中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080411

摺摺稱奇

學校名稱：臺北縣樹林市樹林國民小學

作者：	指導老師：
小五 王永光	宋雅筠 蘇怡勳

關鍵詞：　連塊、連接面、問題解決

摺 摺 稱 奇

摘要

本研究為了探討摺紙成疊五連塊的最佳解題策略，依序從連塊的連接面與數字的排列中尋找關聯性。我發現以下幾點重要結論：

一、會影響順利摺疊地圖的因素包含方塊數量、方塊配對方式、方塊連接面和連塊形狀。

二、摺紙遊戲四、五連塊連接面間互有影響，可從四連塊方塊配對是否能順利成疊的組型來推斷五連塊方塊配對的順利成疊類型。

三、從數字設計的觀點來分析摺紙遊戲五連塊，最佳解題策略有分退位法和五 P 型、五 U 型、五 N 型等特殊解法。

四、正三角形摺疊地圖中三、四連塊 I 型全部皆可順利成疊，五連塊 I 型只有 80 種能夠順利成疊；正六邊形的三 I 型、四 I 型、五 I 型成疊情形等同正方形三 I 型、四 I 型、五 I 型。

摺疊地圖是一個需動腦思考、分析許多影響研究變項的有趣主題，日後我會持續努力，繼續探討六連塊 35 種方塊配對類型的最佳解題策略。

壹、研究動機

升上五年級後，我開始思索自己獨立研究的主題，老師在課間常與我討論，鼓勵我多蒐集有興趣的相關資料。在教室的圖書角內我看到 Brian Bolt 所寫的『數學遊樂園妙想天開』這本書，書中「摺地圖」遊戲非常吸引我的興趣，我準備了白紙想要好好挑戰，結果一試再試我都無法成功，仔細思考我該如何掌握遊戲線索解開謎團呢？

原文摘錄如下：

摺地圖

1	2	7	6
8	3	4	5

行軍時，曾經用過大型軍事勘查圖的人就知道，要將某一面摺出來有很多方法。上圖的地圖中有 8 塊方形區域，你可以告訴我們怎麼摺，才能讓這些區域按著 1、2、3、4、5、6、7、8 的順序疊在 1 的下面嗎？

課本第七單元長方體與正方體教材裡提到正立方體邊和邊、面和面垂直的關係，提供本研究許多相關性資料，我發現連接面是一個很重要且影響解題的關鍵，無論是四連塊或是五連塊，連接面的量和順利成疊之間的因果都需要一個完整的解釋。

我開始蒐集資料，發現摺紙遊戲五連塊的研究已出現在中華民國第 38 屆科學展覽會初小組優勝作品，作品名稱『摺紙成疊的探討』。

重點說明：

一、摺紙遊戲三連塊不論數字的配對情形和方塊的排列，都可以順序成疊。

二、摺紙遊戲四連塊的配對情形有五種：

(一)四 I 型的數字配對情形有 24 種，16 種成功，8 種失敗。

(二)四格窗型的數字配對情形有 24 種，8 種成功，16 種失敗。

(三)四 N 型、四 L 型、四 Y 型的數字配對情形有 24 種，24 種都可成功。

(四)四 I 型為奇偶類型，四格窗型為對角線奇偶類型才能成功，其他的方塊配對 2 種都可以順序成疊。

三、摺紙遊戲五連塊的配對情形有十二種：

(一)五 I 型的數字配對情形有 120 種，50 種成功，70 種失敗。

(二)五 L 型、五 Y 型、五 U 型、五 N 型的數字配對情形有 120 種，80 種成功，40 種失敗。

(三)五 P 型的數字配對情形有 120 種，40 種成功，80 種失敗。

(四)五 T 型、五 V 型、五 Z 型、五 F 型、五 X 型、五 W 型的數字配對情形有 120 種，全都成功。

(五)摺紙遊戲五連塊中，除了五 P 型只有 40 種能成功摺疊之外，其他的方塊組合都符合下列形式：

1.一層：50 種可以順序成疊。

2.二層：80 種可以順序成疊。

3.三層：120 種都可以順序成疊。

4.若將五 P 形剪開一個邊，則也會有 80 種可以順序成疊。

這件作品解釋四~五連塊摺疊成疊所有成功與失敗的配對情形，但是影響連塊是否可以順利成疊的因素有哪些？這部分卻未被實際討論過，於是我告訴自己：Let’s do it！

貳、研究目的

一、探討影響摺疊地圖的因素。

二、摺紙遊戲四、五連塊連接面的關係。

三、摺紙遊戲五連塊最佳解題策略。

四、探討正三角形、正六邊形摺疊地圖的解題過程。

參、名詞釋義

一、n 連數：數字在連塊上呈現倒序或循環(例：451、215)皆為連數，而 n 指連塊的數量。

二、退位法：退位法使用於將 n 個方塊刪減為最大 I 型，視其可否成功的一種直接目視解題方法：

圖一：

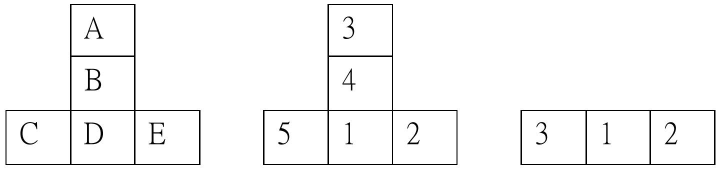
			A
B	C	D	E

			1
2	3	4	5

1	2	3	4

這時，將 I 型(BCDE)保留，再捨去 A，同時將其數字退位為 1、2、3、4 的形式，即退位法。

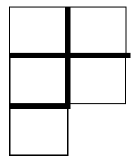
圖二：



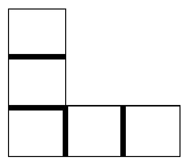
這時，將 I 型(CDE)保留，捨去 AB，將其數字 5 退爲 3 呈現 3、1、2 的形式，即退位法。

