中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第二名

080407

變形方塊~最少刀切割五、八方塊重組爲正方形的探討

學校名稱：臺北市士林區士東國民小學

作者：	指導老師：
小六 郭笛萱	林華葵
小六 黃建程	張秀蘭
小六 張高登	

關鍵詞：　變形方塊、最少刀、拼正方形

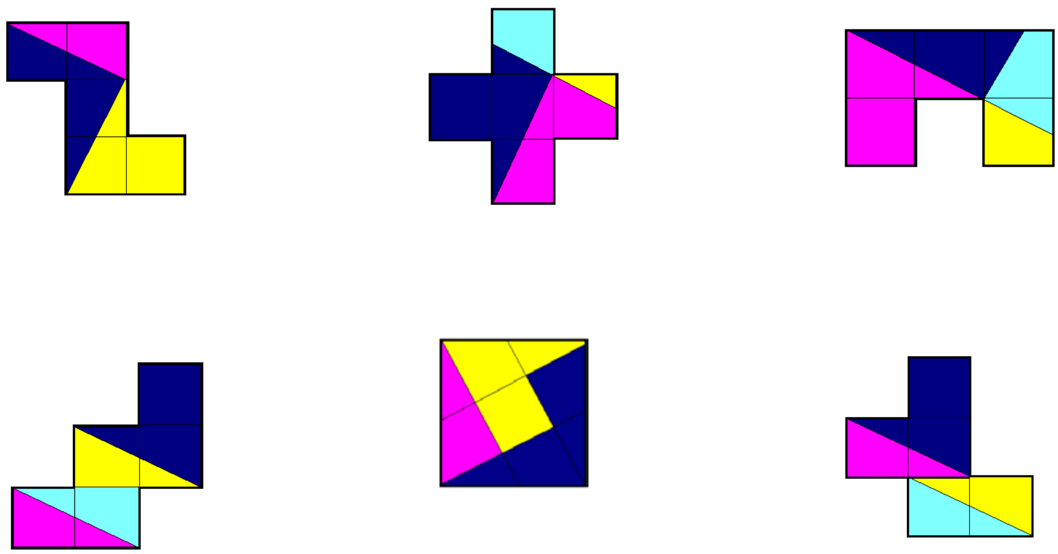
變形方塊

最少刀切割五、八方塊重組爲正方形的探討

壹、 摘要

由【希臘十字】的挑戰爲起點，我們試著探討多方塊用最少刀切割再重組拼成正方形的可能性。研究過程中，我們發現邊長長度是一個重要的因素，在五方塊中找$\sqrt{5}$的邊長，八方塊中找$\sqrt{8}$的邊長是解題關鍵，垂直切割後能產生直角是另一個關鍵。研究結果顯示 12 種五方塊圖形中，切割重組成正方形的最少刀數是二刀(五種圖形)及三刀(七種圖形)；369 種八方塊圖形中，切割重組成正方形的最少刀數是一刀(4 種圖形)、二刀(215 種圖形)、三刀(149 種圖形)及四刀(1 種圖形)。

將五、八方塊切割組合的方法，運用到十方塊的切割組合是可能的。目前我們依方塊數及圖形的不同，分爲等長型、固定型、不定型等應用類型，而更完整的應用持續在研究中。



貳、 研究動機

我們在「征服數學的 15 座高峰」這本書上，看見了一個題目《希臘十字》(合併五個方塊所形成的十字架即稱爲《希臘十字》)。書中舉了兩種解法，將十字架用兩刀切成四塊及用四刀切成五塊，再合併成一個大正方形。書中又說：「有無限多的切法」。這引起我們對《希臘十字》的興趣，甚至想試試其他五方塊切割再拼爲大正方形的可能。接著，在校內展中，有其他作品也研究用最少刀切割圖形再合併成大正方形。經過討論，我們決定合作來完整探討用最少刀切五方塊及八方塊，再拼成大正方形。在研究過程中，我們發現邊長長度概念(五下南一版數學第五單元圖形的面積 P40—P48)及線對稱圖形概念(五下南一版數學第三單元線對稱圖形 P24—P30)對我們的研究有很大助益，使我們能順利完成研究。

參、研究目的

一、 五方塊及八方塊各有多少種組合圖形？
二、 五方塊都能用切最少刀，切割組合拼出大正方形嗎？
三、 八方塊都能用切最少刀，切割組合拼出大正方形嗎？
四、 將五、八方塊切割組合的方法，應用到十方塊的可能性探討。

肆、研究設備及器材

方格紙、彩色筆、尺、膠水、剪刀

伍、 研究過程及方法

一、 五方塊及八方塊各有多少種組合圖形？

我們分別用自己的想法，找出五、八方塊的組合圖形，想法如下：

(一) 第一種想法

1. 在切割圖形前，我們想知道 n 個方塊可以有多少種不同的組合圖形，我們找到了一種規律：

1	2	3	4	5	6	7	8
(1)	(1)	(2)	(5)	(12)	(34)->(35)	(93)	(295)
1=1	11=1	21=1	31=2	41=5	51=12	61=35	71=108
		111=1	22=1	32=2	42=5	52=12	62=35
			211=1	311=2	411=5	511=12	611=35
			1111=1	221=1	33=4	43=10	53=24
				2111=1	321=2	421=5	521=12
				11111=1	3111=2	4111=5	5111=12
					222=1	331=4	44=25
					2211=1	322=2	431=10
					21111=1	3211=2	4211=5
					111111=1	31111=2	41111=5
						2221=1	422=5
						22111=1	332=4
						211111=1	3311=4
						1111111=1	3221=2
							32111=2
							311111=2
							2222=1
							22211=1
							221111=1
							2111111=1
							11111111=1

規律說明如下：

一方塊只有 1 種組合圖形。

二方塊只有 1 種組合圖形。

三方塊可分爲 2+1、1+1+1。2+1 有 1 種組合圖形，1+1+1 也有 1 種組合圖形，所以三方塊有 2 種組合圖形。

四方塊可分爲 3+1、2+2、2+1+1、1+1+1+1。3+1 有 2 種組合圖形，2+2 有 1 種組合圖形，2+1+1 有 1 種組合圖形，1+1+1+1 有 1 種組合圖形，所以四方塊有 5 種組合圖形。

五方塊可類推有 12 種組合圖形。

六方塊可類推有 34 種組合圖形，但實際畫出的圖形有 35 種，所以以 35 種爲準，並以 35 種來推算七方塊。

七方塊可類推有 93 種組合圖形，但依書本的答案，圖形有 108 種，所以以 108 種爲準，並以 108 種來推算八方塊。

八方塊可分爲 7+1、6+2、6+1+1、5+3、5+2+1、5+1+1+1、4+4、4+3+1、4+2+1+1、4+1+1+1+1、4+2+2、3+3+2、3+3+1+1、3+2+2+1、3+2+1+1+1、3+1+1+1+1+1、2+2+2+2、2+2+2+1+1、2+2+1+1+1+1、2+1+1+1+1+1+1、1+1+1+1+1+1+1+1。

以 7+1 爲例，因爲七方塊的組合有 108 種，一方塊的組合有 1 種，所以把 7+1，換成 108x1，依此方法算出各組的圖形數，最後再把各組的結果加起來，所以八方塊有 295 種組合圖形，但依書本的答案，圖形有 369 種(書中只提及八方塊有 369 種圖形，並未提供圖形)，誤差越來越大，可見方塊的組合變化超出我們的預期。

