

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

高中組 物理科

第三名

040106

低雷諾數圓形及多邊形水躍的研究

學校名稱：國立嘉義高級中學

|                   |                             |
|-------------------|-----------------------------|
| 作者：<br><br>高一 呂軒豪 | 指導老師：<br><br>李文堂<br><br>黃進昌 |
|-------------------|-----------------------------|

關鍵詞： 圓形水躍、多邊形水躍、黏滯係數

# 低雷諾數圓形及多邊形水躍的研究

## 摘要

打開水龍頭，水鉛直落到正下方的水平板時形成圓形水躍。我們實驗研究  $20 < Nr < 150$  的低雷諾數圓形水躍的變因，探討圓形水躍半徑和流量、出水口高度、以及液體黏滯係數間的關係。

改用高黏滯係數的液體（4：1 的乙二醇水溶液），鉛直落入板上方深  $h$  的相同液體時，先形成圓形， $h$  漸大時形成環形圓紋曲面，再加大  $h$ ，形成多邊形水躍，內外圍同方向旋轉，轉速  $\omega$ ；液中加入水，黏滯係數高於及低於某定值，多邊形都消失，側面觀察，外圍液體做鉛直面旋轉。

將水平板改置於旋轉盤上方，使高黏滯係數（4：1）的乙二醇水溶液鉛直落入板上方形成多邊形水躍，逐漸加快旋轉盤的轉速至  $\omega$  時，多邊形都消失；逐漸減少乙二醇的濃度，至完全用水實驗，亦有多邊形出現，我們認為；平板上方的液體的轉動是非圓形水躍的成因。

# 雷諾數圓形及多邊形水躍的研究

## 一、研究動機：

第 46 屆全國科展學長以「利用因次分析法研究圓形水躍的變因」參展獲獎；學長實驗探討高雷諾數 ( $Nr > 200$ ， $Nr$  為雷諾數) 的液柱形成水躍的變因。經驗傳承時，指導我們做低雷諾數 ( $20 < Nr < 150$ ) 的水躍實驗，我們實驗時，發現有非圓形水躍的現象，引起我們進一步研究的興趣。

## 二、研究目的：

1. 因次分析法探討低雷諾數圓形水躍的變因。
2. 實驗探討非圓形水躍的成因。

## 三、文獻探討：

水龍頭流下的水柱撞到平台時，散開成一圓形薄層，經半徑  $R$  後水的高度突然上升，形成圓形水躍(circular hydraulic jump)現象；

1. Rayleigh(1914) 理論探討影響無黏滯狀態的圓形水躍半徑的變因。
2. Watson(1964) 理論探討黏滯係數對圓形水躍半徑的影響。
3. Ellegaard(1998) 首先演示多邊形水躍，出水口的高度距離平台不到 1 公分，平台上出現靜態的多邊形水躍。圖一所示為雷諾數低於 20 的多邊形水躍。
4. 周雨剛等四人在第 46 屆全國科展：「利用因次分析法研究圓形水躍的變因」，實驗探討高雷諾數 ( $Nr > 200$ ) 的液柱形成水躍的變因
5. 作者做低雷諾數 ( $20 < Nr < 150$ ) 的水躍實驗時，發現有非圓形水躍的現象。而且，液面一方面會在鉛直面內旋轉，另一方面還會在水平面內轉動。



