

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

040111

橢球內部液體對其穩定度之影響

學校名稱：國立臺中第一高級中學

作者： 高二 陳厚儒	指導老師： 吳溪泉
---------------	--------------

關鍵詞：橢球運動、液體旋體、穩定度

摘要

本實驗以空心的橢球，在其內部填充液體物質，對照內部為固體、空氣的情形，探討不同的容量、不同的轉速、不同的接觸面，與橢球長軸等變因對穩定性（註）之影響，結果發現穩定度隨模型內填充的液體體積的增加而呈現下降情形，並且得到其他變因的影響程度。（註：穩定度(性)：橢球模型旋轉自一定轉速並釋放，因摩擦而其長軸由垂直水平面逐漸變為平行水平面的時間，以秒數表示）

壹、研究動機

我們在玩的橄欖球時發現當其旋轉時，會呈現與陀螺類似的進動情形，而我們正在學習學校課程中的轉動與流體，所以我們想要進一步探討：如果有一個空心的橢球，在裡面填充如水、甘油等黏度不同的物質，其橢球內部流體對其穩定性的影響並比較內部填充固體、氣體之差異及其他變因的影響。

貳、研究目的

1. 探討橢球內部液體之體積與橢球體積之比值對其穩定性的影響。
2. 探討橢球內部液體黏滯度對其穩定性的影響。
3. 探討不同轉速對其穩定性的影響。
4. 探討不同接觸面對其穩定性的影響。
5. 探討長軸長度對其穩定性的影響。
6. 比較橢球內部裝入流體與固體對穩定性的影響。
7. 探討橢球內部裝入流體與固體對其接觸面軌跡之影響。

參、研究設備及器材

		
1. 組織均質機(控制轉速用)	2. 充氣馬達	3. 攝影機
		
4. 瓶蓋	5. 篩網	6. 塑膠托盤
		
7. 海綿	8. 蛋殼模型	9. 甘油
		
10. 注射筒	11. 熱熔膠	12. 泡棉膠

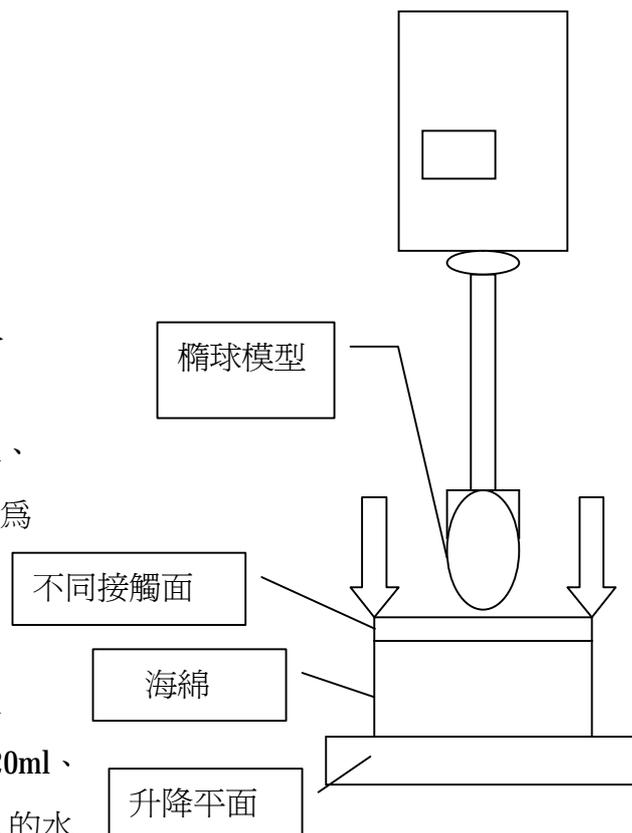
13. 水	14. 複寫紙與空白紙	15. 量角器
16. 電子天平	17. 游標尺	18. 鋁箔紙與蠟燭

肆、研究過程及方法

		
操作模型	控制轉速	填充好的橢球模型

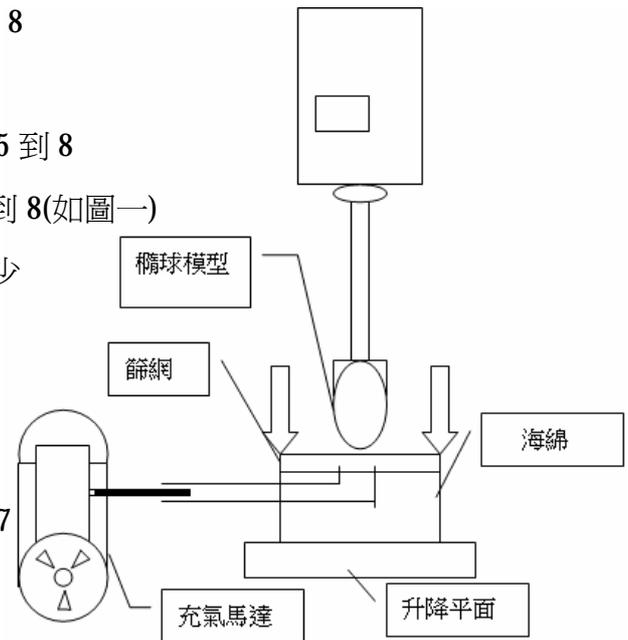
一、測量橢球內部裝入水的穩定性

1. 將蛋殼模型拆開，並將兩個相似的半橢球黏接在一起
2. 量測模型之長短軸長度與重量
3. 將長軸較長的模型(稱為 A 模型)填入 0ml、5.56ml、11.12ml、16.68ml、22.30ml、28.80ml、33.36ml、38.92ml、44.60ml 的水(密度為 1，未填充部份為 1 atm 的空氣，與模型容量之比值依序為 0、1/8...至 8/8)
4. 將長軸較短的模型(稱為 B 模型)填入 0ml、4.55ml、9.10ml、13.65ml、18.20ml、22.75ml、27.30ml、31.85ml、36.40ml 的水(未填充部份為 1 atm 的空氣，與模型容量之比值依序為 0、1/8...至 8/8)
5. 將放入 0ml 水的 A 模型放於黏好瓶蓋的組織均質機旋轉軸下，使其接觸篩網(如圖一所示)
6. 打開組織均質機並使其內部的水隨模型旋轉至 800rpm(使其內部液體分布穩定而不隨時間改變)



圖一 穩定度測量設計圖

7. 壓下篩網同時開始攝影，測量並記錄橢球由垂直水平面轉換至平行水平面的時間
8. 將步驟 5 裝入的 0ml 水的 A 模型改為步驟 3、4 的模型填充不同體積的水並重複步驟 6 到 7
9. 將步驟 6 的轉速改為 1000rpm 並重複步驟 5 到 8
10. 將步驟 6 的轉速改為 0rpm 並重複步驟 5 到 8
11. 將步驟 5 的接觸面改為塑膠托盤並重複步驟 5 到 8
12. 將步驟 5 的接觸面改為鋁箔紙並重複步驟 5 到 8(如圖一)
13. 將充氣馬達管線接至篩網底部並打入氣體減少摩擦阻力(如圖二)
14. 重複步驟 5 到 7
15. 將步驟 5 裝入的 0ml 水的 A 模型改為步驟 3 的模型填充不同體積的水並重複步驟 6 到 7