三、連接面：在 n 連塊中，位於連塊內部的連接邊稱之爲連接面。如下圖三和四：

圖三：共有 5 個連接面。

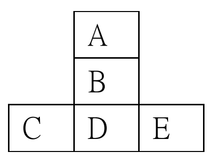


圖四：共有 4 個連接面。

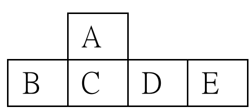


四、主幹：在摺紙成疊連塊的配對中，區分爲橫軸（x 軸）與縱軸（y 軸），以橫軸那一列爲主幹。如下圖五和六：

圖五：這時，主幹爲 CDE。



圖六：這時，主幹爲 BCDE。



肆、研究過程

一、**研究一：探討影響摺疊地圖的因素。**

（一）上屆作品解釋四、五連塊順利成疊的因素，四連塊能否順利成疊的原因包含數字設計與連塊配對。這是一個很好的發現，但是我發現五連塊卻缺乏有效性的證據說明解題策略，研究結果無具體說明影響五連塊的方塊配對如何影響數字排列導致無法成功成疊，這讓我想進深入研究影響摺紙順利成疊的原因爲何。

（二）猜測導致摺疊地圖遊戲能否順利成疊的因素有：

1.方塊數量：猜測方塊數越多，順利成疊機會越低。

（1）一個方塊無需討論即可知一定順利成疊。

（2）I 型中的二 I 型、三 I 型與四 I 型，二 I 型、三 I 型全可順利成疊，四 I 型只有 16 種能夠順利成疊。

2.方塊配對：方塊數越多可配對型式變化多，相對提高地圖成疊的複雜度與難度。

（1） 單方塊只有一種配對；雙方塊也是一種配對方式（旋轉與翻轉視為同一種變化）。

（2） 三方塊兩種配對方式；四方塊 5 種配對；五方塊 12 種變化…..可想而知方塊數越多，配對變化形式越多。

（3） 相同的方塊數卻會隨著方塊配對的型式，改變每種方塊的連接面。所以逐一驗證的複雜度提高。

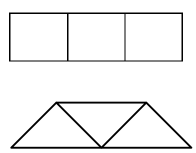
3.數字配對：因題目限制所以數字排列的方法更成為摺疊地圖主要解題關鍵。

（1）以三 I 型與四 I 型兩種類型作比較，三 I 型無論數字如何排列皆能順利成疊，但是四 I 型 24 種數字排列只有 16 種能順利成疊，順利成疊比例僅佔全部排列方法的 2/3，同時數字排列要求需奇數與偶數相間隔方能順利成疊。

（2）上屆作品無法針對五 I 型數字排列歸納出成功與失敗的數字特性，但我猜想其中應該有些因素尚未被發現。

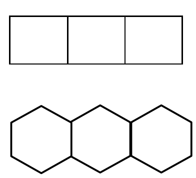
4.形狀：連塊的形狀如果變化成正三角形，是否形狀的改變也會影響成疊的配對？

（1）我比較圖七兩張圖：



1. 正三角形三 I 型摺紙可順利成疊，但猜想四個方塊以上的形狀變化是否會影響摺疊地圖的成疊，這部分非常值得往下繼續探討。

（2）圖八：



1.如果今天使用正六邊形，結果是否也會如同正三角形摺紙成疊呢？

（三）綜合上推測的四大因素，得到三個結論：

1. 先從方塊配對著手進行研究是首要考量點，在探討方塊配對的同時我結合方塊數目，比較四、五連塊的配對連接面變化，試著發現一些規則。
2. 確定連塊配對連接面的相關性，再搭配數字設計，以五連塊 12 種配對情形為研究背景，觀察適當的解題方法，分析數字排列如何影響摺紙遊戲。
3. 在四連塊以上的摺紙遊戲中，形狀會影響成疊的答案，因此這新奇有趣的主題值得花時間探討。

二、**研究二：摺紙遊戲四、五連塊連接面的關係。**

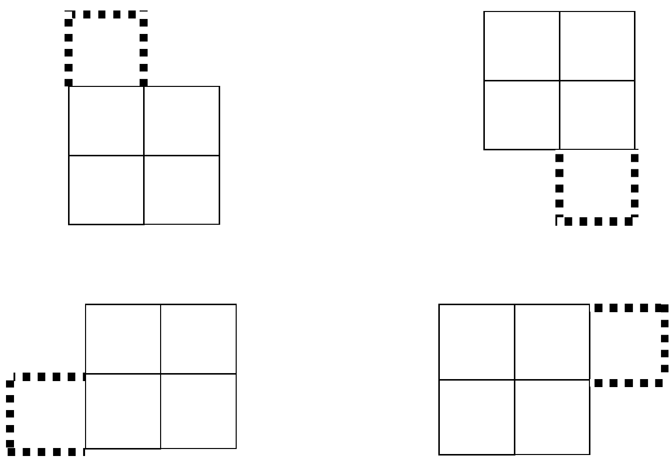
（一）四連塊→五連塊連接面的探討

1.分析

（1）在五連塊 12 種配對中，其中 11 種的連接面只有 4 個，但是五 P 型例外。根據五連塊五 P 型的方塊配對，由於連接面有 5 個，但是能順利成疊的組合卻只有 40 種，是五連塊成功數字配對最少的一組。

（2）我發現四格窗型也是連接面最多，但是能順利成疊的配對最少的類型。五 P 型是四格窗型的變形，以四格窗型為基礎，任意選擇一個方向向外延伸，皆可形成五連塊中的五 P 型。

圖九：四格窗型→五 P 型（上下左右翻轉為同一組）



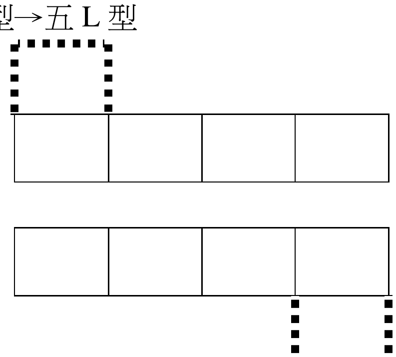
（3）從資料分析來看四連塊與五連塊之間應該存在一些相似性，所以我開始試著從塊數的變化中找尋答案。

