

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第一名

080404

紙排輪 – 紙張切割最佳模式探討

學校名稱：臺南縣鹽水鎮鹽水國民小學

作者： 小五 吳鑫濃 小五 許家瑀	指導老師： 何鳳珠 陳韻仙
-----------------------------	-------------------------

關鍵詞： 十字交乘、包含關係、紙張切割

摘要

一張全開的紙(1090mm*787mm)最多可以切成幾張 A4(297mm*210mm)，切了老半天我們只能切出 10 張，沒想到印刷廠老闆輕輕鬆鬆就可以畫出 11 張的切割圖，簡直太帥了，這不禁讓我們想到，若換了紙張或換了單位紙張又能切出多少塊呢？難道我們得不斷地畫不斷地排才能找出答案嗎？或許這些長寬之間是有關係的，因此我們就針對這個紙張切割問題去嘗試進行研究。

研究中除了探索市面上紙張規格（菊版與四六版）與切割 k 數及影印紙的關係外，針對一張紙要如何才能切出最多塊單位紙張之問題，我們發現除了大小長寬有倍數關係的組合能完全切割外，其餘的並非能順利完切，在嘗試了數百組的數據進行紙上切割後，我們找到了能夠完切或接近完切的方法（或拼法），利用十字交乘法及搭配旋轉排法即可順利推得所能切出的最大數量，另外，我們再延伸利用此研究成果，設計了 16 套遊戲拼盤組，讓班上同學挑戰之。

關鍵字詞：十字交乘、包含關係、紙張切割

紙排輪～紙張切割最佳模式探討

一、研究動機

老師在一次參觀印刷廠後，帶回來一個問題考我們：一張全開的紙（1090mm*787mm）要切成 A4 大小（297mm*210mm）的規格，最多可以切幾張？我們小組向老師借了計算機三兩下就算出來了～13 塊，還有剩下。老師笑了笑說：你們在紙張上切切看，第一個切出 13 張的有獎學金 100 元，結果我們實際去切才發現最多僅能切出 10 塊，當老師公布最多可切出 11 塊時，我們都很訝異，回去都拼命猛切，就是沒法子有效切出 11 塊，後來老師拿出了印刷廠老闆畫的切割圖，我們才恍然大悟，但我們開始好奇了：是剛好湊到的嗎？能不能再切出更多塊呢？若要切其它大小的紙片，那麼如何才能知道最多可以切出多少片呢？一切看似很亂，不過我們想說就研究看看吧～

二、研究目的

1. 認識國內印刷紙張常用規格及切割模式。
2. 以全開紙張為主，切出指定 k 數，尋找其切割的規律性。
3. 探索指定單位紙張的最佳切割模式及數量推算。
4. 應用研究成果設計製作遊戲拼盤組。

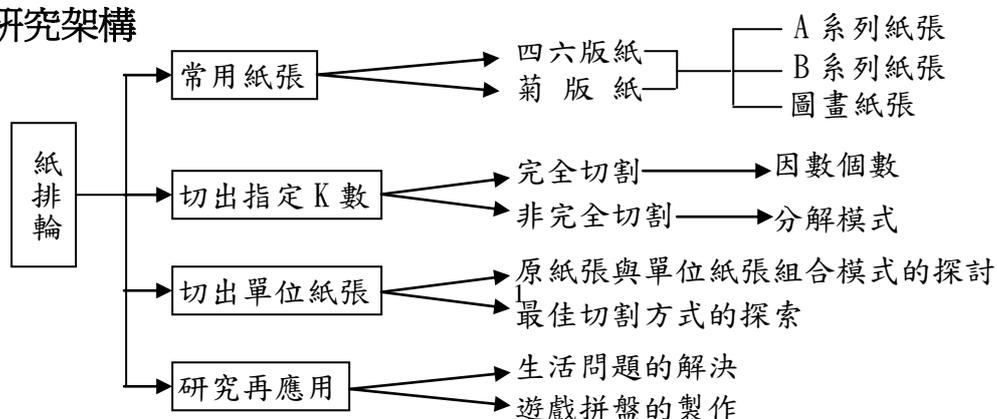
三、實驗研究器材

計算機、紙張、厚紙片、拼盤、電腦、尺

四、名詞定義

1. 完全切割：指紙張全部等分完，沒有任何損失。
2. 完切：原紙張總面積÷單位面積的整數值，即 $\left\lfloor \frac{X \times Y}{m \times n} \right\rfloor$ ，其中 $\lfloor k \rfloor$ 表示小於等於 k 之最大整數。

