

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

040110

一兩「壓」克力！

學校名稱：國立臺中第一高級中學

作者： 高二 黃丌楷 高二 趙廷軒 高二 陳正哲	指導老師： 岳斯平
---------------------------------------	------------------

關鍵詞： Crumpling Aluminum Foil、壓縮、鋁箔紙

摘要

爲了了解被揉皺的鋁箔紙團的抵抗能力，我們使用了二、三維的擠壓實驗。實驗分成兩種型態，一種是對單一平面作擠壓的動作，另一則是以對三維表面作擠壓。

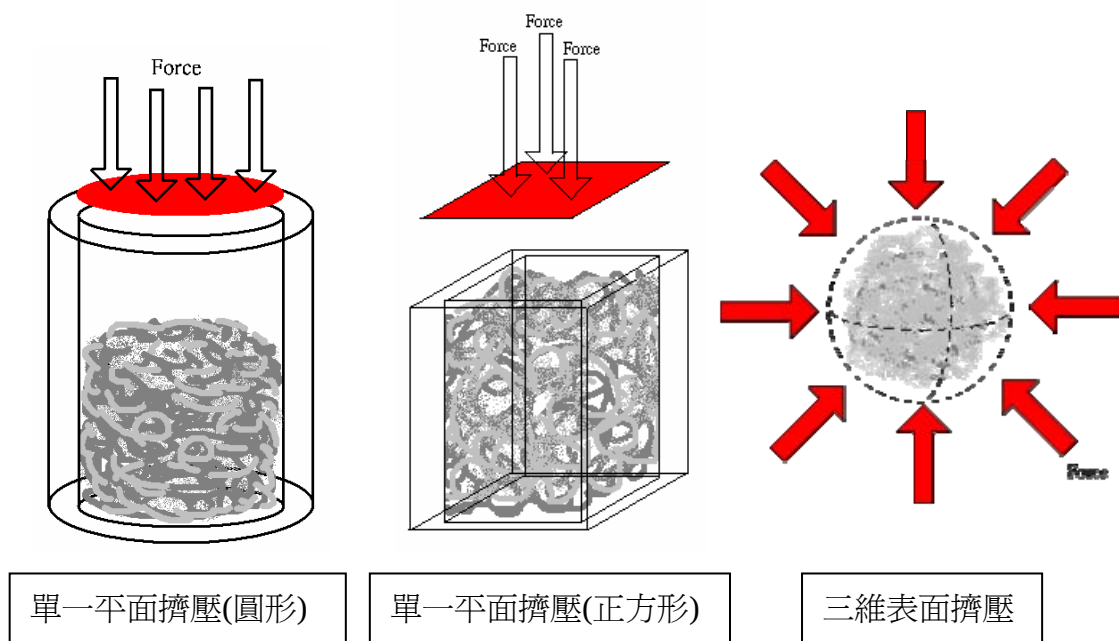
經過實驗，我們可觀測到其外力和鋁箔紙團體積變化的存在著函數關係，並且其中指數的部分是與鋁箔紙的厚度無關，有鑑於此，我們猜想鋁箔紙團的自身抵抗力應該是個相當突出、明顯的現象。最後，我們求出以下的數據並分析：

一、 單一平面擠壓：

- (一) 各種大小的鋁箔紙在各種大小施力面的體積變化
- (二) 探討不同形狀的施力面所造成的體積變化

二、 三維表面擠壓：

- (三) 定壓下長時間對鋁箔紙球紙球半徑的影響
- (四) 各種層數鋁箔紙樣本在各種力、壓力下的體積變化

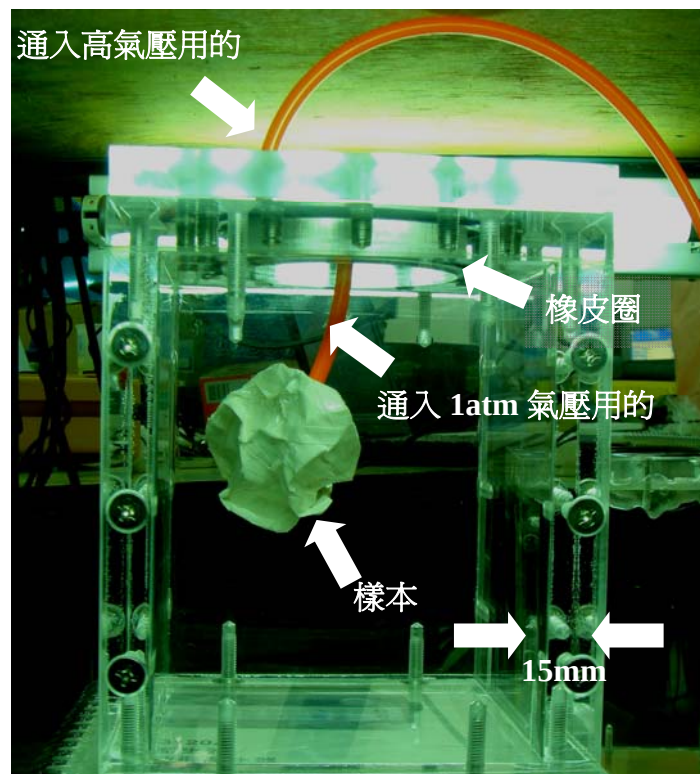


壹、 研究動機、目的

當我們要把一張寫壞、不要的紙扔進垃圾桶前會做什麼動作？沒錯，就是揉了它！但是可曾想過，紙團是如何受力，如何壓縮的？此時，我們想到在國中時，垃圾回收所用的大型壓縮器，常常看到工友用那台機器把廢紙盒、鋁箔紙盒，壓成一塊塊立方體，兩者之間有何不同嗎？它所受力大小與體積之變化有何種關係？我們就開始了這個想法，想要去深入探討其中的奧秘，一開始我們的直覺都是不規則的，但是當我們透過定性分析的手法來加以了解時，便發現它其實是有在遵守一個運算式。把一個似乎「不規則」的物理量加以簡化後，變得更有探索空間，而這使得我們非常感興趣，不但是個挑戰，而且在進入其不為人知的領域之後，更發現了它的奧妙之處！

貳、 研究設備器材(三維表面擠壓)

一、 壓力艙與樣本



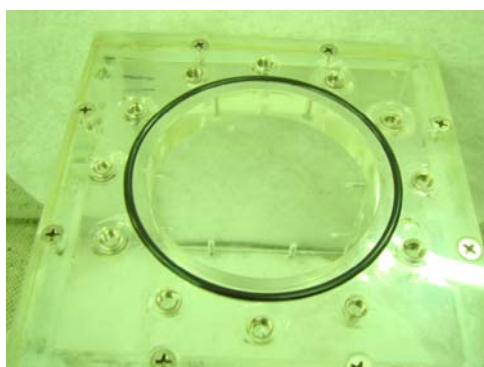
(一) 樣本

在實驗中我們使用圓形鋁箔紙張(厚： $16\ \mu\text{m}$ ，半徑 $R_0: 14\text{ cm}$)作為我們的研究樣本。在其外部，我們包了一層保鮮膜(厚： $11\ \mu\text{m}$)作為空氣擠壓時的施力面，並且還包著一根塑膠管(口徑： 6 mm)作為與外界大氣的通道。



(二) 壓力艙

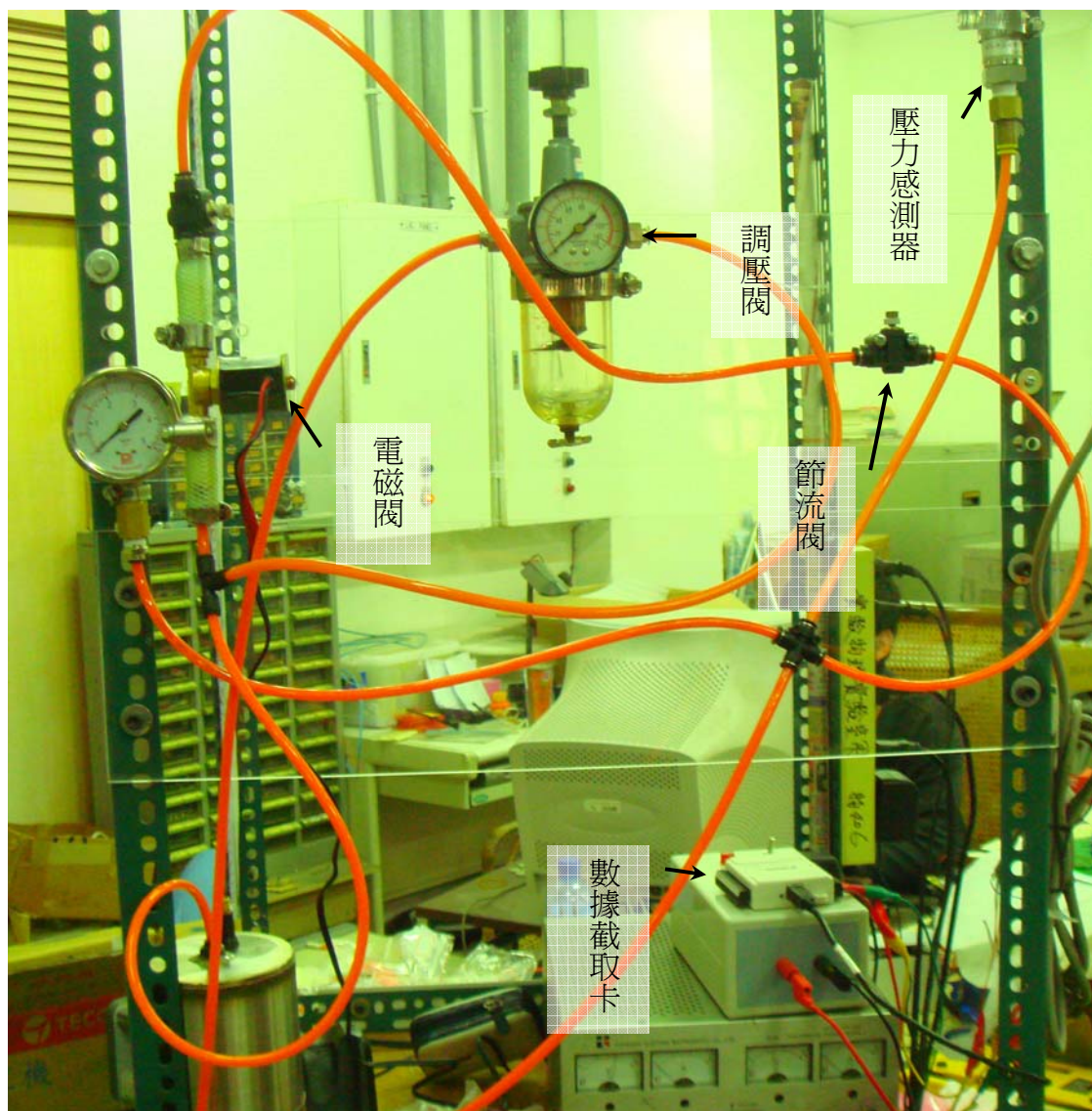
壓力艙是由七片壓克力板(厚： 15 mm)製成的，內部空間： $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ 。為了確保其氣密程度，所以在蓋子與上層接觸處又加了一圈橡皮圈。要算出膜上的淨力，必須扣除外界的大氣壓力，所以壓力艙的壓力表示都是以「多於一大氣壓多少壓力」來說的。