圖一：雷諾數低於 20 的靜態多邊形水躍

#### 四、原理：

1. 從高  $H$  處下的水柱，撞到水平薄板時，輻射狀散開，形成一薄層的淺水區，產生以重力為恢復力的重力波(gravity wave)，其波速

$$v = \sqrt{gh} \quad \dots (1) \quad g: \text{重力加速度}, h: \text{水深}$$

由於薄層水深甚淺，所以波速很慢；水流的流速大於波速，此狀況稱為水流在臨界點以上(supercritical)。

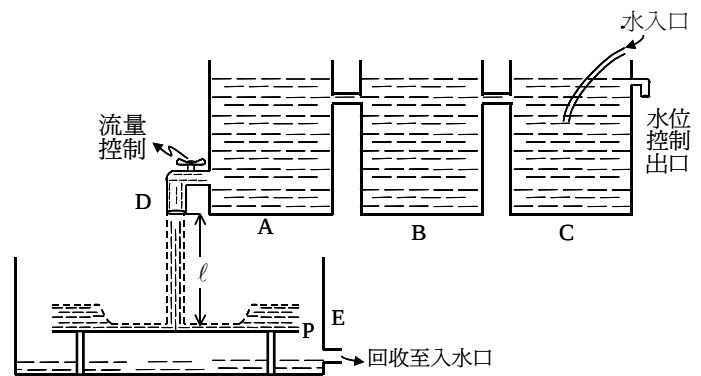
2. 水流散開時，由連續方程式知流速漸慢，再加上黏滯作用，在半徑  $R$  時流速小於波速，此狀況稱為水流在臨界點以下(subcritical)。水流在臨界點以上渡過到臨界點以下時，形成水躍現象。

3. 雷諾數(Reynolds number)  $Nr = \frac{Q}{2\pi r \nu} \dots (2)$  液柱由半徑  $r_0$  的水龍頭流出

時，在  $t$  秒內流入燒杯內體積  $V$ ，流量  $Q = \frac{V}{t}$ ，在出口下方  $H$  處液柱半徑  $r$ ，動黏滯係數  $\nu$ 。

#### 五、器材：

1. 為了液柱穩定的由  $D$  流出，三個不銹鋼焊接的容器  $A$ 、 $B$ 、 $C$  長寬高為  $20\text{cm} \times 30\text{cm} \times 20\text{cm}$ ，用塑膠管連成圖二所示， $B$  為「沉靜槽」， $D$  可改變流量。



圖二：實驗裝置

2. 水平板  $P$  附有升降台，可調整液柱落下高度。
3. 於升降台上置放一組壓克力製水盤，以不同厚度的玻璃片疊入盤中可調整平板上方的水深。
4. 回收桶中置一沉水馬達，可將液體經塑膠管送至入水口，循環使用。
5. 拉胚機、錄影機、電腦。

## 六、實驗過程：

### (一)實驗一：

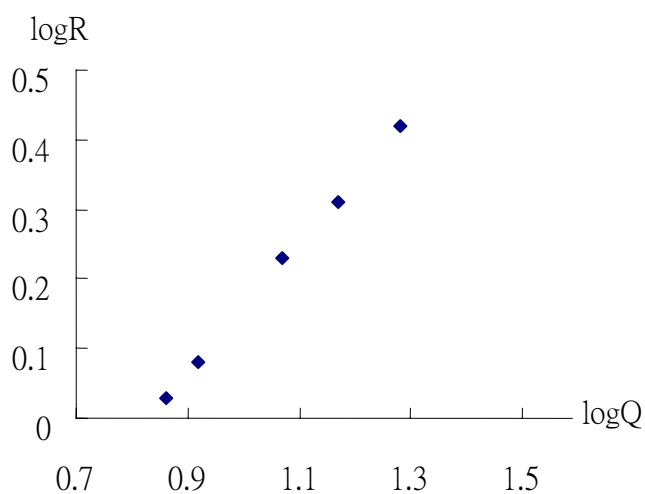
- 1.目的：研究流量對水躍半徑的影響。
- 2.過程：控制高度固定，改變流量大小(Q)，測量圓形水躍半徑。
- 3.結果：

表一：流量對圓形水躍半徑的影響

出水口半徑 0.2 cm ， H=10.4 cm ， T=16.5°C ， h=2.50 mm

| 次數                    | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             |
|-----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Q(cm <sup>3</sup> /s) | 7.30          | 8.40          | 11.8          | 14.5          | 19.2          |
| Nr                    | 121.6         | 124.8         | 123.7         | 125.4         | 130.6         |
| R(cm)                 | 1.07<br>±0.01 | 1.20<br>±0.03 | 1.70<br>±0.12 | 2.06<br>±0.20 | 2.62<br>±0.60 |
| logQ                  | 0.86          | 0.92          | 1.07          | 1.17          | 1.28          |
| logR                  | 0.03          | 0.08          | 0.23          | 0.31          | 0.42          |

- (1) 表一所示在一定高度下，圓形水躍的半徑隨著流量增大而增大。
- (2) 將 logR 為縱軸 logQ 為橫軸，其圖形斜率為 1.00 ⇒  $R \sim Q^{1.00}$