五、研究架構



六、研究歷程與方法

活動一：認識國內印刷紙張常用規格及切割模式。

【過程 1-1】認識國內印刷紙張常用的規格

我們先從網路上搜尋相關的資料，經過整理後，再去訪談一位印刷廠的老闆，印證資料的正確性及認識印刷業的相關資訊，同時也搜集到高職教科書中有關紙張規格的資料，彙整成以下的結果：

結果

1. 台灣印刷業常用的全開紙張規格如下表：

※1 台寸=30.303 毫米(mm)；1 英吋=25.4 毫米(mm)

表 1-1-1

		台寸	英吋	公釐
四六版		26*36	31*43	787*1090
菊版	大菊版	20.9*31	25*37	635*939
	中菊版	20.9*29.3	25*35	635*889
	小菊版	20.5*28.9	24.5*34.5	622*876

- (1) 我們發現不同紙業，其紙張規格多少還是有些差異。
- (2) 市面上較常見的是四六版及菊版，而菊版通常是以中菊版及大菊版為主，小菊版較不常用，生產的也較少，相對以磅數來計價也會比中大菊版貴。
2. 市面上影印紙(採中國國家標準 CNS5 P1001 紙張尺度<裁切後>之規定)及圖畫紙的規格如下表：(單位：mm)

資料來源：最新課程標準高職課本－製圖-----東大圖書公司

表 1-1-2

A 系列影印紙			B 系列影印紙			圖畫紙		
規格	寬*長	長寬比	規格	寬*長	長寬比	規格	寬*長	長寬比
A0	841*1189	1.4137	B0	1030*1456	1.4135	全開	770*1060	1.3766
A1	594*841	1.4158	B1	728*1030	1.4148	二開	530*770	1.4528
A2	420*594	1.4142	B2	515*728	1.4135	四開	385*530	1.3766
A3	297*420	1.4141	B3	364*515	1.4148	八開	265*385	1.4528
A4	210*297	1.4142	B4	257*364	1.414	十六開	192.5*265	1.3766
A5	148*210	1.4189	B5	182*257	1.412			

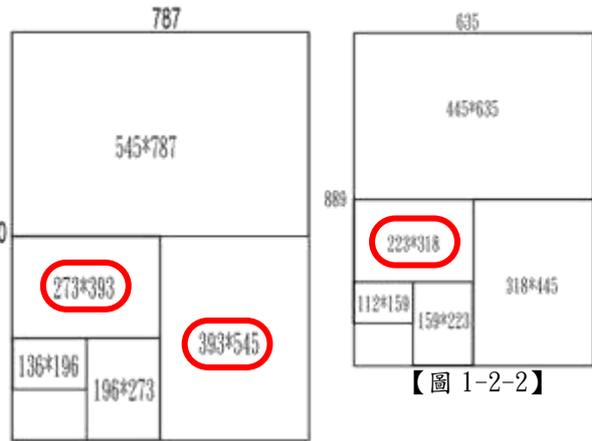
發現：A 系列及 B 系列的紙張其長寬比值皆約為 1.41，很接近 $\sqrt{2}$

【過程 1-2】探索 A 系列紙張、B 系列紙張及圖畫紙與全開紙張規格之關係

既然上述各種規格的紙張都是經由對折的方式產生的，那麼究竟 A 系列紙張、B 系列紙張及圖畫紙是由哪一種全開紙張所切割出來的呢？我們利用四種全開紙張下去做等分來進行推估。

結果

- 1.分別以四六版及菊版（中菊）做等分對切
- 2.分析上述等分出來的結果，以常用 1090 用的 A4 影印紙（210*297）來看，菊版較符合經濟效益(如圖 1-2-2)，一般所謂的”菊八開”，即為 A4 影印紙。



【圖 1-2-1】

【圖 1-2-2】

- 3.常見的 B4 影印紙（257*364）則是以四六版切出的較符合經濟效益(如圖 1-2-1)；常見的四開圖畫紙（385*530）則是以四六版切出的較符合經濟效益。