Chamber 上部↑ Chamber 中部→

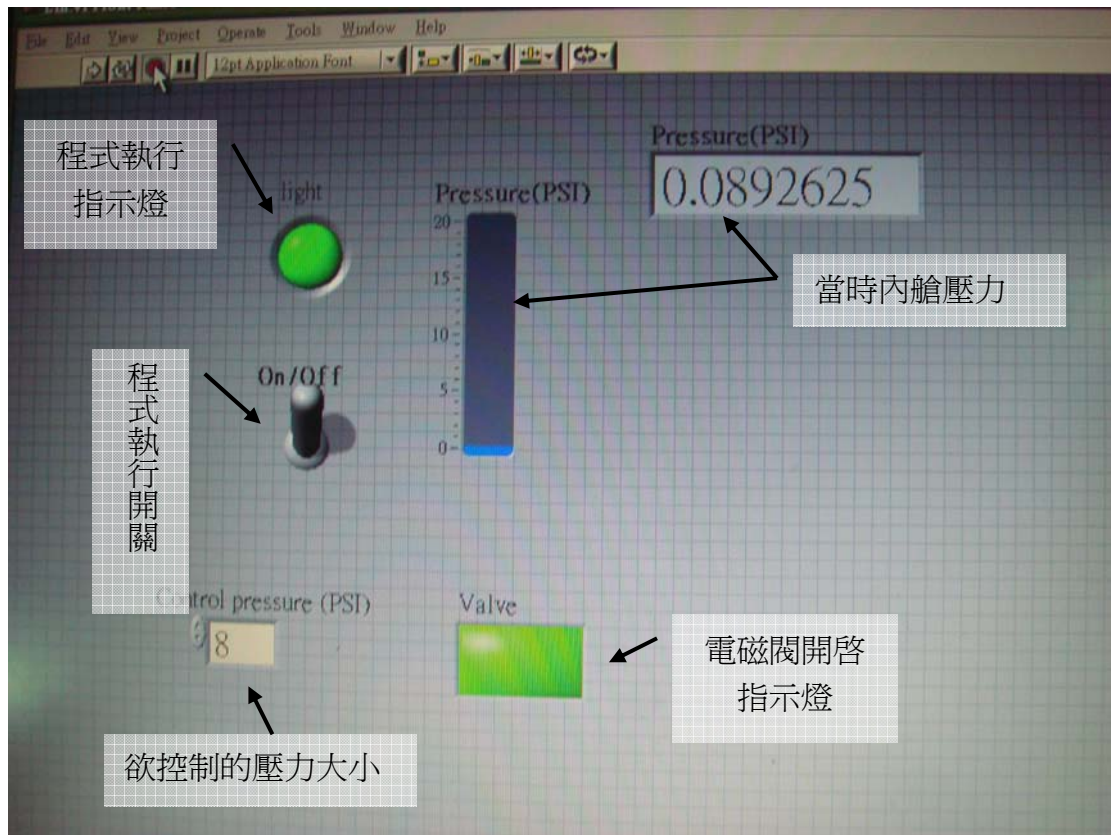


二、壓力控制系統的配置



由上方的照片可看出，我們將複雜的實驗通道固定在透明的壓克力板上，主要是爲了方便觀測。

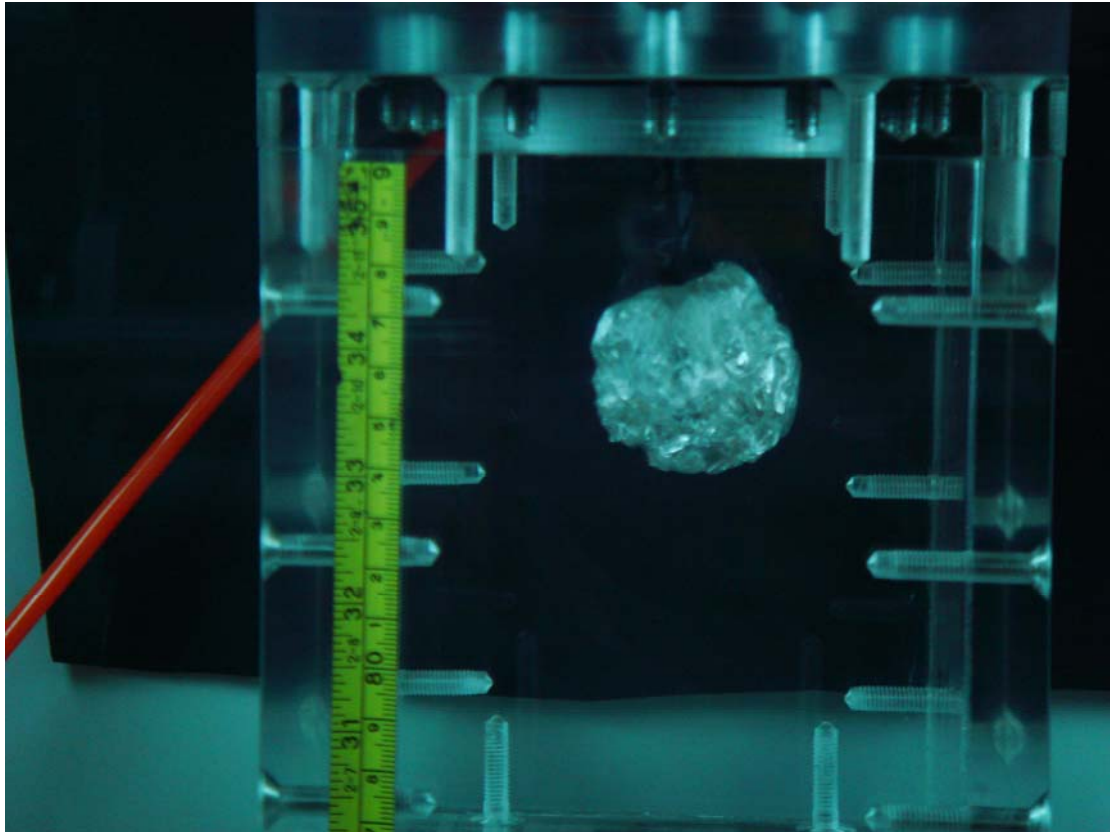
三、 電腦控制介面



這個程式介面是由“National Instruments Lab VIEW 8.2.1”寫的。使用此種控制氣壓方式的原因主要是因為壓克力製的壓力艙不可能 100%氣密，而些微的漏氣使得我們可以利用「氣不足則灌氣」的方式，使得內部壓力在微小範圍內作來回振動。如此一來，就可以免去不小心灌氣過多的現象。

四、影像分析

如下圖，我們在特定壓力下載取的原始影像是這個樣子的。使用了“National Instrument Vision Assistant”，我們便可很輕易的獲得圖像中紙團的面積。不難用肉眼發現，原本樣本上的塑膠管被黑色膠帶包了起來，這麼做是為了避免在處理圖像面積時的誤判。當然，在截取影像之前，我們必須將亮度、對比程度調到最恰當，以增加實驗的準確性。



參、 研究方法(三維表面擠壓)

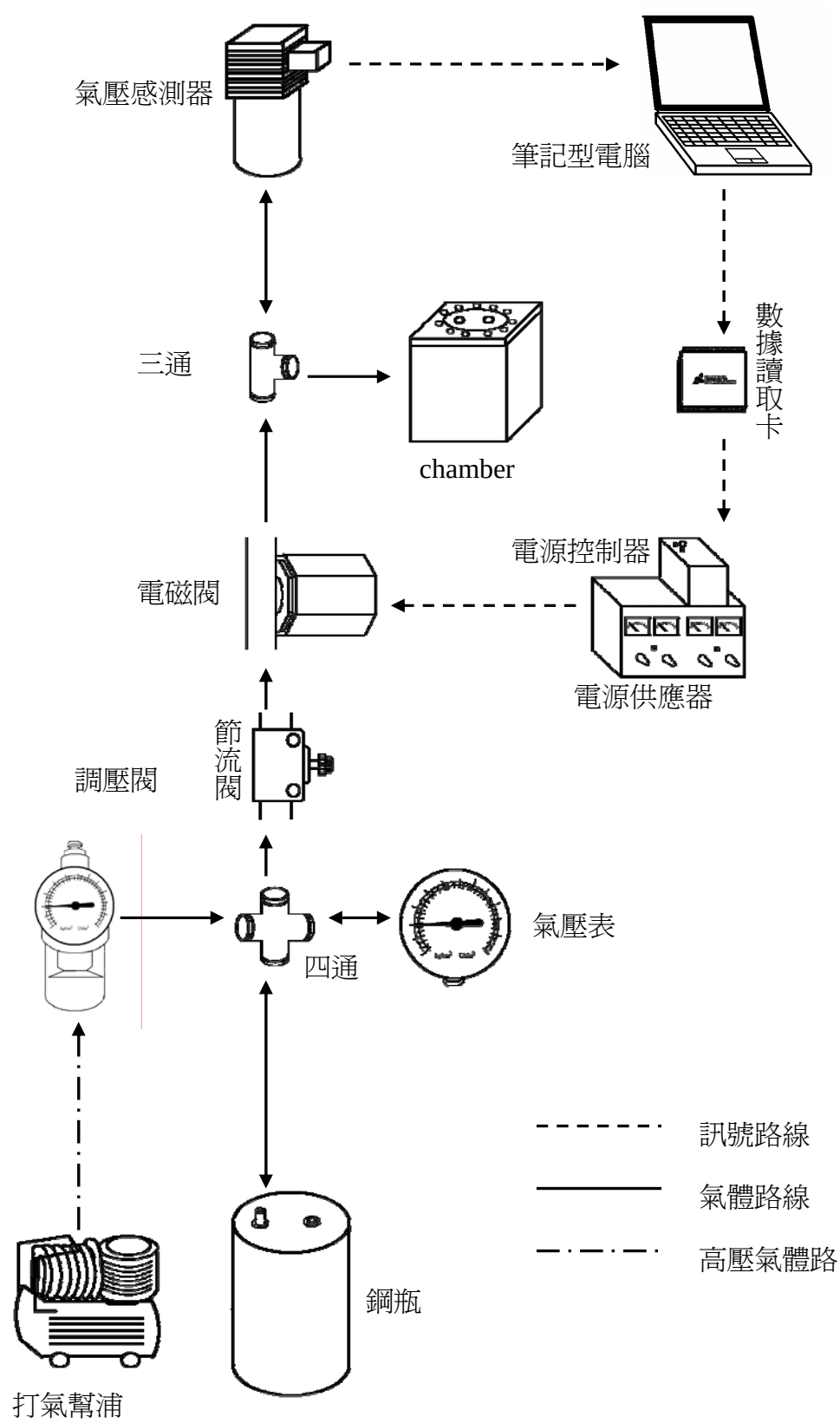
一、 氣體路線

壓力的最源頭是 120PSI 的打氣機，空氣由此經傳導後抵達調壓閥。調壓閥的功用是把輸入端的高壓控制成我們所要的低壓，而且這個低壓是可以控制、固定的，而在這裡我們控制成 60PSI。60PSI 的空氣輸出後，會經過兩道閥門才會抵達我們的壓力艙。第一道是電磁閥，可經由電腦控制其開關，一旦壓力變小時，電磁閥就會開啓，使高壓進入節流閥。第二通道則是節流閥，主要功能則是調整氣體的流量，可使壓力艙的壓力提升速度減緩，不至於超出我們要的壓力太多。如此一來，我們壓力艙的壓力就可以穩定的控制。