由於圖形組合變化太多，我們只研究五方塊的 12 種組合圖形和八方塊的 369 種組合圖形，至於十方塊的組合圖形則只做部分討論。

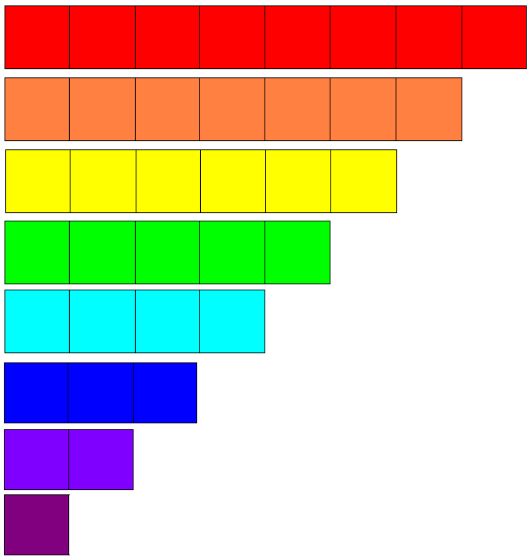
2. 我們想實際上畫出圖形，看共有多少個，畫法如下：

五方塊的組合圖形可以輕易的畫出來，圖形請見 P9。

八方塊的組合圖形畫法如下：

把八方塊分爲 8+0、7+1、6+2、5+3、4+4、3+5、2+6 以及 1+7。

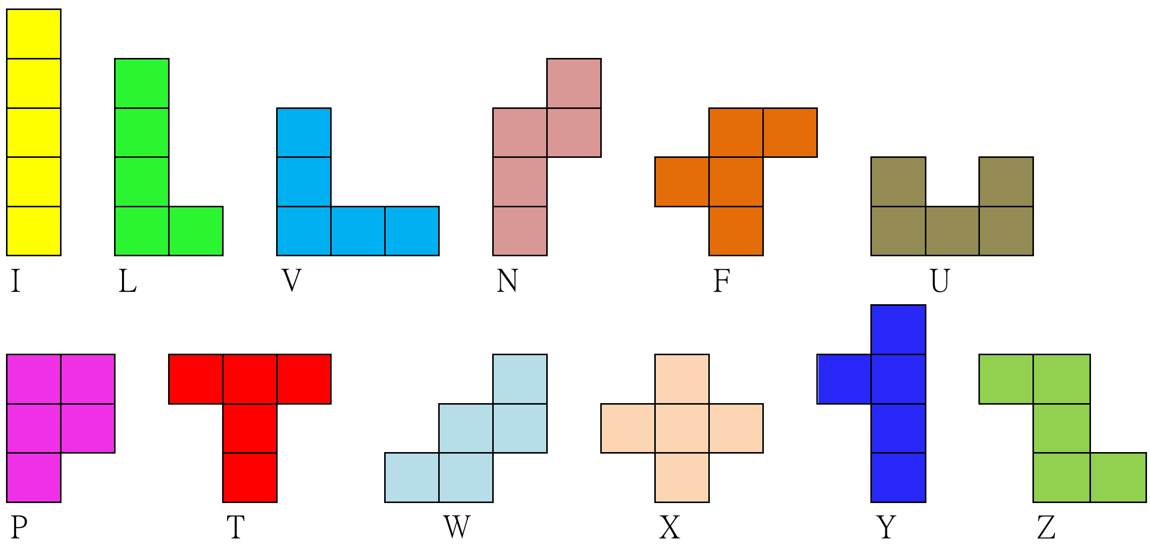
首先從八方塊長條圖開始，這只有 1 種圖形，再用七方塊當基準，搭配 1 方塊的變化圖形，這共有 4 種圖形，依序，用六方塊、五方塊、四方塊……一方塊當基準。



分析結果如下：
以八方塊的長條圖開始，這只有 1 種
以七方塊的長條圖搭配一方塊的變化圖形，這共有 4 種
以六方塊的長條圖搭配二方塊的變化圖形，這共有 25 種
以五方塊的長條圖搭配三方塊的變化圖形，這共有 75 種
以四方塊的長條圖搭配四方塊的變化圖形，這共有 171 種
以三方塊的長條圖搭配五方塊的變化圖形，這共有 92 種
以二方塊的長條圖搭配六方塊的變化圖形，這共有 1 種
以一方塊的長條圖搭配七方塊的變化圖形，這共有 0 種
總共有 369 種。

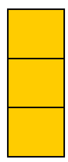
(二) 第二種想法

1. 我們利用地毯式的搜尋法，找出八方塊的組合圖形。首先列出五方塊，並以它做母體，加上三方塊配成八方塊。

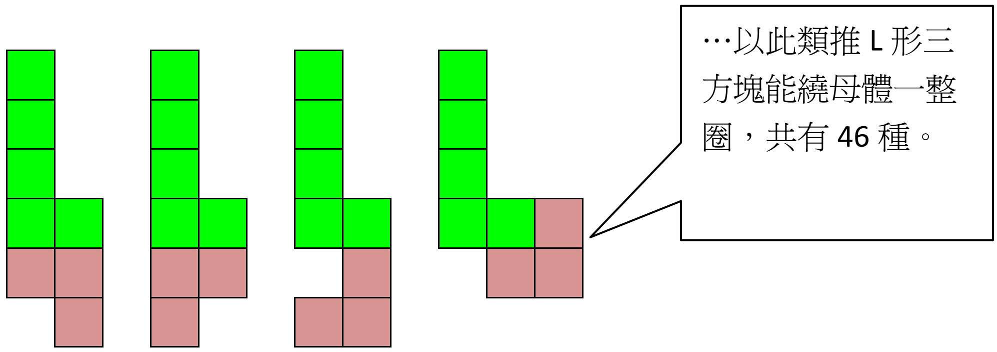


先選擇 L 型五方塊做初始母體

(1)第一階段配直條三方塊，將三方塊以直豎與橫放兩個模式，圍繞 L 型母體一整圈

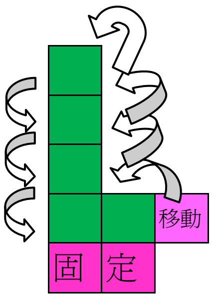


(2)第二階段配 L 型三方塊，將其以正左、正右、反左及反右四種模式，圍繞母體一整圈



(3)第三階段配一個雙方塊、一個單方塊，先固定一個或一組方塊，再以另一個或一組方塊，繞一整圈，完畢後移動固定的那一方塊，到另一新點，再繞一圈，以此類推

例如：



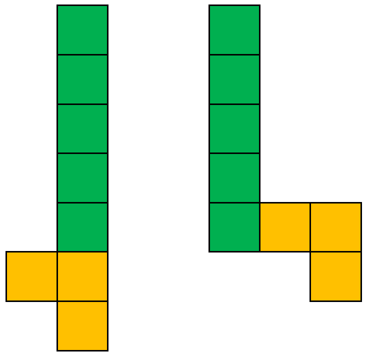
(4)第四階段做法如同第三階段，但爲三個單方塊，未做完，因爲當做到第三階段時已有 310 種八方塊圖形，並有 20～30 種重複。

(5)組合圖形如下面例圖

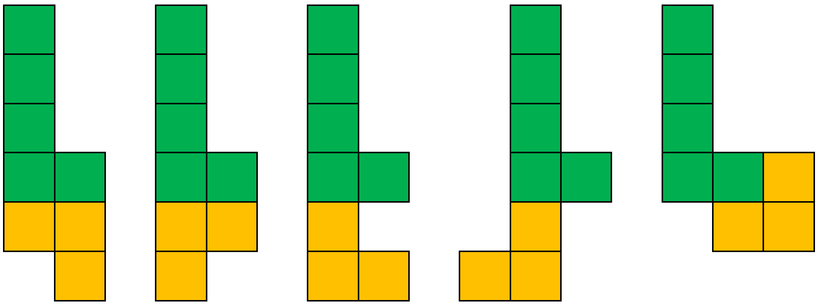
(6)應用上面方法找到 400 多種，但根據資料有 369 種，因此其中應有重複的部分，要加以比對刪除。