圖三：流量大小對水躍半徑的影響之 logR-logQ 圖

### (二)實驗二：

1. 目的：研究平板上水的深度對水躍半徑的影響。
2. 過程：控制流量固定，出水口高度固定，改變水面的深度(h)，測量水躍半

徑 R。

### 3. 結果：

表二：平板上水的深度對水躍半徑的影響

出水口半徑 0.2 cm， $Q=12.4\text{cm}^3/\text{s}$ ， $H=10.77\text{cm}$ ， $T=18^\circ\text{C}$ ， $Nr=144$

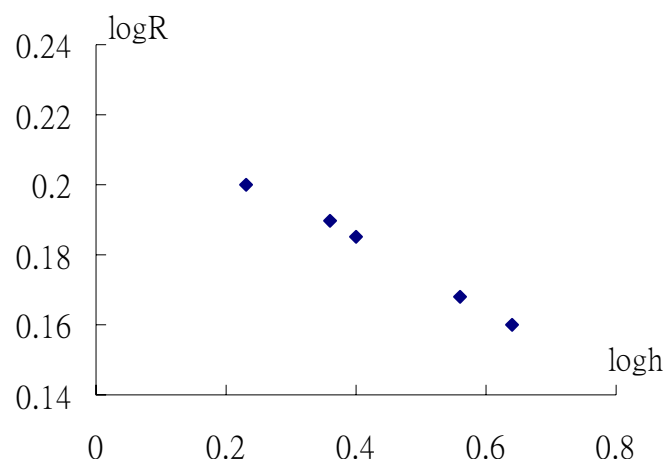
| 次數    | 1                  | 2                  | 3                  | 4                  | 5                  |
|-------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| h(cm) | 1.70               | 2.30               | 2.50               | 3.60               | 4.35               |
| R(cm) | 1.56<br>$\pm 0.03$ | 1.55<br>$\pm 0.03$ | 1.53<br>$\pm 0.02$ | 1.47<br>$\pm 0.04$ | 1.44<br>$\pm 0.03$ |
| logh  | 0.23               | 0.36               | 0.4                | 0.56               | 0.64               |
| logR  | 0.20               | 0.19               | 0.19               | 0.17               | 0.16               |

表二所示，R 先隨著 h 之增大而減小，至某一深度後水躍即消失。但在消失前會呈現一些規則的幾何圖形。

取方  $h \geq 0.07$  公分的 logR

為縱軸，logh 為橫軸，其

斜率  $= -0.07 \Rightarrow R \sim H^{-0.07}$ 。



圖四：平板上水的深度對水躍半徑的影響之 logR-logh 圖

### (三)實驗三：

1. 目的：研究出水口高度(H)對水躍半

徑的影響。

2. 過程：控制水流量固定，改變出水口的高度(H)，測量水躍半徑 R。

3.結果：

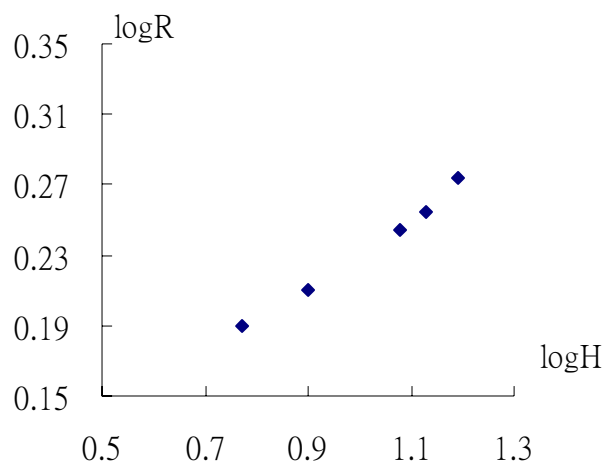
表三：出水口高度對水躍半徑的影響

出水口半徑 0.2 cm， $Q=12.4\text{cm}^3/\text{s}$ ， $h=2.50\text{ mm}$ ， $T=18^\circ\text{C}$ ， $Nr=128$

| 次數    | 1                  | 2                  | 3                  | 4                  | 5                  |
|-------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| H(cm) | 15.5               | 13.4               | 11.9               | 8.0                | 5.9                |
| R(cm) | 1.88<br>$\pm 0.03$ | 1.79<br>$\pm 0.03$ | 1.75<br>$\pm 0.02$ | 1.63<br>$\pm 0.04$ | 1.56<br>$\pm 0.03$ |
| logH  | 1.19               | 1.13               | 1.08               | 0.9                | 0.77               |

|      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| logR | 0.27 | 0.25 | 0.24 | 0.21 | 0.19 |
|------|------|------|------|------|------|