二、 訊號路線

壓力感測器受到壓力艙內部的壓力後，會將訊號(電壓)傳給數據截取卡(DAQ)。透過此卡，我們可以將訊號輸入電腦，再經由公式轉換就可得到當時的氣壓。我們寫了程式，當壓力艙內的壓力一低於欲得壓力時，就會開啓電磁閥使空氣灌入，直至壓力足夠。接下來只要節流閥控制得夠好，其壓力振動幅度就可以控制在很小範圍內。

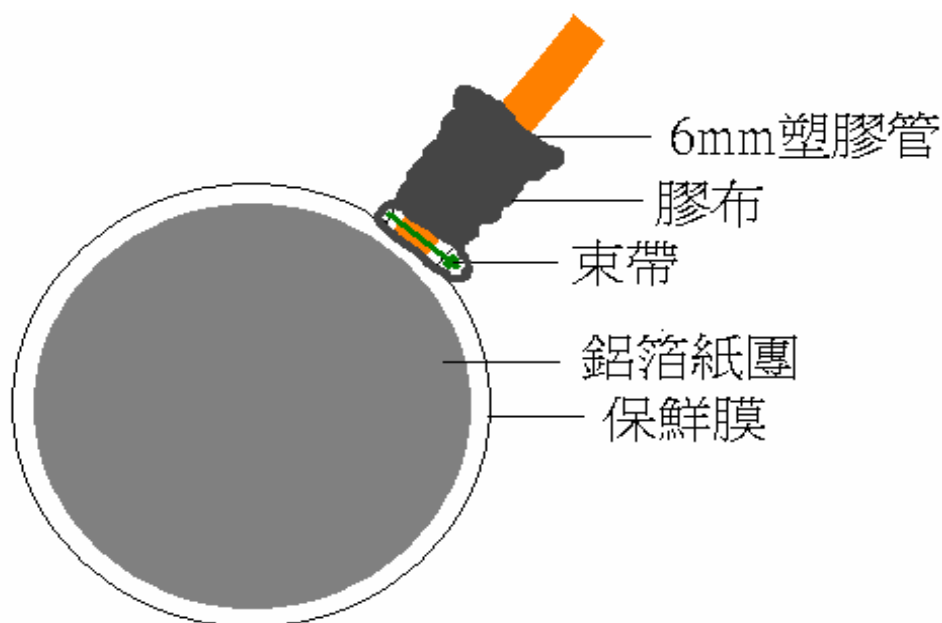
氣體及訊號傳輸圖



肆、 研究過程

一、 三維表面擠壓實驗

- (一) 先將壓力控制系統的器材如配置圖上架設好。
- (二) 將需觀測的樣本包裝好，放入壓力艙內並蓋好鎖緊。



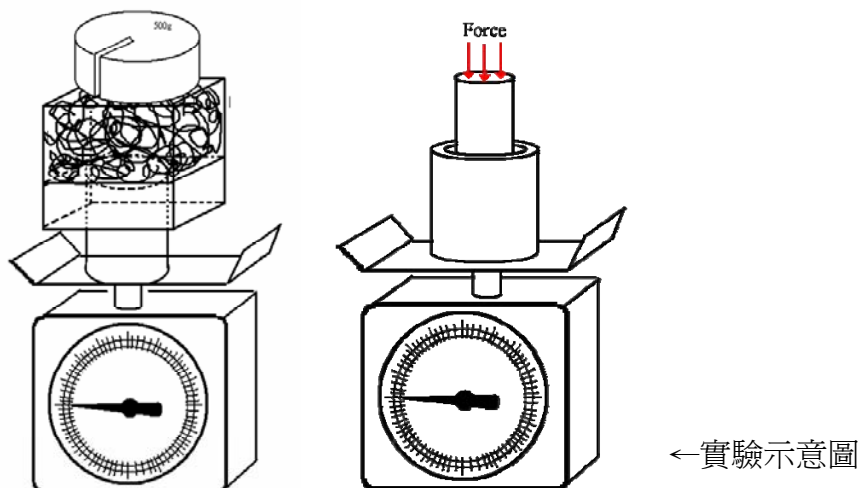
- (三) 在透明的壓力艙前面架好照相機，並將明暗程度調到電腦易分析的狀態。
- (四) 經由電腦控制壓力，將壓力緩慢上升，並在數個壓力點截取影像。
- (五) 數據截取完後，將影像放入電腦分析，可得照片中紙球所佔面積大小。(註：這裡使用的電腦分析軟體是 National Instrument – Vision Assistant)
- (六) 假設其十分接近球體，那麼根據其投影面積 πR^2 ，便可得知其大約半徑(R)。
- (七) 利用求出之半徑換算其表面積，乘上 Pressure 後便成了面上的 Force 大小。
- (八) 作出力道對應至 Volume(體積)的圖表。

(註： $\text{Volume} = \frac{4}{3} \pi R^3$)

- (九) 最後，將實驗過後的樣本取出且保存起來。
- (十) 重複(二)~(九)的步驟，可得到若干個數據、變化曲線，然後再做分析。

二、 單一平面擠壓實驗

- (一) 剪下半徑(R_0)分別為 14、11、8.5cm 的圓形鋁箔紙數張。
- (二) 各種尺寸的鋁箔紙分別輕輕揉成底面積(同於擠壓表面積 Area, 簡稱 A)為 25、36、49cm² 正方形底柱體、圓柱體。



- (三) 搭配不同的操縱變因(R_0 、A 的大小、A 的形狀)把選定規格的鋁箔紙團放入選定的模型，並加上蓋子。
- (四) 校正磅秤到 0kg 的位置。
- (五) 輕輕地施加壓力(務必要平均施力)。
- (六) 在 0.5、1、1.5.....每 0.5kgw 一間隔直到 7.5kgw 分別停下，並使用游標尺量出高度。
- (七) 利用 Excel 分析、處理數據，求出 Pressure、Volume、Force，作出圖表。



各種大小、形狀的模型

伍、 數據

一、 單一平面擠壓數據

底面：圓形					
A=49cm ² ,R0=14cm					
P(N/mm ²)	Force(N)	Volume(mm ³)			
0.0010	4.9	301595	288610	295470	299145
0.0020	9.8	220010	221725	205065	206780
0.0030	14.7	163415	163415	159005	166355
0.0040	19.6	139895	141120	140630	136220
0.0050	24.5	126420	135485	119560	131565
0.0060	29.4	114170	119805	109025	120050
0.0070	34.3	103390	107065	99225	110985
0.0080	39.2	98245	95060	86240	103635
0.0090	44.1	91630	90160	80360	96285
0.0100	49.0	86485	83545	76685	85015
0.0110	53.9	82075	79380	71050	81340
0.0120	58.8	77665	73500	67865	78155
0.0130	63.7	73500	70315	64680	76685
0.0140	68.6	62475	66640	59290	66885
0.0150	73.5	57330	63700	57330	59045
A=36cm ² ,R0=14cm					
P(N/mm ²)	Force(N)	Volume(mm ³)			
0.0014	4.9	240480	231300	233820	238320
0.0027	9.8	179460	181080	197460	183960
0.0041	14.7	151560	145080	156240	163260
0.0054	19.6	133920	132840	136080	136980
0.0068	24.5	114480	111420	110700	81360
0.0082	29.4	102420	103860	97200	111060
0.0095	34.3	88560	84060	88020	102780
0.0109	39.2	82620	85140	82980	88200
0.0123	44.1	75600	77220	75420	83700
0.0136	49.0	70920	73080	70380	73440
0.0150	53.9	68580	68580	67680	70920
0.0163	58.8	64080	65700	63900	67500

0.0177	63.7	59400	59400	63360	63000
0.0191	68.6	58140	58140	60660	57240
0.0204	73.5	56520	51300	57060	54180
A=25cm ² ,R0=14cm					
P(N/mm ²)	Force(N)	Volume(mm ³)			
0.0020	4.9	159000	162125	170125	166375
0.0039	9.8	127875	135625	154875	143375
0.0059	14.7	114750	117500	141250	128125
0.0078	19.6	108875	105000	120750	110250
0.0098	24.5	100625	92875	102625	99375
0.0118	29.4	87875	83125	85250	88375
0.0137	34.3	81250	76250	72500	78375
0.0157	39.2	76500	70875	67250	70375
0.0176	44.1	71500	64125	60625	65875
0.0196	49.0	64500	58000	54500	60500
0.0216	53.9	60250	54250	51125	57125
0.0235	58.8	55750	50750	47375	53750
0.0255	63.7	52750	47625	44500	51375
0.0274	68.6	49250	45250	40250	48500
0.0294	73.5	47750	44125	39250	45875
A=49cm ² ,R0=11cm					
P(N/mm ²)	Force(N)	Volume(mm ³)			
0.0010	4.9	173460	191835	160965	185710
0.0020	9.8	110250	113925	115395	116620
0.0030	14.7	92855	95795	89915	92365
0.0040	19.6	80115	83545	84525	81095
0.0050	24.5	71050	72765	74970	69825
0.0060	29.4	67865	68110	62965	64190
0.0070	34.3	57330	63945	56350	59290
0.0080	39.2	54635	58065	53165	53900
0.0090	44.1	49490	51940	49000	49735
0.0100	49.0	46305	48020	42385	47040
0.0110	53.9	44590	45815	39935	42875
0.0120	58.8	40915	43120	38220	41650
0.0130	63.7	38220	39200	35525	36995
0.0140	68.6	37730	37240	30380	35035
0.0150	73.5	35770	36015	30135	33320

