中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

最佳團隊合作獎

080412

反尤拉過程

學校名稱：臺北縣樹林市大同國民小學

作者：	指導老師：
小六 李秉霙 小六 陳玟卉 小六 邱楷晶 小五 吳蕙均 小五 陳宛秀 小六 周偉智	顏榮皇 陳梅娟

關鍵詞：　互質個數、尤拉函數、反尤拉過程

摘要

使用尤拉函數尋找某一個自然數 n 互質個數 k，Ψ（n）=k 是大家都以精熟悉的方法。而，我們有一個想法，某一個互質個數是 k 的情況下，則對應於自然數 n 的情況是如何？如何從 Ψ（n）=k 反推 Ψ^{-1}（k）=n？Ψ^{-1}（k）=n 有沒有解？對於 Ψ^{-1}（k）=n 有哪些性質？Ψ^{-1}（k）=n 解的範圍如何？在本研究將逐一研究及討論。

壹、前言

一、研究動機

（一）致謝

「該給小朋友的學習，老師不會少給。否則，老師就對不起小朋友。」
這一直是我們的老師口頭禪，也因此，談科學展覽一直是老師上課的重點。所以，每一年參加全國科學展覽已經是是我們學校的傳統。這四年來，已經有五件作品在縣級比賽被選為國展代表。
2006 年台灣國際科學展覽會有史以來最年輕的得獎者，就是我們學校九十三學年度畢業的學長，以當時國小畢業的作品得到台灣國際科學展覽佳作。
另外一位學長，九十二學年度畢業的學長在國小階段，閱讀一篇「數學傳播」的文章，在學校的圖書館和師長討論，破解平面「Sperner 棋」並且討論「定點原理」，該科展作品曾經發表在九十三學年度年縣賽，同樣題材在去年再出現，由別的學校高中學長以「永不妥協」發表獲得第 47 屆全國科展高中組數學科第一名。
這都要感謝學校給我們好的研究環境，我們感謝著。

（二）科學展覽的教育性

之所以會選擇「尤拉函數」當做研究題材，來自老師的堅持。
老師認為，科學展覽的目的不能侷限於是否能得獎。科學展覽有其一定的教育性，題材的選擇必需要和我們的學習有一定程度的相關。質數一直是我們小學五年級提到的課題，也因此，互質個數變得很有趣的問題。

（三）學長科學展覽作品延續

民國九十四年三月，當時小學六年級學長參加科學展覽的作品「不能再約分的真分數」，利用小學五年級所學的因數、倍數、以窮舉方式及排容原理規律，並討論整數的互質性質。該作品曾經提到一個有趣的例子。

分母是 77 的最簡真分數有多少個？

因數、倍數及互質一直是國小數學課程討論的題材。過去，我們會以尤拉函數計算某自然數 n 的互質個數。本研究中希望我們能由 Ψ（n）=k 反推 n 值。如果，無法知道 Ψ（n）=k 反推 n 值的唯一值，也希望我們能夠找到由 Ψ（n）=k 反推 n 值的過程。也就因為此一緣故，本作品稱為「反尤拉過程」。

二、研究目的

尋找 k=1~50 反尤拉過程 Ψ^{-1}（k）。當 Ψ^{-1}（k）有解時，將全部的解找出來。

三、研究材料與設備

紙及筆。

四、名辭定義

Ψ（n）的定義：比 n 小又和 n 互質的自然數的個數。
Ψ^{-1}（k）的定義：設 Ψ（n）=k，則反尤拉過程 Ψ^{-1}（k）=n。

貳、研究過程

一、文獻探討

我們把尤拉函數的相關性質排列如後。

性質一：比質數 p 小的自然數，和 p 互質個數為 p-1 個。

性質二：
當 p 為質數時，自然數 n 和 p 互質則 n 和 p^2 也一定互質。

性質三
$\Psi(p^2)=p(p-1)$

推理四

$\Psi(p^n)=p^{n-1}(p-1)$

性質五：設 n=a×b，a 和 b 都是相異質數，則 $\Psi(ab)=\Psi(a)\times\Psi(b)$。

猜測六：
設有一個整數 n 為相異質數 p_1、p_2、p_3、…p_m 乘積，則，

$$\Psi(n)=n\times\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\times\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\times\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{p_m}\right)。$$

推理七：
設有一個整數 n 為相異質數 p_1、p_2、p_3、…p_m 乘積，則 p_1-1、p_2-1、p_3-1、…、p_m-1 為 $\Psi(n)$ 的因數。