取  $\log R$  為縱軸， $\log H$  為橫軸，其斜率=0.16  $\Rightarrow R \sim H^{0.16}$ 。



圖五：出水口高度對水躍半徑的影響之  $\log R$ - $\log H$  圖

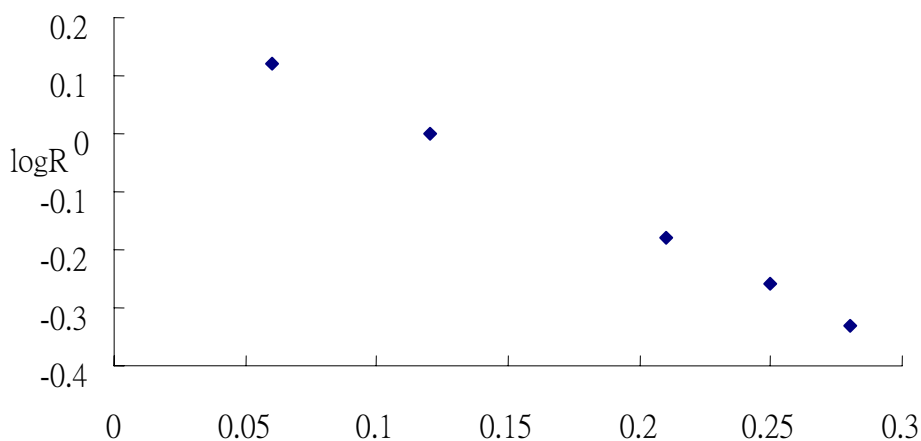
#### (四)實驗四：

- 目的：利用液體溫度改變以改變黏滯係數，研究黏滯係數對圓形水躍半徑的影響。
- 過程：
  - (1) 控制流量固定，出水口高度固定，水面的深度固定，改變水溫(T)，測量水躍半徑 R。
  - (2) 水中加入碎冰至水溫降至  $10^{\circ}\text{C}$ ，控制相同流量及高度，量圓形水躍半徑 R。
  - (3) 用電湯匙加熱以改變溫度，至  $60^{\circ}\text{C}$  為止，分別量不同溫度下的 R。
- 結果：

表四.水的溫度(黏滯係數)對 R 之影響  
 $Q=10.0 \text{ cm}^3/\text{s}$ ， $H=10.65 \text{ cm}$ ， $h=2.50 \text{ mm}$

| 次數                                           | 1                  | 2                  | 3                  | 4                  | 5                  |
|----------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 水溫( $^{\circ}\text{C}$ )                     | 10.0               | 20.0               | 40.0               | 50.0               | 60.0               |
| R(cm)                                        | 1.32 $\pm$<br>0.03 | 1.85 $\pm$<br>0.03 | 1.62 $\pm$<br>0.04 | 1.78 $\pm$<br>0.02 | 1.87 $\pm$<br>0.07 |
| $\nu (\times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s})$ | 1.3077             | 1.0050             | 0.6560             | 0.5494             | 0.4688             |
| Nr                                           | 92.2               | 85.6               | 129.7              | 132.7              | 141.5              |

|           |      |      |       |       |       |
|-----------|------|------|-------|-------|-------|
| logR      | 0.06 | 0.12 | 0.21  | 0.25  | 0.28  |
| log $\nu$ | 0.12 | 0.00 | -0.18 | -0.26 | -0.33 |



圖六：水的黏滯係數 $\nu$ 對圓形水躍半徑的影響  
之 logR-log $\nu$  圖

表四為水的溫度、黏滯係數(由 Lange's handbook of chemistry 查得)及 R 的關係。

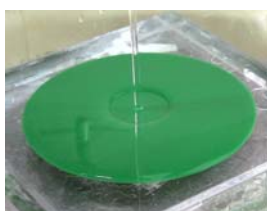
取 logR 為縱軸，log $\nu$  為橫軸，其斜率=-0.50  $\Rightarrow R \sim \nu^{-0.50}$ 。