A=36cm ² ,R0=11cm					
P(N/mm ²)	Force(N)	Volume(mm ³)			
0.0014	4.9	132120	120240	143460	136440
0.0027	9.8	110520	105120	99900	108000
0.0041	14.7	90180	83160	92880	79380
0.0054	19.6	72720	65700	76140	69480
0.0068	24.5	62460	56340	60120	37260
0.0082	29.4	55980	52200	56700	54180
0.0095	34.3	48780	43200	52200	46980
0.0109	39.2	44280	41760	48240	43200
0.0123	44.1	39960	41220	45360	37980
0.0136	49.0	34920	39600	43380	34200
0.0150	53.9	34380	36540	39780	32940
0.0163	58.8	33840	34920	37260	31500
0.0177	63.7	32940	34020	32580	30060
0.0191	68.6	30240	30780	30060	28260
0.0204	73.5	29700	30060	26460	26820
A=25cm ² ,R0=11cm					
P(N/mm ²)	Force(N)	Volume(mm ³)			
0.0020	4.9	112375	101750	111250	96875
0.0039	9.8	85750	88375	89375	82000
0.0059	14.7	71250	71875	70250	66875
0.0078	19.6	58000	60500	58500	55125
0.0098	24.5	51625	53250	50500	49875
0.0118	29.4	46000	44750	45000	43500
0.0137	34.3	41875	38000	39625	40000
0.0157	39.2	37250	37000	36250	35375
0.0176	44.1	33250	33750	34375	32125
0.0196	49.0	31500	30875	32750	30125
0.0216	53.9	31125	30125	30250	27875
0.0235	58.8	28750	26250	28625	26375
0.0255	63.7	26125	25125	26125	25000
0.0274	68.6	22750	22500	24125	23625
0.0294	73.5	21500	21375	24250	22750
A=49cm ² ,R0=8.5cm					
P(N/mm ²)	Force(N)	Volume(mm ³)			
0.0010	4.9	100450	90160	93835	90895

0.0020	9.8	70315	57085	69335	64925
0.0030	14.7	50960	48510	55125	52185
0.0040	19.6	40425	40180	44835	44100
0.0050	24.5	31850	33810	36505	39200
0.0060	29.4	29645	32095	36015	36995
0.0070	34.3	28665	29890	30625	32585
0.0080	39.2	27195	29645	26705	29890
0.0090	44.1	25480	27195	24500	24745
0.0100	49.0	23765	24500	23275	20580
0.0110	53.9	21805	22785	21560	19600
0.0120	58.8	20580	20090	20335	19600
0.0130	63.7	18130	19110	17640	19355
0.0140	68.6	17395	17150	16905	16660
0.0150	73.5	15190	14945	15435	15925
A=36cm ² ,R0=8.5cm					
P(N/mm ²)	Force(N)	Volume(mm ³)			
0.0014	4.9	93060	74880	78480	86940
0.0027	9.8	63720	61020	53460	61020
0.0041	14.7	45540	50400	45720	51120
0.0054	19.6	40860	40860	35280	44100
0.0068	24.5	33120	35820	32220	38340
0.0082	29.4	30060	31860	28800	34920
0.0095	34.3	28080	26460	27540	30960
0.0109	39.2	27180	25920	26100	26640
0.0123	44.1	24120	22320	24300	24840
0.0136	49.0	21600	19800	23580	23400
0.0150	53.9	19980	18180	18900	22500
0.0163	58.8	18000	16200	18720	21240
0.0177	63.7	16020	15300	17640	16740
0.0191	68.6	14940	15840	17100	14940
0.0204	73.5	12960	14400	15480	13860
A=25cm ² ,R0=8.5cm					
P(N/mm ²)	Force(N)	Volume(mm ³)			
0.0020	4.9	84250	77250	73000	67500
0.0039	9.8	43625	48750	47875	46625
0.0059	14.7	34000	40125	43375	38000
0.0078	19.6	28875	32750	38375	33625

0.0098	24.5	25875	27000	27375	28625
0.0118	29.4	22750	25250	22875	26125
0.0137	34.3	21750	21625	20625	23250
0.0157	39.2	20875	19375	19875	19500
0.0176	44.1	18375	17875	19125	19250
0.0196	49.0	17875	17375	19000	18250
0.0216	53.9	17375	17000	15875	17625
0.0235	58.8	15750	15000	14750	15625
0.0255	63.7	15500	14375	14500	15500
0.0274	68.6	14375	13625	13875	13875
0.0294	73.5	13375	13125	13500	13250

底面：正方形					
R0=8.5cm,A=25cm ²					
P(N/mm ²)	Force(N)	Volume(mm ³)			
0.0020	4.9	82500	88750	72500	91250
0.0039	9.8	50000	52500	51250	57500
0.0059	14.7	41250	42500	41250	43750
0.0078	19.6	33750	37500	33750	38750
0.0098	24.5	25000	31250	30000	32500
0.0118	29.4	21250	25000	25000	26250
R0=8.5cm,A=36cm ²					
P(N/mm ²)	Force(N)	Volume(mm ³)			
0.0014	4.9	100800	95400	106200	91800
0.0027	9.8	64800	72000	66600	64800
0.0041	14.7	50400	57600	55800	54000
0.0054	19.6	46800	48600	45000	43200
0.0068	24.5	41400	30600	36000	37800
0.0082	29.4	32400	25200	32400	34200
R0=8.5cm,A=49cm ²					
P(N/mm ²)	Force(N)	Volume(mm ³)			
0.0010	4.9	122500	83300	110250	112700
0.0020	9.8	80850	63700	78400	78400
0.0030	14.7	58800	46550	66150	63700
0.0040	19.6	46550	41650	58800	49000
0.0050	24.5	44100	39200	49000	44100

0.0060	29.4	36750	36750	41650	39200
R0=11cm,A=25cm^2					
P(N/mm^2)	Force(N)	Volume(mm^3)			
0.0020	4.9	108750	116250	121250	122500
0.0039	9.8	90000	102500	102500	95000
0.0059	14.7	80000	77500	86250	73750
0.0078	19.6	70000	66250	70000	65000
0.0098	24.5	61250	55000	60000	55000
0.0118	29.4	53750	50000	50000	52500
R0=11cm,A=36cm^2					
P(N/mm^2)	Force(N)	Volume(mm^3)			
0.0014	4.9	163800	180000	171000	156600
0.0027	9.8	120600	104400	122400	113400
0.0041	14.7	97200	81000	99000	84600
0.0054	19.6	82800	61200	86400	70200
0.0068	24.5	68400	59400	68400	59400
0.0082	29.4	61200	52200	64800	48600
R0=11cm,A=49cm^2					
P(N/mm^2)	Force(N)	Volume(mm^3)			
0.0010	4.9	183750	178850	159250	191100
0.0020	9.8	127400	132300	120050	134750
0.0030	14.7	100450	105350	98000	107800
0.0040	19.6	83300	95550	88200	83300
0.0050	24.5	73500	83300	83300	68600
0.0060	29.4	63700	68600	68600	58800
R0=14cm,A=36cm^2					
P(N/mm^2)	Force(N)	Volume(mm^3)			
0.0014	4.9	232200	232200	230400	216000
0.0027	9.8	208800	208800	203400	181800
0.0041	14.7	169200	169200	167400	149400
0.0054	19.6	135000	140400	135000	131400
0.0068	24.5	117000	120600	111600	113400
0.0082	29.4	100800	106200	102600	100800
R0=14cm,A=49cm^2					
P(N/mm^2)	Force(N)	Volume(mm^3)			
0.0010	4.9	284200	271950	274400	298900
0.0020	9.8	227850	213150	237650	245000

0.0030	14.7	188650	176400	196000	191100
0.0040	19.6	166600	161700	171500	149450
0.0050	24.5	151900	137200	151900	124950
0.0060	29.4	132300	122500	134750	117600

二、 三維表面擠壓數據

one layer			24309	543.52	0.1339
Volume(mm ³)	Force(N)	Pressure(N/mm ²)	21724	632.32	0.1679
63791	101.63	0.0132	19403	754.01	0.2159
60145	109.77	0.0148	17802	883.32	0.2679
54132	132.35	0.0191	16572	991.18	0.3153
50802	147.12	0.0222	15864	1086.9	0.356
43712	173.95	0.029	three layers		
Volume(mm ³)	Force(N)	Pressure(N/mm ²)	Volume(mm ³)	Force(N)	Pressure(N/mm ²)
37633	236.12	0.0435	62706	130.34	0.0171
33120	289.11	0.058	43018	245.68	0.0414
30050	338.71	0.0725	37564	321.08	0.0592
26999	378.45	0.087	33555	398.18	0.0791
23947	465.75	0.1159	30962	452.86	0.095
21947	549.42	0.1449	27041	569.5	0.1307
20086	647.28	0.1811	24588	647.29	0.1583
18603	738.38	0.2175	22557	763.9	0.1979
17209	818.04	0.2538	20489	859.87	0.2375
16131	895.26	0.29	19282	963.37	0.277
15174	966.87	0.3262	17848	1045.58	0.3166
14665	1050.22	0.3625	four layers		
two layers			Volume(mm ³)	Force(N)	Pressure(N/mm ²)
Volume(mm ³)	Force(N)	Pressure(N/mm ²)	Volume(mm ³)	Force(N)	Pressure(N/mm ²)
70800	99.39	0.012	72176	136.07	0.0162
57614	131.27	0.0182	50598	253.64	0.0383
49076	167.75	0.0259	41979	354.41	0.0607
40981	224.98	0.0391	36318	454.36	0.0857
36118	276.14	0.0523	32959	510.97	0.1028
32193	322.78	0.066	29188	628.31	0.1371
30083	372.06	0.0795	26460	735.68	0.1713
26143	454.71	0.1067	23611	852.42	0.2142

21963	974.6	0.257	24207	1081.17	0.2672
20585	1089.04	0.2998	six layers		
five layers			Volume(mm ³)	Force(N)	Pressure(N/mm ²)
Volume(mm ³)	Force(N)	Pressure(N/mm ²)	102749	110.67	0.0104
76691	135.23	0.0155	83211	158.53	0.0172
56760	246.55	0.0345	71766	211.07	0.0253
47977	346.94	0.0543	60634	295.13	0.0395
42587	418.45	0.071	54764	359.6	0.0516
39150	484.33	0.0869	48551	423.02	0.0657
34100	582.74	0.1146	43469	483.9	0.0809
30530	693.03	0.1467	39881	597.62	0.1059
28010	826.81	0.1854	36683	701.74	0.1314
25763	946.01	0.2243	32599	822.81	0.1667

