:(b_1-a_1)x+(b_2-a_2)y+(b_3-a_3)z=\dfrac{1}{2}(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2-a_1{}^2-a_2{}^2-a_3{}^2)$

與平面E的交線上任一點P，可使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$，

當$k\neq 1$時，S_k可化為：$\left(x-\dfrac{b_1k-a_1}{k-1}\right)^2+\left(y-\dfrac{b_2k-a_2}{k-1}\right)^2+\left(z-\dfrac{b_3k-a_3}{k-1}\right)^2$

$$=\frac{(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2-2a_1b_1-2a_2b_2-2a_3b_3)k}{(k-1)^2}=\frac{\overline{AB}^2k}{(k-1)^2}$$

因$P(x,y,z)$為平面E上任一點，所以S_k必與E相交(或相切)，即d(球心$,E)\leq$半徑r

亦即：$\dfrac{\left|\dfrac{c(b_1k-a_1)}{k-1}+\dfrac{d(b_2k-a_2)}{k-1}+\dfrac{e(b_3k-a_3)}{k-1}+f\right|}{\sqrt{c^2+d^2+e^2}}\leq\dfrac{\overline{AB}\cdot\sqrt{k}}{|k-1|}$

$\Rightarrow\left[c(b_1k-a_1)+d(b_2k-a_2)+e(b_3k-a_3)+(k-1)f\right]^2\leq(c^2+d^2+e^2)\cdot\overline{AB}^2\cdot k$

$\Rightarrow(cb_1+db_2+eb_3+f)^2k^2-\left[2(cb_1+db_2+eb_3+f)(ca_1+da_2+ea_3+f)+(c^2+d^2+e^2)\overline{AB}^2\right]k$
$+(ca_1+da_2+ea_3+f)^2\leq 0$

(i)當A，B均在平面E上時：$(c^2+d^2+e^2)\overline{AB}^2k\geq 0$

$\therefore\ \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值為$0$，無最大值。

(ii)當A在平面E上且B不在平面E上時：

$(cb_1+db_2+eb_3+f)^2k^2-(c^2+d^2+e^2)\overline{AB}^2k\leq 0$

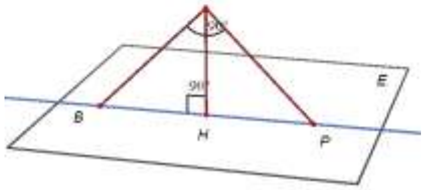
$\therefore\ \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值$=\dfrac{\sqrt{(c^2+d^2+e^2)}\cdot\overline{AB}}{|cb_1+db_2+eb_3+f|}=\dfrac{\overline{AB}}{d(B,E)}$而最小值$=0$

(iii)當B在平面E上且A不在平面E上時：

$(c^2+d^2+e^2)\overline{AB}^2k-(ca_1+da_2+ea_3+f)^2\geq 0$

$\therefore\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值$=\dfrac{|ca_1+da_2+ea_3+f|}{\sqrt{(c^2+d^2+e^2)}\times\overline{AB}}=\dfrac{d(A,E)}{\overline{AB}}$，但無最大值。

參考下圖：



$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\sin B=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{d(A,E)}{\overline{AB}}$$

(iv)當 A，B 均不在平面 E 上時，

$$D=\left[2(cb_1+db_2+eb_3+f)(ca_1+da_2+ea_3+f)+(c^2+d^2+e^2)\overline{AB}^2\right]^2$$

$$-4(cb_1+db_2+eb_3+f)^2(ca_1+da_2+ea_3+f)^2$$

$$=(c^2+d^2+e^2)^2\overline{AB}^4+4(cb_1+db_2+eb_3+f)(ca_1+da_2+ea_3+f)\cdot(c^2+d^2+e^2)\overline{AB}^2$$

$$=(c^2+d^2+e^2)^2\cdot\overline{AB}^2\left[\overline{AB}^2+\frac{4(cb_1+db_2+eb_3+f)(ca_1+da_2+ea_3+f)}{c^2+d^2+e^2}\right]$$

若 A，B 在平面 E 同一側時，$(cb_1+db_2+eb_3+f)(ca_1+da_2+ea_3+f)>0$

所以 $D>0$

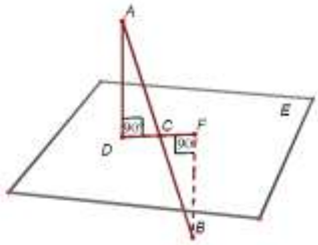
若 A，B 在平面 E 相異側時，$(cb_1+db_2+eb_3+f)(ca_1+da_2+ea_3+f)<0$

此時，設 $(cb_1+db_2+eb_3+f)<0$，$(ca_1+da_2+ea_3+f)>0$(另一情況類似處理)

$$\overline{AB}^2+\frac{4(cb_1+db_2+eb_3+f)(ca_1+da_2+ea_3+f)}{c^2+d^2+e^2}$$

$$=\overline{AB}^2-\frac{4\left[-(cb_1+db_2+eb_3+f)\right](ca_1+da_2+ea_3+f)}{c^2+d^2+e^2}$$

$$=\overline{AB}^2-4\times\frac{|cb_1+db_2+eb_3+f|}{\sqrt{c^2+d^2+e^2}}\times\frac{|ca_1+da_2+ea_3+f|}{\sqrt{c^2+d^2+e^2}}$$



$$=\left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)^2-4\overline{AD}\times\overline{BF}$$ (其中 C 為 $\overline{AB}$ 與平面 E 的交點，D、F 分別為 A、B 在 E 上的投影，如上圖。)

$$\geq\left(\overline{AD}+\overline{BF}\right)^2-4\overline{AD}\times\overline{BF}=\left(\overline{AD}-\overline{BF}\right)^2\geq 0$$