推理八

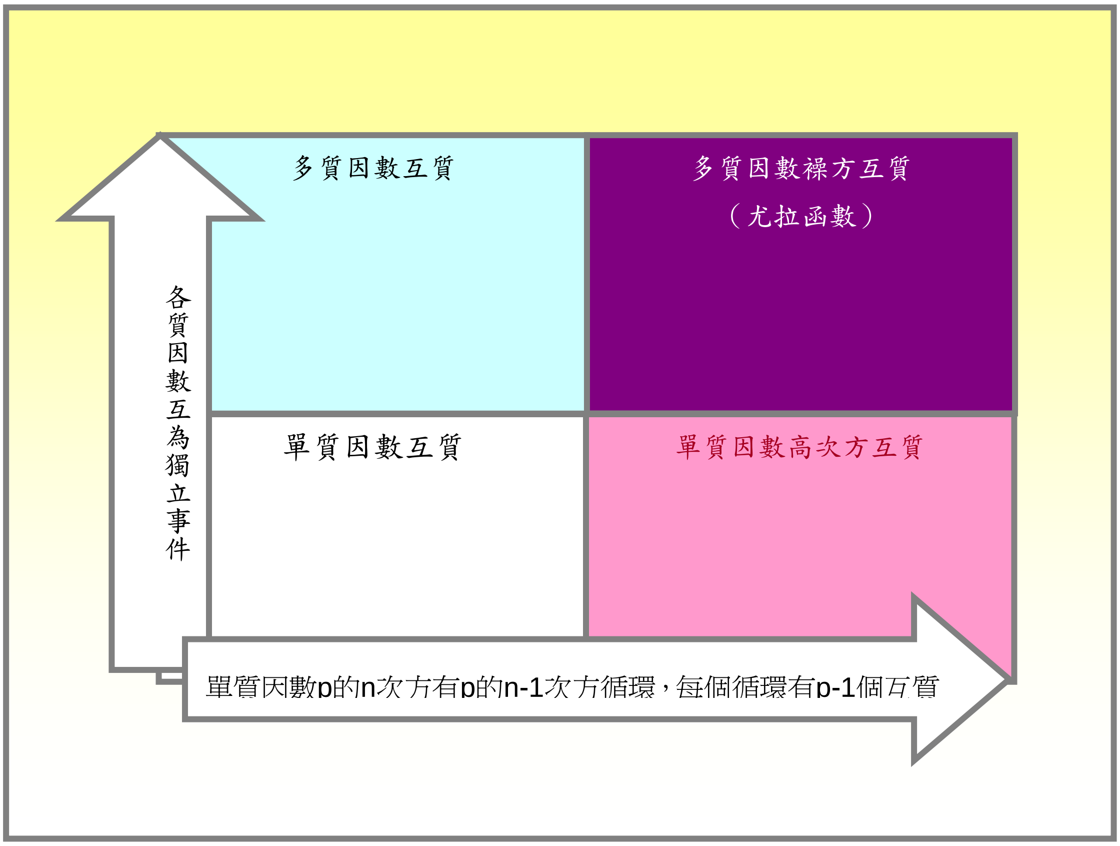
$\Psi(a^n b^m)=a^{n-1}b^{m-1}(a-1)(b-1)$

性質九

設某自然數 $n=p_1^{a1}p_2^{a2}p_3^{a3}\cdots p_m^{am}$，

則 $\Psi(n)=p_1^{a1-1}p_2^{a2-1}p_3^{a3-1}\cdots p_m^{am-1}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\cdots(p_m-1)$

性質九就是有名的尤拉函數，其概念如圖一所示，$\Psi(1)$~$\Psi(50)$ 如表一所示。



圖一、尤拉函數概念圖

表一、比整數 n 小，又和 n 互值的自然數個數

n	Ψ(n)	n	Ψ(n)	n	Ψ(n)	n	Ψ(n)	n	Ψ(n)
1	0	11	10	21	12	31	30	41	40
2	1	12	4	22	10	32	16	42	12
3	2	13	12	23	22	33	20	43	42
4	2	14	6	24	8	34	16	44	20
5	4	15	8	25	20	35	24	45	24
6	2	16	8	26	12	36	12	46	22
7	6	17	16	27	18	37	36	47	46
8	4	18	6	28	12	38	18	48	16
9	6	19	18	29	28	39	24	49	42
10	4	20	8	30	8	40	16	50	20

二、尤拉函數的唯一性

性質十 尤拉函數沒有唯一性。

當 n=7，9，14，18 時，Ψ（n）=6，尤拉函數沒有唯一性。因此，本研究之所以被命名為反尤拉「過程」，而不稱為反尤拉「函數」。

三、反尤拉過程

為了說明反尤拉過程，我們假設 $n=P_1^3 P_2^3$，$\Psi(n)=P_1^2 P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$

第一步：

首先要找出 $P_1^2 P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$的因數，此時，$(P_1-1)(P_2-1)$不再因數分解。

第二步：

接下來把因數中加上 1 不是質數的數刪除。

第三步：

「尤拉公式」是 $n\times\dfrac{n\text{的質因數}-1}{n\text{的質因數}}=\text{比}n\text{小且和}n\text{互質的自然數個數}$

將剩下的數一一帶入「n 的質因數-1」(可一次帶兩個或兩個以上，因須包含所有情形)，以求出 n 值。

第四步：

把 n 值帶入後，若 P_1 、P_2 沒有包含 n 全部的質因數或不等於 n 的質因數，那 n 值會不正確。

第五步：

若分子的乘積不等於 $P_1^2P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$的因數，那 n 值無法等於整數，所以這種情形 n 值也會不正確。