三、 影像分析數據—理想球體體積與真實體積之偏差

八次照相擷取的體積數據 (mm ³)			
61839	59637	61309	61594
60027	63275	57996	60790

※以上理想球體平均體積為 60811mm³

※真實體積為 59360mm³

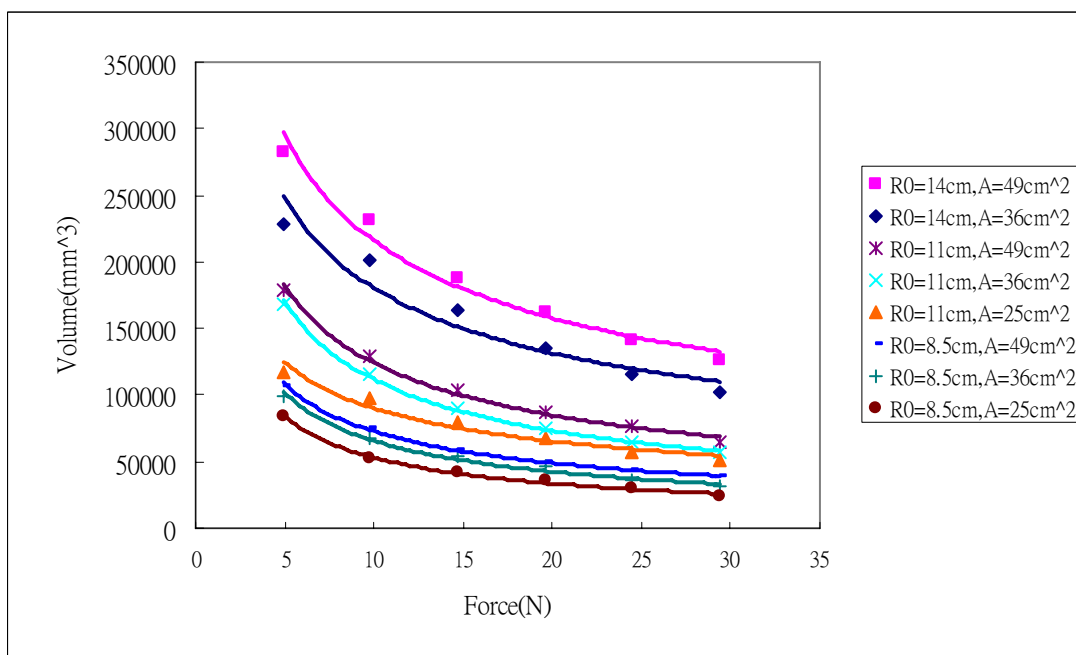
※偏差為 2.4%

數據處理與分析

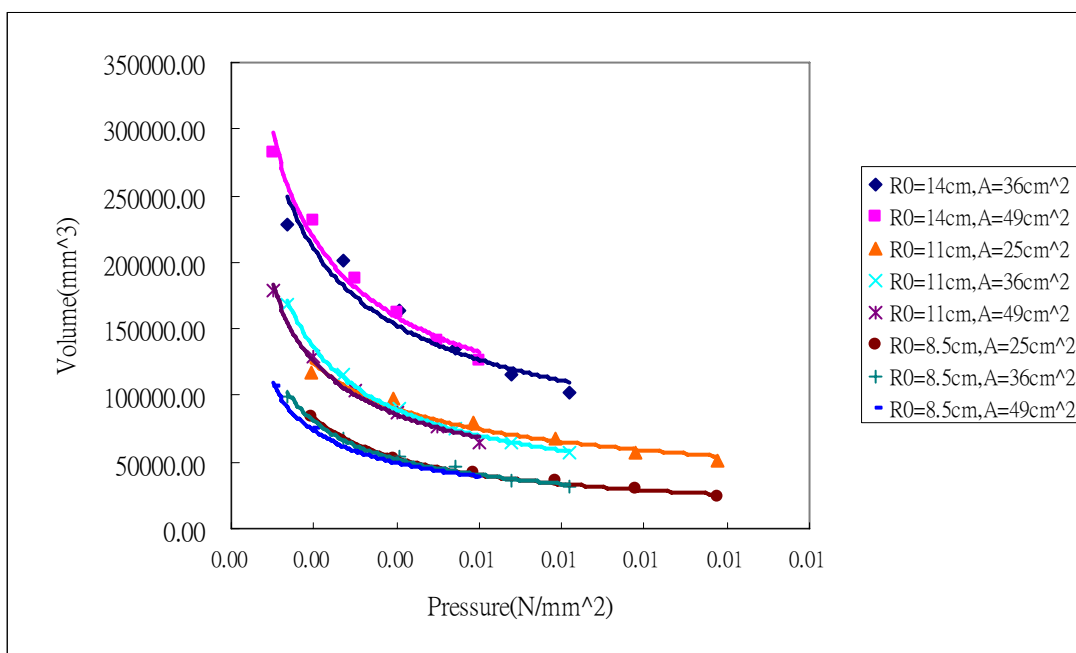
一、 單一平面擠壓

(一) 擠壓面為正方形：

1. 在各外力(Force)、模型(表面積：Area)下的體積(Volume)變化

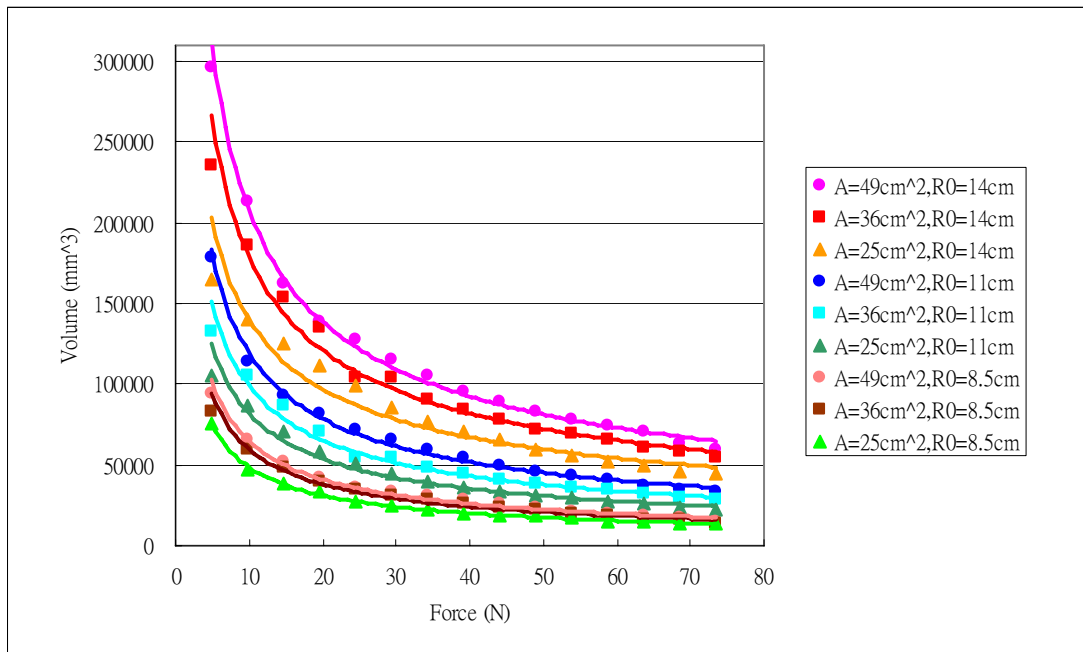


2. 在各壓力(Pressure)、模型(表面積：Area)下的體積(Volume)變化

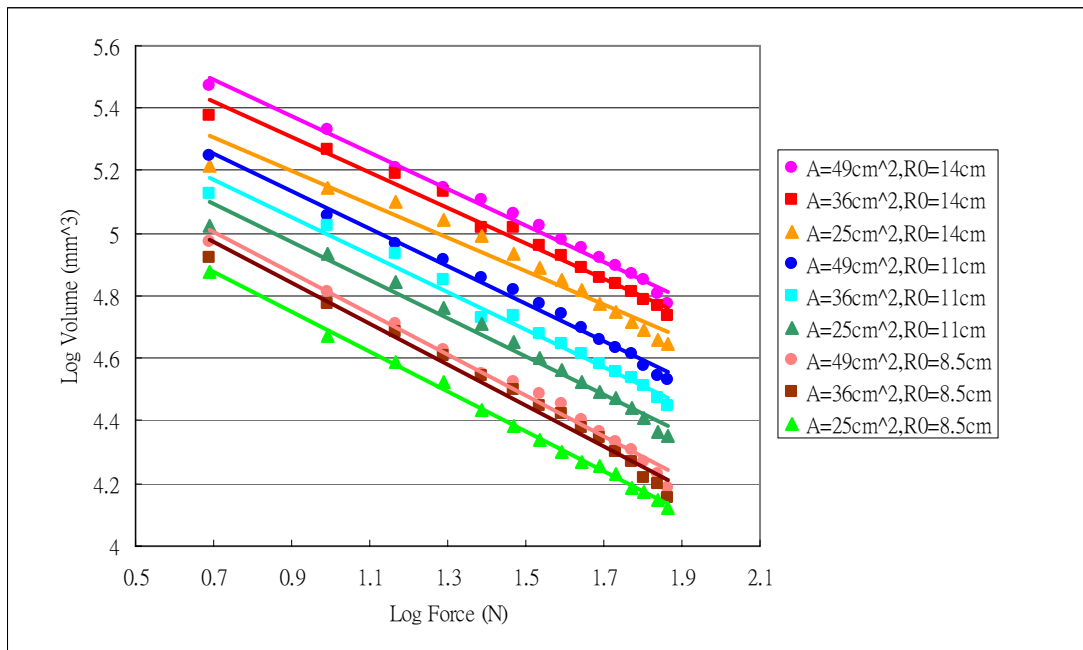


(二) 擠壓面為圓形：

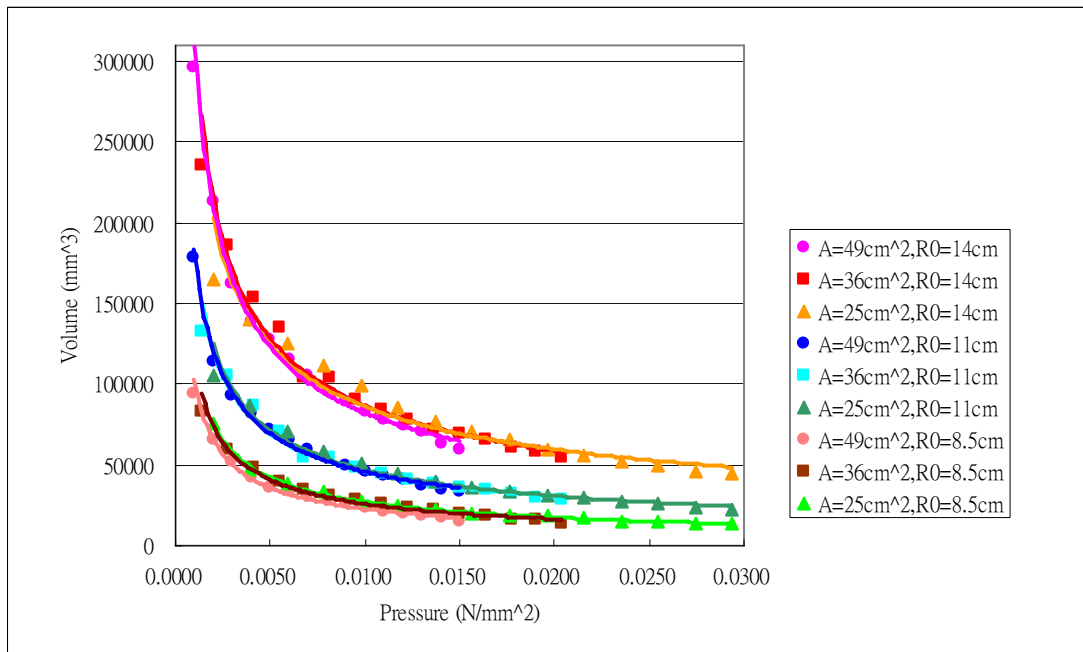
1. 在各外力(Force)、模型(表面積：Area)下的體積(Volume)變化