等號成立於 C，D，E 三點重合且 $\overline{AD}=\overline{DB}$，

即 E 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分面，亦即 $k=1$，此與假設不合，故 $D>0$。

設 k 的二次方程式有兩相異實根 α，β(設 $\alpha>\beta$)

又 $$\alpha+\beta=\frac{2(cb_1+db_2+eb_3+f)(ca_1+da_2+ea_3+f)+(c^2+d^2+e^2)\overline{AB}^2}{(cb_1+db_2+eb_3+f)^2}>0$$

(將上述中4改為2)

$$\alpha\beta=\frac{(ca_1+da_2+ea_3+f)^2}{(cb_1+db_2+eb_3+f)^2}>0$$

所以，α，β 為相異兩正根

設 $$\alpha=\frac{1}{2(cb_1+db_2+eb_3+f)^2}\left[2(cb_1+db_2+eb_3+f)(ca_1+da_2+ea_3+f)+(c^2+d^2+e^2)\overline{A}\right.$$

$$\left.+(c^2+d^2+e^2)\overline{AB}\sqrt{\overline{AB}^2+4\frac{(cb_1+db_2+eb_3+f)(ca_1+da_2+ea_3+f)}{c^2+d^2+e^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\left[d(B,E)\right]^2}\times\left[\left(2pq+\overline{AB}^2\right)+\overline{AB}\sqrt{\overline{AB}^2+4pq}\right]$$

其中 $p=\dfrac{cb_1+db_2+eb_3+f}{\sqrt{c^2+d^2+e^2}}$，$q=\dfrac{ca_1+da_2+ea_3+f}{\sqrt{c^2+d^2+e^2}}$

$$\beta=\frac{1}{2\left[d(B,E)\right]^2}\times\left[\left(2pq+\overline{AB}^2\right)-\overline{AB}\sqrt{\overline{AB}^2+4pq}\right]$$

所以，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值為 $\sqrt{\alpha}$，最小值為 $\sqrt{\beta}$。

還有，當 $\overline{AB}\not\perp$ 平面 E 時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 最大值與最小值的乘積 $=\sqrt{\alpha\beta}=\dfrac{d(A,E)}{d(B,E)}$，這與動點在平面上的直線變動時相當。

接下來看阿波羅球面S_k的球心$(\frac{b_1k-a_1}{k-1},\frac{b_2k-a_2}{k-1},\frac{b_3k-a_3}{k-1})$在平面$E:cx+dy+ez+f=0$上的投影，即平面$E$截球面$S_k$的截圓圓心的軌跡是什麼？

我們已經知道點(x_0,y_0,z_0)在平面$E:cx+dy+ez+f=0$的投影點爲(x_0-ct,y_0-dt,z_0-et)，其中$t=\frac{cx_0+dy_0+ez_0+f}{c^2+d^2+e^2}$，

所以S_k的球心$(\frac{b_1k-a_1}{k-1},\frac{b_2k-a_2}{k-1},\frac{b_3k-a_3}{k-1})$在$E$上投影點爲

$(\frac{b_1k-a_1}{k-1}-ct,\frac{b_2k-a_2}{k-1}-dt,\frac{b_3k-a_3}{k-1}-et)$，其中$t=\dfrac{c\cdot\frac{b_1k-a_1}{k-1}+d\cdot\frac{b_2k-a_2}{k-1}+e\cdot\frac{b_3k-a_3}{k-1}+f}{c^2+d^2+e^2}$

設此投影點爲(x,y,z)，那麼

$$x=\frac{b_1k-a_1}{k-1}-ct=\frac{b_1k-a_1}{k-1}-c\times\frac{(cb_1+db_2+eb_3+f)k-(ca_1+da_2+ea_3+f)}{(k-1)(c^2+d^2+e^2)}$$

$$=b_1+\frac{b_1-a_1}{k-1}-\frac{c}{c^2+d^2+e^2}\left[(cb_1+db_2+eb_3+f)+\frac{c(b_1-a_1)+d(b_2-a_2)+e(b_3-a_3)}{k-1}\right]$$

$$\Rightarrow x-b_1+\frac{c(cb_1+db_2+eb_3+f)}{c^2+d^2+e^2}=\frac{1}{k-1}\left\{(b_1-a_1)-\frac{c\left[c(b_1-a_1)+d(b_2-a_2)+e(b_3-a_3)\right]}{c^2+d^2+e^2}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{k-1}=\frac{x-\left[b_1-\dfrac{c(cb_1+db_2+eb_3+f)}{c^2+d^2+e^2}\right]}{\dfrac{(b_1-a_1)(c^2+d^2+z^2)-c\left[c(b_1-a_1)+d(b_2-a_2)+e(b_3-a_3)\right]}{c^2+d^2+e^2}}$$

$$=\frac{x-\dfrac{d(db_1-cb_2)+e(eb_1-cb_3)-cf}{c^2+d^2+e^2}}{\dfrac{d\left[d(b_1-a_1)-c(b_2-a_2)\right]+e\left[e(b_1-a_1)-c(b_3-a_3)\right]}{c^2+d^2+e^2}}$$