圖二 穩定度測量設計圖

二、測量橢球內部裝入甘油的穩定性

1. 將蛋殼模型拆開，並將兩個相似的半橢球黏接在一起
2. 量測模型之長短軸長度與重量
3. 將長軸較長的模型(稱為 A 模型)填入 0ml、5.56ml、11.12ml、16.68ml、22.30ml、28.80ml、33.36ml、38.92ml、44.60ml 的甘油(密度為 1.26g/cm^3 ，與模型容量之比值依序為 0、1/8...至 8/8，未填充部份為 1 atm 的空氣)
4. 將長軸較短的模型(稱為 B 模型)填入 0ml、4.55ml、9.10ml、13.65ml、18.20ml、22.75ml、27.30ml、31.85ml、36.40ml 的甘油(與模型容量之比值依序為 0、1/8...至 8/8，未填充部份為 1 atm 的空氣)
5. 將放入 0ml 水的 A 模型放於黏好瓶蓋的組織均質機旋轉軸下，使其接觸篩網
6. 打開組織均質機並使其內部的甘油隨模型旋轉至 800rpm(使其內部液體分布穩定而不隨時間改變)
7. 壓下篩網同時開始攝影，測量並記錄橢球由垂直水平面轉換至平行水平面的時間
8. 將步驟 5 裝入的 0ml 水的 A 模型改為步驟 3、4 的模型填充不同體積的水並重複步驟 6 到 7
9. 將步驟 6 的轉速改為 1000rpm 並重複步驟 5 到 8
10. 將步驟 6 的轉速改為 0rpm 並重複步驟 5 到 8
11. 將步驟 5 的接觸面改為塑膠托盤並重複步驟 5 到 8



12. 將步驟 5 的接觸面改為鋁箔紙並重複步驟 5 到 8(如圖一)

三、測量橢球內部裝入蠟的穩定性

1. 將蛋殼模型拆開，並將兩個相似的半橢球黏接在一起
2. 量測模型之長短軸長度與重量
3. 將長軸較長的模型(稱為 A 模型)填入 0g、5.05g、10.10g、15.15g、20.19g、25.24g、30.29g、35.34g、40.38g 的蠟油，使其冷卻後的體積為 0ml、5.56ml、11.12ml、16.68ml、22.30ml、28.80ml、33.36ml、38.92ml、44.60ml (與模型容量之比值依序為 0、1/8...至 8/8，未填充部份為 1 atm 的空氣)
4. 將長軸較短的模型(稱為 B 模型)填入 0g、4.11g、8.22g、12.33g、16.44g、20.55g、24.66g、28.77g、32.88g 的蠟油，使其冷卻後的體積為 0ml、4.55ml、9.10ml、13.65ml、18.20ml、22.75ml、27.30ml、31.85ml、36.40ml(與模型容量之比值依序為 0、1/8...至 8/8，未填充部份為 1 atm 的空氣)
5. 將放入 0g 蠟的 A 模型放於黏好瓶蓋的組織均質機旋轉軸下，使其接觸篩網
6. 打開組織均質機並使模型旋轉至 800rpm
7. 壓下篩網同時開始攝影，測量並記錄橢球由垂直水平面轉換至平行水平面的時間
8. 將步驟 5 裝入的 0g 蠟的 A 模型改為步驟 3、4 的模型並重複步驟 6 到 7(如圖一)

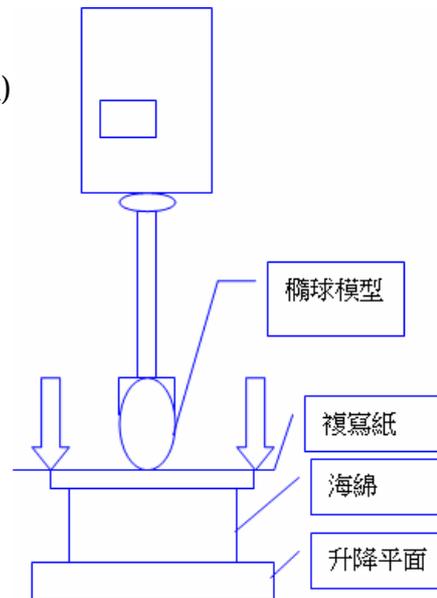
四、探討橢球內部裝入流體與固體對其軌跡之影響

1. 將蛋殼模型拆開，並將兩個相似的半橢球黏接在一起
2. 量測模型之長短軸長度與重量
3. 將長軸較長的模型(稱為 A 模型)填入 0ml、5.56ml、11.12ml、16.68ml、22.30ml、28.80ml、33.36ml、38.92ml、44.60ml 的水(與模型容量之比值依序為 0、1/8...至 8/8，未填充部份為 1 atm 的空氣)
4. 將長軸較長的模型(稱為 A 模型)填入 0g、5.05g、10.10g、15.15g、20.19g、25.24g、30.29g、35.34g、40.38g 的蠟油，使其冷卻後的體積為 0ml、5.56ml、11.12ml、16.68ml、22.30ml、28.80ml、33.36ml、38.92ml、44.60ml (與模型容量之比值依序為 0、1/8...至 8/8，未填充部份為 1 atm 的空氣)
5. 將接觸面舖上複寫紙與紙，並放入 0ml 水的 A 模型放於黏好瓶蓋的組織均質機旋轉軸下，使其接觸複寫紙
6. 打開組織均質機並使模型旋轉至 800rpm



7. 壓下篩網並記錄橢球由旋轉到靜止期間與複寫紙接觸點的軌跡

8. 將步驟 5 裝入的 0g 蠟的 A 模型改為步驟 3、4 的模型並重複步驟 5 到 7(如圖三)