參、研究結果

我們設Ψ（n）=k，由於，尤拉函數沒有唯一性，故反尤拉過程Ψ^{-1}（k）=n。我們把 1~50 的Ψ^{-1}（k）的結果，列成表二，反尤拉過程Ψ^{-1}（k）印證如表十四。

表二、1~50 的Ψ^{-1}（k）

k 值	Ψ^{-1}（k）	k 值	Ψ^{-1}（k）	k 值	Ψ^{-1}（k）
1	2	20	66	37	無解
2	6		50	38	無解
	4		44	39	無解
	3		33	40	150
3	無解		25		132
4	12	21	無解		110
	10	22	46		100
	8		23		88
	5	23	無解		82
5	無解	24	90		75
6	18		84		55
	14		78		41
	9		72	41	無解
	7		70	42	126
7	無解		56		98
8	30		52		76
	24		45		63
	20		39		49
	16		35		43
	15	25	無解	43	無解
9	無解	26	無解	44	92
10	22	27	無解	45	無解
	11	28	58	46	94
11	無解		29		47
12	42	29	無解	47	無解
	36	30	62	48	260

	28		31		210
	26	31	無解		180
	21	32	120		168
	13		102		156
13	無解		96		144
14	無解		80		140
15	無解		68		112
16	60		51		105
	48	33	無解		104
	40	34	無解		65
	34	35	無解	49	無解
	32	36	126	50	無解
	17		114		
17	無解		108		
18	54		76		
	38		74		
	27		63		
	19		57		
19	無解		37		

肆、研究討論

一、Ψ（n）的性質

（一）奇偶性

性質十一

除了Ψ（2）=1，以外，尤拉函數Ψ（n）必為偶數。

（二）映成性

推理十二

尤拉函數沒有映成自然數。

（三）成對性

性質十三：
當n＞2，比n小且和n互質的自然數中，必然有一個數1且必然有一個數n-1。

推理十四：
除了2以外，比n小且和n互質的自然數中，最大的數減最小的數是n-2。

性質十五：
小於n的自然數，若某一數a和n互質，則n-a和n互質。

推理十六：

當p是質數，比p小且和p互質的自然數總和是$\frac{p-1}{2}\times p$。

Ψ（n）成對性應用可以得到推理十七。

推理十七

以n為分母的最簡真分數總和為0.5Ψ（n）

二、正因數個數及正因數和

讓我們再度觀察反尤拉過程的第一步：

我們把 $P_1^2P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$改變成假設 P_1-1 不再約分，同時，P_2-1 也不再約分。分析如表三。

決定 $P_1^2P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$的因數時， $P_1^2P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$都是為不相關的獨立事件，必須每一分類各選擇一個數。

表三、$P_1^2P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$的因數整理

第一種分類	1、P_1 、P_1^2
第二種分類	1、P_2 、P_2^2
第三種分類	1、P_1-1
第四種分類	1、P_2-1

$P_1^2P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$因數個數為每一分類各選一個數相乘，因此正因數個數：

（1+2）（1+2）（1+1）（1+1）

=3×3×2×2

=36 種。

猜測十八

設相異質數 p_1、p_2、p_3、…p_m，某自然數 $n=p_1^{a1}p_2^{a2}p_3^{a3}\cdots p_m^{am}$，則

n 的正因數個數為（a_1+1）（a_2+1）（a_3+1）…（a_m+1）

由上面的分析，我們思考 $P_1^2P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$)正因數和。

由於表四中每一分類至少且只能選擇一個，因此：

第一分類的和：$1+P_1+P_1^2$

第二分類的和：$1+P_2+P_2^2$

第三分類的和：1＋（P_1-1）

第四分類的和：1＋（P_2-1）

因此 $P_1^2P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$)正因數和

（$1+P_1+P_1^2$）（$1+P_2+P_2^2$）（1＋（P_1-1））（1＋（P_2-1））

=（p_1^3-1）（p_2^3-1）p_1p_2

猜測十九

設相異質數 p_1、p_2、p_3、…p_m，某自然數 $n=p_1^{a1}p_2^{a2}p_3^{a3}\cdots p_m^{am}$，則

n 的正因數和為 $(p_1^{a1+1}-1)(p_2^{a2+1}-1)(p_3^{a3+1}-1)\cdots(p_m^{am+1}-1)$

三、正因數個數及正因數和的應用

社團的同學常常上網挑戰昌爸數學工作坊的題目，動動腦 080315 提到 7 的倍數的問題，和因數及倍數有關，特別提出討論：

動動腦 080315

有規律的數列 2^2-2，3^2-3，4^2-4，...，98^2-98 ，試問在這 97 項之中有幾項是 7 的倍數？(數列的第 a 項是 a^2-a)