同理，$y=\frac{b_2k-a_2}{k-1}-dt$

$$=b_2+\frac{b_2-a_2}{k-1}-\frac{d}{c^2+d^2+e^2}\left[(cb_1+db_2+eb_3+f)+\frac{c(b_1-a_1)+d(b_2-a_2)+e(b_3-a_3)}{k-1}\right]$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{k-1}=\frac{y-\dfrac{c(cb_2-db_1)+e(cb_2-db_3)-df}{c^2+d^2+e^2}}{\dfrac{c\left[c(b_2-a_2)-d(b_1-a_1)\right]+e\left[e(b_2-a_2)-d(b_3-a_3)\right]}{c^2+d^2+e^2}}$$

$$z=\frac{b_3k-a_3}{k-1}-et$$

$$=b_3+\frac{b_3-a_3}{k-1}-\frac{e}{c^2+d^2+e^2}\left[(cb_1+db_2+eb_3+f)+\frac{c(b_1-a_1)+d(b_2-a_2)+e(b_3-a_3)}{k-1}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{k-1}=\frac{z-\dfrac{c(cb_3-eb_1)+d(db_3-eb_2)-ef}{c^2+d^2+e^2}}{\dfrac{c\left[c(b_3-a_3)-e(b_1-a_1)\right]+d\left[d(b_3-a_3)-e(b_2-a_2)\right]}{c^2+d^2+e^2}}$$

因此，平面E截球面S_k所得截圓的圓心軌跡爲一直線L':

$$\frac{x-\dfrac{d(db_1-cb_2)+e(eb_1-cb_3)-cf}{c^2+d^2+e^2}}{d\left[d(b_1-a_1)-c(b_2-a_2)\right]+e\left[e(b_1-a_1)-c(b_3-a_3)\right]}$$

$$=\frac{y-\dfrac{c(cb_2-db_1)+e(cb_2-db_3)-df}{c^2+d^2+e^2}}{c\left[c(b_2-a_2)-d(b_1-a_1)\right]+e\left[e(b_2-a_2)-d(b_3-a_3)\right]}$$

$$=\frac{z-\dfrac{c(cb_3-eb_1)+d(db_3-eb_2)-ef}{c^2+d^2+e^2}}{c\left[c(b_3-a_3)-e(b_1-a_1)\right]+d\left[d(b_3-a_3)-e(b_2-a_2)\right]}$$

即 $L':\begin{cases} x=\dfrac{1}{c^2+d^2+e^2}\left(\begin{vmatrix}0 & -e & d\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c & d & e\end{vmatrix}-cf\right)+\begin{vmatrix}0 & -e & d\\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c & d & e\end{vmatrix}\cdot t \\ y=\dfrac{1}{c^2+d^2+e^2}\left(\begin{vmatrix}e & 0 & c\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c & d & e\end{vmatrix}-df\right)+\begin{vmatrix}e & 0 & -c\\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c & d & e\end{vmatrix}\cdot t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=\dfrac{1}{c^2+d^2+e^2}\left(\begin{vmatrix}-d & c & 0\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c & d & e\end{vmatrix}-ef\right)+\begin{vmatrix}-d & c & 0\\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c & d & e\end{vmatrix}\cdot t \end{cases}$

設直線L爲$\overline{AB}$的垂直平分面：

$(b_1-a_1)x+(b_2-a_2)y+(b_3-a_3)z=\dfrac{1}{2}(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2-a_1{}^2-a_2{}^2-a_3{}^2)$

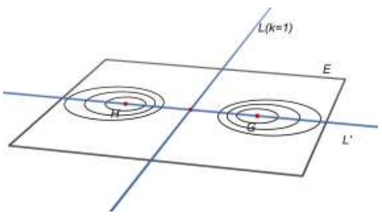
與平面$E:cx+dy+ez+f=0$的交線，則直線L的方向向量爲

$\left(\begin{vmatrix}b_2-a_2 & b_3-a_3\\ d & e\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_3-a_3 & b_1-a_1\\ e & c\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_2-a_2\\ c & d\end{vmatrix}\right)$

又L與L'互相垂直，因它們的方向向量內積爲：

$$\begin{vmatrix}b_2-a_2 & b_3-a_3\\ d & e\end{vmatrix}\times\left(e\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_3-a_3\\ c & e\end{vmatrix}+d\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_2-a_2\\ c & d\end{vmatrix}\right)+$$
$$\begin{vmatrix}b_3-a_3 & b_1-a_1\\ e & c\end{vmatrix}\times\left(e\begin{vmatrix}b_2-a_2 & b_3-a_3\\ d & e\end{vmatrix}-c\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_2-a_2\\ c & d\end{vmatrix}\right)+$$
$$\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_2-a_2\\ c & d\end{vmatrix}\times\left(-d\begin{vmatrix}b_2-a_2 & b_3-a_3\\ d & e\end{vmatrix}-c\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_3-a_3\\ c & e\end{vmatrix}\right)=0$$

故在平面E上，阿波羅球面與E的交圓形成以L爲根軸的共軸圓系，而以兩切點爲極點，如下圖。



$L:\overline{AB}$的垂直平分面與平面E的交線
L':阿波羅球面與平面E的交圓圓心的軌跡
E平面上，形成以L爲根軸的共軸圓系，而G，H是兩個極點，也就是阿波羅球面與平面E相切的二個切點。

（二）舉例說明：

設$A(0,0,0)$，$B(0,0,1)$，欲在平面$E:x-y+z=3$上找一點P使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$之值最大或最小。

解法一：利用阿波羅球面與平面 E 相切，可得最大或最小值。

設$P(x,y,z)$爲平面E上一點，

$\Rightarrow\left(\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+(z-1)^2}$

設上式$=k\Rightarrow(k-1)x^2+(k-1)y^2+(k-1)z^2-2kz+k=0$

當$k=1$時，取$P(t+\frac{5}{2},t,\frac{1}{2})$均可使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$