2.過程

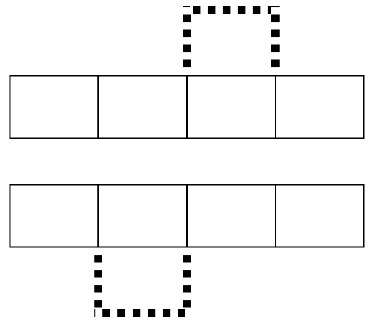
（1）將五連塊 12 種配對做一個整理，然後比對四連塊 5 種配對，我發現有些圖形可以以四連塊為變化基模，逐一增加方塊形成五連塊，且正好兩者之間順利成疊組數的比例也相同。

（2）我發現由於四 I 型為一直列，能夠順利成疊的種數佔總數的三分之二，導致了五 L 型、五 Y 型能夠順利成疊的種數也佔總數的三分之二。(以四 I 型為基礎，任意選擇一個方向向外延伸，如下圖十、十一、上下翻轉為同一組)。另外，五 I 型的比例和四 I 型不相同。

圖十：四 I 型→五 L 型

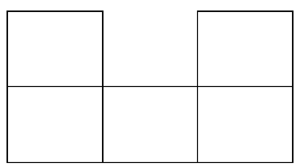


圖十一：四 I 型→五 Y 型

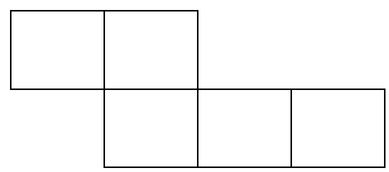


（3）另外，其他的 6 種五連塊皆可用四 N 型、四 L 型、四 Y 型推得所有的數字配對皆可順利成疊，但是五 U 型、五 N 型、五 I 型例外。

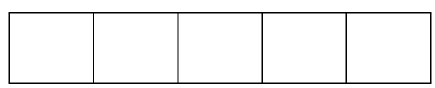
圖十二：五 U 型



圖十三：五 N 型



圖十四：五 I 型



我發現五 U 型、五 N 型的非主幹部份都是兩塊且皆在主幹的同一方向，且平行於主幹，而五 I 型只有主幹部分，所以無法推論。

3.結果

（1）若以連塊爲變化來探討，我歸納出兩項結果：能順利類型圖形與順利類推成功與失敗組數的關係這兩大發現，**類型 3（五 U 型、五 N 型）找不出能比對的四連塊配對**，但是**五 U 型和五 N 型是以類型 2 爲變化圖形再加一塊方塊，兩者成功與失敗的配對數比例正好相同**（同類型 3 的比例結果），所以我視爲此方法是例外情形；四連塊到五連塊中類型 5（四 I 型→五 I 型），他們之間的關係是形狀變化相同但是成功與失敗組數比例不同。

（2）依照以上的發現，歸納出下列表格：

類型	4＋1 連塊方塊配對成五連塊	成功組數與失敗組數的比例		
		四連塊	五連塊	比照結果
1	四格窗型→五 P 型	8：16	40：80	1：2
2	四 N 型 四 L 型→ 五 T 型、五 V 型、五 Z 型、	24：0	120：0	皆可順利成疊

	四Y型　　五F型、五X型、五W型			
3	四N型 四L型→五U型、五N型	24：0	80：40	比例不同
4	四I型→五L型、五Y型	16：8	80：40	2：1
5	四I型→五I型	16：8	50：70	比例不同

（2）藉由上述表格，可以發現能夠類推成功比例的方塊配對有9種類型，不能夠類推成功摺紙成疊比例的方塊配對有3種，分別是由四N型、四L型、四I型衍生變化的五U型、五N型和五I型，其原因可能是**非主幹部份皆在主幹的同一方向，且平行於主幹，或只有主幹**。

（二）五連塊→四連塊連接面的探討

1.分析

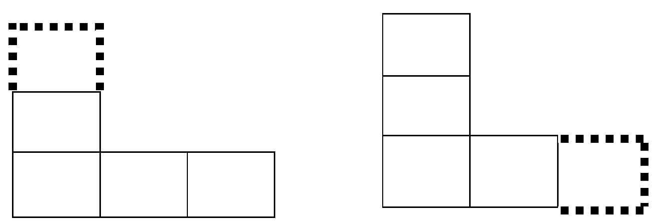
（1）在四連塊推論五連塊的過程中，發現了三組例外（五U型、五N型、五I型），因此我決定由五連塊逆推四連塊，試著解釋三組例外。