【過程 1-3】分析使用不同版紙來切割 A4 影印紙的經濟效益

我們利用四六版、大菊版、中菊版及小菊版來分割成 A4 規格的影印紙，以切割出最大數量為原則。

結果

- 1.分別以四六版、大菊版、中菊版及小菊版來切出最多塊 A4 影印紙規格。

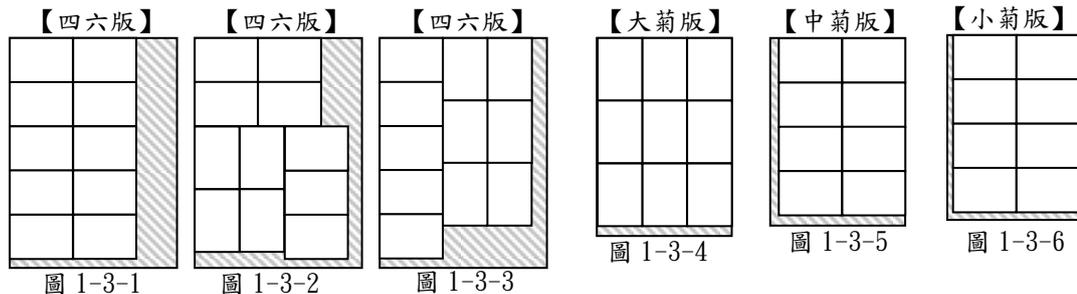


圖 1-3-1

圖 1-3-2

圖 1-3-3

圖 1-3-4

圖 1-3-5

圖 1-3-6

- 2.將上述切割結果分析如下：

表 1-3-1

	四六版	大菊版	中菊版	小菊版
可切割的最大塊數	11	9	8	8
損失面積(mm ²)	171760	34935	65555	45912

- (1) 由上表可以看出 A4 影印紙用四六版去切會耗損最多紙張，而以用大菊版來切最符合經濟效益，因此現在較常以”菊九開”（即是指用大菊版來切 A4 規格的紙張）來生產 A4 紙張。以往常稱 A4 紙張為菊八開，是指以中菊版切割出來的。
- (2) 在做紙張切割時，我們一直苦思要如何切才能切出最多塊，以四六版切 A4 紙張來說，我們只能切到 10 塊，後來老闆畫了 11 塊的切割圖(圖 1-3-2)後我們才恍然大悟<但我們問老闆怎麼會想到這樣切，他也說不出所以

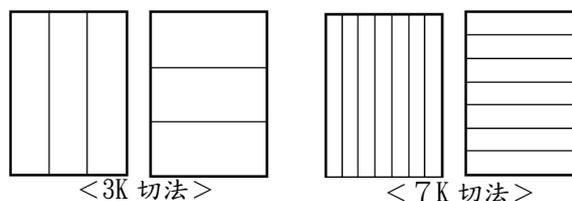
然來，只是一直畫畫看畫出來的，且他試畫了很多次都無法切出比 11 塊更多的了>。爾後，我們才又再找到另一種切法(圖 1-3-3)。因此我們想，這切割的方法可能有某些規律存在，與其胡亂嘗試，不如等我們找到切割的規律後再來探索【不同版紙來切割 A3 影印紙、B4 影印紙及四開圖畫紙的經濟效益】。

活動二：以全開紙張為主，切出指定 k 數(全等圖形)，尋找其切割的規律性。

【過程 2-1】以四六版紙張(1090mm*787mm)切出指定的 K 數，在完全切割的情況下，探究其各種可能的切割模式。

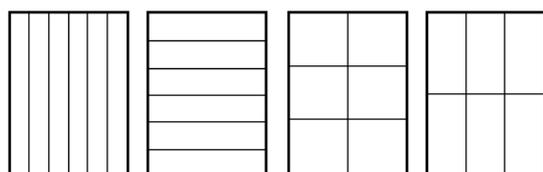
結果

- 1.若 K 為質數，要完全切割有兩種方式，即 $1 * K$ 及 $K * 1$ ，其兩種切法的形狀不同，以 3K 及 7K 為例。

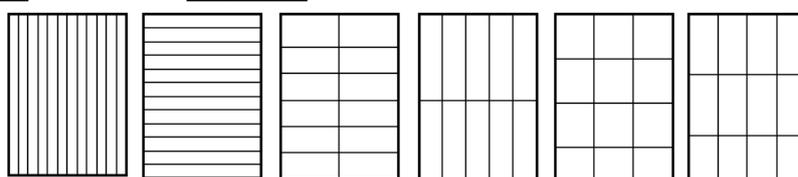


- 2.若 K 為合數，要完全切割至少有三種方式以上，與其因數個數有關，以 6K(1x6、6x1、2x3、3x2)及 12K(1x12、12x1、2x6、6x2、3x4、4x3)為例。