後來我們找到 369 種圖形的資料，與我們自行發展的圖形做比對，有一段時間，我們困在 370 種與 369 種圖形中間，再經過數次詳細比對，終於找到重複的一個，完成確認八方塊爲 369 種。

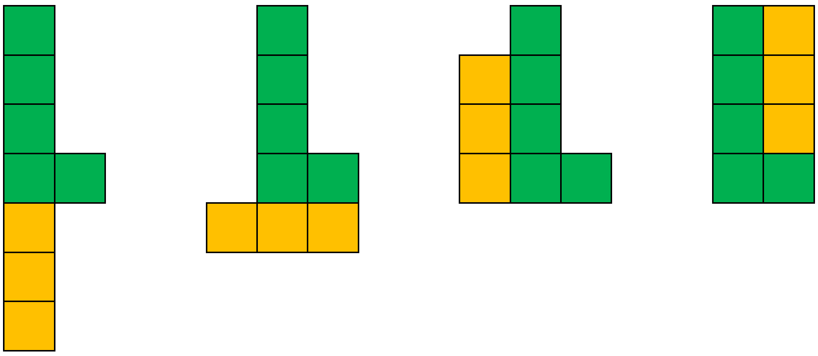
例圖一



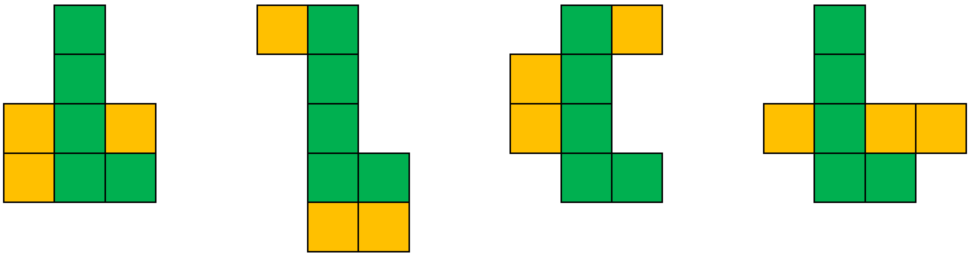
例圖二



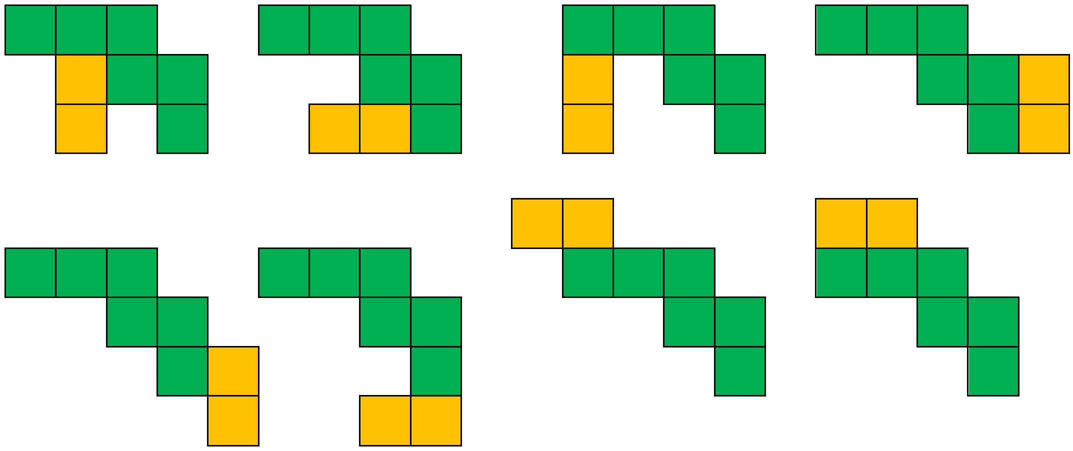
例圖三



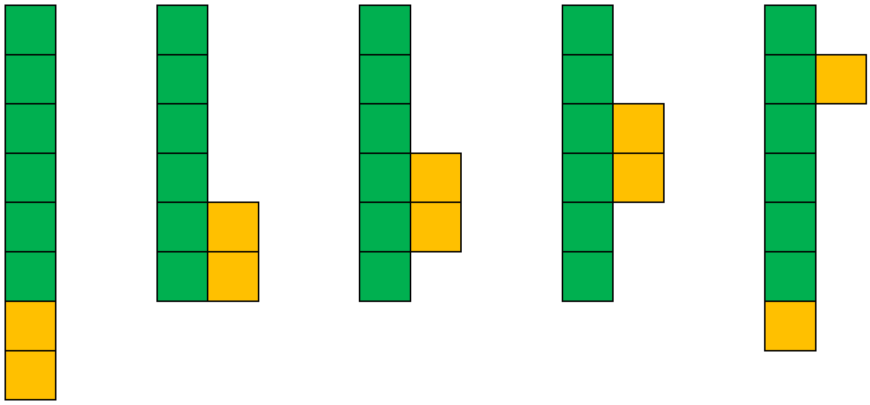
例圖四



例圖五



例圖六



二、五方塊都能用切最少刀，切割組合拼出大正方形嗎？

五方塊的組合圖形有 12 種，我們用各自的想法切割重組，得出每個圖形的最少刀切法。

切割過程及方法如下：

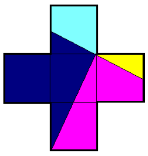
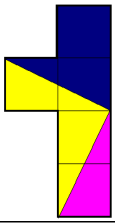
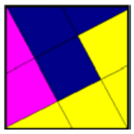
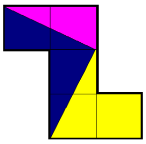
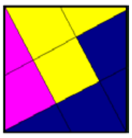
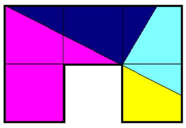
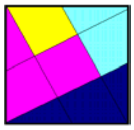
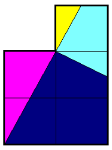
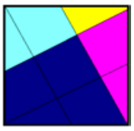
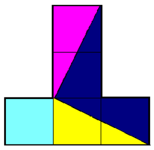
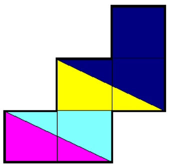
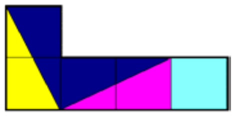
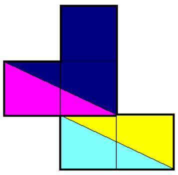
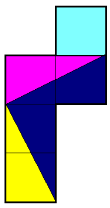
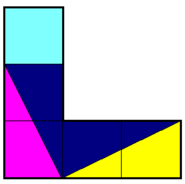
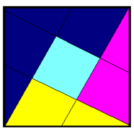
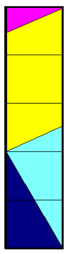
畫出 12 種由五方塊所組成的不同圖形，再切割及重組。