圖三 接觸面測量設計圖

伍、研究結果

一、探討橢球內部液體之體積與橢球體積之比值對其穩定性的影響

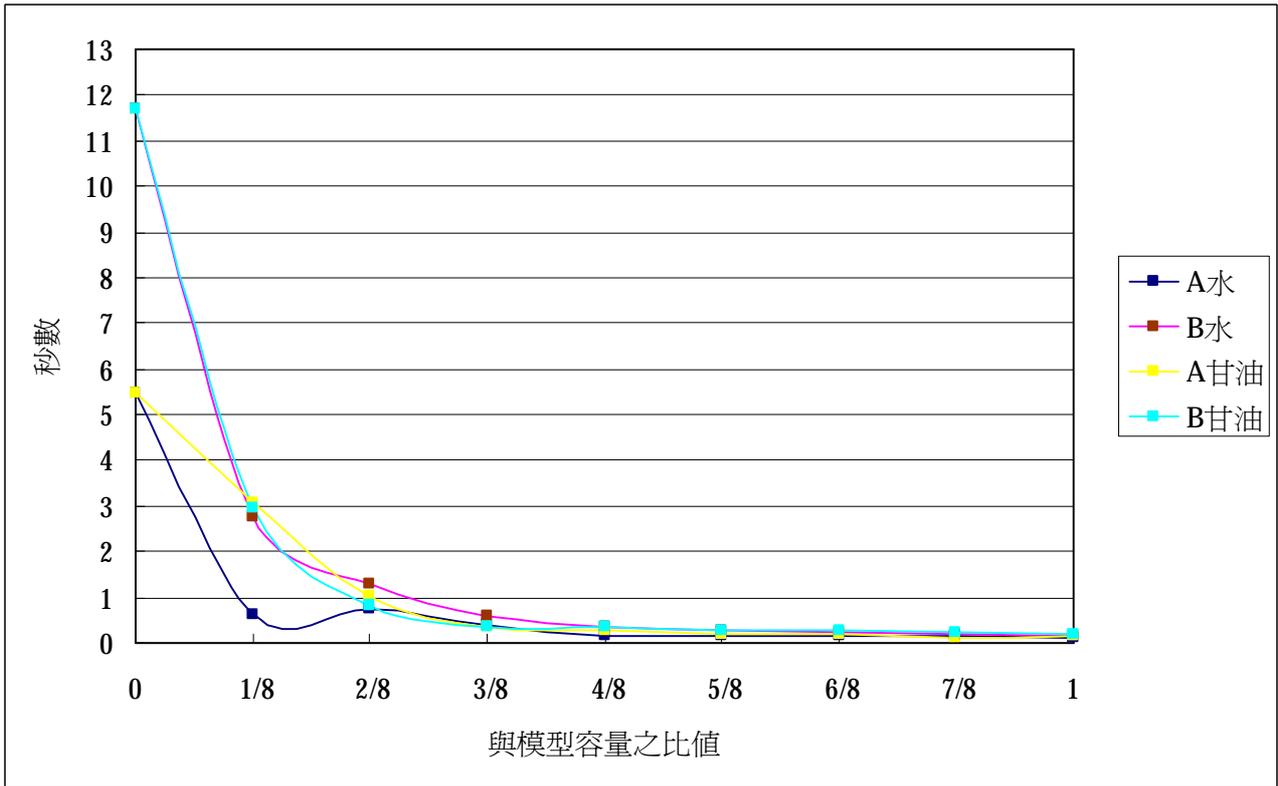
測試條件為：

(1)轉速為 800rpm

(2)接觸面為篩網(動摩擦係數為 0.117) ，結果如表一、圖四所示

表一 橢球內部液體積比例對穩定性之測試情形

液體種類 體積比例	水	水	甘油	甘油
	A 模型(秒)	B 模型(秒)	A 模型(秒)	B 模型(秒)
0	5.48±0.24	11.69±1.03	5.48±0.24	11.69±1.03
1/8	0.65±0.27	2.74±0.1	3.08±0.99	3.09±0.7
2/8	0.74±0.04	1.29±0.24	1.03±0.13	0.84±0.05
3/8	0.39±0.07	0.61±0.11	0.35±0.11	0.35±0.06
4/8	0.167±0.05	0.36±0.06	0.26±0.03	0.34±0
5/8	0.153±0.03	0.29±0.01	0.21±0.03	0.29±0.03
6/8	0.148±0.03	0.23±0.03	0.19±0.02	0.28±0.03
7/8	0.16±0.02	0.21±0.01	0.13±0.03	0.24±0.03
1	0.12±0.01	0.15±0.04	0.15±0.04	0.18±0.05



圖四 橢球內部液體積比例對穩定性之測試情形

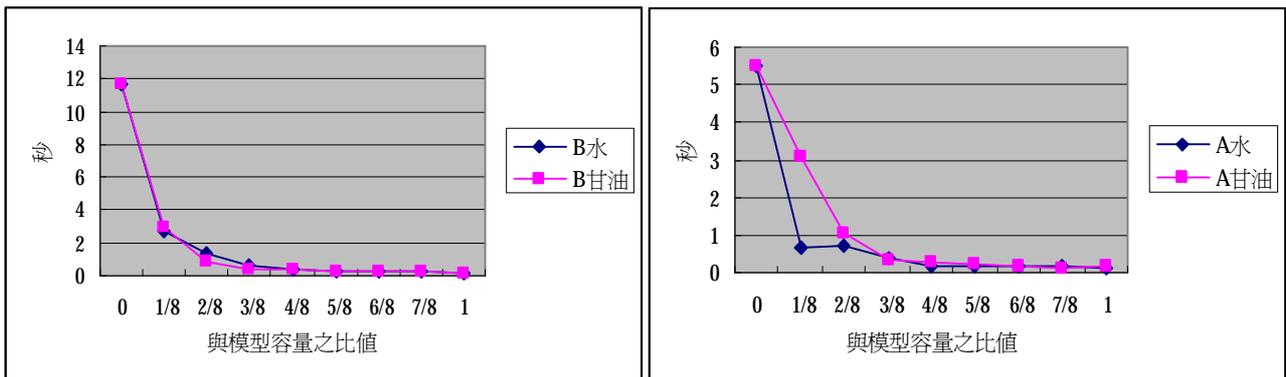
二、探討橢球內部液體黏滯度對其穩定性的影響

測試條件為：

(1) 轉速為 800rpm

(2) 接觸面為篩網(動摩擦係數為 0.117)

(3) 甘油的黏滯係數為 $9.56 \text{ dy} \cdot \text{s} / \text{cm}^2$, 約為水的 1000 倍；甘油密度為 $1.26 \text{ g} / \text{cm}^3$



圖五 橢球內部液體黏滯度對其穩定性之影響測試情形

三、探討不同轉速對其穩定性的影響

測試條件為：

(1) 接觸面為篩網(動摩擦係數為 0.117)