同學的解答：

動動腦 080315

$a^2-a=a(a-1)$，

由題目，該數列可以化簡

2×1、3×2、4×3、5×4、6×5、7×6、8×7、9×8、…、$a\times(a-1)$、…、98×97

觀察該數列，每 7 個會有 2 個 7 的倍數，

$98\div7=14$，$2\times14=28$，

但是本次的計數只到 $98^2-98=98\times97$，並沒有包含 $99^2-99=99\times98$，

所以，要扣掉一個計數，$28-1=27$，

答案：為 27 個

四、印證

表四是表二中 k=1~50 反尤拉過程的印證。

表四、k=1~50 反尤拉過程的印證

$\Psi(n)=k$	印證	$\Psi(n)=k$	印證
$\Psi(n)=1$	$2\times\frac{1}{2}=1$	$\Psi(n)=26$	無解
$\Psi(n)=2$	$6\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=2$	$\Psi(n)=27$	無解
	$4\times\frac{1}{2}=2$	$\Psi(n)=28$	$58\times\frac{1}{2}\times\frac{28}{29}=28$
	$3\times\frac{2}{3}=2$		$29\times\frac{28}{29}=28$
$\Psi(n)=3$	無解	$\Psi(n)=29$	無解
$\Psi(n)=4$	$12\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=4$	$\Psi(n)=30$	$62\times\frac{1}{2}\times\frac{30}{31}=30$
	$10\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=4$		$31\times\frac{30}{31}=30$
	$8\times\frac{1}{2}=4$	$\Psi(n)=31$	無解
	$5\times\frac{4}{5}=4$	$\Psi(n)=32$	$120\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=32$
$\Psi(n)=5$	無解		$102\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{16}{17}=32$
$\Psi(n)=6$	$18\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=6$		$96\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=32$
	$14\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}=6$		$80\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=32$
	$9\times\frac{2}{3}=6$		$68\times\frac{1}{2}\times\frac{16}{17}=32$
$\Psi(n)=7$	無解		$51\times\frac{2}{3}\times\frac{16}{17}=32$

Ψ(n)=k	印證	Ψ(n)=k	印證
Ψ(n)=8	$30\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=8$	Ψ(n)=33	無解
	$24\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=8$	Ψ(n)=34	無解
	$20\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=8$	Ψ(n)=35	無解
	$16\times\frac{1}{2}=8$	Ψ(n)=36	$126\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}=36$
	$15\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=8$		$114\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{18}{19}=36$
Ψ(n)=9	無解		$108\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=36$
Ψ(n)=10	$22\times\frac{1}{2}\times\frac{10}{11}=20$		$76\times\frac{1}{2}\times\frac{18}{19}=36$
	$11\times\frac{10}{11}=10$		$74\times\frac{1}{2}\times\frac{36}{37}=36$
Ψ(n)=11	無解		$63\times\frac{2}{3}\times\frac{18}{19}=36$
Ψ(n)=12	$42\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}=12$		$57\times\frac{2}{3}\times\frac{18}{19}=36$
	$36\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=12$		$37\times\frac{36}{37}=36$
	$28\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}=12$	Ψ(n)=38	無解
	$26\times\frac{1}{2}\times\frac{12}{13}=12$	Ψ(n)=39	無解
	$21\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}=12$	Ψ(n)=40	$150\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=40$
	$13\times\frac{12}{13}=12$		$132\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{10}{11}=40$
Ψ(n)=13	無解		$110\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{10}{11}=40$
Ψ(n)=14	無解		$100\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=40$

$\Psi(n)=k$	印證	$\Psi(n)=k$	印證
$\Psi(n)=15$	無解	$\Psi(n)=40$	$88\times\frac{1}{2}\times\frac{10}{11}=40$
$\Psi(n)=16$	$60\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=16$		$82\times\frac{1}{2}\times\frac{40}{41}=40$
	$48\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=16$		$75\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=40$
	$40\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=16$		$55\times\frac{4}{5}\times\frac{10}{11}=40$
	$34\times\frac{1}{2}\times\frac{16}{17}=16$		$41\times\frac{40}{41}=40$
	$32\times\frac{1}{2}=16$	$\Psi(n)=41$	無解
	$17\times\frac{16}{17}=16$	$\Psi(n)=42$	$126\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}=42$
$\Psi(n)=17$	無解		$98\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}=42$
$\Psi(n)=18$	$54\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=18$		$76\times\frac{1}{2}\times\frac{42}{43}=42$
	$38\times\frac{1}{2}\times\frac{18}{19}=18$		$63\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}=42$
	$27\times\frac{2}{3}=18$		$49\times\frac{6}{7}=42$
	$19\times\frac{18}{19}=18$		$43\times\frac{42}{43}=42$
$\Psi(n)=19$	無解	$\Psi(n)=43$	無解