當$k\neq1$時，上述阿波羅球面爲

$$x^2+y^2+z^2-\frac{2k}{k-1}z+\frac{k}{k-1}=0$$

$$\text{即}\,x^2+y^2+\left(z-\frac{k}{k-1}\right)^2=\frac{k}{(k-1)^2}$$

欲得k的最大或最小值，阿波羅球面必與平面E相切，即其球心$(0,0,\dfrac{k}{k-1})$到平面E之距等於其半徑$(=\dfrac{\sqrt{k}}{|k-1|})$

亦即，
$$\frac{\left|\frac{k}{k-1}-3\right|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{k}}{|k-1|}$$
$\Rightarrow \quad |2k-3|=\sqrt{3}\cdot\sqrt{k}$

$\Rightarrow \quad 4k^2-12k+9=3k$

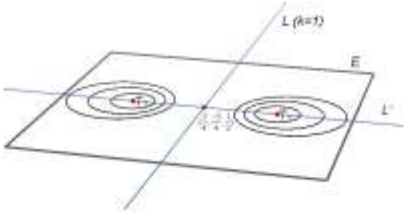
$\Rightarrow \quad 4k^2-15k+9=0$

$\therefore \quad k=3 \ or \ k=\frac{3}{4}$

故 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值爲 $\sqrt{3}$，最小值爲 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，

而阿波羅球面與平面 E 相切於 $T_1(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},2)$ 及 $T_2(2,-2,1)$。

圖形如右：



L : $\overline{AB}$ 的垂直平分面與平面 E 的交線: $\begin{cases} x=t+\frac{5}{2} \\ y=t \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

L' : 阿波羅球面與平面 E 的交圓圓心的軌跡: $\begin{cases} x=2+t \\ y=-2+t \\ z=-1-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

在 E 平面上，形成以 L 爲根軸的共軸圓系，而 $T_1(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},2)$，$T_2(2,-2,1)$ 爲兩極點，也就是阿波羅球面與平面 E 相切的二個切點。

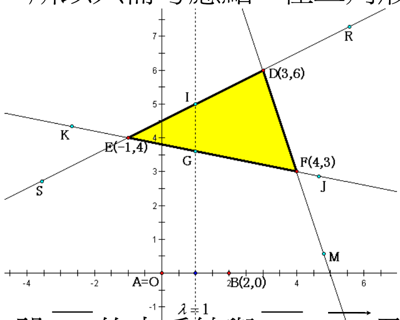
解法二：利用上述一般情形討論的結果。

十、動點 P 在三角形區域內變動：

（一）舉例說明：

> 設 $A(0,0)$，$B(2,0)$，動點 P 爲△DEF 區域內的點，其中 $D(3,6)$，$E(-1,4)$，$F(4,3)$，求 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大或最小值。

雖然動點 P 在三角形區域內變動，但 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大或最小值發生在三角形的三邊上，所以只需考慮點 P 在三角形三邊上變動即可。



$\overleftrightarrow{EF}:\begin{cases} x=-1+5t \\ y=4-t \end{cases}$，$0\le t\le 1$

$\overleftrightarrow{FD}:\begin{cases} x=4-t \\ y=3+3t \end{cases}$，$0\le t\le 1$

$\overleftrightarrow{DE}:\begin{cases} x=3-4t \\ y=6-2t \end{cases}$，$0\le t\le 1$

設 $\overline{AB}$ 的中垂線與 $\overline{EF}$，$\overline{FD}$ 及 $\overline{DE}$ 相交於 G，H，I，而 $G=(1,\frac{18}{5})$，$H=(1,12)$，$I=(1,5)$

以 G 爲圓心，$\overline{GA}$ 爲半徑作圓交直線 EF 於 J 及 K，

$$\overline{OJ}=\overline{OG}+\overline{GJ}=(1,\frac{18}{5})+\frac{\sqrt{349}}{5}\cdot\frac{(5,-1)}{\sqrt{26}}=(1+\frac{\sqrt{349}}{\sqrt{26}},\frac{18}{5}-\frac{\sqrt{349}}{5\sqrt{26}})$$

若令 $1+\frac{\sqrt{349}}{\sqrt{26}}=-1+5t\Rightarrow t=\frac{2+\frac{\sqrt{349}}{\sqrt{26}}}{5}\approx 1.13>1$

$$\overline{OK}=\overline{OG}+\overline{GK}=(1,\frac{18}{5})-\frac{\sqrt{349}}{5}\cdot\frac{(5,-1)}{\sqrt{26}}=(1-\frac{\sqrt{349}}{\sqrt{26}},\frac{18}{5}+\frac{\sqrt{349}}{5\sqrt{26}})$$

若令 $1-\frac{\sqrt{349}}{\sqrt{26}}=-1+5t\Rightarrow t=\frac{2-\frac{\sqrt{349}}{\sqrt{26}}}{5}\approx -0.33<0$

所以，當P在$\overline{EF}$上時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值$=\dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值$=\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=\dfrac{\sqrt{17}}{5}$

若以H爲圓心，$\overline{HA}$爲半徑作圓交$\overrightarrow{DF}$於M，

$$\overline{OM}=\overline{OH}+\overline{HM}=(1,12)+\sqrt{145}\cdot\frac{(1,-3)}{\sqrt{10}}=(1+\sqrt{\frac{29}{2}},12-3\sqrt{\frac{29}{2}})$$

令$1+\sqrt{\dfrac{29}{2}}=4-t\Rightarrow t=3-\sqrt{\dfrac{29}{2}}\approx-0.81<0$

所以，當P在$\overline{FD}$上時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值爲$\dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值爲$\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{37}}$