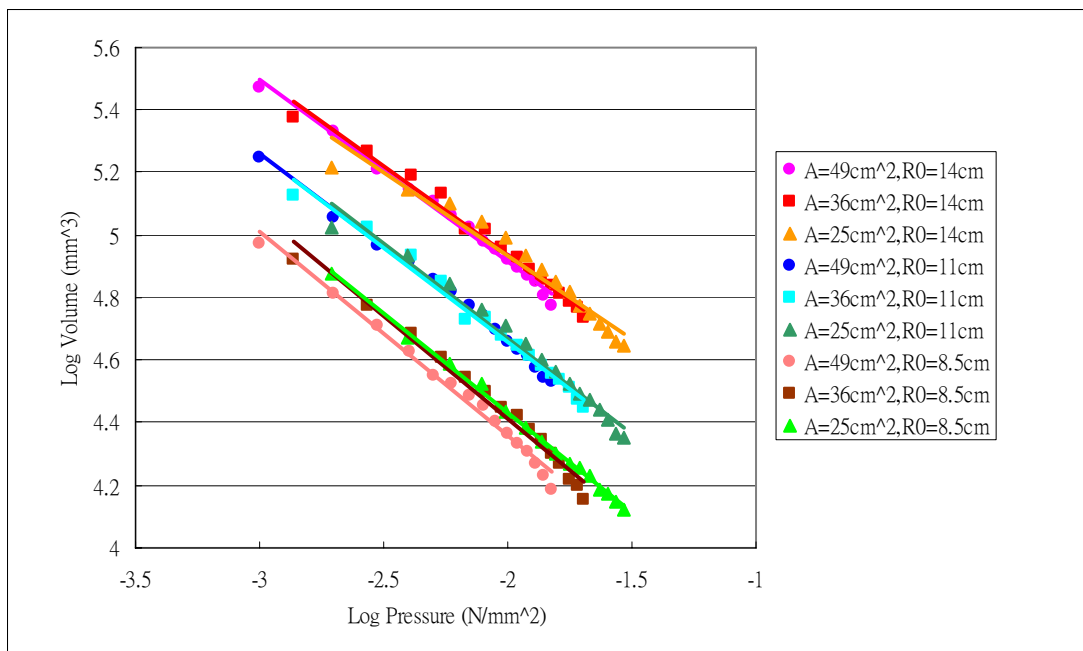
2. 將上圖(V-F)的橫座標與縱座標皆作對數處理：



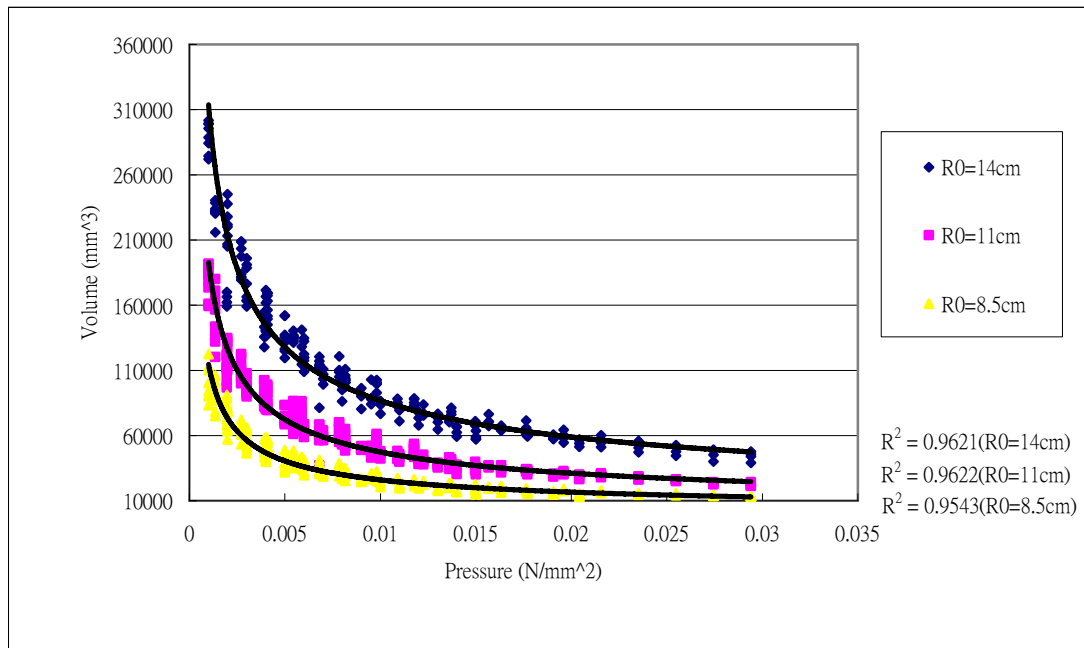
3. 在各壓力(Pressure)、模型(表面積：Area)下的體積(Volume)變化