## (五)實驗五：

1.為探討黏滯係數對圓形水躍半徑的影響，改用同樣高黏滯性但和水混合較不起泡的乙二醇做實驗。

### 2.實驗過程及結果：

不加水的乙二醇放入器材 A 桶中，呈現圖七(a)型圓形水躍，和前三個實驗完全相同的形態。然後出現圖七(b)半徑變大，最後收縮成七(c)。想用因次分析法研究半徑及 Q、H、h 的關係，但結果不理想。



(a)

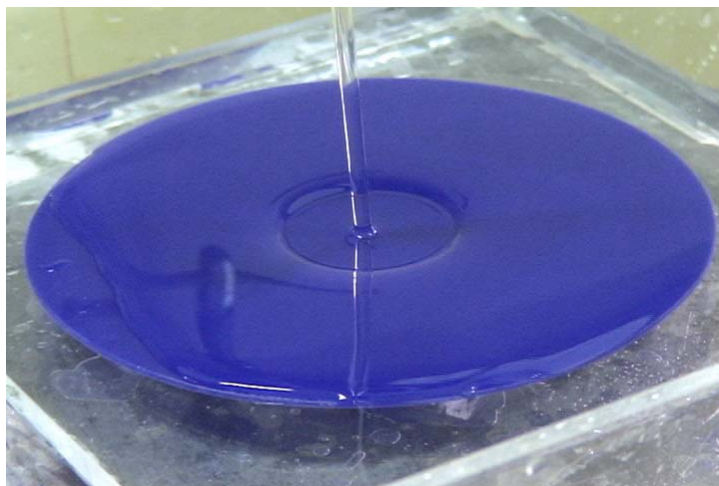
(b)

(c)

圖七：不加水的乙二醇黏滯係數太大，不會形成多邊形水躍

#### (六) 實驗六：

1. 訂製五個壓克力盤，長寬各 20cm，中央圓盤直徑 15cm，盛滿液體時，液深分別為 1.70mm、2.30mm、2.50mm、3.60mm、4.35mm。
2. 分別將盤置放在拉胚機的轉盤上，控制流量為  $20\text{cm}^3/\text{s}$ ，出水口距圓盤 11cm，如圖八所示。



圖八：乙二醇在直徑 15cm 的圓盤上形成圓形水躍

3. 用錄影機拍攝多邊形水躍，放入電腦中慢放，攝影機每秒拍攝 30 格畫面，利用畫面格數，算出多邊形轉動的週期。亦可用同樣方法量出拉胚機的轉動頻率。

4. 結果如表四：

表四：非圓形水躍的邊數、溶液濃度以及液面的旋轉頻率

| 乙二醇：水<br>(體積比) | 液深<br>h<br>(mm) | 圓形水<br>躍半徑<br>(cm) | 多邊形<br>邊數 | 多邊形<br>轉速<br>(圈/秒) | 拉胚機轉速(圈/秒)及多邊形變化              |
|----------------|-----------------|--------------------|-----------|--------------------|-------------------------------|
| 8：2            | 1. 70           | 1. 94              | 6         | 0.68               | 轉速超過 0.68 圈/秒變成圓形             |
|                | 2. 30           | 1. 92              | 6         | 0.57               | 轉速 0.88 圈/秒 8 邊形 0.96 圈/秒變成圓形 |
|                | 2. 50           | 1. 70              | 6         | 0.57               | 轉速 0.88 圈/秒 8 邊形 0.96 圈/秒變成圓形 |
|                | 3. 60           | 1. 61              | 6         | 0.68               | 轉速超過 0.96 圈/秒變成圓形             |
|                | 4. 35           | 1. 60              | 6 及 7     | 0.57               | 轉速超過 0.68 圈/秒變成圓形             |
| 8：4            | 1. 70           | 2. 12              | 6 及 7     | 0.53               | 轉速超過 0.60 圈/秒變成圓形             |
|                | 2. 30           | 2. 10              | 6 及 7     | 0.55               | 轉速 0.88 圈/秒 8 邊形 0.96 圈/秒變成圓形 |
|                | 2. 50           | 1. 87              | 7         | 0.57               | 轉速 0.88 圈/秒 8 邊形 0.96 圈/秒變成圓形 |
|                | 3. 60           | 1. 78              | 7         | 0.57               | 轉速超過 0.60 圈/秒變成圓形             |
|                | 4. 35           | 1. 80              | 7         | 0.68               | 轉速超過 0.88 圈/秒變成圓形             |
| 8：6            | 1. 70           | 2. 36              | 7         | 0.63               | 轉速超過 0.68 圈/秒變成圓形             |
|                | 2. 30           | 2. 25              | 7         | 0.63               | 轉速 0.80 圈/秒 8 邊形 0.86 圈/秒變成圓形 |
|                | 2. 50           | 2. 06              | 7         | 0.66               | 轉速 0.80 圈/秒 8 邊形 0.86 圈/秒變成圓形 |
|                | 3. 60           | 2. 03              | 7         | 0.75               | 轉速超過 0.88 圈/秒變成圓形             |
|                | 4. 35           | 2. 05              | 7         | 0.53               | 轉速超過 0.88 圈/秒變成圓形             |
|                | 1. 70           | 2. 62              |           |                    |                               |
|                | 2. 30           | 2. 41              | 7         | 0.75               | 轉速超過 0.88 圈/秒變成圓形             |
|                | 2. 50           | 2. 30              | 7         | 0.68               | 轉速超過 0.88 圈/秒變成圓形             |