（2）假設我以五I型為截切點，保留完整的四連塊，切法有二種，但是配對卻只有一種（例如五I型→四I型，左右翻轉為同一組）。

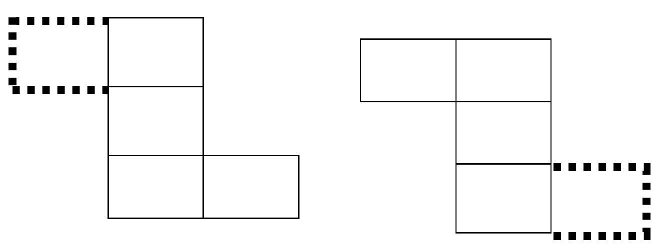
2.過程

（1）五V型、五Z型是成功類推配對：

圖十五：五V型→四L型

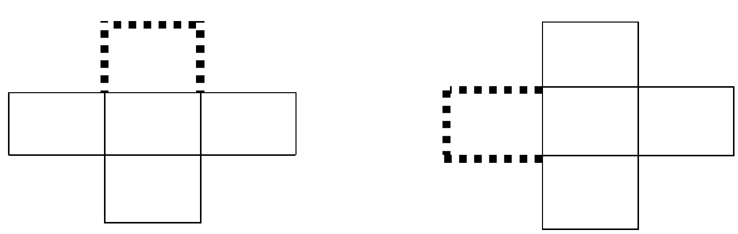


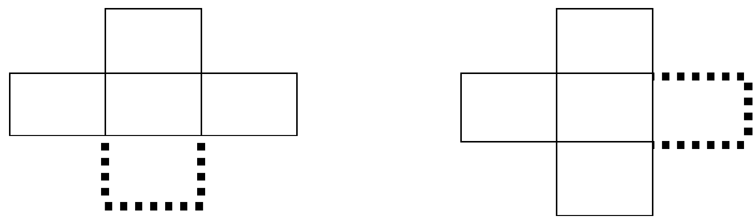
圖十六：五Z型→四L型



（2）五X型也是成功類推配對：

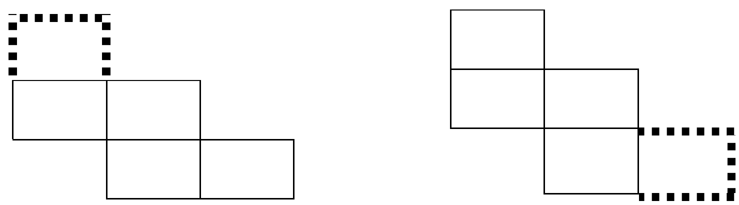
圖十七：五X型→四Y型





（3）五 W 型也是成功類推配對：

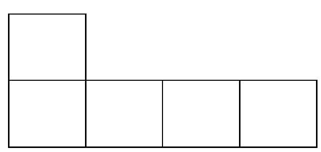
圖十八：五 W 型→四 N 型



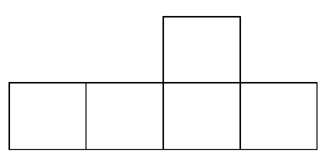
（4）另外，五 T 型、五 F 型都是成功類推配對。此二種方塊配對只能逆推回四 L 型、四 Y 型、四 N 型，皆能全部順利成疊。

（5）在五連塊逆推的過程中，發現五 L 型、五 Y 型、五 P 型、五 U 型、五 N 型、五 I 型爲無法解釋的方塊配對，它們所逆推的情況皆不同。

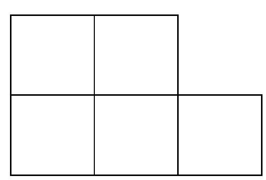
圖十九：五 L 型



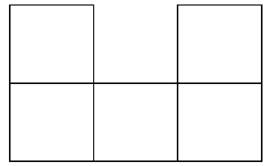
圖二十：五 Y 型



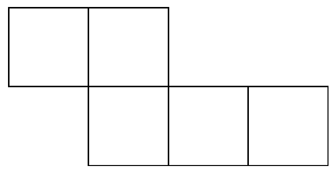
圖二十一：五 P 型



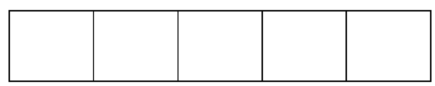
圖二十二：五 U 型



圖二十三：五 N 型



圖二十四：五 I 型



3.結果

（1）依照以上的發現，歸納出下列表格：

類型	5－1 連塊方塊配對成四連塊	成功組數與失敗組數的比例		
		五連塊	四連塊	比照結果
1	五 V 型 五 Z 型→四 L 型	120：0	24：0	皆全部順利成疊
2	五 X 型→四 Y 型	120：0	24：0	皆全部順利成疊
3	五 W 型→四 N 型	120：0	24：0	皆全部順利成疊
4	五 T 型 五 F 型→四 N 型、四 L 型、四 Y 型	120：0	24：0	皆全部順利成疊
5	五 L 型 五 Y 型 五 P 型→四 N 型、四 L 型、四 Y 型、 五 U 型　四 I 型、四格窗型 五 N 型 五 I 型	比例不同		

（2）藉由上述表格，可以發現能夠類推的方塊配對有 7 種，不能夠類推的方塊配對有 6 種，且由五 L 型、五 Y 型、五 P 型、五 U 型、五 N 型、五 I 型不合理的狀況中，**其非主幹部份皆在主幹的同一方向，且平行於主幹，或只有主幹**。

（三）比較二種圖形類推方法的差異

1.分析

（1）在四連塊→五連塊與其逆推過程中，分別有二個與六個例外。

（2）在所有的五連塊例外方塊配對中，皆可逆推回四 L 型。

2.過程

（1）我決定將這兩個方法統整比較，針對例外配對的規律詳列表格如下：

	四連塊→五連塊	五連塊→四連塊
不可類推組數	3 組	6 組
例外組型	五 U 型、五 N 型、五 I 型	五 L 型、五 Y 型、五 P 型、五 U 型、五 N 型、五 I 型
例外原因	非主幹部份皆在主幹的同一方向，平行於主幹，或只有主幹。	

（2）例外原因皆是因爲非主幹平行於主幹，或只有主幹。

3.結果

（1）依照以上的發現，歸納出以下結論：

（a）四連塊→五連塊的解釋方法較能廣泛解釋五連塊十二種變化。

（b）若非主幹部分與主幹平行，則無法順利解釋。

（c）五 U 型、五 N 型、五 I 型不論用哪一種方法解釋，皆無法成立。

三、研究三（一）：摺紙遊戲五連塊最佳解題策略。

（一）三連數的解釋與運用

1.分析

（1）在閱讀參考資料中五連塊的部份時，我推測三連數可能是一個解題的關鍵，因爲在各種五連塊配對當中，數字排列配對有出現三連數，則可順利成疊，例如：五 I 型的 21345 中的 345 是三連數，它是順利成疊的配對。

（2）另外，在無法成功的配對中，也不存在三連數，例如：五 I 型的 13254，它是無法順利成疊的配對，且沒有三連數。

2.過程

（1）我開始逐一驗證五 I 型的數字配對，列表如下：

三連數成功配對		無三連數失敗配對			無三連數卻成功配對	
12345	12354	12435	12453	13245	12534	15243
12543	13452	13254	13425	13524	21354	23145
14325	15234	13542	14235	14253	32415	34251
15423	15432	14352	14523	14532	43521	45312
21345	21534	15324	15342	21435	51423	54132
21543	23154	21453	23514	23541		
23415	23451	24135	24153	24315		