(2) 轉速為 1000rpm 時，結果如表二、圖六所示

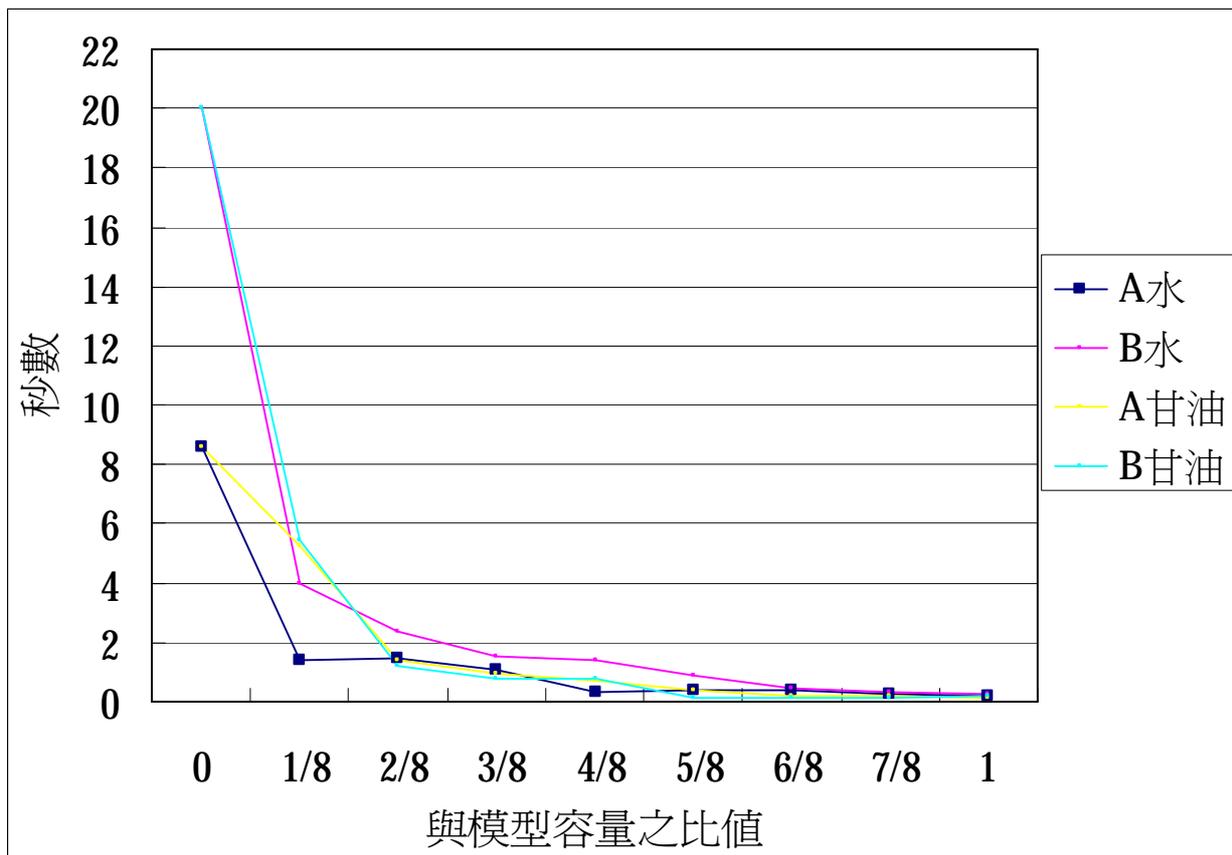
(3) 轉速為 0rpm 時，結果如表三、圖七所示

表二 橢球內部液體體積比例對穩定性之影響測試情形

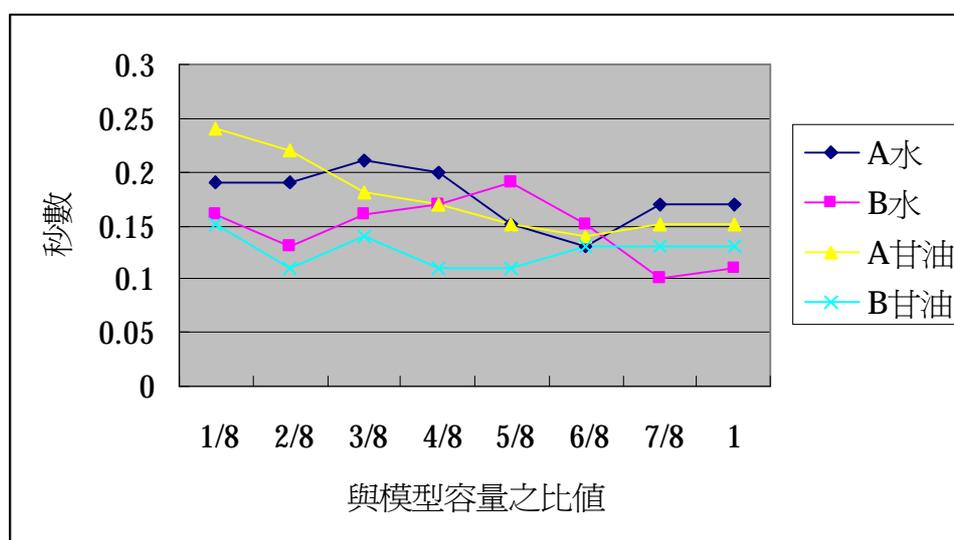
液體種類 體積比例	水	水	甘油	甘油
	A 模型(秒)	B 模型(秒)	A 模型(秒)	B 模型(秒)
0	8.62±0.69	20.04±0.32	8.62±0.69	20.04±0.32
1/8	1.44±0.08	4.02±0.94	5.29±1.14	5.42±1.17
2/8	1.48±0.37	2.37±0.22	1.39±0.19	1.21±0.17
3/8	1.1±0.19	1.55±0.17	0.96±0.12	0.8±0.16
4/8	0.29±0.06	1.38±0.32	0.71±0.09	0.76±0.19
5/8	0.38±0.03	0.92±0.17	0.4±0.02	0.16±0.06
6/8	0.38±0.02	0.42±0.18	0.18±0.01	0.15±0.04
7/8	0.27±0.03	0.32±0.02	0.17±0.05	0.13±0.04
1	0.2±0.03	0.25±0.06	0.16±0.10	0.18±0.06