|       |       |       |     |      |  |
|-------|-------|-------|-----|------|--|
| 8 : 8 | 3. 60 | 2. 27 | 不規則 | 0.68 |  |
|       | 4. 35 | 2. 28 | 不規則 | 0.7  |  |

5. 在濃度 8 : 8 之前，多邊形維持旋轉不停，邊數亦沒有變化；在濃度 8 : 8 之後，多邊形維持旋轉不停，邊數會變化不定。在濃度 8 : 24 時，看不到多邊形，但是，先使拉胚機以 0.50 圈/秒轉動，再使液柱撞液面，又形成旋轉的六邊形。

## 七、討論：

1. 我們作低雷諾數的圓形水躍，(  $20 < Nr < 150$  ) 探討圓形水躍半徑  $R$  的變因有流量  $Q$ ，出水口距板高度  $H$ ，黏滯數  $\nu$ （利用水溫改變黏滯係數），平板上水的原有高度  $h$ ，重力加速度  $g$ ；利用因次分析法  $R = kQ^\alpha H^\beta \nu^\gamma h^\delta g^\sigma$ ，實驗結果由  $\log R$  分別對  $\log Q$ 、 $\log H$ 、 $\log \nu$ 、 $\log h$  之斜率得  $\alpha = 1.00$ 、 $\beta = 0.16$ 、 $\gamma = -0.50$ 、 $\delta = -0.07$ ，因次分析法可得  $\sigma = 1.0$ ，

$$\text{即 } R = kQ H^{0.16} \nu^{-0.5} h^{-0.07} g。$$

- (1) 流量較大的水衝到平板時流速快，在半徑（ $R$ ）較大處，波速方小於流速，所以  $Q$  大  $R$  大。

- (2)  $H$  愈高（即出水口高），衝到平板的水流流速  $\nu$  愈快，因  $\nu^2 = \nu_0^2 + 2gH$ ，（ $\nu_0$  為剛離開出水口處的水流速度），所以  $R$  愈大。

- (3) 黏滯力使板上的水流流速減慢，所以  $\nu$  愈大， $R$  愈小。

- (4) 板上原有水，高  $h$  愈大，因重力的波其波速  $= \sqrt{gh}$ ；所以原有水深  $h$ ，再加上從出水口流下的水衝下來，水膜因有厚度，所以  $h$  愈深，重力波速愈快，因此  $R$  愈小。

- (5) 低雷諾數的圓形水躍和學長的高雷諾數  $Nr > 200$  的圓形水躍半徑

$$R = kQ^{\frac{2}{3}} H^{-\frac{1}{6}} \nu^{-\frac{1}{3}} g^{-\frac{1}{6}} \text{ 不同。}$$