24513	25431	24351	24531	25134		
31542	32145	25143	25314	25341		
32154	32451	25413	31245	31254		
34215	34512	31425	31452	31524		
34521	35124	32514	32541	34125		
41235	42153	34152	35142	35214		
43215	43251	35241	35412	35421		
43512	45123	41253	41325	41352		
45132	45321	41523	41532	42135		
51234	51243	42315	42351	42513		
51432	52341	42531	43125	43152		
53214	54123	45213	45231	51324		
54312	54321	51342	52134	52143		
		52314	52413	52431		
		53124	53142	53241		
		53412	53421	54213		
		54231				

（2）比較各種五連塊的三連數類推情形：

五連塊種類	成功類推情形	無法類推情形
五 I 型	110	10
五 L 型	80	40
五 Y 型	80	40
五 P 型	60	60
五 U 型	40	80
五 N 型	60	60
五 T 型	40	80
五 V 型	40	80
五 Z 型	40	80
五 F 型	40	80
五 X 型	40	80
五 W 型	40	80

（3）依照三連數五 I 型的規則推論，有 10 組例外。其他 11 種類型皆有無法類推情形，是否此推論需要修正呢？

3.結果

（1）在五 I 型的三連數應用中，順利推論的有 110 種，例外有 10 種。在例外的數字配對中，1、2、3、4、5 帶頭分別都有 2 組，而在第二、三位數字中，分別爲與帶頭數字相鄰的二個數字，在最後二位數字中，相同帶頭的數字

配對順序恰好相反。

（2）由上表可知在其他的十一種五連塊中，皆有多數反例，推測三連數的解釋與運用需要重新定義。

（3）三連數只能解釋部份的種類，無法廣泛利用。所以，我進一步發現了退位法的直接替代。

（二）退位法的解釋與運用

※直接替代類型的解題策略

1.分析

（1）退位法的直接替代運用如圖二十五：五 L 型

1			
2	3	4	5

此時，將五 L 型刪減爲四 I 型，數字改變如圖二十六：四 I 型

2	3	4	5→1

四 I 型數字配對中，2341 能夠順利成疊，則五 L 型的 12345 能夠順利成疊。

2.過程

（1）我開始逐一驗證五 L 型以直接替代的方式刪減爲四 I 型的結果，如下：

成功運用配對					無法運用配對		
12345	12354	12435	12453	12534	21345	21354	21435
12543	13245	13254	13425	13452	21453	23145	23154
13524	13542	14235	14253	14325	23514	23541	24135
14352	14523	14532	15234	15243	24153	24513	24531
15324	15342	15423	15432	21534	25314	25341	25413
21543	23415	23451	24315	24351	25431	31425	31452
25134	25143	31245	31254	32145	31524	31542	32415
32154	34512	34521	35412	35421	32451	32514	32541
41235	41253	41325	41352	41523	34125	34152	34215
41532	42135	42153	42315	42351	34251	35124	35142
42513	42531	43125	43152	43215	35214	35241	
43251	43512	43521	45123	45132			
45213	45231	45312	45321	51234			
51243	51324	51342	51423	51432			
52134	52143	52314	52341	52413			
52431	53124	53142	53214	53241			
53412	53421	54123	54132	54213			
54231	54312	54321					

（2）依照五 L 型直接替代的方法推論，有 32 組例外。

（3）比較各種五連塊的直接替代方法運用情形：

五連塊種類	成功運用情形	無法運用情形
五 I 型	120	0
五 L 型	88	32
五 Y 型	60	60
五 P 型	40	80
五 U 型	80	40
五 N 型	80	40
五 T 型	120	0
五 V 型	120	0
五 Z 型	120	0
五 F 型	120	0
五 X 型	120	0
五 W 型	120	0

3.結果

（1）五 P 型、五 U 型、五 N 型由於刪減後最大 I 型爲三 I 型，照直接替代的方法，其配對應該全部成功，但其配對分別只有 40 種和 80 種能夠順利成疊。

（2）因爲無法運用的配對太多，修正直接替代的作法爲退位類型。

※退位類型的解題策略

1.分析

（1）退位法的退位運用：圖二十七：五 T 型

	1	
	2	
3	4	5

此時，將五 T 型刪減爲三 I 型，數字改變圖二十八：三 I 型：

3→1	4→2	5→3

三 I 型數字配對中，123 能夠順利成疊，五 T 型的 12345 能夠順利成疊。

2.過程

（1）我開始逐一驗證五 T 型以退位的方式刪減爲三 I 型的結果，如下：

ABCDE	成功運用情形	無法運用情形
A 爲 1 帶頭所有組型	24	0
A 爲 2 帶頭所有組型	24	0
A 爲 3 帶頭所有組型	24	0
A 爲 4 帶頭所有組型	24	0
A 爲 5 帶頭所有組型	24	0

（2）依照五 T 型退位的方法推論，全部都能成功運用。

（3）比較各種五連塊的退位方法運用情形：

五連塊種類	成功運用情形	無法運用情形
五 I 型	120	0
五 L 型	120	0
五 Y 型	120	0
五 P 型	40	80
五 U 型	80	40
五 N 型	80	40
五 T 型	120	0
五 V 型	120	0
五 Z 型	120	0
五 F 型	120	0
五 X 型	120	0
五 W 型	120	0

3.結果

（1）在退位法的退位類型裡，十二種五連塊中有九種能順利推論成疊，有三種無法完全推論成疊。

（2）此方法是目前我所發現的最佳解題策略，能夠直接目測推斷可否順利成疊，能夠順利推斷的有：五 I 型、五 L 型、五 Y 型、五 T 型、五 V 型、五 Z 型、五 F 型、五 X 型、五 W 型。

（3）在五連塊中，五 P 型、五 U 型、五 N 型無法完全順利推斷可否順利成疊，因為五 P 型、五 U 型、五 N 型皆是以三 I 型為底，但是在依照退位法的退位類型刪去非 I 型的部份後，三 I 型應該全部順利成疊，但是此三種五連塊並不符合全部順利成疊，造成了例外。