(一) ∵大正方形面積 5=邊長$\sqrt{5}$ × 邊長$\sqrt{5}$，∴利用畢氏定理 $5=1^2+2^2$ 畫出邊長$\sqrt{5}$。

(二) 切割時，切割線的長度最好是$\sqrt{5}$，或$\sqrt{11.25}$，而且最好只切 2 刀，但有些圖形須切 3 刀。

(三) ∵大正方形的 4 個內角皆爲直角，∴切割線最好能造成 4 個直角。

(四) 切割結果如下：

變形前圖形	變形後		變形前圖形	變形後
希臘十字 	2 刀 			2 刀 
	2 刀 			2 刀 
	2 刀 			3 刀 
	3 刀 			3 刀 
	3 刀 			3 刀 
	3 刀 			3 刀 

三、 八方塊都能用切最少刀，切割組合拼出大正方形嗎？

八方塊的組合總數有 369 種，我們決定各自用自己的方法解題，再以交叉比對的方式，來界定每一個八方塊圖形以最少刀來拼出大正方形的最佳解答。以下是我們的

解法，分述如下：

(一) 第一種切割方法

1. 畢氏定理

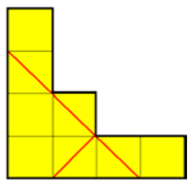
因爲 $8=2^2+2^2$，且大正方形面積 8=邊長$\sqrt{8}$ × 邊長$\sqrt{8}$，所以可找出$\sqrt{8}$的線條。

因爲 $18=3^2+3^2$，所以可找出$\sqrt{18}$ 的線條。

2. 如果有$\sqrt{18}$ 的線條

如果有$\sqrt{18}$ 的線條，就切$\sqrt{18}$，因爲比較省刀。當切出$\sqrt{18}$ 後，就選擇一條與$\sqrt{18}$ 垂直，並且不會太長的線。

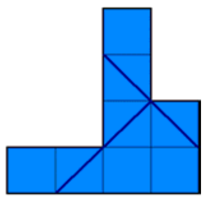
例如：



3. 如果沒有$\sqrt{18}$ 的線條

如果沒有$\sqrt{18}$ 的線條，就切兩條$\sqrt{8}$ ，當切出這兩條線後，如果不需再切一刀，這圖形就只需切兩刀，如果需再切一刀，這圖形就需切三刀。

例如：



4. 八方塊的長條圖只有 1 種，須切 4 刀。
5. 七方塊的長條圖搭配一方塊的變化圖形，共有 4 種，皆須切 3 刀。
6. 六方塊的長條圖搭配二方塊的變化圖形，共有 25 種，其切割刀數如下表：

2 刀	3 刀
10 種	15 種

7. 五方塊的長條圖搭配三方塊的變化圖形，共有 75 種，其切割刀數如下表：

2 刀	3 刀
31 種	44 種

8. 四方塊的長條圖搭配四方塊的變化圖形，共有 171 種，其切割刀數如下表：

1 刀	2 刀	3 刀
2 種	107 種	62 種

9. 三方塊的長條圖搭配五方塊的變化圖形，共有 92 種，其切割刀數如下表：

1 刀	2 刀	3 刀
2 種	67 種	23 種

10. 二方塊的長條圖搭配六方塊的變化圖形，共有 1 種，其切割刀數如下表：

3 刀
1 種

(二) 第二種切割方法

1. 垂直

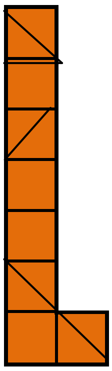
盡量切垂直線，較不會浪費刀數。

2. 各塊的面積越大，刀數越少

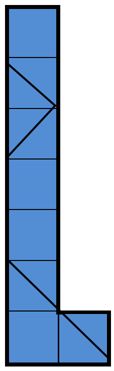
被切割之各塊的面積越大，刀數就越少，因為圖形被分割的越大，剩下需要再補刀的圖形就越小，進而減少補刀。

例如：

X



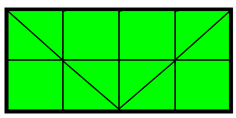
○



3. 所有刀至少會切到 4 個$\sqrt{2}$

因為目標圖形的周長是 8 個$\sqrt{2}$。

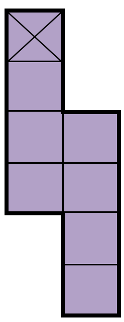
例如：



4. 不要切出小於$\sqrt{2}$ 的線條

切出小於$\sqrt{2}$ 的斜邊小塊，會切出不必要的碎塊，浪費刀數。

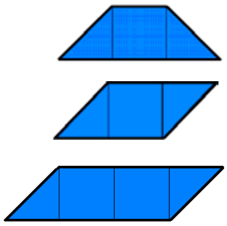
例如：



5. 避免特殊圖形

不好用或不能用的圖形應避免切出，下圖爲 3 個不應被切出的圖形。

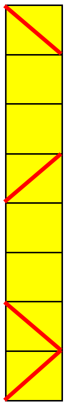
例如：



6. 遇到較長圖形時的應付方法

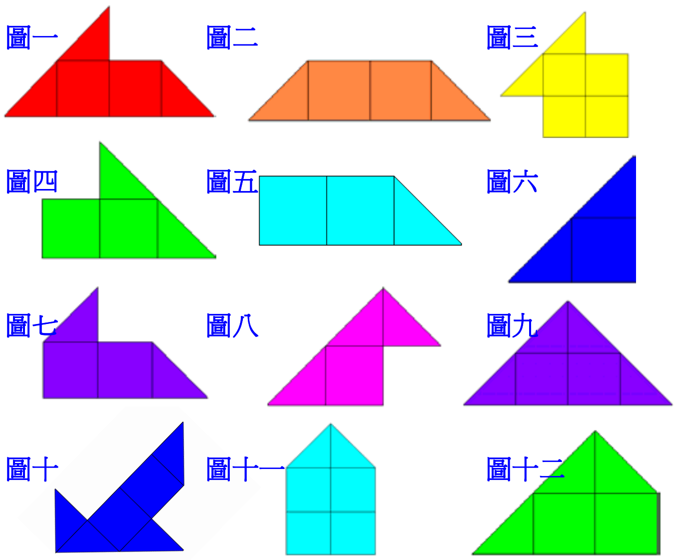
遇到較長圖形時，要將圖形切成下圖，才不會浪費刀數。

例如：



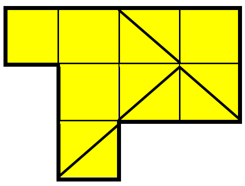
在累積以上經驗後，我們重新切割原本 16 個被歸類到四刀的圖形，發現沒有所謂的”四刀”了，除了八方塊長條圖是較特殊的狀況外，其他的 16 個四刀的圖形都能切出更少刀，因此我們認爲八方塊長條圖只是一個特例，刀數分類只有一、二、三刀及特例而已。

五方塊的 V 形在所要切割的變形方塊中，可以切成下圖一。
四方塊的 I 形在所要切割的變形方塊中，可以切成下圖二。
六方塊的魚形在所要切割的變形方塊中，可以切成下圖三。
四方塊的 y 形在所要切割的變形方塊中，可以切成下圖四。
三方塊的 I 形在所要切割的變形方塊中，可以切成下圖五。
三方塊的 L 形在所要切割的變形方塊中，可以切成下圖六。
四方塊的 L 形在所要切割的變形方塊中，可以切成下圖七。
四方塊的 z 形在所要切割的變形方塊中，可以切成下圖八。
六方塊的凸形在所要切割的變形方塊中，可以切成下圖九。
六方塊的 F 形在所要切割的變形方塊中，可以切成下圖十。
六方塊的 O 形在所要切割的變形方塊中，可以切成下圖十一。
五方塊的 P 形在所要切割的變形方塊中，可以切成下圖十二。