若以I爲圓心，$\overline{IA}$爲半徑作圓交$\overleftrightarrow{DE}$於R，S

$$\overline{OR}=\overline{OI}+\overline{IR}=(1,5)+\sqrt{26}\cdot\frac{(2,1)}{\sqrt{5}}=(1+2\sqrt{\frac{26}{5}},5+\sqrt{\frac{26}{5}})$$

令$1+2\sqrt{\dfrac{26}{5}}=3-4t\Rightarrow t=\dfrac{2-2\sqrt{\dfrac{26}{5}}}{4}=\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{26}{5}}}{2}\approx-0.64<0$

$$\overline{OS}=\overline{OI}+\overline{IS}=(1,5)-\sqrt{26}\cdot\frac{(2,1)}{\sqrt{5}}=(1-2\sqrt{\frac{26}{5}},5-\sqrt{\frac{26}{5}})$$

令$1-2\sqrt{\dfrac{26}{5}}=3-4t\Rightarrow t=\dfrac{2+2\sqrt{\dfrac{26}{5}}}{4}=\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{26}{5}}}{2}\approx1.64>1$

所以，當P在$\overline{DE}$上時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值爲$\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{37}}$

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值爲$\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=\dfrac{\sqrt{17}}{5}$

故P在$\triangle DEF$邊上變動時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值爲$\dfrac{5}{\sqrt{13}}=\dfrac{5}{13}\sqrt{13}$

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值爲$\dfrac{\sqrt{17}}{5}$

十一、　動點 P 在圓的部分圖形上變動：

（一）舉例說明：

> 設$A(-2,-3)$，$B(2,3)$，半圓$C':x^2+y^2=1$但$0\le y\le1$，若P爲半圓C'上一點，求$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大或最小值。

設$P(x,y)$爲半圓C'上一點，則

$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{(x+2)^2+(y+3)^2}{(x-2)^2+(y+3)^2}=\frac{2x+3y+7}{-2x+3y+7}$$

令上式$=k\Rightarrow l_k:(2x+3y+7)+k(2x-3y-7)=0$

l_k表過$L_1:2x+3y+7=0$與$L_2:2x-3y-7=0$交點$Q(0,\dfrac{7}{3})$的直線系。

因$P(x,y)$在半圓C'上，故l_k的斜率$\dfrac{2k+2}{3k-3}$應大於或等於$\overleftrightarrow{QD}$的斜率

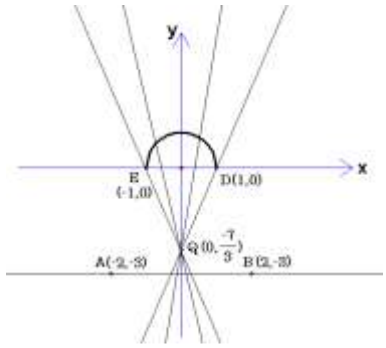
或小於或等於$\overleftrightarrow{QE}$的斜率，其中$D(1,0)$，$E(0,1)$

即解：$\dfrac{2k+2}{3k-3}\ge\dfrac{7}{3}$ 或 $\dfrac{2k+2}{3k-3}\le\dfrac{-7}{3}$

得 $1<k\le\dfrac{9}{5}$ 或 $\dfrac{5}{9}\le k<1$

但取$P(0,1)$時，$k=1$

所以，$\dfrac{5}{9}\le k\le\dfrac{9}{5}$



故P在半圓C'上變動時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值爲$\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$，

此時阿波羅圓：$(x-7)^2+(y+3)^2=45$，過$D(1,0)$

而$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值爲$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，此時阿波羅圓：$(x+7)^2+(y+3)^2=45$，過$E(-1,0)$

十二、 動點 P 在球面的部分圖形上變動：

> 設$A(1,1,0)$，$B(0,0,-2)$，半球面$S':x^2+y^2+z^2=4$但$0\le z\le 2$，若P爲半球面S'上一點，求$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大或最小值。

設$P(x,y,z)$爲半球面S'上一點，則

$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}{x^2+y^2+(z+2)^2}=\frac{-2x-2y+6}{4z+8}=\frac{x+y-3}{-2(z+2)}$$

令上式$=k\Rightarrow E_k:(x+y-3)+2k(z+2)=0$

E_k表過$E_1:x+y-3=0$與$E_2:z+2=0$兩平面交線$l:\begin{cases}x=-t+3\\y=t\\z=-2\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ 的平面系。

因$P(x,y,z)$在半球面S'上，故E_k的y截距$3-4k$必須不大於2而且不小於-2，

即$-2\le 3-4k\le 2$

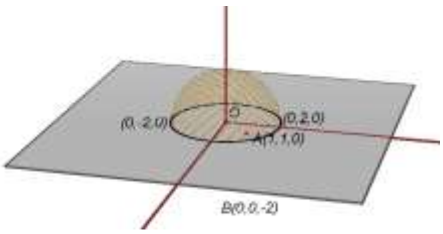
$\Rightarrow -2\le 4k-3\le 2$

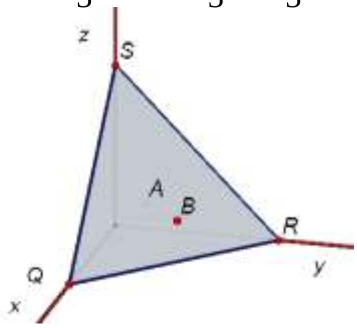
$\Rightarrow \dfrac{1}{4}\le k\le\dfrac{5}{4}$

所以，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值爲$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。此時，阿波羅球面爲$(x+4)^2+(y+4)^2+(z+10)^2=120$ 過$(0,-2,0)$。