四、研究三（二）：特殊解題方式說明

（一）五 P 型順序連數法

1.分析

（1）五 P 型順序連數法如圖二十九：五 P 型

A	B	C
	D	E

此時，考慮四格窗型 BCED 或 BDEC 的數字順序(數字可小到大或大到小)：圖三十：

1	2	3
	5	4

四格窗型中的數字 2345 爲順序，五 P 型的數字配對 12354 可以順利成疊。

2.過程

（1）我開始逐一驗證五 P 型以順序連數法推論的結果，如下：

ABCDE	成功運用情形	無法運用情形
A 爲 1 帶頭所有組型	24	0
A 爲 2 帶頭所有組型	24	0
A 爲 3 帶頭所有組型	24	0
A 爲 4 帶頭所有組型	24	0
A 爲 5 帶頭所有組型	24	0

（2）依照五 P 型順序連數法推論，全部都能成功運用。

3.結果

（1）順序連數法可以成功解釋所有五 P 型的數字配對，因爲五 P 型是四格窗型的變形。

（二）五 U 型雙軌連數法

1.分析

（1）五 U 型雙軌連數法如圖三十一：五 U 型

A	B	C
D		E

考慮雙二連塊 AD 和 CE 的數字順序，若其中有一個二連塊爲連數，數字配對可以順利成疊，如圖三十二：

1	2	3
4		5

雙二連塊中的數字 14 和 35 皆不爲順序，五 U 型的數字配對 12345 無法順利成疊。

2.過程

（1）我開始逐一驗證五 U 型以雙軌連數法推論的結果，如下：

ABCDE	成功運用情形	無法運用情形
A 爲 1 帶頭所有組型	24	0
A 爲 2 帶頭所有組型	24	0
A 爲 3 帶頭所有組型	24	0
A 爲 4 帶頭所有組型	24	0
A 爲 5 帶頭所有組型	24	0

（2）依照五 U 型雙軌連數法推論，全部都能成功運用。

3.結果

（1）雙軌連數法可以成功解釋所有五 U 型的數字配對，因爲五 U 型是雙二連塊連接起來的形狀。

（三）五 N 型對角連數法

1.分析

（1）五 N 型對角連數法如圖三十三：五 N 型

A	B	C	
		D	E

此時，考慮雙二連塊 AB 和 DE 的數字順序，若其中有一個二連塊爲連數，則此數字配對可以順利成疊，如圖三十四：

1	2	4	
		3	5

雙二連塊中的數字 12 爲順序，五 N 型的數字配對 12435 可以順利成疊。

2.過程

（1）我開始逐一驗證五 N 型以對角連數法推論的結果，如下：

ABCDE	成功運用情形	無法運用情形
A 爲 1 帶頭所有組型	24	0
A 爲 2 帶頭所有組型	24	0
A 爲 3 帶頭所有組型	24	0
A 爲 4 帶頭所有組型	24	0
A 爲 5 帶頭所有組型	24	0

（2）依照五 N 型對角連數法推論，全部都能成功運用。

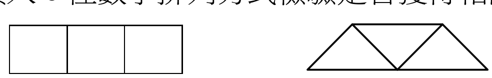
3.結果

（1）對角連數法可以成功解釋所有五 N 型的數字配對，因爲五 N 型是雙二連塊連接起來的形狀。

五、研究四：探討正三角形、正六邊形摺疊地圖的解題過程。

（一）正三角形摺紙探討：

1. 試做正方形三 I 型與正三角形三 I 型的摺疊地圖遊戲。
2. 分別填入 6 種數字排列方式檢驗是否獲得相同摺疊結果。



3. 製表如下說明：

正方形三 I 型

A＝1		A＝2		A＝3	
123	○	213	○	312	○
132	○	231	○	321	○

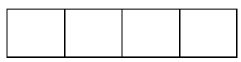
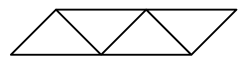
正三角型三 I 型

A＝1		A＝2		A＝3	
123	○	213	○	312	○
132	○	231	○	321	○

4. **結果如同正方形摺紙成疊，正三角形全部順利成疊**。

（2） 試做正方形四 I 型與正三角形四 I 型的摺疊地圖遊戲。

1. 分別填入 24 種數字排列方式檢驗是否獲得相同摺疊結果。

2. 製表如下說明：

正方形四 I 型

A＝1		A＝2		A＝3		A＝4	
1234	○	2134	○	3124	×	4123	○
1243	○	2143	○	3142	×	4132	○
1324	×	2314	○	3214	○	4213	×
1342	×	2341	○	3241	○	4231	×
1423	○	2413	×	3412	○	4312	○
1432	○	2431	×	3421	○	4321	○

正三角形四 I 型

A＝1		A＝2		A＝3		A＝4	
1234	○	2134	○	3124	○	4123	○
1243	○	2143	○	3142	○	4132	○
1324	○	2314	○	3214	○	4213	○
1342	○	2341	○	3241	○	4231	○
1423	○	2413	○	3412	○	4312	○
1432	○	2431	○	3421	○	4321	○

3. 我發現**正三角形四 I 型全部皆可順利成疊，其結果不同於正方形四 I 型摺紙成疊中，必須數字奇偶相間才可順利成疊**。

4. 製表說明正三角形五 I 型

A＝1		A＝2		A＝3		A＝4		A＝5	
12345	○	21345	○	31245	○	41235	×	51234	○
12354	○	21354	○	31254	○	41253	×	51243	○
12435	○	21435	○	31425	×	41325	×	51324	○