$\Psi(n)=k$	印證	$\Psi(n)=k$	印證
$\Psi(n)=20$	$66\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{10}{11}=20$	$\Psi(n)=44$	$92\times\frac{1}{2}\times\frac{22}{23}=44$
	$50\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=20$	$\Psi(n)=45$	無解
	$44\times\frac{1}{2}\times\frac{10}{11}=20$	$\Psi(n)=46$	$94\times\frac{1}{2}\times\frac{46}{47}=46$
	$42\times\frac{1}{2}\times\frac{20}{21}=20$		$47\times\frac{46}{47}=46$
	$40\times\frac{1}{2}=20$	$\Psi(n)=47$	無解
	$33\times\frac{2}{3}\times\frac{10}{11}=20$	$\Psi(n)=48$	$260\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=48$
	$25\times\frac{4}{5}=20$		$210\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=48$
$\Psi(n)=21$	無解		$180\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=48$
$\Psi(n)=22$	$46\times\frac{1}{2}\times\frac{22}{23}=22$		$168\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}=48$
	$23\times\frac{22}{23}=22$		$156\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{12}{13}=48$
$\Psi(n)=23$	無解		$144\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=48$
$\Psi(n)=24$	$90\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=24$		$140\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=48$
	$84\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}=24$		$112\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}=48$
	$78\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{12}{13}=24$		$105\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=48$
	$72\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=24$		$104\times\frac{1}{2}\times\frac{12}{13}=48$
	$70\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=24$		$65\times\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=48$
	$56\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}=24$	$\Psi(n)=49$	無解

Ψ(n)=k	印證	Ψ(n)=k	印證
Ψ(n)=24	$52\times\frac{1}{2}\times\frac{12}{13}=24$	Ψ(n)=50	無解
	$45\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=24$		
	$39\times\frac{2}{3}\times\frac{12}{13}=24$		
	$35\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=24$		
Ψ(n)=25	無解		

五、反尤拉過程

性質二十
只有 k=1，反尤拉過程 Ψ^{-1}（k）有解外，其他的奇數 k，Ψ^{-1}（k）均無解。

討論性質二十一之前，我們先討論 $\Psi^{-1}(34)$無解的証明

$\Psi^{-1}(34)$無解的証明
先找出 34 的因數
1、2、17、34
依照反尤拉過程第二步，把加一後不是質數的數刪去：
1+1=2　　(∨)
2+1=3　　(∨)
17+1=18
34+1=35
18 和 35 不是質數，
所以 17 和 34 先刪去，1 和 2 保留。
依照反尤拉過程第三步，
$n\times\frac{p-1}{p}\times\frac{q-1}{q}=34$，需將 1 和 2 帶入式子中的(p-1)和(q-1)，
而會有三種情形：

第一種情形：
p-1=1
$n\times\frac{1}{2}$=34；$\langle 2|n\rangle$
n=34×2
n=68，所以
$68\times\frac{1}{2}$=34；但 2 不是 68 唯一的質因數；矛盾，所以不行。

第二種情形：

p-1=1，q-1=2

$n\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=34$；$\langle 2\times 3|n\rangle$

$n\times\frac{1}{3}=34$

$n=34\times3$

n=102，所以

$102\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=34$；2 和 3 不是 102 唯一的質因數；矛盾，所以不行。