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值爲$\dfrac{1}{2}$。此時，阿波羅球面爲$(x-\frac{4}{3})^2+(y-\frac{4}{3})^2+(z-\frac{2}{3})^2=\frac{8}{3}$ 過$(0,2,0)$。

圖形如下：





(OQRS 四面體)

十三、 動點 P 在四面體的表面上變動：

> 設$A(1,1,1)$，$B(2,2,1)$，欲在四面體$OQRS$表面上找一點P，使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$最大或最小。
> 其中O爲原點，$Q(4,0,0)$，$R(0,4,0)$，$S(0,0,4)$

設$P(x,y,z)$爲四面體$OQRS$表面上一點，那麼

$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}{(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$$

令上式$=k\Rightarrow S_k:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=k\left[(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2\right]$

即$(k-1)x^2+(k-1)y^2+(k-1)z^2-2(2k-1)x-2(2k-1)y-2(k-1)z+(9k-3)=0$

若$k=1$，S_k表$\overline{AB}$的垂直平分面：$x+y=3$

若$k\ne1$，S_k爲$\left(x-\dfrac{2k-1}{k-1}\right)^2+\left(y-\dfrac{2k-1}{k-1}\right)^2+\left(z-1\right)^2=\dfrac{2k}{(k-1)^2}$

(i) P點為△OQR區域內一點

設$z=0$為S_k的一個切平面，則$d\left((\frac{2k-1}{k-1},\frac{2k-1}{k-1},1), z=0\text{平面}\right)=$半徑$r$

即 $1=\frac{\sqrt{2k}}{|k-1|}\Rightarrow k^2-4k+1=0\Rightarrow k=2\pm\sqrt{3}$

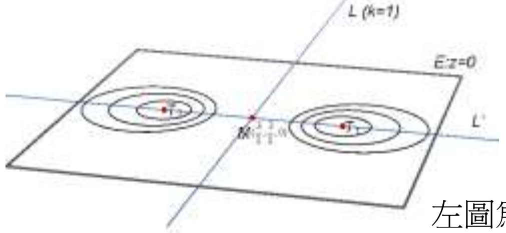
當$k=2+\sqrt{3}$時，S_k的球心$(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\frac{3+\sqrt{3}}{2},1)$，半徑$=1$

$\therefore$切點$T_1(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\frac{3+\sqrt{3}}{2},0)$

當$k=2-\sqrt{3}$時，S_k的球心$(\frac{3-\sqrt{3}}{2},\frac{3-\sqrt{3}}{2},1)$，半徑$=1$

$\therefore$切點$T_2(\frac{3-\sqrt{3}}{2},\frac{3-\sqrt{3}}{2},0)$

阿波羅球面與平面$z=0$的截痕如下圖：

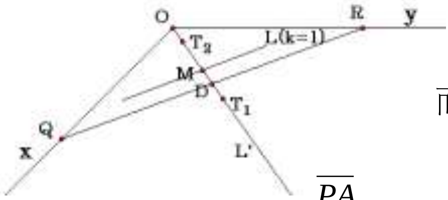


$L(\overline{AB}$的垂直平分面與平面E的交線$)$:$\begin{cases}x=t\\y=t\\z=0\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

L':阿波羅球面與平面E的交圓圓心的軌跡$\begin{cases}x=t\\y=t\\z=0\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

左圖為以L為根軸，T_1，T_2為極點的共軸圓系。

當$P(x,y,z)$在△OQR區域內變動時，L'與△OQR區域相交的情況如下圖：



其中$M(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0)$為$\overline{T_1T_2}$的中點，也就是$L$與$L'$的交點，而$D(2,2,0)$為$L'$與$\overline{QR}$的交點。

因此，$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值$=\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\sqrt{3}$

$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值$=\frac{\overline{T_2A}}{\overline{T_2B}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

(ii) P點為△ORS區域內一點

設$x=0$為S_k的一個切平面，則$d\left((\frac{2k-1}{k-1},\frac{2k-1}{k-1},1), x=0\text{平面}\right)=$半徑$r$

即 $\left|\frac{2k-1}{k-1}\right|=\frac{\sqrt{2k}}{|k-1|}\Rightarrow 4k^2-6k+1=0\Rightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}$

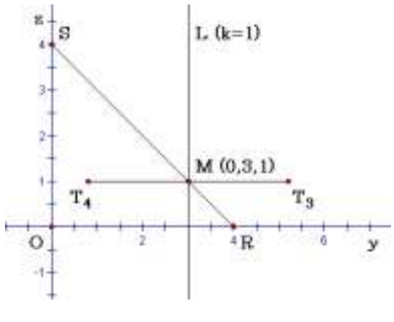
當$k=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$時，S_k的球心$(3+\sqrt{5},3+\sqrt{5},1)$，半徑$=3+\sqrt{5}$

$\therefore$切點$T_3(0,3+\sqrt{5},1)$

當$k=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$時，S_k的球心$(3-\sqrt{5},3-\sqrt{5},1)$，半徑$=3-\sqrt{5}$

$\therefore$切點$T_4(0,3-\sqrt{5},1)$

若$P(x,y,z)$在△ORS區域內變動時，$\overleftrightarrow{T_3T_4}$與此區域相交的情況如下圖：



其中L為$\overline{AB}$的垂直平分面與平面$x=0$的交線，而$M(0,3,1)$為L與$\overline{T_3T_4}$的交點，正好落在$\overline{SR}$上。

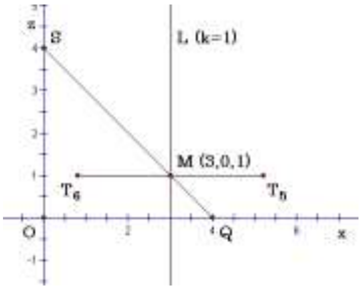
因此，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值$=\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=1$