例 1：6k 的切法



例 2：12k 的切法



【過程 2-2】以四六版紙張切出指定的 K 數，在非完全切割模式下可以有哪些不同的切割模式<盡量減少損失的狀況下>？

※以下記錄中，四六版紙長的長邊代碼為 L，寬邊代碼為 W，切出的單位紙張長邊為 1，寬邊為 w。(詳細資料請見實驗記錄單)

結果

- 1.我們不斷地嘗試去切割，發現其切法有很多種，可以利用 K 數的分解模式來等分寬邊或長邊，以下舉幾個例子說明之(僅列出部分實驗內容，其餘請參考實驗記錄單)。

K 數	代碼	長*寬	長寬比值	損失面積(mm ²)	備註
3K	3-1(a)	696.5*393.5	1.8	35611.75	1 橫+2 直(W÷2→w)
	3-1(b)	787*303	2.6	142447	1 橫+2 直(W→l)
	3-2				
4K	4-1	787*262	3	33054	1 橫+3 直(W÷3→w)
	4-2				
5K	5-1	787*151.5	5.2	261677.5	1 橫+4 直(W÷4→w)
	5-2				
	5-3	514.5*272.5	1.9	156823.75	4 橫+1 直<左右>(L÷4→w)
	5-4(a)	565.4*262.3	2.2	116307.9	2 橫+3 直(W÷3→w)
	5-4(b)	787*151.5	5.2	261677.5	2 橫+3 直(W→l)
	5-5				
6K	5-6	423.7*363.3	1.2	88178.95	3 橫+2 直<左右>(L÷3→w)
	6-1	787*157.4	5	11458.72	1 橫+5 直(W÷5→w)
	6-2				
	6-3	569*218	2.6	113578	5 橫+1 直<左右>(L÷5→w)
	6-4(a)	696.5*196.75	3.5	35611.75	2 橫+4 直(W÷4→w)
	6-4(b)	787*151.5	5.2	142447	2 橫+4 直(W→l)
	6-5				
	6-6	514*282.5	1.8	13400	4 橫+2 直<左右>(L÷4→w)
	6-7	393.5*348.25	1.1	35611.75	2*2 橫+2 直(W÷2→l)
6-8(a)	303.1*262.3	1.2	380811.22	3 橫+3 直(W÷3→w)	
6-8(b)					
7K	7-1	767*131.1	5.9	153954.1	1 橫+6 直(W÷6→w)
	7-2	413.8*262.3	1.6	98051.82	1 橫+2*3 直(W÷3→w)
	7-3				
	7-4	605.4*181.6	3.3	88245.52	6 橫+1 直<左右>(L÷6→w)
	7-5-a	775.2*157.4	4.9	3714.64	2 橫+5 直(W÷5→w)
	7-5-b	787*151.5	5.2	23216.5	2 橫+5 直(W→l)
	7-6				
	7-7	545*218	2.5	26160	5 橫+2 直<左右>(L÷5→w)
	7-8(a)	499.75*196.75	2.5	169549.31	3 橫+4 直(W÷4→w)
	7-8(b)				
	7-9				
7-10	363.3*272.5	1.3	164835.25	4 橫+3 直(L÷3→l)	
7-11	393.5*262.3	1.5	135324.65	2*2 橫+3 直(W÷3→w)	

< 8k, 9k, 10k, 11k 的資料請見實驗記錄單 >

2. 觀察上述表格，我們似乎無法看出固定哪一種切法較符合經濟效益，但可以知道的是，在同一種切割分配模式中，以<紙張的寬邊來等分成單位紙張的寬邊(即 $W \div \text{直切塊數} \rightarrow w$)> 比將<紙張的寬邊當成單位紙張的長邊(即