表三 橢球內部液體體積比例對穩定性之影響測試情形

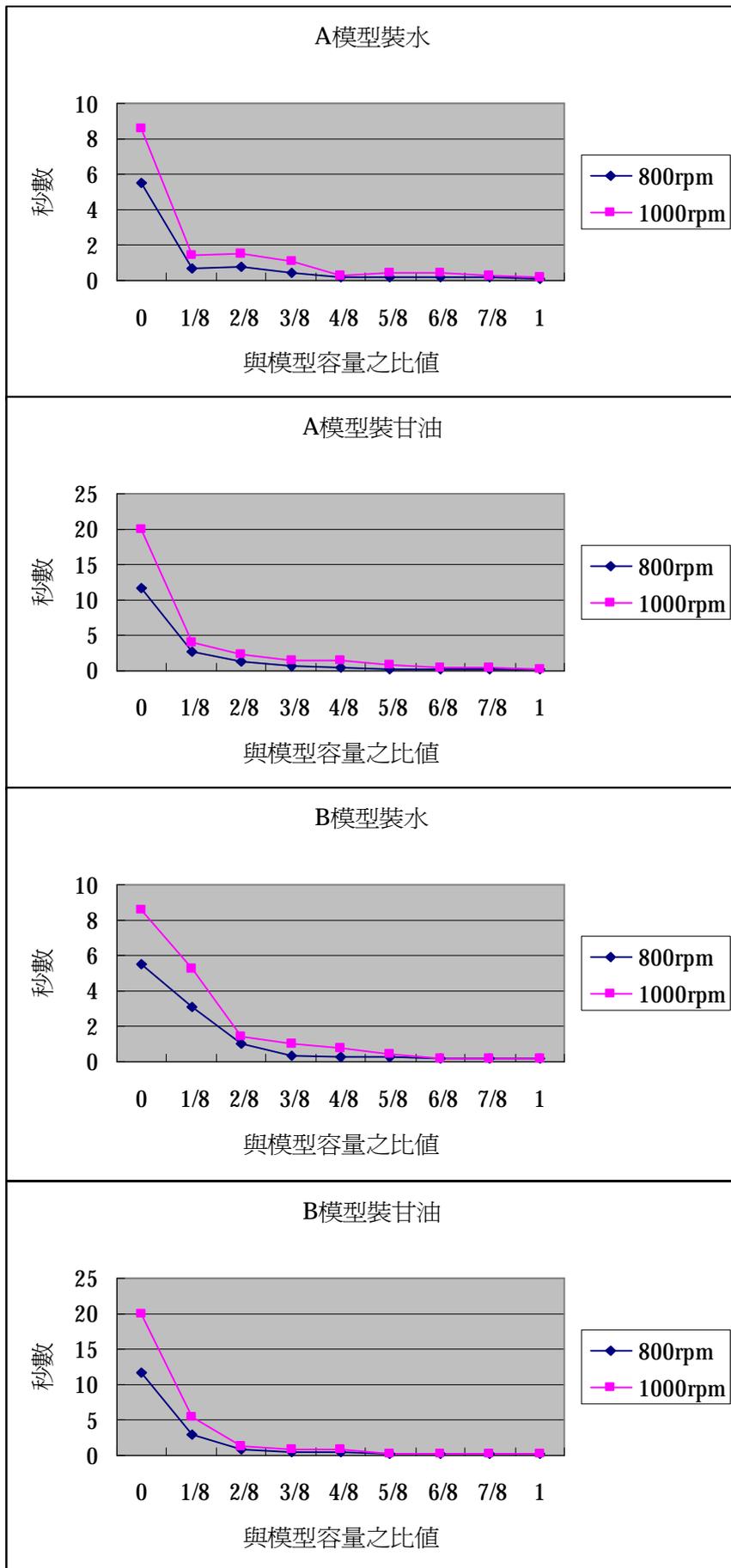
液體種類 體積比例	水	水	甘油	甘油
	A 模型(秒)	B 模型(秒)	A 模型(秒)	B 模型(秒)
1/8	0.19±0.03	0.16±0.05	0.24±0.03	0.15±0.03
2/8	0.19±0.03	0.13±0.04	0.22±0.03	0.11±0
3/8	0.21±0.03	0.16±0.04	0.18±0.01	0.14±0.04
4/8	0.2±0.03	0.17±0.01	0.17±0.05	0.11±0.02
5/8	0.15±0.05	0.19±0.03	0.15±0.04	0.11±0.02
6/8	0.13±0.04	0.15±0.04	0.14±0.04	0.13±0.05
7/8	0.17±0.01	0.1±0.01	0.15±0.04	0.13±0.04
1	0.17±0.01	0.11±0	0.15±0.04	0.13±0.03



圖六 橢球內部液體體積比例對穩定性之影響測試情形 (比較表一與表二)



圖七 橢球內部液體體積比例對穩定性之影響測試情形(轉速為 0 rpm)