4. 將上圖(V-P)的橫座標與縱座標皆作對數處理：

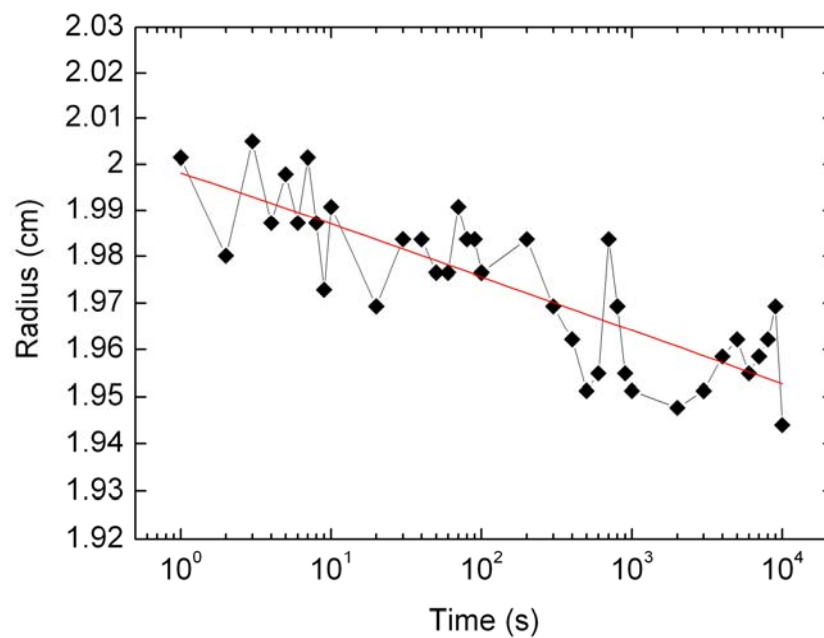


(三) 將所有單一平面擠壓數據整合結果：

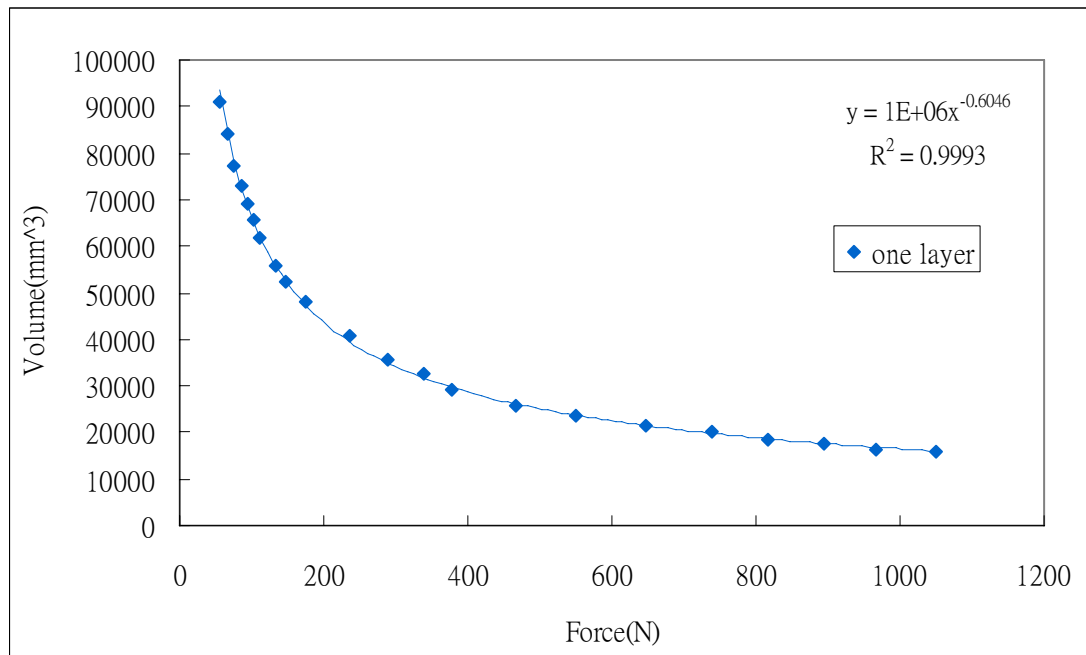


二、 三維表面擠壓

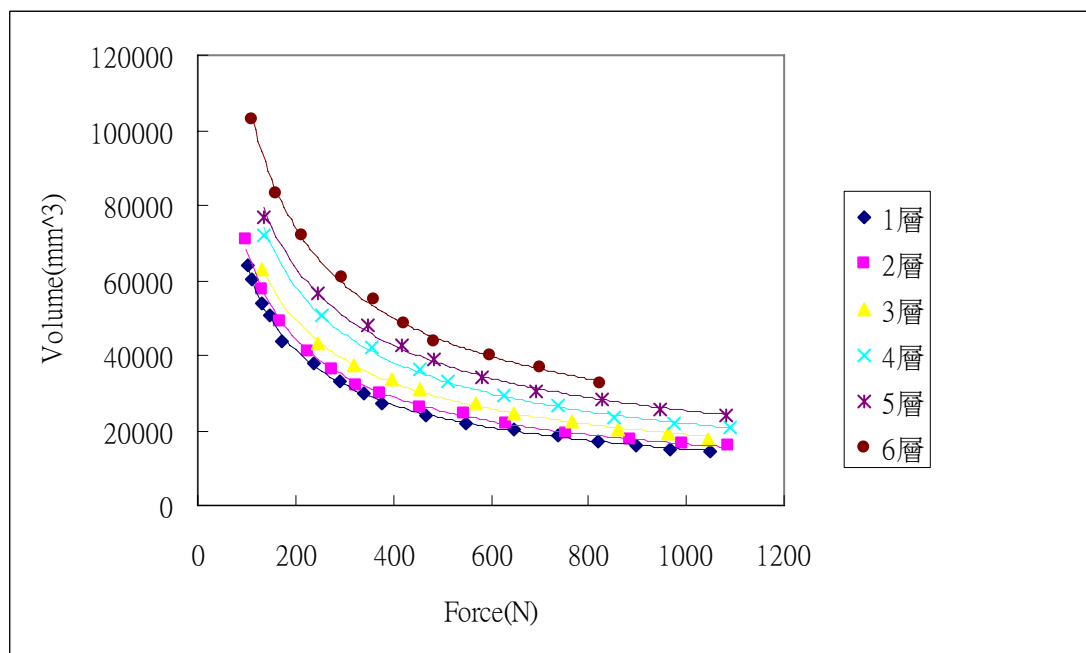
(一) 定壓下(15 PSI)長時間對紙球($R_0=14cm$)半徑的影響



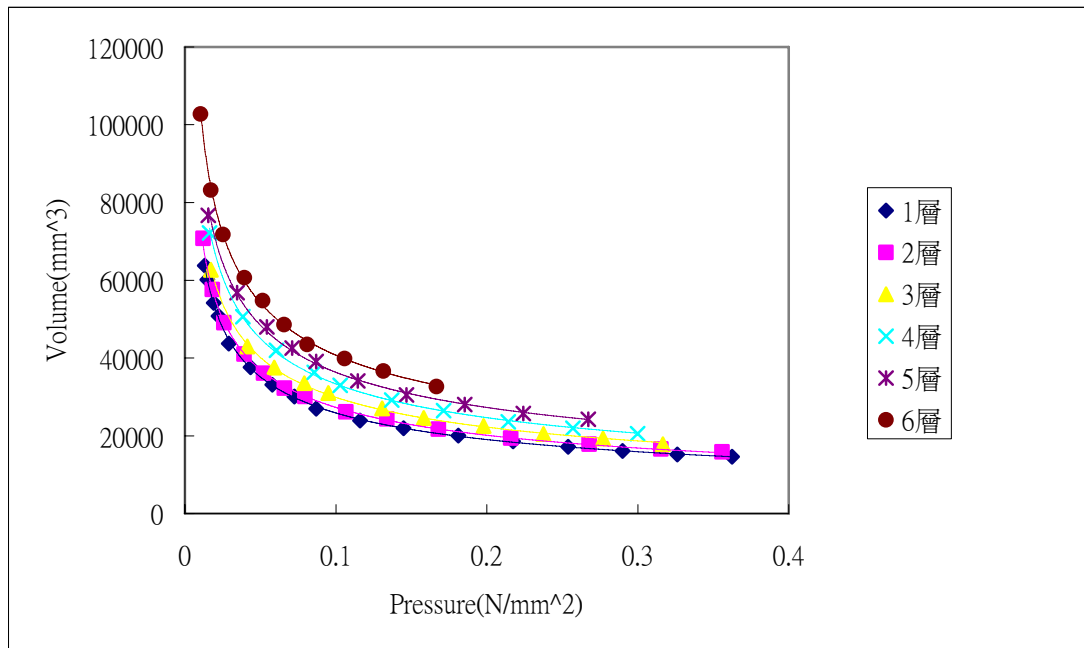
(二) 單張鋁箔紙樣本在各種 Force 下的 Volume 之變化



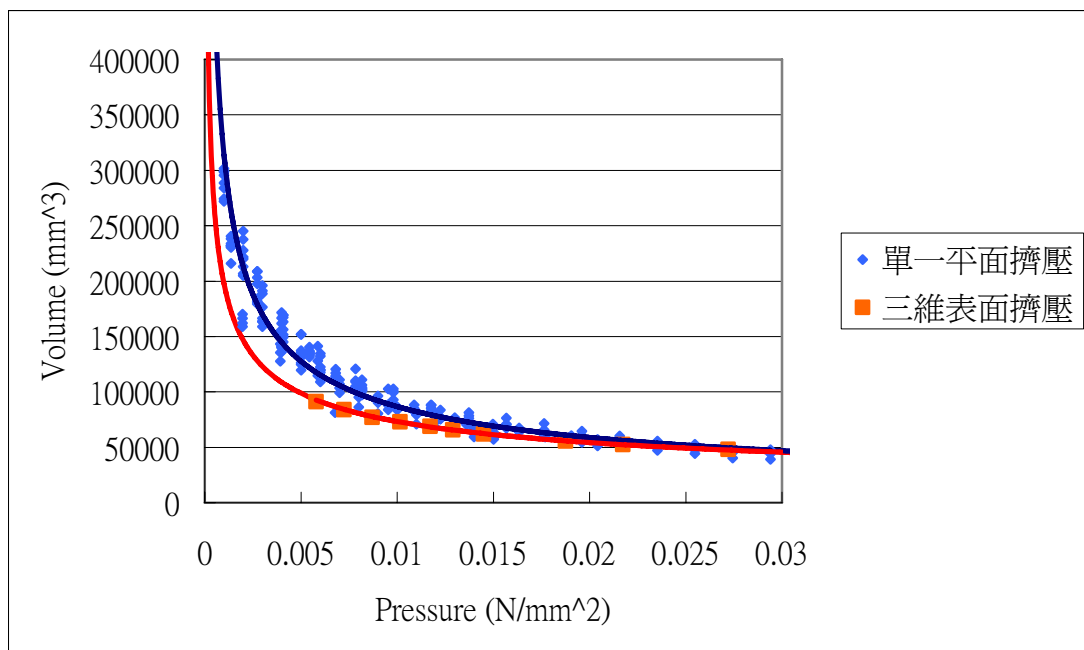
(三) 多層鋁箔紙樣本在各種 Force 下的 Volume 之變化



(四) 多層鋁箔紙樣本在各種 Pressure 下的 Volume 之變化



三、 兩種實驗的結果比較



↑ 當我們將兩種不同擠壓方式的曲線放在一起比較時，可以很明顯的看出其效率的差異。

陸、 討論

一、 三維表面擠壓

(一) 數據的分析討論

1. 定壓下長時間對紙球半徑的影響之數據

由這張數據，不難發現球半徑變化在定壓下是很小的。經過了 10^4 秒，也就是將近 3 個小時，半徑才變化了 0.05 cm 比例大約是 2.5% 左右。因此我們在求數據時是以同一個樣本直接一路作出各壓力下的半徑變化，不會因為在每個壓力停留的時間長短不同，進而導致實驗的誤差。

2. 單張鋁箔紙樣本在各種 Force 下的 Volume 變化

在圖表中，我們可以發現各數據點與依照乘冪關係適配出的曲線有相當高的吻合度。由適配出的曲線得知， $V \propto F^\alpha$ ， α 則約在 -0.605 附近。我們雖然不能由 α 的值了解鋁箔紙團在壓縮時的結構變化情形，但是卻得以由其與曲線的高吻合度得知其 Volume 在變化上依照 α 的指數性質相當的明顯、突出。

3. 多層鋁箔紙樣本在各種 Force 下的 Volume 變化

在與六種層數數據曲線比較上，乘冪關係的 $V = AF^\alpha$ 中，A 的性質與厚度有相當的關聯，而 α 的差距則沒那麼大。六條曲線的 α 值之標準差僅 0.025，與平均值 -0.605 相除之下約 4.2%，於是我們認為厚度的改變並不影響 α 值。

4. 多層鋁箔紙樣本在各種 Pressure 下的 Volume 變化

就 Volume-Pressure 圖表中的六條數據曲線的來看，乘冪關係的 $V = kP^\beta$ 中，k 的性質與厚度有相當的關聯，而 β 的差距則沒那麼大。六條曲線的 β 值之標準差僅 0.013，與平均值 -0.428 相除之下約 3.0%，這比起在 Force 與 Volume 的 α 值標準差還要更小。

(二) 實驗誤差討論

1. 氣體外漏影響

我們在研究的過程中發現了如此問題，根據觀察，只要是在接口、縫隙處都會有些微氣體外漏。其實，我們發現，只要高壓氣體不會外漏的太嚴重以至於壓力難以提高即可，因為就算氣體能夠通過樣本而抵達外界，但是在窄小的出口仍使得大量氣體保留在艙內，而其所造成的壓力值不變才是重點。

2. 理想球體假設

在數據分析的時候將樣本的形態設定為理想球體。我們發現，在初揉紙團時將其大致上揉成球體，最後壓出的形狀並不會太離譜，最後實驗出來的數據也十分符合指數關係，因此在這部分影響並不是非常大。

除此之外，我們還用另一種方式去驗證其與真實體積的誤差大小。在這之前，我們必須先定義所謂的「真實體積」。鋁箔紙球上佈滿坑坑洞洞，若是將凹陷的部分扣除體積顯然不合理，畢竟紙球體積本來就是空洞的架構。於是我們將鋁箔紙球的真實體積用「包」的方式來定義。

如此一來，要計算鋁箔紙球的體積，只需將紙球外部「包」一層薄保鮮膜，再用「排水」的方法即可算出。經過實驗比較，用拍攝影像方式擷取的數據與真實體積的誤差約在 2.4% 內(附在第 20 頁下方)。綜合我們在三維表面擠壓數據點的密集度來看，這部分的影響是不影響實驗結果的。

然而，實驗中我們也曾遇過偏離理想球體過於嚴重的樣本，但是這都算是少數。我們也曾過用更柔軟的紙張實驗過，最後被壓出的形狀就凹陷得十分不規律，因此我們並沒有採用該材質的樣本。

(三) 技術方面討論

1. 樣本包裝處理

初揉時，我們必須先揉出個雛型球體。這個過程必許很小力進行，因為 Volume 變化是不可逆過程，只要超過那個施力點就不可能在回頭了，所以必須謹慎。接下來，就是要將尖角修飾掉。經驗發現，當高壓氣體四面八方擠壓它時，有幾處的稜角十分穩固，進而化作一道「牆」，由尖處壓迫它並不會有太大的形變，不過由側向的話輕輕一壓就彎了，這表明著該處附近抵抗能力不均，且此形狀將影響我們所預期的理想球體，所以必須在此時根除它。

2. 氣壓調控

雖說我們的氣壓是可以經由電腦控制的，不過還是有部分是要靠手動的一節流閥。我們發現，在每次電磁閥打開補氣時，假設其開啓時間是在同樣的短時間下，所能造成的壓力提升並不一致。壓力需求越高，其影響力越小，甚至衝不上去，而這時就必須將節流閥的流量加大才行。

但是，我們又不能將其調得太高，因為壓力數據擷取頻率並沒那麼快，有時只是一瞬間的開啓就會造成補氣過多以至於超出我們欲得的壓力。所以，我們必須要有人在實驗操作時去根據每個壓力點來做調整。

(四) 物理量選定的討論

1. 體積：Volume(Y 軸)

爲了和往後的單一平面擠壓實驗數據做比對，我們決定採用 Volume。Volume 不受外在形狀的改變而失去意義，而另一優點則是與 Pressure 有關，當我們發現 $\frac{dW}{dV} = P$ 後，在與 Volume 比對上則較爲統一。我們不希望在 X 軸座標牽涉到了 Volume 的因子，結果 Y 軸座標卻是以其他樣式呈現(譬如：R)，故 Y 軸座標我們都採用 Volume。

2. 壓縮力道：Force(X 軸)

決定 Y 軸的物理量之後，X 軸的選定上就屬 Force、Pressure 最爲重要。這兩種物理量差別在於除以 Area 面積與否，而這在實驗中我們都會分別用這兩種觀點去觀察同一個實驗的結果有哪些方面的差異。