$W \rightarrow 1) >$ 來得好。

活動三：探索指定單位紙張的最佳切割模式及數量推算。

此階段活動正是我們做此研究最主要的目的，我們希望當給予一張紙張大小及欲切割的矩形單位紙張大小時，我們可以在不需經過實際拼排或切割的狀況下，快速找出其所能切割出的最大張數。

【過程 3-1】原紙張與單位紙張之關係探索。

我們將原紙張的長(X)與寬(Y)及單位紙張的長(m)與寬(n)設定在相等或不相等的模式下，而在不相等的模式下又分成倍數關係與不成倍數關係兩種來進行探討，彙整出以下結果：

結果

1.原紙張與單位紙張個別長寬關係共可以分成以下九種模式。

表 3-1-1

模式	長寬關係	個別長寬關係	模式	長寬關係	個別長寬關係
模式 1	$X=Y$	原紙張為正方形	模式 6	$X \neq Y$	$X、Y$ 呈倍數關係
	$m=n$	單位紙張為正方形		$m \neq n$	$m、n$ 呈倍數關係
模式 2	$X \neq Y$	$X、Y$ 呈倍數關係	模式 7	$X \neq Y$	$X、Y$ 呈非倍數關係
	$m=n$	單位紙張為正方形		$m \neq n$	$m、n$ 呈倍數關係
模式 3	$X \neq Y$	$X、Y$ 呈非倍數關係	模式 8	$X \neq Y$	$X、Y$ 呈倍數關係
	$m=n$	單位紙張為正方形		$m \neq n$	$m、n$ 呈非倍數關係
模式 4	$X=Y$	原紙張為正方形	模式 9	$X \neq Y$	$X、Y$ 呈非倍數關係
	$m \neq n$	$m、n$ 呈倍數關係		$m \neq n$	$m、n$ 呈非倍數關係
模式 5	$X=Y$	原紙張為正方形			
	$m \neq n$	$m、n$ 呈非倍數關係			

2.根據九種模式做長寬間的交叉比對，並畫出其包含圖，分析出各種符合可行的模式(分析內容請見附件一)，並舉出例子。

說明 1:” ✓ ” 表示兩者之間呈倍數關係;” ✕ ” 表示兩者之間呈非倍數關係。

說明 2:利用圓來進行分析 XY 與 mn 之間的包含關係，藉以判斷模式的可行性，原則上 $X、Y \geq m、n$ ，圓由大到小分別代表 X (藍)、 Y (紅)、 m (綠)、 n (黑)。

【圖 3-1-2】表示藍色圓 F_x 表 X 所有因數所成集合，紅色圓 F_y 表 Y 所有因數所成集合，而綠色圓 F_m 表 m 所有因數所成集合，此三圓的關係代表 X 不是 Y 也不是 m 的倍

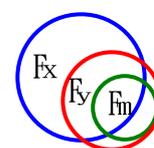


圖 3-1-2

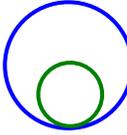
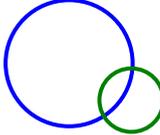
表 3-1-2

	X	Y
m	✕	✓

數(因為 F_Y 及 F_m 皆沒有被包在藍圈中)，而 Y 是 m 的倍數，所以 m 的所有因數皆包含在 Y 所有因數裡，記錄如右表。

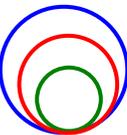
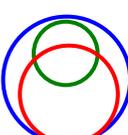
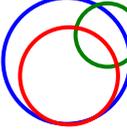
【模式 1】 $X=Y$ 、 $m=n$

表 3-1-3

編號	代碼	模式分析	包含關係	編號	代碼	模式分析	包含關係																		
數例				數例																					
模式 1-1		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td></td></tr><tr><td>n</td><td></td><td></td></tr></table>		X	Y	m	✓		n				模式 1-2		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✗</td><td></td></tr><tr><td>n</td><td></td><td></td></tr></table>		X	Y	m	✗		n			
	X	Y																							
m	✓																								
n																									
	X	Y																							
m	✗																								
n																									
原紙張：10*10 單位紙：2*2				原紙張：9*9 單位紙：2*2																					

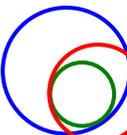
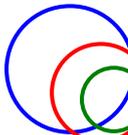
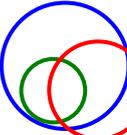
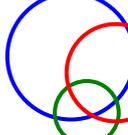
【模式 2】 $X \neq Y$ (XY 成倍數關係)、 $m=n$