圖八 不同轉速對其穩定性的影響測試情形

四、探討不同接觸面對其穩定性的影響

測試條件為：

(1)轉速為 800rpm

(2)篩網與橢球間的動摩擦係數為 0.117，結果如表一所示

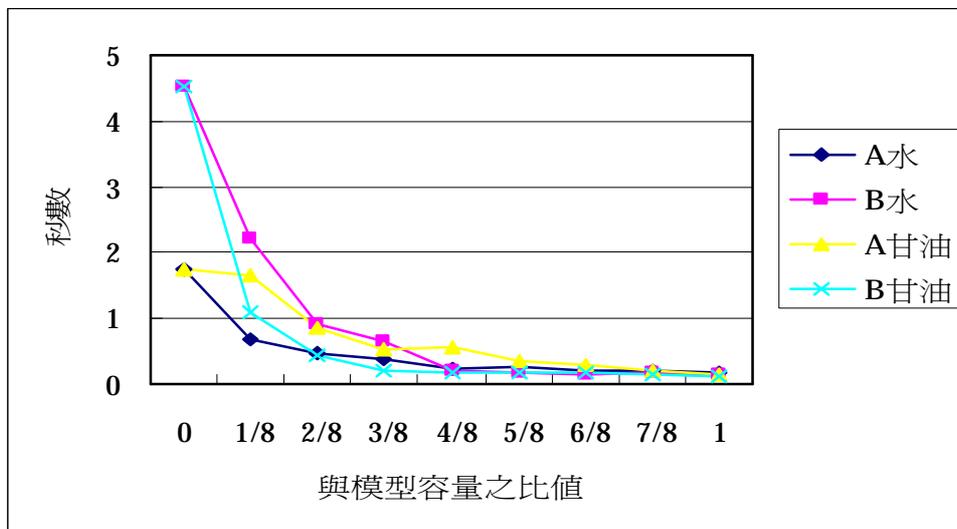
塑膠盤與橢球間的動摩擦係數為 0.149，結果如表四、圖九所示

鋁箔紙與橢球間的動摩擦係數為 0.132，結果如表五、圖十所示

(3)篩網底部向上充入氣體(速率為 62L/min)與未充入氣體之比較如表六、圖十二所示

表四 橢球內部液體體積比例對穩定性之影響測試情形

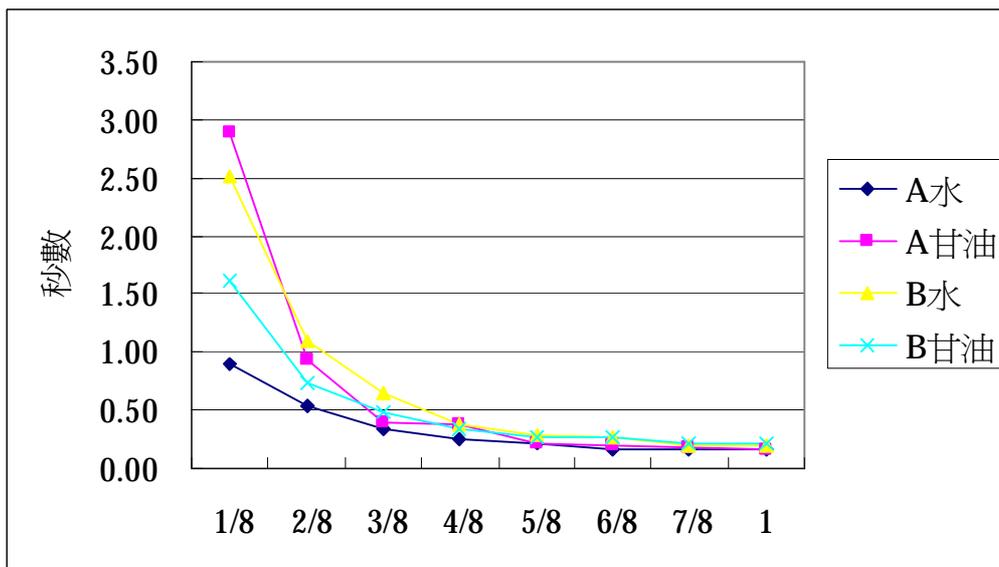
液體種類	水		甘油	
	A 模型(秒)	B 模型(秒)	A 模型(秒)	B 模型(秒)
0	1.74±0.31	4.54±0.71	1.74±0.31	4.54±0.71
1/8	0.69±0.1	2.21±0.25	1.67±0.07	1.08±0.25
2/8	0.48±0.1	0.92±0.02	0.85±0.07	0.44±0.12
3/8	0.38±0.08	0.65±0.1	0.54±0.14	0.2±0.05
4/8	0.25±0.08	0.21±0.02	0.56±0.16	0.18±0.02
5/8	0.27±0.07	0.18±0.01	0.36±0.06	0.17±0.02
6/8	0.2±0.02	0.16±0.04	0.29±0.08	0.17±0.02
7/8	0.2±0.02	0.19±0.06	0.2±0.07	0.15±0.02
1	0.17±0.02	0.14±0.01	0.15±0.04	0.12±0.03



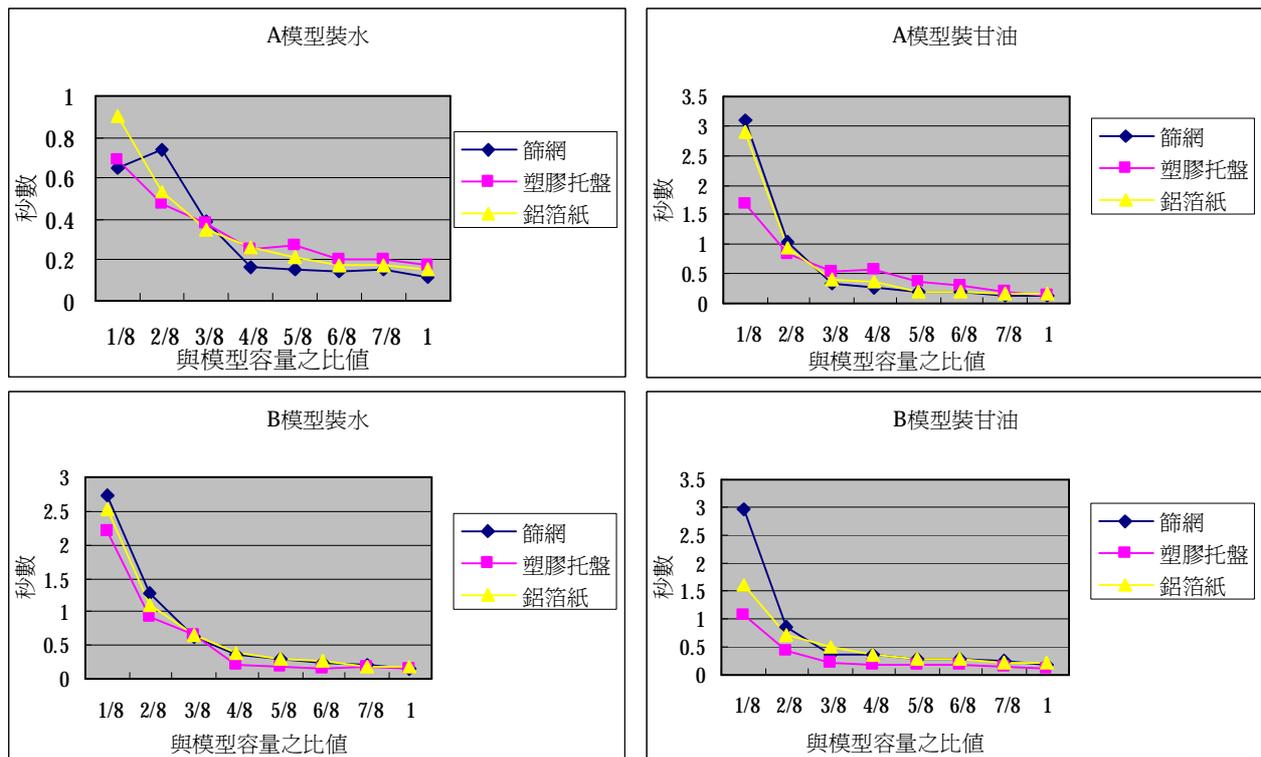
圖九 橢球內部液體體積比例對穩定性之測試情形

表五 橢球內部液體體積比例對穩定性之影響測試情形

液體種類	水		甘油	
	A 模型(秒)	B 模型(秒)	A 模型(秒)	B 模型(秒)
1/8	0.90±0.17	2.89±0.33	2.51±0.58	1.61±0.35
2/8	0.53±0.15	0.93±0.03	1.1±0.06	0.73±0.16
3/8	0.35±0.03	0.39±0.08	0.64±0.10	0.49±0.02
4/8	0.26±0.05	0.37±0.11	0.38±0.08	0.35±0.03
5/8	0.21±0.05	0.21±0.01	0.29±0.04	0.27±0.05
6/8	0.17±0.01	0.19±0.02	0.27±0.05	0.27±0.05
7/8	0.17±0.03	0.18±0.02	0.19±0.02	0.22±0.01
1	0.16±0.02	0.16±0.02	0.19±0.04	0.22±0.02