第三種情形：

p-1=2

$n\times\frac{2}{3}=34$；$\langle 3|n\rangle$

$n=34\times\frac{3}{2}$

n=51，所以

$51\times\frac{2}{3}=34$；3 不是 51 唯一的質因數；矛盾，所以不行。

三種情形，均矛盾，所以，$\Psi^{-1}(34)$無解。

性質二十一：

設 P_1、q 為相異質數，當 Ψ^{-1}（$2P_1$）會有兩種情形：

當 $2P_1+1=q$，則 Ψ^{-1}（$2P_1$）有解。

當 $2P_1+1\neq q$，則 Ψ^{-1}（$2P_1$）無解。

證明：

第一種情形

是性質一的反推。

第二種情形

假設 k=Ψ^{-1}（2 P_1）有解，那我們可先用反尤拉過程得知 k 等於哪些數。

我們從反尤拉過程中的第一步得知先找出 2 P_1 的因數，

2 P_1 的因數→1、2、P_1、2 P_1

由反尤拉過程第二步得知可先把 P_1、2 P_1 刪去，

$$k\times\frac{p_2-1}{p_2}\times\frac{p_3-1}{p_3}=2p_1$$

而 p_2-1 及 p_3-1 只能等於 1 或 2，

如果 $p_2-1=1$，那

$$k\times\frac{p_2-1}{p_2}=2P_1$$

$$\to k\times\frac{1}{2}=2P_1$$

$$\to k=2P_1\times2$$

$$\to k=4P_1$$

$$\to 4P_1\times\frac{1}{2}=2P_1$$

但 2 不是 4 P_1 唯一的質因數，所以不行。（反尤拉過程第四步）

如果 $p_2-1=1$，$p_3-1=2$，那

$$k\times\frac{p_2-1}{p_2}\times\frac{p_3-1}{p_3}=2p_1$$

$$\to k\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=2P_1$$

$$\to k=2P_1\times3$$

$$\to k=6P_1$$

$$\to 6P_1\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=2P_1$$

但分母 2 和 3 沒有包含 6 P_1 全部的質因數，所以不行。（反尤拉過程第四步）

如果 $p_2-1=2$，那

$\rightarrow k\times\frac{p_2-1}{p_2}=2P_1$

$\rightarrow k\times\frac{2}{3}=2P_1$

$\rightarrow k=2P_1\times\frac{3}{2}$

$\rightarrow k=3P_1$

$\rightarrow 3P_1\times\frac{2}{3}=2P_1$

但 3 不是 $3P_1$ 唯一的質因數，所以不行。(反尤拉過程第四步)。

得証。

性質二十二

設 p 為大於 3 的質數，$2p^2+1$ 必為 3 的倍數。

證明：

Case1：P=3k，p 不是質數。

Case2：P=3k +1，$2p^2+1=2(9k^2+6k+1)+1=3(6k^2+4k)+2+1=3(6k^2+4k+1)$。

Case3：P=3k +2，$2p^2+1=2(9k^2+12k+4)+1=3(6k^2+8k)+8+1=3(6k^2+8k+3)$。

得証。

接下來討論性質二十三前，先討論 $\Psi^{-1}(50)$ 的無解

$\Psi^{-1}(50)$ 無解的證明

先找出 50 的因數

1、2、5、10、25、50

依照反尤拉過程第二步，把加一後不是質數的數刪去：

1+1=2 (∨)

2+1=3 (∨)

5+1=6

10+1=11 (∨)

25+1=26

50+1=51

6、26、51 不是質數，所以 5、25、50 先刪去，1、2 和 10 保留。
依照反尤拉過程第三步，

$n\times\frac{p-1}{p}\times\frac{q-1}{q}\times\frac{r-1}{r}$=50，需將 1、2 和 10 帶入式子中的(p-1)、(q-1)和($r-1$)，而會有七種情形：

第一種情形：

p-1=1

$n\times\frac{1}{2}$=50；$\langle 2|n\rangle$

n=50×2

n=100，所以

$100\times\frac{1}{2}$=50；但 2 不是 100 唯一的質因數，矛盾，所以不行。

第二種情形：

p-1=2

$n\times\frac{2}{3}$=50；$\langle 3|n\rangle$

$n=50\times\frac{3}{2}$

n=75，所以

$75\times\frac{2}{3}$=50；但 3 不是 75 唯一的質因數，矛盾，所以不行。

第三種情形：

p-1=10

$n\times\frac{10}{11}$=50；$\langle 11|n\rangle$

$n=50\times\frac{10}{11}$

n=55，所以

$55\times\frac{10}{11}$=50；但 11 不是 55 唯一的質因數，矛盾，所以不行。

第四種情形：

p-1=1，q-1=2

$n\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=50$；$\langle 2\times 3|n\rangle$

$n\times\frac{1}{3}=50$

n=50×3

n=150，所以

$150\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=50$；但 2 和 3 不是 150 唯一的質因數，矛盾，所以不行。

第五種情形：

p-1=1，q-1=10

$n\times\frac{1}{2}\times\frac{10}{11}=50$；$\langle 2\times 11|n\rangle$

$n\times\frac{5}{11}=50$

$n=50\times\frac{11}{5}$

n=110，所以

$110\times\frac{1}{2}\times\frac{10}{11}=50$；但 2 不是 150 唯一的質因數，矛盾，所以不行。

第六種情形：

p-1=2，q-1=10

$n\times\frac{2}{3}\times\frac{10}{11}=50$；$\langle 3\times 11|n\rangle$

$n\times\frac{20}{33}=50$

$n=50\times\frac{33}{20}$

n 無整數解，所以不行。

第七種情形：

p-1=1，q-1=2，r-1=10

$$n\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{10}{11}=50$$

$$n\times\frac{20}{33}=50$$

$$n=50\times\frac{33}{20}$$

n 無整數解，所以不行。

七種情形，均矛盾，所以，$\Psi^{-1}(50)$無解。

> 性質二十三
> 設 P_1 及 q 為相異質數，k=$2p_1^2$，Ψ^{-1}（k）會有三種情況，
> 若，P_1=2，則 k+1≠q，Ψ^{-1}（k）有解。
> 若，P_1=3，則 k+1=q，Ψ^{-1}（k）有解，
> 若，P_1＞3，則 k+1≠q，Ψ^{-1}（k）無解。

證明：

第一種情形，

若 P_1=2，k=$2p_1^2$=8，8+1=9，9 為合數，但，Ψ^{-1}（8）=30、24、20、16 或 15。

第二種情形，

若 P_1=3，k=$2p_1^2$=18，k+1=19，Ψ^{-1}（18）=54、38、27 或 19。

第三種情形

若，P_1＞3，依照引理二十三，$2p^2$+1=k+1 必為 3 的倍數。

假設Ψ^{-1}（k）有解，那我們從反尤拉過程中的第一步得知先找出$2p_1^2$的因數，

$2p_1^2$的因數→1、2、P_1、2 P_1、 p_1^2 、$2p_1^2$

由第二步得知可先把 P、 p^2 、$2p_1^2$刪去，

【(2 P_1+1）有可能是質數，也有可能不是質數。】

$$k\times\frac{p_2-1}{p_2}\times\frac{p_3-1}{p_3}\times\frac{p_4-1}{p_4}=2p_1^2$$