12453	○	21453	○	31452	×	41352	×	51342	○
12534	○	21534	○	31524	×	41523	○	51423	○
12543	○	21543	○	31542	×	41532	○	51432	○
13245	○	23145	○	32145	○	42135	×	52134	○
13254	○	23154	○	32154	○	42153	×	52143	○
13425	×	23415	○	32415	○	42315	○	52314	×
13452	×	23451	○	32451	○	42351	○	52341	×
13524	×	23514	○	32514	○	42513	×	52413	×
13542	×	23541	○	32541	○	42531	×	52431	×
14235	×	24135	×	34125	○	43125	○	53124	×
14253	×	24153	×	34152	○	43152	○	53142	×
14325	×	24315	○	34215	○	43215	○	53214	×
14352	×	24351	○	34251	○	43251	○	53241	×
14523	○	24513	×	34512	○	43512	○	53412	○
14532	○	24531	×	34521	○	43521	○	53421	○
15234	○	25134	○	35124	×	45123	○	54123	○
15243	○	25143	○	35142	×	45132	○	54132	○
15324	○	25314	×	35214	×	45213	○	54213	○
15342	○	25341	×	35241	×	45231	○	54231	○
15423	○	25413	×	35412	○	45312	○	54312	○
15432	○	25431	×	35421	○	45321	○	54321	○

5.發現：

（1）正三角形五 I 型 80 種可以順利成疊，40 種無法順利成疊。

（2）A=1~5 時，各有 16 種可以順利成疊，8 種無法順利成疊。

（3）成功與失敗規律的發現：

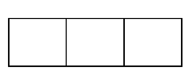
如右圖說明：

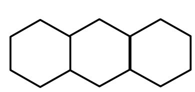
A	B	C	D	E

當 **B 與 A 的數字具順序與連續性時**(例如：1 與 2 或 5 相鄰)，該數字配對**必能全部順利成疊**。另外，當 B 與 A 的數字不具連續順序性時(例如：1 不與 3、4 相鄰)，該數字配對則只有 **D、E 數字具順序連續性者才能夠順利成疊，不符合此規則者的數字配對皆無法順利成疊**。

（二）正六邊形摺紙探討：

1. 試做正方形三 I 型與正六邊形三 I 型的摺疊地圖遊戲。
2. 分別填入 6 種數字排列方式檢驗是否獲得相同摺疊結果。





3. 製表如下說明：

正方形三 I 型

A＝1		A＝2		A＝3	
123	○	213	○	312	○
132	○	231	○	321	○

正六邊形三 I 型

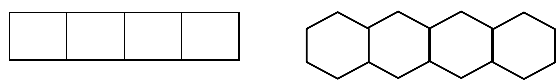
A＝1		A＝2		A＝3	
123	○	213	○	312	○
132	○	231	○	321	○

5. **結果如同正方形摺紙成疊，正六邊形全部順利成疊**。

（3） 試做正方形四 I 型與正六邊形四 I 型的摺疊地圖遊戲。

1. 分別填入 24 種數字排列方式檢驗是否獲得相同摺疊結果。

圖八：



2. 製表如下說明：

正方形四 I 型

A＝1		A＝2		A＝3		A＝4	
1234	○	2134	○	3124	×	4123	○
1243	○	2143	○	3142	×	4132	○
1324	×	2314	○	3214	○	4213	×
1342	×	2341	○	3241	○	4231	×
1423	○	2413	×	3412	○	4312	○
1432	○	2431	×	3421	○	4321	○

正六邊形四 I 型

A＝1		A＝2		A＝3		A＝4	
1234	○	2134	○	3124	×	4123	○
1243	○	2143	○	3142	×	4132	○
1324	×	2314	○	3214	○	4213	×
1342	×	2341	○	3241	○	4231	×
1423	○	2413	×	3412	○	4312	○
1432	○	2431	×	3421	○	4321	○

3. 我發現**正六邊形四 I 型成疊情形如同正方形四 I 型，數字中必須奇偶數相鄰才可以成疊。**

4. 製表說明正六邊形五 I 型

A＝1		A＝2		A＝3		A＝4		A＝5	
12345	○	21345	○	31245	×	41235	○	51234	○
12354	○	21354	○	31254	×	41253	×	51243	○
12435	×	21435	×	31425	×	41325	×	51324	×
12453	×	21453	×	31452	×	41352	×	51342	×
12534	○	21534	○	31524	×	41523	×	51423	○
12543	○	21543	○	31542	○	41532	×	51432	○
13245	×	23145	○	32145	○	42135	×	52134	×
13254	×	23154	○	32154	○	42153	○	52143	×
13425	×	23415	○	32415	○	42315	×	52314	×
13452	○	23451	○	32451	○	42351	×	52341	○
13524	×	23514	×	32514	×	42513	×	52413	×
13542	×	23541	×	32541	×	42531	×	52431	×
14235	×	24135	×	34125	×	43125	×	53124	×
14253	×	24153	×	34152	×	43152	×	53142	×
14325	○	24315	×	34215	○	43215	○	53214	○
14352	×	24351	×	34251	○	43251	○	53241	×
14523	×	24513	○	34512	○	43512	○	53412	×
14532	×	24531	×	34521	○	43521	○	53421	×
15234	○	25134	×	35124	○	45123	○	54123	○
15243	○	25143	×	35142	×	45132	○	54132	○
15324	×	25314	×	35214	×	45213	×	54213	×
15342	×	25341	×	35241	×	45231	×	54231	×
15423	○	25413	×	35412	×	45312	○	54312	○
15432	○	25431	○	35421	×	45321	○	54321	○

5.發現：

（1）正六邊形五 I 型 50 種可以順利成疊，70 種無法順利成疊。

（2）A=1~5 時，各有 10 種可以順利成疊，14 種無法順利成疊。

（3）成功與失敗規律的發現：

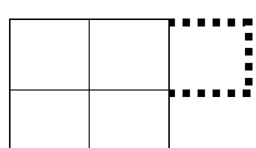
與正方形五 I 型成功情形完全相同。

伍、 研究結果

一、摺紙遊戲四、五連塊連接面的探討

(一) 四連塊→五連塊連接面的探討：

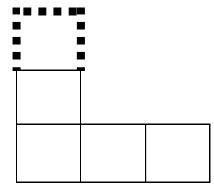
如右圖：五 P 型是以四格窗型爲基礎作爲增加延伸的變化，所以稱爲四連塊→五連塊連接面的變化。