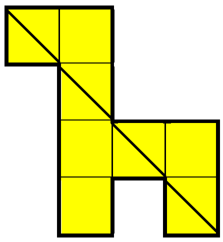


(三) 第三種切割方法

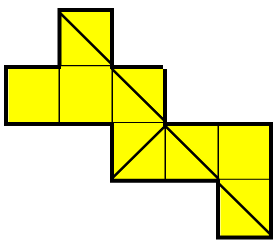
1. 不管切割五方塊或八方塊，最重要的是邊長和直角。
   例如：



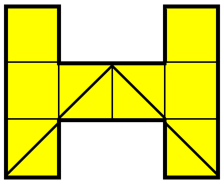
2. 切第一刀的最原始想法就是切出邊長，五方塊盡量切出 $\sqrt{5}$，八方塊盡量切出 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{8}$ ，所以第一刀越長越好，最好一刀就切出四個邊長。
   例如：



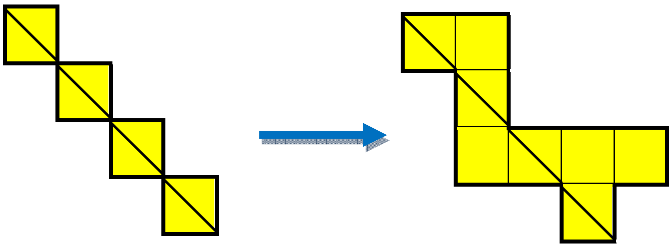
3. 切第二刀的想法就是把長條切短，讓它不大於邊長或對角線，也就是說五方塊不大於邊長 $\sqrt{5}$ 或對角線 $\sqrt{10}$ ，八方塊不大於邊長 $\sqrt{8}$ 或對角線 4。
   例如：



4. 切第二刀的另一個想法是作出直角，所以第一刀和第二刀盡量要形成直角。
   例如：

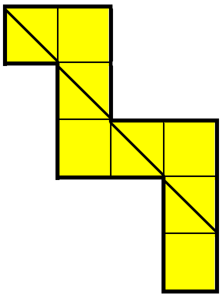


5. 除了較傳統的切法外，另一種想法是逆推法，也就是把必要的方塊逆推排在刀口上，湊足足夠的邊長，再把多餘的方塊連接在必要的方塊邊上，以形成多連方塊。
   例如：圖一變成圖二

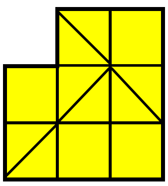


圖一　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　圖二

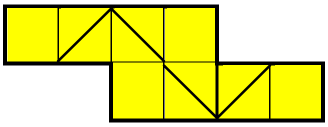
6. 切一刀的探討—注意邊長的長度和切出的圖形長度。
   例如：



7. 切兩刀的探討—注意邊長的長度和切出的圖形長度，兩刀是否形成直角。
   例如：

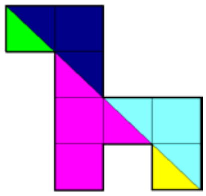
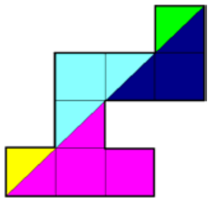
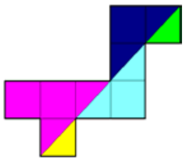
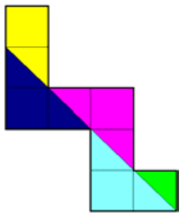


8. 切三刀的探討—注意邊長的長度和切出的圖形長度，兩刀是否形成直角或 45 度角。
   例如：



(四) 交叉比對：應用三種不同方法，切好圖形，經過討論及交叉比對後，確認每一個圖形的最少刀切法。

1. 一刀圖形例圖：

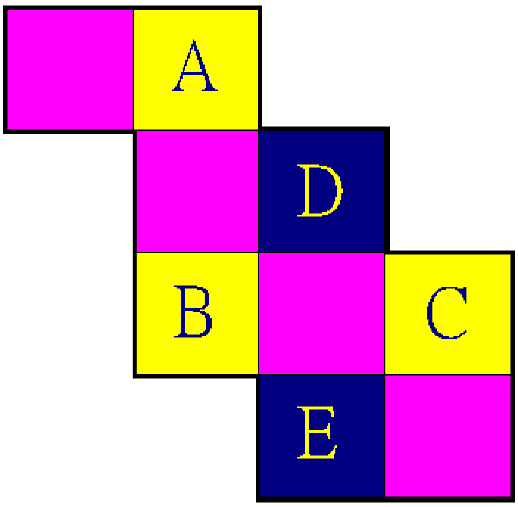
變形前圖形	變形後	變形前圖形	變形後
	1 刀 		1 刀 
	1 刀 		1 刀 

關於一刀的圖形，我們發現：

(1) 如下圖，先完成主要圖形粉紅色方塊，這時，
如果添加黃色方塊 A，就不能添加藍色方塊 D，因為方塊 A 和方塊 D 同時存在時，圖形邊長會太長，所以只能添加黃色方塊 B。

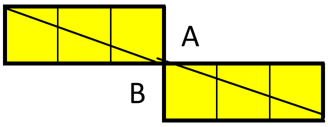
(2) 如果添加黃色方塊 B，就不能添加藍色方塊 E，只能添加黃色方塊 C，理由同上。

(3) 完成粉紅色主要圖形及三個黃色方塊 A、B、C 後，我們已經完成七個方塊，只需再增加一個方塊，因此一刀的切法只有四種圖形。

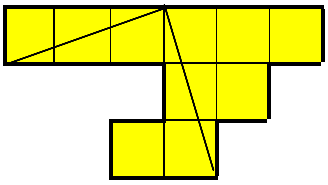


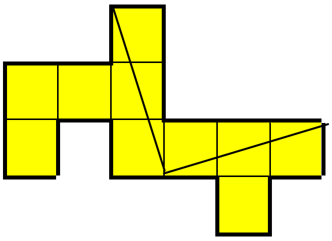
(4) 十方塊無法僅用一刀切出所需的圖形，因爲如下圖：

黃色部分是我們所需的必要圖形，但 A 和 B 則是連接左邊三個方塊及右邊三個方塊所需的方塊，如果接上 A 或 B 則邊長就超過$\sqrt{10}$ ，那就太長了。所以十方塊最少刀的切法是兩刀。

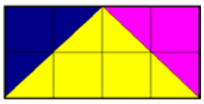
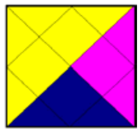
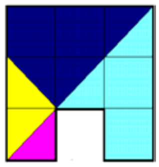
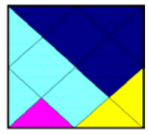
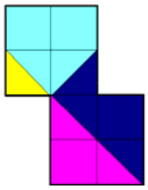
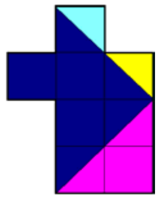
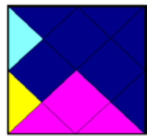
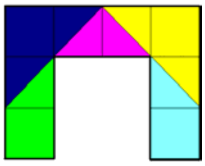
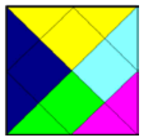
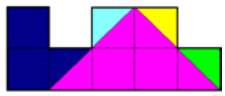
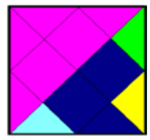
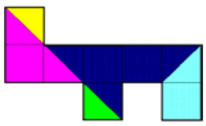
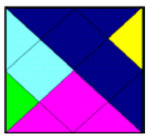
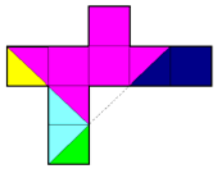
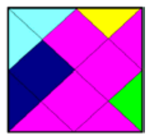
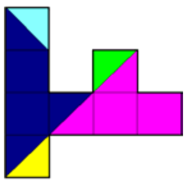
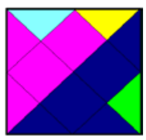
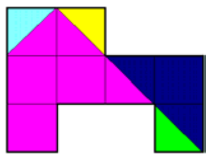
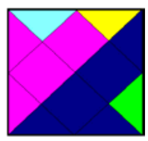
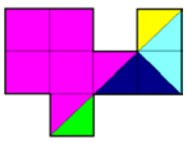
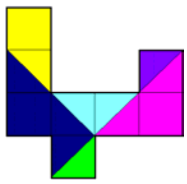