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值$=\dfrac{\overline{T_4A}}{\overline{T_4B}}=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$

(iii) P點爲□OSQ區域內一點

設$y=0$爲S_k的一個切平面，情況與(ii)類似，切點$T_5(0,3+\sqrt{5},1)$，$T_6(0,3-\sqrt{5},1)$

若$P(x,y,z)$在□OSQ區域內變動時，$\overleftrightarrow{T_5T_6}$與此區域相交的情況如下圖：



所以，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值$=\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=1$

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值$=\dfrac{\overline{T_6A}}{\overline{T_6B}}=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}}=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$

(iv) P點爲□QRS區域內一點

設$E':x+y+z=4$爲S_k的一個切平面，則$d\left((\dfrac{2k-1}{k-1},\dfrac{2k-1}{k-1},1),E'\text{平面}\right)=$半徑$r$

即 $\dfrac{\left|\dfrac{2k-1}{k-1}+\dfrac{2k-1}{k-1}+1-4\right|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2k}}{|k-1|}$

$\Rightarrow\quad \dfrac{|k+1|}{\sqrt{3}|k-1|}=\dfrac{\sqrt{2k}}{|k-1|}$

$\Rightarrow\quad (k+1)^2=6k$

$\Rightarrow\quad k^2-4k+1=0$

$\therefore\quad k=2\pm\sqrt{3}$

當$k=2+\sqrt{3}$時，S_k的球心$(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},1)$，半徑$=1$

切點$T_7(\dfrac{9+\sqrt{3}}{6},\dfrac{9+\sqrt{3}}{6},\dfrac{3-\sqrt{3}}{3})$ $\left(\overline{OT_7}=(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},1)+1\cdot\dfrac{(-1,-1,-1)}{\sqrt{3}}\right)$

當$k=2-\sqrt{3}$時，S_k的球心$(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},1)$，半徑$=1$

切點$T_8(\dfrac{9-\sqrt{3}}{6},\dfrac{9-\sqrt{3}}{6},\dfrac{3+\sqrt{3}}{3})$ $\left(\overline{OT_8}=(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},1)+1\cdot\dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right)$

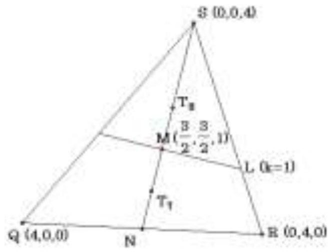
又$\overline{ST_7}=(\dfrac{9+\sqrt{3}}{6},\dfrac{9+\sqrt{3}}{6},\dfrac{-9-\sqrt{3}}{3})$，$\overline{SQ}=(4,0,-4)$，$\overline{SR}=(0,4,-4)$

欲將$\overline{ST_7}$寫成$\overline{SQ}$與$\overline{SR}$的線性組合，即

$$\begin{aligned}\overline{ST_7}&=\frac{9+\sqrt{3}}{24}\overline{SQ}+\frac{9+\sqrt{3}}{24}\overline{SR}\\&=\frac{9+\sqrt{3}}{12}\left(\frac{\overline{SQ}+\overline{SR}}{2}\right)\\&=\frac{9+\sqrt{3}}{12}\overline{SN}\text{，其中}N\text{爲}\overline{QR}\text{的中點}\end{aligned}$$

同樣的方法，也可得到$\overline{ST_8}=\dfrac{9-\sqrt{3}}{12}\overline{SN}$

若$P(x,y,z)$在△QRS區域內變動時，$\overleftrightarrow{T_7T_8}$與此區域相交的情況如下圖：



所以，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值$=\dfrac{\overline{T_7A}}{\overline{T_7B}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最小值$=\dfrac{\overline{T_8A}}{\overline{T_8B}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

綜合(i)，(ii)，(iii)，(iv) $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值爲$\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$，而最小值爲$\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$

伍、 結論

一、給予兩個定點 A 與 B，當動點 P 在平面上的直線、圓、拋物線或橢圓與空間中的平面、球面或圓上變動時，欲使$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的值最大或最小，其共同的特性是阿波羅圓（或球面）與所給圖形相切，該切點即是產生最大（或最小）值的點。但如果所給圖形是直線、圓、拋物線、橢圓、平面或球面的一部分時，產生$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大或最小值的點就未必是個切點。

二、在坐標平面上，兩定點$A(a_1,a_2)$及$B(b_1,b_2)$，P 點在直線$L:cx+dy+e=0$上變動，使用直線的參數及判別式法與使用阿波羅圓與直線 L 相切，這兩種方法殊途卻同歸。

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值$\dfrac{\sqrt{(2pq+\overline{AB}^2)+\overline{AB}\sqrt{\overline{AB}^2+4pq}}}{\sqrt{2}d(B,L)}$，最小值$\dfrac{\sqrt{(2pq+\overline{AB}^2)-\overline{AB}\sqrt{\overline{AB}^2+4pq}}}{\sqrt{2}d(B,L)}$

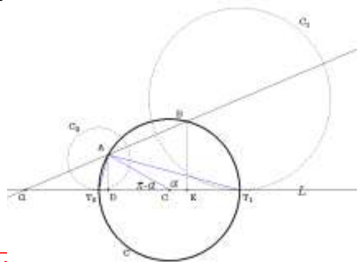
其中$p=\dfrac{cb_1+db_2+e}{\sqrt{c^2+d^2}}$，$q=\dfrac{ca_1+da_2+e}{\sqrt{c^2+d^2}}$，