表 3-1-4

編號	代碼	模式分析	包含關係	編號	代碼	模式分析	包含關係																		
數例				數例																					
模式 2-1		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✓</td></tr><tr><td>n</td><td></td><td></td></tr></table>		X	Y	m	✓	✓	n				模式 2-2		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td></td><td></td></tr></table>		X	Y	m	✓	✗	n			
	X	Y																							
m	✓	✓																							
n																									
	X	Y																							
m	✓	✗																							
n																									
原紙張：20*10 單位紙：2*2				原紙張：150*50 單位紙：3*3																					
模式 2-3		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✗</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td></td><td></td></tr></table>		X	Y	m	✗	✗	n																
	X	Y																							
m	✗	✗																							
n																									
原紙張：45*15 單位紙：4*4																									

【模式 3】 $X \neq Y$ (XY 成非倍數關係)、 $m=n$

表 3-1-5

編號	代碼	模式分析	包含關係	編號	代碼	模式分析	包含關係																		
數例				數例																					
模式 3-1		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✓</td></tr><tr><td>n</td><td></td><td></td></tr></table>		X	Y	m	✓	✓	n				模式 3-2		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✗</td><td>✓</td></tr><tr><td>n</td><td></td><td></td></tr></table>		X	Y	m	✗	✓	n			
	X	Y																							
m	✓	✓																							
n																									
	X	Y																							
m	✗	✓																							
n																									
原紙張：35*15 單位紙：5*5				原紙張：43*15 單位紙：5*5																					
模式 3-3		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td></td><td></td></tr></table>		X	Y	m	✓	✗	n				模式 3-4		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✗</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td></td><td></td></tr></table>		X	Y	m	✗	✗	n			
	X	Y																							
m	✓	✗																							
n																									
	X	Y																							
m	✗	✗																							
n																									
原紙張：32*15 單位紙：8*8				原紙張：12*9 單位紙：5*5																					

【模式 4】 $X=Y$ 、 $m \neq n$ (mn 成倍數關係)

表 3-1-6

編號	代碼	模式分析	包含關係	編號	代碼	模式分析	包含關係
數例				數例			

模式 4-1	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td></td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td></td></tr></table>		X	Y	m	✓		n	✓			模式 4-2	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>×</td><td></td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td></td></tr></table>		X	Y	m	×		n	✓		
	X	Y																					
m	✓																						
n	✓																						
	X	Y																					
m	×																						
n	✓																						
原紙張：36*36 單位紙：6*3			原紙張：42*42 單位紙：12*6																				
模式 4-3	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>×</td><td></td></tr><tr><td>n</td><td>×</td><td></td></tr></table>		X	Y	m	×		n	×														
	X	Y																					
m	×																						
n	×																						
原紙張：36*36 單位紙：16*8																							

【模式 5】 $X = Y$ 、 $m \neq n$ (mn 成非倍數關係)

表 3-1-7

編號	代碼	模式分析	包含關係	編號	代碼	模式分析	包含關係																		
數例				數例																					
A	模式 5-1	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td></td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td></td></tr></table>		X	Y	m	✓		n	✓			B	模式 5-2	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>×</td><td></td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td></td></tr></table>		X	Y	m	×		n	✓		
	X	Y																							
m	✓																								
n	✓																								
	X	Y																							
m	×																								
n	✓																								
原紙張：60*60 單位紙：3*2				原紙張：20*20 單位紙：7*5																					
C	模式 5-3	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td></td></tr><tr><td>n</td><td>×</td><td></td></tr></table>		X	Y	m	✓		n	×			D	模式 5-4	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>×</td><td></td></tr><tr><td>n</td><td>×</td><td></td></tr></table>		X	Y	m	×		n	×		
	X	Y																							
m	✓																								
n	×																								
	X	Y																							
m	×																								
n	×																								
原紙張：28*28 單位紙：7*5				原紙張：62*62 單位紙：7*5																					

【模式 6】 $X \neq Y$ (XY 成倍數關係)、 $m \neq n$ (mn 成倍數關係)