十方塊兩刀切法圖例





2. 兩刀圖形例圖：

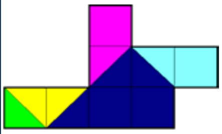
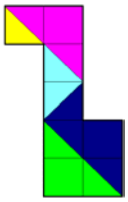
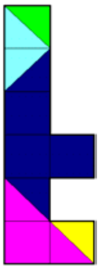
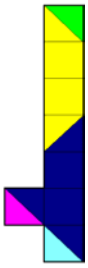
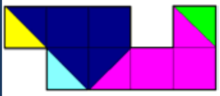
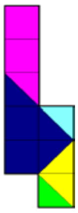
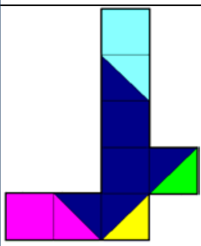
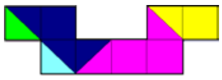
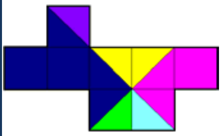
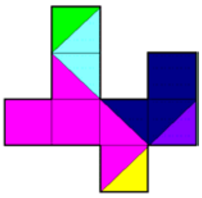
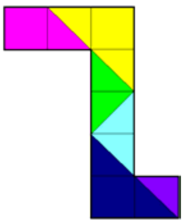
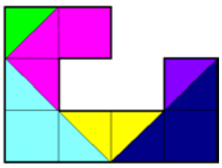
變形前圖形	變形後	變形前圖形	變形後
	2 刀塊 		2 刀 
	2 刀 		2 刀 
	2 刀 		2 刀 
	2 刀 		2 刀 
	2 刀 		2 刀 
	2 刀 		2 刀 

關於兩刀的圖形，我們發現：

(1)如果第一刀能切出$\sqrt{18}$ 的線條，第二刀就切一條與它垂直的線條。

(2)如果第一刀只能切出$\sqrt{8}$ 的線條，第二刀就切一條與它垂直的$\sqrt{8}$ 線條。

3. 三刀圖形例圖：

變形前圖形	變形後	變形前圖形	變形後
	3 刀 		3 刀 
	3 刀 		3 刀 
	3 刀 		3 刀 
	3 刀 		3 刀 
	3 刀 		3 刀 
	3 刀 		3 刀 

關於三刀的圖形，我們發現：

(1)垂直線切到區域不夠

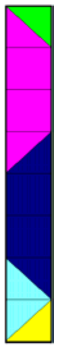
因爲有些圖形比較長，因此兩刀構成的垂直線沒有達到最少切出 8 個

$\sqrt{2}$ 的條件，所以要再補一刀。

(2)二刀無法切完全

有些圖形雖然被二刀切出 8 個$\sqrt{2}$，但有一些區塊無法放入目標正方形內，所以要再補一刀。

4. 四刀圖形例圖：

變形前圖形	變形後
	4 刀 

關於四刀的圖形，我們發現：

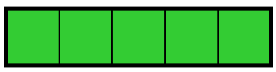
這是唯一需要切四刀的圖形，也就是說在八方塊圖形中，一長條的圖形應該會比其它圖形至少多一刀。

5. 上面爲切一刀到四刀的部分圖形，八方塊切割再拼成大正方形的完整解答，請見現場說明之原始資料。

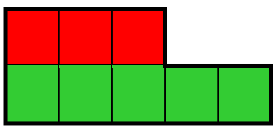
6. 編碼方式

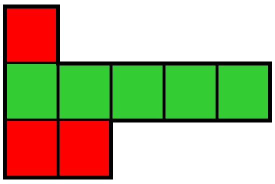
在地方展後，評審肯定我們對八方塊切最少刀做完整探討的努力，並建議我們對八方塊的 369 種圖形切割做有系統的分類，因此我們試了各種分類法，最後決定採用五碼的編碼方式。

(1) 第一碼代表這個圖形最長的長條狀方塊數，以下簡稱基本圖，例如：

 爲 5 長條，就編成 5

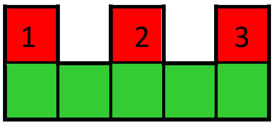
(2) 第二碼代表這個圖形除了基本圖以外的其他方塊，是位在基本圖的一側或二側，例如：

 其他 3 個方塊位在基本圖的一側，就編成 1



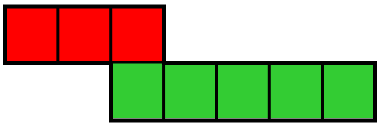
其他 3 個方塊位在基本圖的二側，就編成 2

(3) 第三碼代表這個圖形除了基本圖以外的其他方塊，是分成幾組，例如：

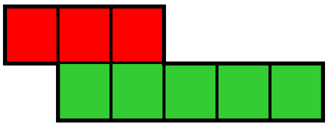


其他 3 個方塊分成 3 組，就編成 3

(4) 第四碼和第五碼代表前 3 碼都相同圖形的編號，例如：

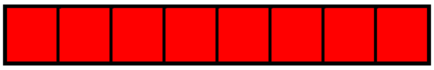


此圖爲 511 的第 1 個圖，就編成 51101

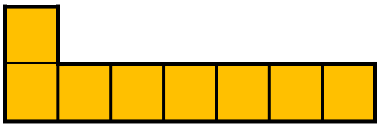


此圖爲 511 的第 2 個圖，就編成 51102

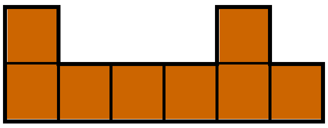
(5) 例圖



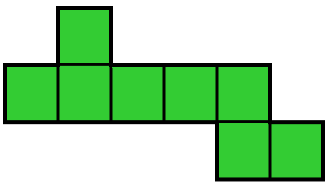
編成 80001



編成 71101



編成 61203



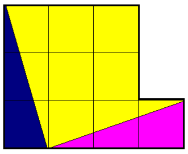
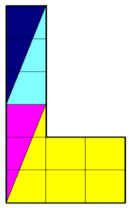
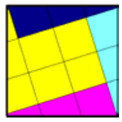
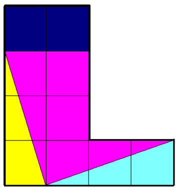
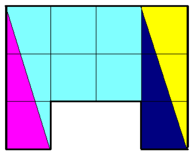
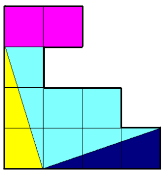
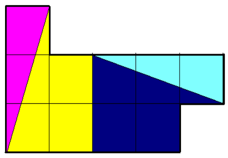
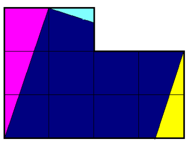
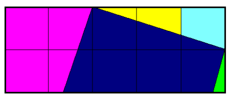
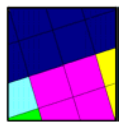
編成 52212