而且，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值與最小值乘積爲$\dfrac{d(A,L)}{d(B,L)}$。

另一方面，利用任一阿波羅圓都是A，B兩點的鏡射圈，當阿波羅圓與直線L分別相切於T_1，T_2時，產生$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大及最小值，如下圖。

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值爲$\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$，最小值爲$\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$，

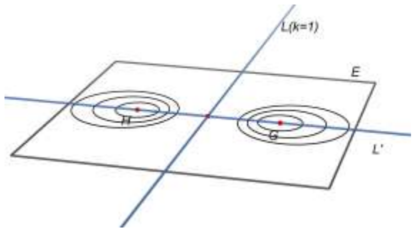
其中$\alpha=\angle ACT_1$，$\beta=\angle BCT_2$。



而最大值與最小值的乘積$=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BE}}=\dfrac{d(A,L)}{d(B,L)}=\dfrac{\overline{GA}}{\overline{GB}}$，其中$G$爲直線$AB$與$L$的交點。

當$\overrightarrow{AB}\perp L$時，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的最大值（或最小值）$=\dfrac{d(A,L)}{d(B,L)}$，而其最小值（或最大值）不存在。

三、在空間坐標系中，動點在平面上變動時，阿波羅球面與平面 E 的交圓，形成一個以 L 爲根軸的共軸圓系，而以兩切點爲極點，如下圖。



$\left(\begin{array}{l} L:\overline{AB}\text{的垂直平分面與平面}E\text{的交線} \\ L':\text{阿波羅球面與平面}E\text{的交圓圓心的軌跡} \\ E\text{平面上，形成以}L\text{爲根軸的共軸圓系，而}G\text{，}H\text{是兩個極點，} \\ \text{也就是阿波羅球面與平面}E\text{相切的二個切點。} \end{array}\right)$

而 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值或最小值與結論二相當。

四、在坐標平面上，兩定點 $A(a_1,a_2)$ 及 $B(b_1,b_2)$，當動點 P 在圓 $C:(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$ 上變動時，我們利用平面上過一定點或平行的直線系與圓 C 相切時有最大（或最小）值的性質推導出：

當 A，B 均不在圓 C 上時，

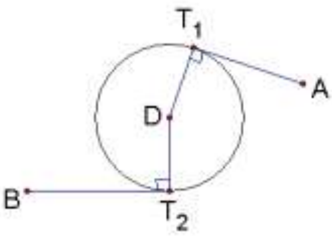
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{的最大值}\ \frac{\sqrt{r^4+r^2\overline{AB}^2-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2+2r\cdot\overline{AB}\times\sqrt{r^4-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2}}}{\left|\overline{BD}^2-r^2\right|}$$

$$\text{最小值}\ \frac{\sqrt{r^4+r^2\overline{AB}^2-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2-2r\cdot\overline{AB}\times\sqrt{r^4-2r^2\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\times\overline{BD}^2}}}{\left|\overline{BD}^2-r^2\right|}$$

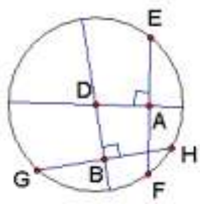
而最大值與最小值的乘積為 $\left|\dfrac{\overline{AD}^2-r^2}{\overline{BD}^2-r^2}\right|$。

當 A，B 均在圓 C 外時，最大值與最小值乘積 $=\left(\dfrac{A\text{到圓}C\text{的切線長}}{B\text{到圓}C\text{的切線長}}\right)^2=\left(\dfrac{\overline{AT_1}}{\overline{AT_2}}\right)^2$，如下圖(一)。

當 A，B 均在圓 C 內時，最大值與最小值乘積 $=\left(\dfrac{A\text{到圓}C\text{的弦長}}{B\text{到圓}C\text{的弦長}}\right)^2=\left(\dfrac{\overline{EF}}{\overline{GH}}\right)^2$，如下圖(二)。



圖（一）



圖（二）

五、在坐標平面上，當 P 在直線或圓上變動時，觀察 k 的二次方程式：

當 $A(a_1,a_2)$ 與 $B(b_1,b_2)$ 互換時，k^2 項係數與常數項互換，而 k 項係數不變，

所以，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值為 $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ 的最小值的倒數，而 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最小值為 $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ 的最大值的倒數。

在空間坐標系中，當 P 在平面或球面上變動時，也有相同的結論。

陸、　展望與心得

我們討論動點 P 在部分封閉圖形如圓、球面的部分圖形，或封閉區域（或形體）如三角形區域、四面體（表面或內部）內變動，是希望對類似直線（線段）、圓（圓的部分圖形）及延伸後的多邊形區域、多面體及部分封閉曲面提供部分的處理方法；至於其解法，還是要用到它的整體圖形，如平面上的直線、圓及空間中的平面、球面或曲面來處理。

柒、　參考資料及其他

1. 高中數學實驗教材第四冊。國立編譯館，第三章第三節及第四節。
2. 高級中學數學第四冊。台南：南一書局，第一章第二節及第三節。

【評語】040401

阿波羅圓(Apollonian circles)是重要的幾何物件，出現於複變數函數論、球面幾何、平面幾何中。阿波羅圓是正交圓系的重要的例子。阿波羅圓也是共軸圓系的重要的例子。要解釋共軸圓系一詞「共軸」二字，球面幾何環境要比平面幾何更爲恰當。科展重視實驗性。當阿波羅圓被轉變成一堆代數公式時，反而遞減了其實驗性。反之，若將阿波羅圓放在 Cabri 3D 的球面幾何環境來呈現，動態幾何的實驗性立刻使它變得生動活潑。