1. 能夠類推的方塊配對有 10 種，不能夠類推的方塊配對有 2 種，不能類推的方塊配對爲五 U 型和五 N 型。

(二) 五連塊→四連塊連接面的探討：

如右圖：五連塊五 V 型從左右兩頭刪去任何一塊，就會變成四連塊四 L 型，所以稱爲五連塊→四連塊連接面的變化。



1.能夠類推的方塊配對有 7 種，不能夠類推的方塊配對有 5 種，不能類推的方塊配對有五 U 型、五 N 型、五 L 型、五 Y 型、五 P 型。

(三) 比較二種方法的差異

1.不能夠類推的方塊配對的特點：

（1）非主幹部份皆在主幹的同一方向，且平行於主幹。

（2）共同根本皆爲四 L 型

2.經過比較，發現四連塊→五連塊比五連塊→四連塊的順利類推方塊配對多。

二、摺紙遊戲五連塊最佳解題策略

(一) 退位法的解釋與運用

1.直接替代類型的解題策略

（1）五 L 型成功類推的組數爲 88 種，無法類推的組數爲 32 種，成功類推組數較爲奇特。

（2）在五連塊中，有 7 組能完全以退位法的直接替代類型推論，5 組無法完全以直接替代類型類推，列表如下：

成功類推組數	五連塊種類
40 種	五 P 型
60 種	五 Y 型
80 種	五 U 型、五 N 型
88 種	五 L 型
120 種 (可)	五 I 型、五 T 型、五 V 型、五 W 型、 五 Z 型、五 F 型、五 X 型

修正直接替代類型爲退位類型。

2.退位類型的解題策略

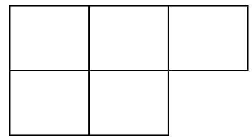
（1）在五連塊中，有 9 組能完全以退位法的退位類型推論，3 組無法完全以退位類型類推，列表如下：

成功類推配對	五 I 型、五 T 型、五 V 型、 五 W 型、五 L 型、五 Z 型、 五 F 型、五 X 型、五 Y 型
無法類推配對	五 P 型、五 U 型、五 N 型

（2）無法以退位類型推論的五連塊配對分別爲五 P 型、五 U 型、五 N 型，尋找此三種五連塊的特殊解題策略。

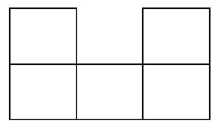
(二) 五 P 型、五 U 型、五 N 型的特殊解題策略

1.五 P 型順序連數法，如右圖：五 P 型



（1）順序連數法能夠解釋所有五 P 型的數字配對，因爲五 P 型是四格窗型的變形。

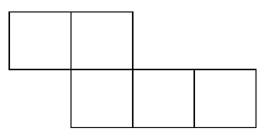
2.五 U 型雙軌連數法，如右圖：五 U 型



（1）雙軌連數法能夠解釋所有五 U 型的數字配對，因爲五 U 型是雙二連塊連接起來的形狀。

3.五 N 型對角連數法

如右圖：五 N 型



（1）對角連數法能夠解釋所有五 N 型的數字配對，因爲五 N 型是雙二連塊連接起來的形狀。

（三）根據以上的發現，將 12 種五連塊適用解題策略整理出總表，並說明原因，如下表：

<table>
<tr><th>連塊類型</th><th>最佳解題策略</th><th>成功類推組數</th></tr>
<tr><td>五 I 型</td><td rowspan="9">退位法</td><td rowspan="12">120</td></tr>
<tr><td>五 L 型</td></tr>
<tr><td>五 Y 型</td></tr>
<tr><td>五 T 型</td></tr>
<tr><td>五 V 型</td></tr>
<tr><td>五 W 型</td></tr>
<tr><td>五 X 型</td></tr>
<tr><td>五 Z 型</td></tr>
<tr><td>五 F 型</td></tr>
<tr><td>五 P 型</td><td>順序連數法</td></tr>
<tr><td>五 U 型</td><td>雙軌連數法</td></tr>
<tr><td>五 N 型</td><td>對角連數法</td></tr>
</table>

（四）正三角形和正六邊形摺紙成疊的探討：

1. 正三角形三 I 型如同正方形三 I 型摺紙成疊，全部順利成疊。
2. 正三角形四 I 型全部皆可順利成疊，不同於正方形四 I 型摺紙成疊中，必須數字奇偶相間才可順利成疊。
3. 正三角形五 I 型 80 種可以順利成疊，40 種無法順利成疊。

成功與失敗規律的發現：

A	B	C	D	E

當 **B 與 A 的數字具順序與連續性時**(例如：1 與 2 或 5 相鄰)，該數字配對**必能全部順利成疊**。另外，當 B 與 A 的數字不具連續順序性時(例如：1 不與 3、4 相鄰)，該數字配對則只有 **D、E 數字具順序連續性者才能夠順利成疊，不符合此規則者的數字配對皆無法順利成疊**。

4. 正六邊形三 I 型如同正方形三 I 型摺紙成疊，全部順利成疊。
5. 正六邊形四 I 型和五 I 型成疊情形如同正方形四 I 型和五 I 型，數字中必須奇偶數相鄰才可成疊。
6. 綜合比較：以 I 型爲例說明三種不同形狀摺紙順利成疊成功情形：

	正方形	正三角形	正六邊形
三 I 型	6/6	6/6	6/6
四 I 型	16/24	24/24	16/24
五 I 型	50/120	80/120	50/120
※ A/B 表示 成功組數/全部組數			

陸、展望

在這篇研究中已經討論並發現五連塊的最佳解題策略，也分析會影響摺疊地圖的相關變項有哪些，以及數種五連塊特殊解題的方法，這些方法皆能迅速找出正確答案，適用程度大於前一篇作品。日後如果有機會繼續深入研究此主題，希望能夠將這些解題策略應用到六連塊的推測上，找出六連塊適當的解題方法，我將持續努力找尋六連塊最佳解題策略。

柒、參考資料

Brian Bolt（1996）。數學遊樂園妙想天開。台北市：牛頓。

【評語】080411

1. 題目具有一定的趣味性。
2. 討論的完整性也不錯。
3. 分析及深入度有待加強。
4. 寫作的結構組織可以再強化。