2. 不加水的乙二醇濃度大時，只形成和水一樣的圓形水躍(a)型及圓形環紋曲面(b)型，卻看不到水躍形成多邊形及旋轉現象。

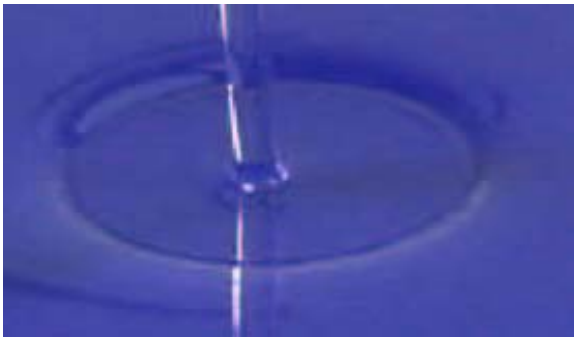
3. 乙二醇的動黏滯係數 25°C 時為  $\nu = 14 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ ，水為

$$\nu = 0.893 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

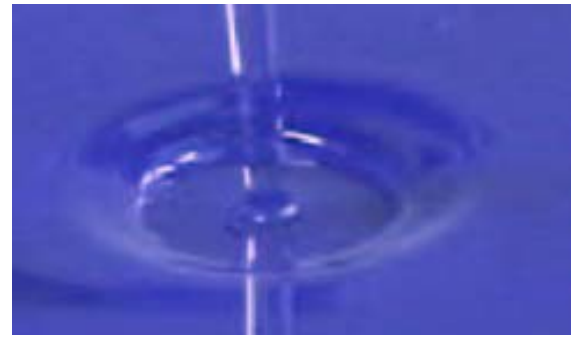
乙二醇的表面張力為  $4.5 \times 10^{-2} \text{ N} / \text{m}$ ，水為  $7.2 \times 10^{-2} \text{ N} / \text{m}$ ；不加水的乙二

醇黏滯阻力太大，液面不旋轉，所以無法形成多邊形。

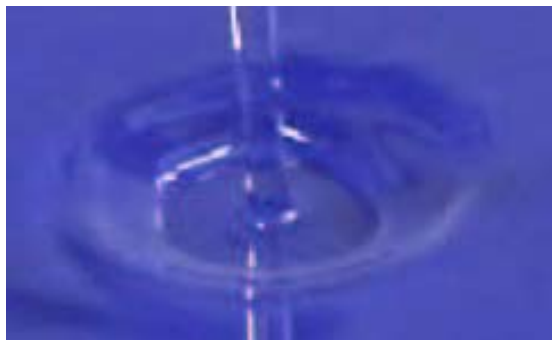
4. 圖九為  $h=2.50\text{mm}$ ，溶液濃度 8：2，由錄影的電腦畫面所擷取的四個不連續圖形，乙二醇水溶液由圓形出水口往下衝撞，圖九(a)原來盤上方沒有液體，液柱撞盤面形成圓形水躍，(b)由於盤面上已淹蓋液體，使液面的圓形水躍半徑向圓心收縮；又靠近盤面的液體受到較大的黏滯阻力，且由出水口不停的流下液體，於是沿著盤面的下層液體往外流，上層表面液體向圓心移動，使液體沿水平軸旋轉(即在鉛直面內旋轉)如圖十所示；由於液體在鉛直面的旋轉造成液面在水平面上轉動，所以形成多邊形。