完整圖形請見現場說明資料

四、 將五、八方塊切割組合的方法，應用到十方塊的可能性探討

(一) 第一種想法：

五方塊切割重組重點在於找到$\sqrt{5}$ 的邊長，八方塊切割重組重點在於找到$\sqrt{8}$ 的邊長，都是很容易在以 1 單位爲邊長的圖形中，找到切割點，因此用此方法，也可以切割十方塊，也就是$\sqrt{5}$、$\sqrt{8}$、$\sqrt{10}$可併入同一系列來看，例如我們要切割下面 8 個十方塊圖形，根據切五、八方塊的經驗，我們採取的切法如下：

變形前圖形	變形後	變形前圖形	變形後
	2 刀 		3 刀 
	3 刀 		3 刀 
	3 刀 		3 刀 
	3 刀 		4 刀 

(二) 第二種想法：

我們將八方塊的切割方法試著應用在十方塊上，得到下列結論：

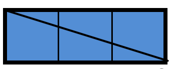
相同點：各塊的面積越大刀數越少

不要切出小碎塊

兩條切割線彼此盡量要垂直

不同點：遇到較長圖形時的應付方法

十方塊的切塊都要盡量切出如下圖的直角三角形，因爲斜線爲十方塊的邊長



將五、八及十方塊相近圖形以同樣的方法來切割，結果得到了一個驚人發現：五、八及十方塊相近圖形的切割方法相同。我們又試著歸類五、八、十……方塊，結果發現：

應用到不同方塊的方法有三個系統，需用切割重組後的邊長來定義：

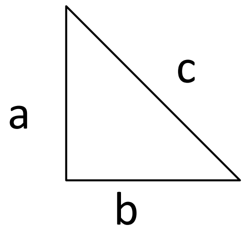
1. 等長型

畢氏定理 $a^2 + b^2 = c^2$

等長型爲 a=b

a，b 爲任意正整數

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$



例如：

設 a 爲 3，求 c 長

a=3

$c=a\sqrt{2}$

$c=3\sqrt{2}$

等長型的方塊爲：8、18、32、50……時

它們都有兩個共通點(1)切割重組後邊長爲$\sqrt{2}$倍數的方塊

8 切割重組後邊長爲2 個$\sqrt{2}$

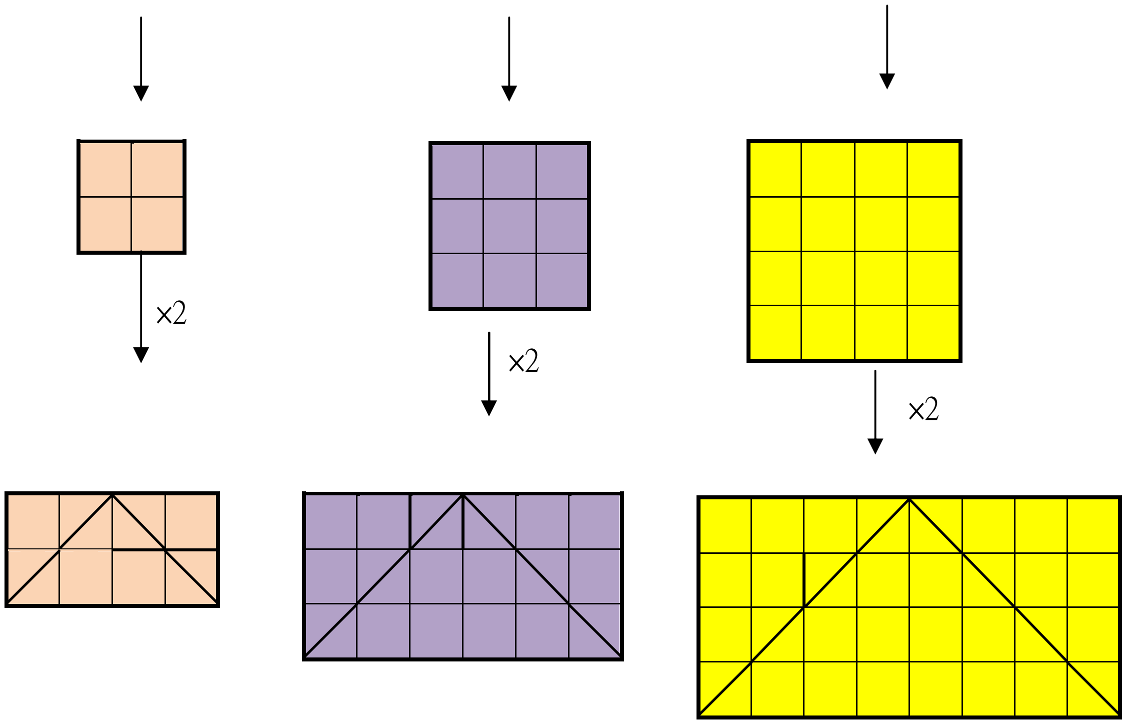
18 切割重組後邊長爲3 個$\sqrt{2}$

32 切割重組後邊長爲4 個$\sqrt{2}$

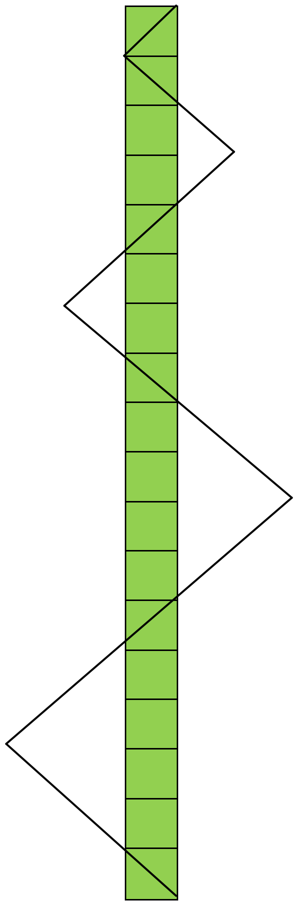
50 切割重組後邊長爲5 個$\sqrt{2}$

(2)方塊數爲完全平方數×2

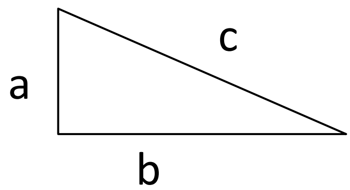
$8=2^2\times 2$ $18=3^2\times 2$ $32=4^2\times 2$