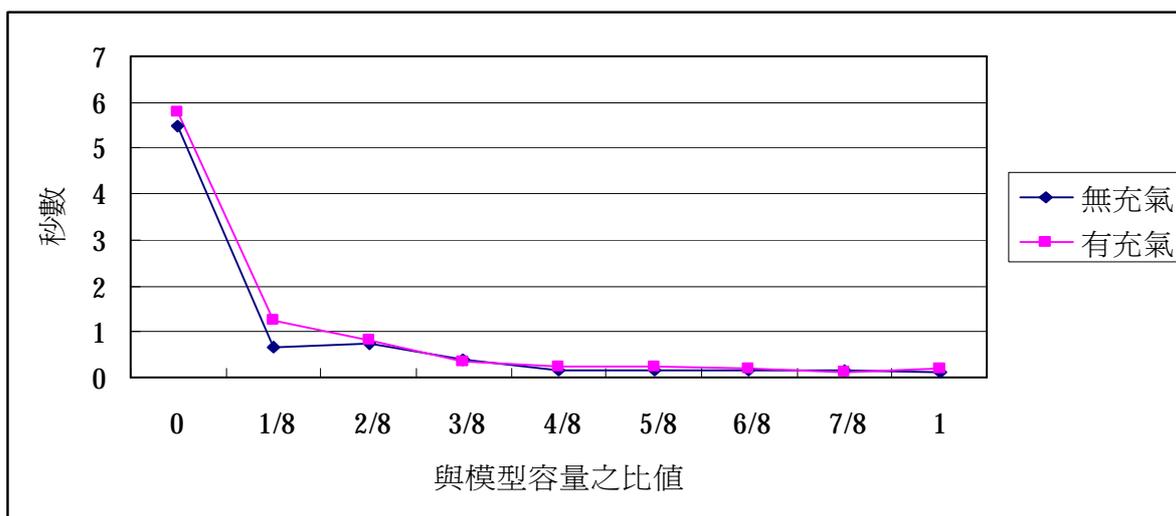
圖十 橢球內部液體體積比例對穩定性之影響測試情形



圖十一 不同接觸面對其穩定性的影響測試情形

表六 橢球內部液體體積比例對穩定性之影響測試情形

體積比例	充氣情形	無充氣(秒)A 模型	有充氣(秒)A 模型
	0		5.48±0.24
1/8		0.65±0.27	1.26±0.10
2/8		0.74±0.04	0.81±0.03
3/8		0.39±0.07	0.36±0.09
4/8		0.17±0.05	0.22±0.17
5/8		0.15±0.03	0.23±0.04
6/8		0.15±0.03	0.19±0.01
7/8		0.16±0.02	0.11±0.01
1		0.12±0.01	0.18±0.01



圖十二 充氣環境下橢球填充不同體積比例之穩定性測試情形

五、探討長軸長度對其穩定性的影響

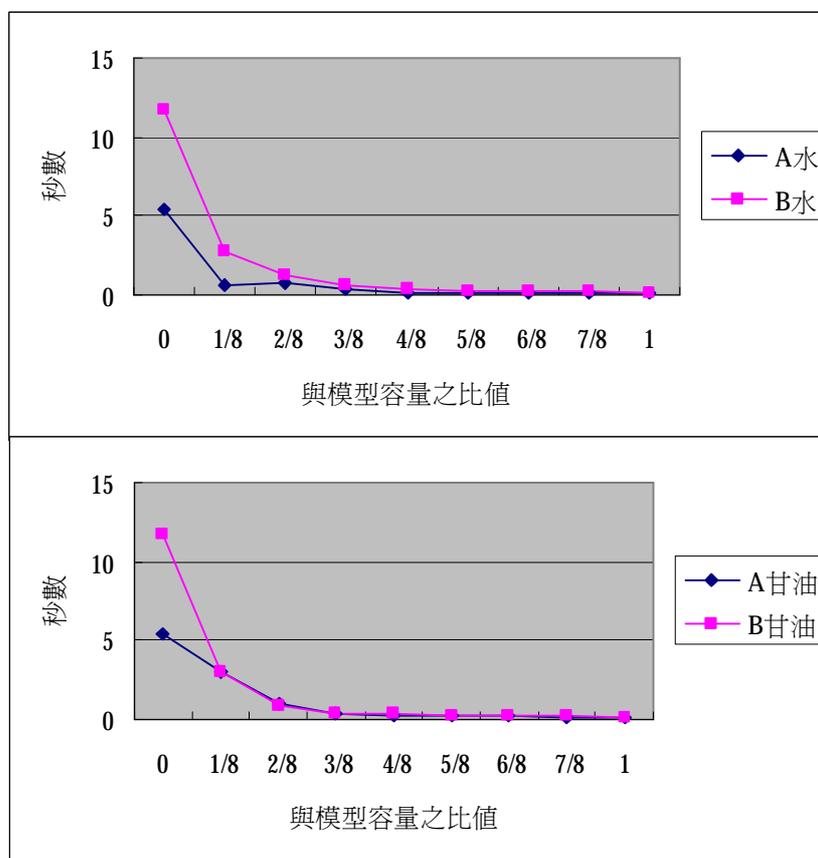
測試條件為：

(1) 轉速 800rpm

(2) 接觸面為篩網(動摩擦係數為 0.117)

(3) A 模型的長軸長度為 6.9cm

B 模型的長軸長度為 5.7cm 結果如圖十三所示



圖十三 橢球之不同長軸長度對其穩定性之影響測試情形

六、比較橢球內部裝入流體與固體對穩定性的影響

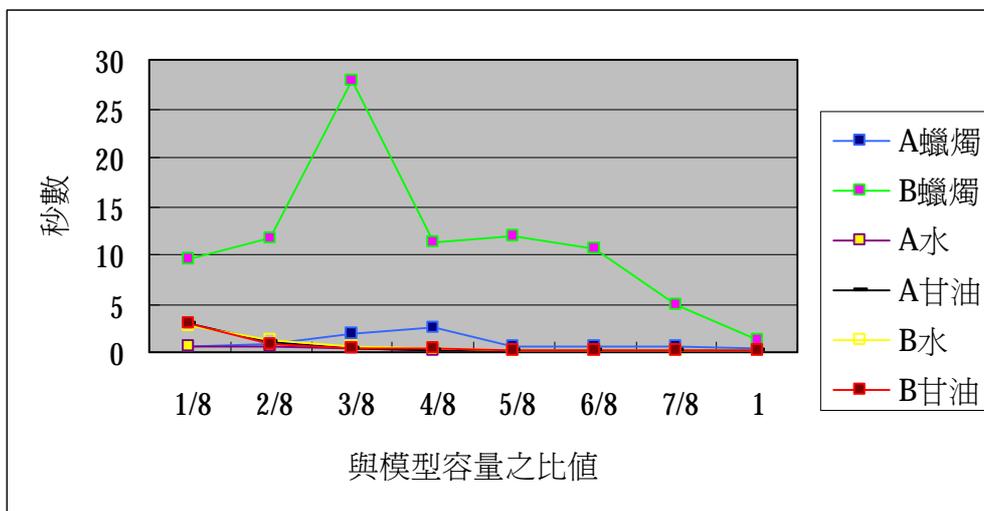
測試條件為：

(1)轉速為 800rpm

(2)接觸面為篩網(動摩擦係數為 0.117) ，結果如表七、圖十四所示

表七 橢球內部裝入固體蠟油對穩定性之測試情形

體積比例	A 模型(秒)	B 模型(秒)
1/8	0.7±0.16	9.66±2.94
2/8	0.91±0.09	11.73±1.01
3/8	1.92±0.22	27.91±2.5
4/8	2.55±0.71	11.32±0.55
5/8	0.59±0.08	11.93±1.65
6/8	0.64±0.24	10.57±1.85
7/8	0.58±0.06	4.83±1.55
1	0.48±0.25	1.19±0.17



圖十四 橢球內部裝入流體與固體對穩定性之測試情形

七、探討橢球內部裝入流體與固體對其接觸面軌跡之影響

測試條件為：(原大小為 $15 \times 14 \text{cm}^2$)