3. 壓力究竟意義著什麼？

若是要以作功來考慮整體的變化顯然是不恰當的，由於作功的起始點根本就不明確，但是，若是對 W 微分之後不會有上述的問題了。那麼，要對什麼微分呢？我們是著對 V(體積)微分之後，發現了一件很有趣的事情。原先

$$\Delta W = \int P dV, \text{ 經過 } \frac{dW}{dV} = \frac{d}{dV} \int P dV = P \text{ 的運算之後，愕然發現 } \frac{dW}{dV} = P。$$

倒數之後 $\frac{dV}{dW} = \frac{1}{P}$ ，而此 $\frac{1}{P}$ 就意味著每施了 dW 的能量後，能改變多少體積 dV 的「效率」。從這裡，我們就能夠比較：究竟是單一平面擠壓較耗功，還是三維表面擠壓。我們就是基於這樣的理論來進行比較的。

二、 單一平面擠壓

(一) 數據的分析討論

1. 在各種外力(Force)、模型(受壓面：Area)下的體積(Volume)變化

在圖表上，我們發現各曲線間會因爲其 R_0 、Area 的部分，出現明顯的差異。而這差異可以在橫軸與縱軸皆取對數處理後，看得更加明顯。對數處理後的圖表中，發現各實驗的適配曲線結果也相當吻合直線，且在同一 R_0 中，選定不同 Area 的實驗也近乎平行，這是令我們在意的地方。

然而，在方形受壓面的實驗中， $R_0=14\text{cm}$, $A=25\text{cm}^2$ 的實驗並沒有辦法很順利的完成。其原因在於，要將大張鋁箔紙揉成細長條柱體是很困難的，而且還要

控制其紙團均勻度，以及紙團頂部吻合擠壓受力面的形狀，在實驗上這些部分不僅實行困難，做出來的結果誤差也相當大，故不採用 $R_0=14\text{cm}$, $A=25\text{cm}^2$ 的實驗。

2. 在各種壓力(Pressure)、模型(受壓面：Area)下的體積(Volume)變化

第一，在不同的 Area、不同的 R_0 中， R_0 對曲線分佈的影響力十分顯著，所以可以發現同樣 R_0 的曲線會聚集在一起。當然這在前述就有提過，自身固有體積的影響力本來就很大。

第二，當我們將觀察角度由 Force 改為 Pressure 後，可發現 Area 所造成的影響就不再那麼顯著，而這現象在橫軸與縱軸皆取對數處理後更為明顯。這意味著，紙團本身的體積變化與輸入功的方式無關(改變 Area、Area 的形狀)，而是與輸入功的「量」有關($\Delta W = \int PdV$)。這部分在單一平面擠壓實驗中，且 R_0 固定下會成立。

經由此，我們將所有單一平面擠壓的數據全放在一張圖表，僅依照 R_0 作區分，再作曲線適配後發現， $R_0=14$ 、 11 、 8.5cm 的數據與趨勢線的 R 平方值各為 0.96 、 0.96 、 0.95 。在混合那麼多種 A 的變數後還能有如此吻合的情況，更進一步地驗證了上述情形。

第三，在發現體積變化有如此現象後，我們更進一步探討其指數 β 的部分($V = kP^\beta$)，結果發現，在 R_0 分別為 14 、 11 、 8.5cm 時，其依循的 β 值並不相同。在 $R_0=14\text{cm}$ 時， $\beta \approx -0.558$ ；在 $R_0=11\text{cm}$ 時， $\beta \approx -0.609$ ；在 $R_0=8.5\text{cm}$ 時， $\beta \approx -0.645$ 。在此，我們發現，指數的部分會與 R_0 一起變動。

(二) 實驗誤差討論

1. Force 晃動所造成的誤差

因為單一平面擠壓實驗的外力控制是由較直接的人為方式進行，所以在這方面的誤差可能會較三維表面擠壓實驗大。我們採用砝碼來克服這個問題。雖然砝碼本身質量也有些微的誤差，不過這部分只需用手部微調即可將誤差降至很低。

2. 判讀數據上的誤差

這部分是較為棘手的問題。由於在 Force 達 2.5kgw 之後，Height 的變化量變得十分微小($\text{Height} \times \text{Area} = \text{Volume}$)，容易因 0.5mm 的誤差而導致 Volume 不合理的回升狀況。通常我們是用直尺測量 Height 的變化，精準度十分有限。於是我們只好採多次數據的平均來避免此誤差的干擾。

(三) 技術方面討論

1. 鋁箔紙團置入外殼模型中

這部分是需要先用手將鋁箔紙團輕揉成雛型。力道上的拿捏並沒有那麼困難，但紙團結構上必須均勻才行。其實，只要抓住幾個要點就可以將這部分所造成的誤差降到最少。第一就是雛型與模型內部貼緊，第二就是上方受力面平坦、可均勻受力，最後就是揉製雛型時施力不可強壓。

(四) 物理量選定的討論

在物理量的部分我們使用了 Volume、Force、Pressure。我們曾經考慮用 Height 來作為探討的方向，但在不同的 Area 之下作比較時不具太大的意義，故不採用。

根據數學運算， $\frac{dW}{dV} = \frac{d}{Adh} \int Fdh = \frac{F}{A} = P$ ，所以 Pressure 的意義與在三維表面擠壓時所代表的意義是相同的。由此，就可以與三維表面擠壓實驗做比對，在數據的分析上有很重要的地位在。

柒、 結論

一、 形變的產生時是即時性的，可以忽略長時間對體積的影響。

在實驗中，我們在每個壓力點停滯的時間約略 5 秒上下，敢這麼篤定其不會影響實驗數據甚多的原因即在於此。由於在 5 秒之後再來的 3 小時內球半徑只變化了 2.5%，所以根本無須再等待下去。

另外值得一提的是，當我們在揉紙團的時候，尤其是材料復原能力差的，影響其體積最大的關鍵應該是短時間內的強壓力到大小，並不是後來較為小力的握壓，因為影響最終形變體積的因素中時間比起瞬時強壓是較不具影響力的。

二、 鋁箔 Volume 與其外力的關係為 $V \propto F^{\alpha}$, $V \propto P^{\beta}$

這是在三維表面擠壓實驗中最令人感到驚奇的結果。看似如此複雜、無頭緒的揉壓過程，竟然可以符合一個乘冪關係的數學式，還十分精準，因此我們更深信了此式的存在性。這現象我們在搜索其他相關文獻時，發現其他研究也曾指出會有如此關係。

在經由單一平面擠壓的實驗後，發現其指數的部分並沒有辦法完全不變，反而其內部應該隱含了其他結構上的因素。各數據點與適配出的曲線吻合度相當高，代表著其適配出的曲線可信度很高。

最重要的是，在各種的實驗中，Force、Pressure 都與 Volume 有著函數的關係，這也就是說：對同一個紙團而言，力道的大小將決定最終體積大小，而且是以一對一函數的方式呈現。如果再加上前面第 1 點的敘述，將不難發現，在決定

最終體積大小時握力是在最主要的因子，而不是壓握時間的長短。

三、 單一平面擠壓、 R_0 固定下，紙團體積變化與輸入功的方式無關，而是與輸入功的「量」有關。

這是個引人注目的現象，為此我們也作了多次實驗而得驗證。在 V - P 圖當中，我們發現改變 Area(改變輸入功的方式)所造成的影響非常的小，在橫軸與縱軸皆取對數後此現象更為明顯。於是我們進一步推測：Area 的大小及形狀對 $V(P)$ 函數關係不具影響。

如此一來，在比較兩種擠壓方式間的效率問題時，單一平面擠壓的實驗就不需要將各種 Area 的變化(形狀、大小)也考慮進去。除此之外，鋁箔紙團結構中在此部分隱含了什麼樣的「吸能」機制，是很值得更深入討論的部分。

四、 在三維表面擠壓實驗中， α 、 β 並不會因為鋁箔的厚度而改變。

這是個十分特殊的現象，不但說明了其指數的性質與其厚度並無關係，且隱含了它的性質是和其為「紙團」比較有關。



我們將壓過後的 10 層鋁箔紙樣本剖開觀察(見右圖)，發現鋁箔紙在狹小的空間內並不是均勻分佈的。細部觀察，發現那 10 張鋁箔幾乎被壓得緊緊的，宛如是「同一張紙」般，再經由皺摺來鞏固其內部架構。我們認為， α 、 β 不因厚度而變與此現象是有很大大關聯的。

另外，而在這些摺痕在內部就像是許許多多的隔板，而在隔版之中仍有著許多空間。這代表著紙團內部的結構並不是一般所預期的均勻狀態，而是有著特殊的架構機制來支撐整體的。

五、 三維表面擠壓比單一平面擠壓更有效率。

依照實驗數據的趨勢分析，以三維表面擠壓的方式是最有效率的。而造成其效率差別的原因可能與「不同的擠壓方式」造成的「體積構成結構」不同有關。

根據圖表(在第 26 頁下方)，在 $\text{Pressure} < 0.03 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ 的部分就可以很明顯的看出效率差別。在同一壓力(作功效率倒數)下三維表面擠壓的方式能將紙團壓縮得更小。換個角度來看，要壓到同一大小的體積，三維表面擠壓所需施的功，也就

是曲線下的面積，顯然的比單一平面擠壓來得少。

在更高的壓力下，我們認為這兩條曲線會趨近重疊。雖然說紙團體積是根據 $V = kP^\beta$ 這樣的關係變化，但我們都知道鋁箔紙體積是具有最小極限的。這意味著，兩條曲線勢必重疊為一，故在更高壓力下的效率會是相等的。

綜合上述部分，要擠壓紙團至相同體積大小，用三維表面擠壓是比單一平面擠壓來的有效率。能量消耗的節省主要是在體積變化甚大的階段，可以明顯拉開效率差距，達到節約能源效果。將此性質廣泛到生活中的垃圾壓縮、汽車碰撞等擠壓科學上，不僅可以節省更多的能源，保留更多人類的生活空間，在許多日常生活中的設計上也能有更周詳的考量。

拾、 資料來源

- #1. Kittiwit Matan, Rachel Williams, Thomas A. Witten, and Sidney R. Nagel. (2002). Crumpling a Thin Sheet. *Phys. Rev. Lett.* 88, 076101.
- #2. A. S. Balankin, O. S. Huerta, R. Cortes Montes de Oca, D. S. Ochoa, J. Martinez Trinidad and M. A. Mendoza. (2006). Intrinsically anomalous roughness of randomly crumpled thin sheets. *Phys. Rev. E* 74, 061602.
- #3. Eric M. Kramer and Alexander E. Lobkovsky. (1996). Universal Power Law in the Noise from a Crumpled Elastic Sheet. *Phys. Rev. E* 53, 1465.
- #4. 鋁箔紙 - Wikipedia〈民 96 年 12 月 5 日〉。維基百科。民 97 年 1 月 15 日，取自
<http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E9%8B%81%E7%AE%94%E7%B4%99&variant=zh-tw>

【評語】 040110

本作品在實驗設計上有很好的想法，對數據的處理也適當，
唯整體上並沒有很多的創意，故也未有特別創新的結論。