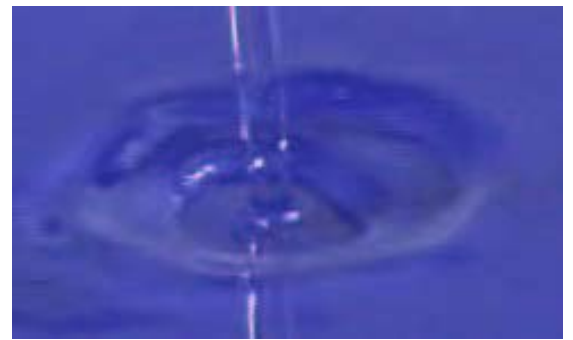
(a) 乙二醇水溶液剛入圓盤，  
形成半徑 2cm 的圓



(b) 盤上方的液深達 2.50mm  
時圓形開始收縮

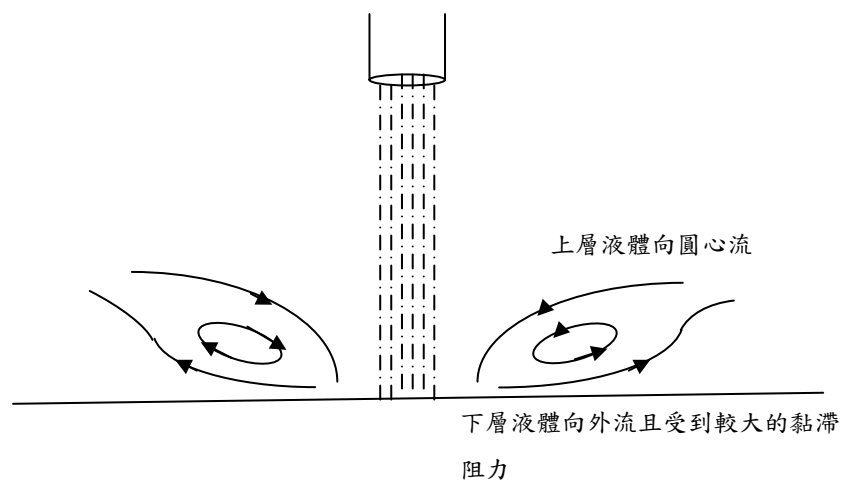


(c) 靠近盤面的液體受到較大的黏滯阻力，接近表面的液體繼續收縮，出水口不斷流出液體，沿著盤面往外流，使液面開始旋轉，且出現多邊形



(d) 多邊形穩定的轉動，頻率 0.57 圈/秒

圖九：由錄影帶擷取的不連續畫面：(a)原來盤上方沒有液體，液柱撞盤面形成圓形水躍，(b)由於盤上的液體已滿，使液面的圓向圓心收縮，靠近盤面的液體往外流，使液體在鉛直面內旋轉，(c)(d)顯現液體在水平面上轉動，並形成多邊形



圖十：液體鉛直旋轉示意圖

5. 2.30mm 和 2.50mm 的液深最容易形成多邊形，因為太淺時，參與在鉛直面轉動的液體轉動慣量太小，不易帶動液面在水平面內轉動，使圓形裂解為多邊形。太深，上層向圓心流，下層向外流以及黏滯阻力不足以使液體在鉛直面內轉動。
6. 拉胚機轉動時，液體繞圓盤的中心圓周運動，從加速座標系的圓心看，多邊形受到向外的虛設力(fictitious force)，所以轉速加快多邊形的邊數增加，進而變成圓形，轉速再加快液體沿切線方向飛出。
7. 濃度太小，黏滯阻力不足，無法轉動，啟動拉胚機使液體轉動，再使液柱落入液中亦可使水躍形成多邊形。

## 八、結論

1. 低雷諾數的圓形水躍的半徑  $R$ ，隨著流量  $Q$  以及落下高度  $H$  的增大而增大。  
半徑  $R$  隨著平板上面原有水的高度  $h$  及黏滯係數  $\nu$  而減少。
2. 高黏滯係數的液體，會產生多角形水躍，在水平面和外圍一起旋轉，在鉛直面上液體亦會轉動。
3. 用拉胚機使圓盤轉動，當乙二醇雖稀釋至接近純水時，仍可形成多邊形的水躍。

## 九、參考資料

1. 彭黃勝、范治民、蔡國棟和李志強：水牆，中華民國中小學科學展覽第二十一屆至三十屆優勝作品專輯  
國立台灣科學教育館編印，頁 301-307
2. 周雨剛、洪健凱、胡思宇和高頌凱：利用因次分析法研究圓形水躍的變因，  
中華民國第四十六屆中小學科學展覽會作品說明書。
3. Clive Elligard, "Creating corners in kitchen sinks", Nature, Vol.392, P767-768, 1998.
4. Thomas R. N. Jansson, "Polygons on a rotating fluid surface", Physics Review Letters, 174502, 2006(May)

【評語】 040106

1. 觀測低雷諾數流體在不同高度及轉速下的水躍現象，發現在一定轉速下黏滯係數某特定範圍可形成多邊型之水躍。圓型水躍以因次分析法求出半徑與高度、板上水深度、黏滯係數與重力加速度之因次關係。數據充實，分析數據妥適。
2. 高雷諾數流體之水躍現象在近屆科展已得獎，且利用因次分析法將實驗數據線性歸化所得水躍半徑與各變因之因次關係之物理原理或意義未深入探討。