(1)轉速為 800rpm

(2)接觸面為複寫紙



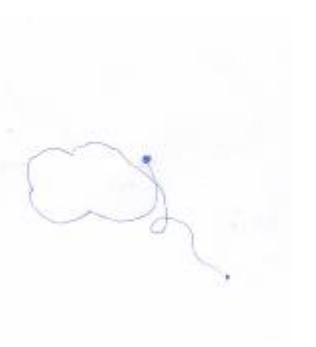
1/8 固體



2/8 固體



3/8 固體



4/8 固體



5/8 固體



6/8 固體



7/8 固體



8/8 固體



1/8 液體(水)



2/8 液體(水)



3/8 液體(水)



4/8 液體(水)



5/8 液體(水)



6/8 液體(水)



7/8 液體(水)

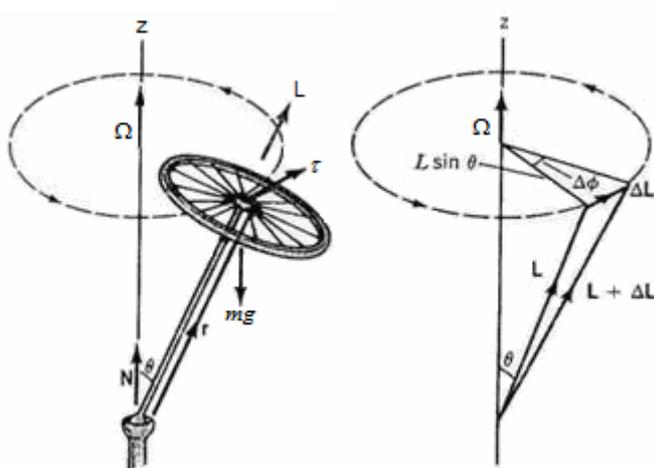


8/8 液體(水)

圖十五 橢球內部裝入流體與固體對其接觸面軌跡變化之測試情形

陸、討論

1. 大部分的人認為，似乎轉動慣量越大其能維持的原來轉動狀態的性質越明顯，但是實驗數據卻顯示內含液體越多，轉動慣量越大，其穩定度卻降低，而內含蠟油的實驗數據也不符合上述觀念，其實內部為固體的橢球可以藉由下列式子說明。



$$\text{因 } dL = r dt = Mgr \sin(p - q) dt - (1)$$

$$\text{所以 } df = \frac{dL}{L \sin q} = \frac{Mgr \sin(p - q) dt}{L \sin q} = \frac{Mgr}{I\omega} dt - (2)$$

$$\text{由(1)(2)可知 } \Omega = \frac{df}{dt} = \frac{Mgr}{I\omega}$$

(其中 Ω 為橢球繞其接觸定點的角速度， ω 為其自旋角速度， M 為總質量， r 為質心自接觸定點的距離， I 為轉動慣量， L 為角動量)當 Ω 越大，代表其穩定性越低，所以填充入固體的模型 A 在填入 4/8、B 模型在填入 3/8 體積的蠟油時，其 r 最短，有最高的穩定性(其中 I 的質量會與 M 抵銷)。

2. 在「探討橢球內部液體之體積與橢球體積之比值對其穩定性的影響」的實驗中，結果得知不論 A 與 B 模型都有穩定度隨模型內填充的液體體積的增加而呈現下降的趨勢(表一與圖五)，而且當橢球內部的液體之體積與橢球體積之比值越大，其測得秒數越接近轉速為 0 時測得的時間(圖七與圖四對照)，我們認為是橢球內部液體會因重力而下降進而增加 Ω 所造成，而且液體與橢球殼間的轉速不同也造成 ω 下降，減低穩定度。
3. 在「探討橢球內部液體黏滯度對其穩定性的影響」的實驗中，在填入 1/8 的模型容量時，黏滯係數較大的甘油造成的穩定度明顯比黏滯係數較小的水造成的穩定度高，但隨著內部填充的液體體積增加時，甘油所形成的穩定度逐漸比水形成的穩定度低，此結果可能是橢球內部液體之重量不同與黏滯係數之相互影響而產生之現象(圖五)。
4. 在「探討不同轉速對其穩定性的影響」的實驗中可以清楚的得知，轉速的提升可以提高整體的穩定度(表一、表二與圖八)，可能是因為橢球模型的 ω 提高，造成 Ω 的降低與穩定性的提高。
5. 在「探討不同接觸面對其穩定性的影響」的實驗中，摩擦係數較大的接觸面其穩定度比摩擦係數較小的接觸面小，可能是因摩擦力的力矩減低轉速而影響穩定性(圖九)。

6. 在「探討長軸長度對其穩定性的影響」的實驗中，在大部分的情形中，長軸的長度較大，其穩定性較低，尤其在針對填充不同比例體積之水其現象較明顯，但在填充甘油的模型中其體積超過 $2/8$ 時，長軸較長的模型與長軸較短的模型，其穩定性卻相差不大(表一與圖十三)，而打入氣體會使正向力減少進而改變摩擦力，使穩定度提升(表六與圖十二)。
7. 在「比較橢球內部裝入流體與固體對穩定性的影響」的實驗中，填充入固體蠟油的模型 A 在 $4/8$ 、B 模型在 $3/8$ 體積時，具最高的穩定性，而填入水或甘油之液體的模型中，在填入 $1/8$ 體積時有最好的穩定性，在固體的部份可以推論其整體質心越低其穩定度越高(表七與圖十四)。
8. 在「探討橢球內部裝入流體與固體對其接觸面軌跡之影響」的實驗中，結果發現固體的橢球模型其圍繞出的圓圈面積大部分較內部有水的模型小(圖十五)，推論此現象可能是液體內部的擾動進而影響其模型對垂直軸轉動的特性。

柒、結論

1. 橢球內部填入固體時質心越低其穩定度越高而填入液體時液體體積的增加與其穩定度呈現負相關。
2. 在影響內部填有液體的模型穩定度的變因中，**轉速與橢球內部液體體積**的影響較大，而液體黏滯度、長軸長短與摩擦係數的影響相對較小。
3. 當橢球內部為固體時可視為剛體進動的情形，與理論相當符合，但內部為流體時其穩定度與預期相差甚多，主要原因包含**內部流體的擾動、摩擦阻力以及外殼與接觸面的摩擦**，然而在流體理論的部分有許多現象無法以進動理論解釋，需要我們更進一步的探討。

捌、參考資料及其他

金尙年 古典力學 亞東書局 第 169~181 頁 民國 78 年 1 月初版

<http://memo.cgu.edu.tw/yun-ju/CGUWeb/PhyChiu/H104Rotation/Precession.htm>

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%80%B2%E5%8B%95>

【評語】 040111

本作品探討橢球旋轉的現象，並在其內填充不同物質，整體實驗的設計及操作都很好，唯填充物質後之橢球是一個很複雜的系統，故在分析實驗結果很難得到一個乾淨清楚的結論。