等長型的長條圖系統切割法
起點從右，例如：18 方塊



2. 固定型



畢氏定理　$a^2+b^2=c^2$

固定型為　a=1

b>1

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+b^2}$

例如：

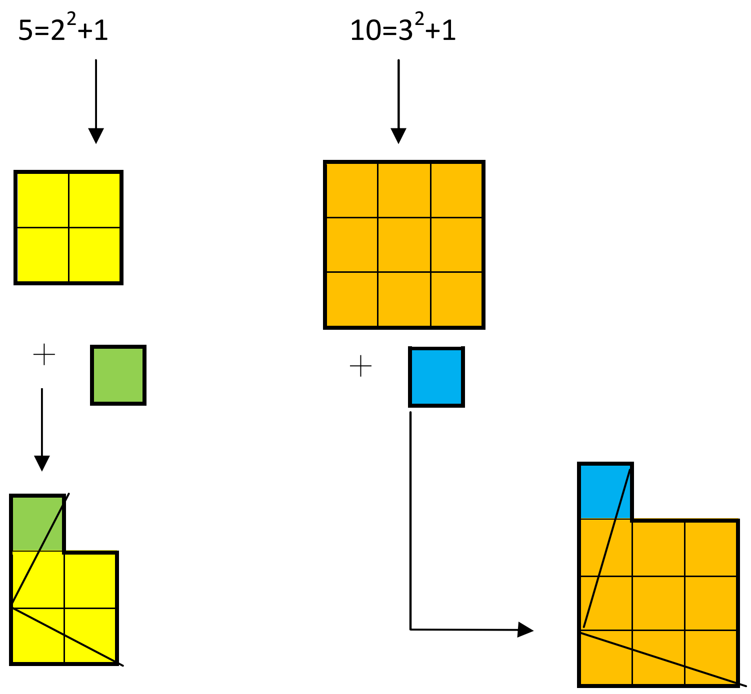
設 b 為 3，求 c 長

a=1

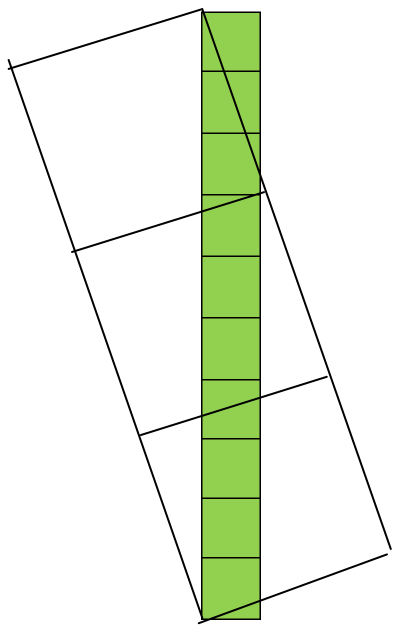
b=3

$c=\sqrt{1+3^2}=\sqrt{10}$

固定型方塊為：5、10、17、26、37……時
它們都有一個共通點：方塊數為完全平方數+1



固定型的長條圖系統切割法
由左向右斜，例如：10 方塊



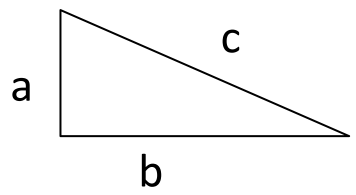
3. **不定型**

畢氏定理　$a^2 + b^2 = c^2$

不定型爲　a>1

b>1

c=$\sqrt{a^2 + b^2}$

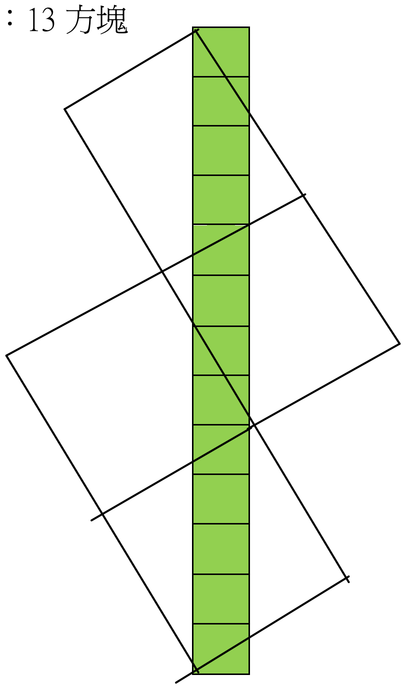


不定型方塊爲：13、20、29、34……時

這部分的特徵尚未發現，期待能繼續研究完成。

不定型的長條圖系統切割法

曲折，例如：13 方塊



陸、 研究結果

一、 五方塊有 12 種圖形，八方塊有 369 種圖形。

二、 五方塊圖形切最少刀再拼出大正方形的研究結果如下：

最少刀數	個數
2 刀	5 個
3 刀	7 個

12 種圖形請參考 P9

三、 八方塊圖形切最少刀再拼出大正方形的研究結果如下：

最少刀數	個數
1 刀	4 個
2 刀	215 個
3 刀	149 個
4 刀	1 個

369 種圖形請參考 P15，P17，P18，P19

四、 將五、八方塊切割組合的方法，應用到十方塊的切割組合是可能的。

(一) 目前研究結果預測十方塊的切割，最少刀數應為 2～4 刀及特例。

(二) 目前發現切八方塊應用在切十方塊的可能性有下面觀點：

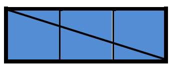
相同點：各塊的面積越大，刀數越少

不要切出小碎塊

兩條切割線彼此盡量要垂直

不同點：遇到較長圖形時的應付方法

十方塊的切塊都要盡量切出如下圖的直角三角形，因為斜線為十方塊的邊長



(三) 五、八、十這三種方塊中的相近圖形，其最少刀法會完全相同。

(四) 將五、八方塊切割組合的方法，應用到十方塊的切割組合是可能的。

目前我們依方塊數及圖形的不同分為：

等長型(8、18、32、50……方塊)

固定型(5、10、17、26、37……方塊)

不定型(13、20、29、34……方塊)等應用類型

此三種系統可以探討出各個方塊數的**最少刀數**、**形成方法**、**切割方法**、及**最初始的方塊數**等，而不定型更完整的應用，持續在研究中。

柒、 結論

這次的研究，得到下列幾項結論：

一、 五方塊和八方塊的基本組合圖形

(一) 五方塊的基本圖形總共有 12 種，我們全部都有找到。

(二) 八方塊的基本圖形總共有 369 種，我們全部都有找到。

二、 五方塊圖形以最少刀來切割，再拼出大正方形，發現有 5 種圖形需切二刀，有 7 種圖形需切 3 刀。(圖形請見 P9)

三、 八方塊圖形以最少刀來切割，再拼出大正方形，發現有 4 種圖形需切一刀，有 215 種圖形需切兩刀，有 149 種圖形需切三刀，有 1 種圖形需切四刀。(部分圖形請見 P15，P17，P18，P19，完整圖形請見現場說明資料)

四、 將五、八方塊切割組合的方法，應用到十方塊的切割組合是可能的。目前我們依方塊數及圖形的不同分為等長型、固定型、不定型等應用類型，而更完整的應用持續在研究中。

捌、 未來發展

完成五、八方塊最少刀的切割後，下一個目標是將它們應用在更多方塊的最少刀切割，以及十方塊的完整探討，更大的目標是系統性通用法則的發現。

玖、 參考資料

一、 孫文先 (民 88)。多方塊-多方塊的的數學問題、拼圖謎題與遊戲。台北市：九章。

二、 葛能登著 葉偉文譯 (民 92)。詭論、鋪磁磚、波羅米歐環。台北市：天下遠見。

三、 伊庫納契夫著 陳朝銀譯 (民 93)。征服數學的 15 座高峰。台灣：良品文化出版社。

四、 數學王子的家 http://euler.tn.edu.tw/ 2007/12/3

五、 奇妙的希臘十字 http://it.csjh.tp.edu.tw/~math/discuss/greek10.htm 2007/12/3

六、 畢氏定理知識網 http://steiner.math.nthu.edu.tw/ne01/tjy/pythagorean/index.htm 2007/12/3

【評語】080407

1. 本研究工程浩大，能朝高難度挑戰，精神可佩、勇氣可嘉。從找出解再到最佳解(如再少一刀)都做了詳細記錄，並在現場也給了完整的解說，表現可圈可點。
2. 分析極為細緻。尤其能將八方塊高達 369 種的變化圖形，做了系統性的分類，值得嘉許。另外，本研究也點出許多後續研究方向，可再接再厲！