而 p_2-1、 p_3-1及 p_4-1只能等於 1、2 或 2 P_1，

如果 $p_2-1=1$，那

$$k\times\frac{p_2-1}{p_2}=2p_1^2$$

$$\rightarrow k\times\frac{1}{2}=2p_1^2$$

$$\rightarrow k=2p_1^2\times 2$$

$$\rightarrow k=4p_1^2$$

$$\rightarrow 4p_1^2\times\frac{1}{2}=2p_1^2$$

但 2 不是 $4p_1^2$ 唯一的質因數，所以不行。(反尤拉過程第四步)

如果 $p_2-1=1$，$p_3-1=2$，那

$$k\times\frac{p_2-1}{p_2}\times\frac{p_3-1}{p_3}=2p_1^2$$

$$\rightarrow k\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=2p_1^2$$

$$\rightarrow k=2p_1^2\times 3$$

$$\rightarrow k=6p_1^2$$

$$\rightarrow 6p_1^2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=2p_1^2$$

但分母 2 和 3 沒有包含 $6p_1^2$ 全部的的質因數，所以不行。(反尤拉過程第四步)

如果 $p_2-1=1$，$p_3-1=2$，$p_4-1=2P_1$，那

$$k\times\frac{p_2-1}{p_2}\times\frac{p_3-1}{p_3}\times\frac{p_4-1}{p_4}=2p_1^2$$

$$\rightarrow k\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2p_1}{2p_1+1}=2p_1^2$$

$$\rightarrow k=2p_1^2\times 3\times\frac{2p_1+1}{2p_1}$$

$$\rightarrow k=3\times p_1\times(2p_1+1)$$

$$\rightarrow 3\times p_1\times(2p_1+1)\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2p_1}{2p_1+1}=2p_1^2$$

因 2、3、$(2P_1+1)$ 沒有包含$(3\times p_1\times(2p_1+1))$的因數，不行。(反尤拉過程第四步)

如果 $p_2-1=2$，那

$\rightarrow k\times\frac{p_2-1}{p_2}=2p_1^2$

$\rightarrow k\times\frac{2}{3}=2p_1^2$

$\rightarrow k=2p_1^2\times\frac{3}{2}$

$\rightarrow k=3p_1^2$

$\rightarrow 3p_1^2\times\frac{2}{3}=2p_1^2$

但3不是 $3p_1^2$ 唯一的質因數，所以不行。(反尤拉過程第四步)

如果 $p_2-1=2$，$p_3-1=2P_1$，那 $k\times\frac{p_2-1}{p_2}\times\frac{p_3-1}{p_3}=2p_1^2$

$\rightarrow k\times\frac{2}{3}\times\frac{2p_1}{2p_1+1}=2p_1^2$

$\rightarrow k=2p_1^2\times\frac{2}{3}\times\frac{2p_1}{2p_1+1}$

$\rightarrow k=2p_1^2\times\frac{3}{2}\times\frac{2p_1+1}{2p_1}$

$\rightarrow k=3p_1^2$

$\rightarrow k=p_1(2p_1+1)$

$\rightarrow p_1(2p_1+1)\times\frac{2}{3}\times\frac{2p_1}{2p_1+1}=2p_1^2$

但 $(2p_1+1)$ 不是 $p_1(2p_1+1)$ 唯一的質因數，所以不行。(反尤拉過程第四步)

如果 $p_2-1=2p_1$，那 $k\times\frac{p_2-1}{p_2}=2p_1^2$，

$\rightarrow k\times\frac{2p_1}{2p_1+1}=2p_1^2$

$\rightarrow k=2p_1^2\times\frac{2p_1+1}{2p_1}$

$\rightarrow k=p(2P_1+1)$

$\rightarrow p(2P_1+1)\times\frac{2p_1}{2p_1+1}=2p_1^2$，

但 $(2p_1+1)$ 不是 $2P_1$ 的質因數，所以不行。(反尤拉過程第四步)。

得証。

六、Ψ（n）的範圍與Ψ^{-1}（k）的範圍

我們可以很快的發現Ψ（n）的範圍與Ψ^{-1}（k）的範圍。

性質二十四
Ψ（n）的範圍是Ψ（n）＜n。

性質二十五
Ψ^{-1}（k）的範圍
設 p_1、p_2、p_3、…p_m 為相異奇質數，
當Ψ^{-1}（k）在 $k=p_1^{a1-1}p_2^{a2-1}p_3^{a3-1}\ldots p_m^{am-1}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots(p_m-1)$ 有解，
Ψ^{-1}（k）最大值為 $2\,p_1^{a1}p_2^{a2}p_3^{a3}\ldots p_m^{am}$。

七、反尤拉過程無解的分析

表五是我們對於反尤拉過程無解的分析整理。

表五、1~50 反尤拉過程無解的分析

分類	性質	無解Ψ^{-1}（k）的 K 值
性質二十	當奇數 k＞1， 則Ψ^{-1}（k）均無解。	3、5、7、9、11、13、15、17、19、21、23、25、27、29、31、33、35、37、39、41、43、45、47、49
性質二十一，第二種情形	設 P_1、q 為相異質數，當 $2P_1+1\neq q$ 則Ψ^{-1}（$2P_1$）無解。	14、26、34、38
性質二十三，第三種情形	設 P_1及 q 為相異質數， $2p_1^2+1\neq q$ 則Ψ^{-1}（$2p_1^2$）無解。	50

伍、結論

一、尤拉函數與反尤拉過程

尤拉函數不是一對一函數同時也無法映成自然數。因此，我們以給定k值透過反尤拉過程尋找Ψ^{-1}（k）的解。

二、反尤拉過程

為了說明反尤拉過程，我們假設$n=P_1^3\ P_2^3$，$\Psi(n)=P_1^2P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$

第一步：

首先要找出$P_1^2P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$的因數，此時，$(P_1-1)(P_2-1)$不再因數分解。

第二步：

接下來把因數中加上1不是質數的數刪除。

第三步：

我們套用尤拉公式　$n\times\frac{p_1-1}{p_1}\times\frac{p_2-1}{p_2}=\Psi(n)$進行反推。

第四步：

把n值帶入後，若P_1、P_2沒有包含n全部的質因數或不等於n的質因數，那n值會不正確。

第五步：

若分子的乘積不等於$P_1^2P_2^2(P_1-1)(P_2-1)$的因數，那n值無法等於整數，所以這種情形n值也會不正確。

三、解的存在性

（一）當奇數 k＞1，Ψ^{-1}（k）無解。

（二）設 P_1、q 為相異質數，當 k=2 P_1，Ψ^{-1}（k）會有兩種情形：
當 k+1=q，則 Ψ^{-1}（k）有解。
當 k+1≠q，則 Ψ^{-1}（k）無解。

（三）設 P_1、q 為相異質數，當 k=2 P_1^2，Ψ^{-1}（k）會有三種情形：
當 P_1=2，則 Ψ^{-1}（k）有解，Ψ^{-1}（k）=30、24、20、16、15。
當 P_1=3，則 Ψ^{-1}（k）有解，Ψ^{-1}（k）=54、38、27、19。
當 P_1＞3，k+1≠q，則 Ψ^{-1}（k）無解。

參考文獻

楊承霈、黃靖雯、林靖芳：「不能再約分的真分數」。臺北縣九十四學年度科學展覽會，國小數學科作品。

附錄

本研究中的性質索引如表六、

表六、性質索引

性質	摘要	頁碼
一	比質數 p 小的自然數和 p 互質個數、	5
二	自然數中，和 p 互質必然也會和 p^2 互質。	5
三	Ψ（p^2）=p（p-1）的討論	5
四	Ψ（p^n）的討論	5
五	Ψ（ab）的討論	5
六	Ψ（$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots p_n$）的討論	5
七	Ψ（$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots p_n$）有 p_1-1、p_2-1、p_3-1、…、p_n-1 的因數	5
八	Ψ（$a^n b^m$）的討論	5
九	尤拉函數	5
十	尤拉函數的唯一性	7
	反尤拉過程	7
十一	除了Ψ（2）＝1，以外，尤拉函數Ψ（n）必為偶數。	10
十二	尤拉函數沒有映成自然數。	10
十三	當 n＞2，必然有一個數 1 且必然有一個數 n-1 和 n 互質。	10
十四	當 n＞2，和 n 互質的最大數減最小數為 n－2。	10
十五	當 n＞2，a 和 n 互質則必然有一個數 n-a 和 n 互質。	10
十六	當 p 是質數，比 p 小且和 p 互質的自然數總和是 $\frac{p-1}{2} \times p$。	10
十七	以 n 為分母的最簡真分數總和為 0.5Ψ（n）	10
十八	自然數 n 的正因數個數。	11
十九	自然數 n 的正因數和。	12
	昌爸數學工作坊動動腦 080315	12
	k=1~50 反尤拉過程的印證	13
二十	當 k＞1，奇數 k，Ψ^{-1}（k）均無解。	18
	Ψ^{-1}(34)無解的証明	18
二十一	設 P_1、q 為相異質數，當Ψ^{-1}（2P_1）的討論	19
二十二	設 p 為大於 3 的質數，$2p^2+1$ 必為 3 的倍數。	21
	Ψ^{-1}(50)無解的証明	21
二十三	設 P_1 及 q 為相異質數，$k=2p_1^2$，Ψ^{-1}（k）的討論	24
二十四	Ψ（n）的範圍	27
二十五	Ψ^{-1}（k）的範圍	27
	1~50 反尤拉過程無解的分析	27

【評語】080412

1. 能就前人的作品加以延伸，利用反推法，分析因數與倍數關係。
2. 組員同心協力，分析文獻，猜測逐項分析印證。
3. 過程詳盡，團隊精神極佳。