表 3-1-8

編號	代碼	模式分析	包含關係	編號	代碼	模式分析	包含關係																		
數例				數例																					
模式 6-1		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✓</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✓</td></tr></table>		X	Y	m	✓	✓	n	✓	✓		模式 6-2		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>×</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✓</td></tr></table>		X	Y	m	✓	×	n	✓	✓	
	X	Y																							
m	✓	✓																							
n	✓	✓																							
	X	Y																							
m	✓	×																							
n	✓	✓																							
原紙張：36*12 單位紙：6*4				原紙張：54*27 單位紙：6*3																					
模式 6-3		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>×</td><td>×</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✓</td></tr></table>		X	Y	m	×	×	n	✓	✓		模式 6-4		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>×</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>×</td></tr></table>		X	Y	m	✓	×	n	✓	×	
	X	Y																							
m	×	×																							
n	✓	✓																							
	X	Y																							
m	✓	×																							
n	✓	×																							
原紙張：175*25 單位紙：10*5				原紙張：60*20 單位紙：6*3																					
模式 6-5		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>×</td><td>×</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>×</td></tr></table>		X	Y	m	×	×	n	✓	×		模式 6-6		<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>×</td><td>×</td></tr><tr><td>n</td><td>×</td><td>×</td></tr></table>		X	Y	m	×	×	n	×	×	
	X	Y																							
m	×	×																							
n	✓	×																							
	X	Y																							
m	×	×																							
n	×	×																							
原紙張：75*25 單位紙：6*3				原紙張：120*60 單位紙：14*7																					

【模式 7】 $X \neq Y$ (XY 成非倍數關係)、 $m \neq n$ (mn 成倍數關係)

表 3-1-9

編號	代碼	模式分析	包含關係	編號	代碼	模式分析	包含關係
數例				數例			

模式 7-1	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✓</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✓</td></tr></table>		X	Y	m	✓	✓	n	✓	✓		模式 7-2	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✗</td><td>✓</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✓</td></tr></table>		X	Y	m	✗	✓	n	✓	✓	
	X	Y																					
m	✓	✓																					
n	✓	✓																					
	X	Y																					
m	✗	✓																					
n	✓	✓																					
原紙張：24*16 單位紙：8*4			原紙張：28*24 單位紙：8*4																				
模式 7-3	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✓</td></tr></table>		X	Y	m	✓	✗	n	✓	✓		模式 7-4	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✗</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✓</td></tr></table>		X	Y	m	✗	✗	n	✓	✓	
	X	Y																					
m	✓	✗																					
n	✓	✓																					
	X	Y																					
m	✗	✗																					
n	✓	✓																					
原紙張：24*20 單位紙：8*4			原紙張：105*25 單位紙：10*5																				
模式 7-5	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✗</td><td>✓</td></tr><tr><td>n</td><td>✗</td><td>✓</td></tr></table>		X	Y	m	✗	✓	n	✗	✓		模式 7-6	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✗</td></tr></table>		X	Y	m	✓	✗	n	✓	✗	
	X	Y																					
m	✗	✓																					
n	✗	✓																					
	X	Y																					
m	✓	✗																					
n	✓	✗																					
原紙張：50*24 單位紙：12*4			原紙張：32*15 單位紙：8*4																				
模式 7-7	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✗</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✗</td></tr></table>		X	Y	m	✗	✗	n	✓	✗		模式 7-8	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✗</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td>✗</td><td>✓</td></tr></table>		X	Y	m	✗	✗	n	✗	✓	
	X	Y																					
m	✗	✗																					
n	✓	✗																					
	X	Y																					
m	✗	✗																					
n	✗	✓																					
原紙張：20*15 單位紙：8*4			原紙張：50*36 單位紙：8*4																				
模式 7-9	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✗</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td>✗</td><td>✗</td></tr></table>		X	Y	m	✗	✗	n	✗	✗													
	X	Y																					
m	✗	✗																					
n	✗	✗																					
原紙張：91*72 單位紙：10*5																							

【模式 8】 $X \neq Y$ (XY 成倍數關係)、 $m \neq n$ (mn 成非倍數關係)

表 3-1-10

編號	代碼	模式分析	包含關係	編號	代碼	模式分析	包含關係																
數例				數例																			
模式 8-1	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✓</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✓</td></tr></table>		X	Y	m	✓	✓	n	✓	✓		模式 8-2	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✓</td></tr></table>		X	Y	m	✓	✗	n	✓	✓	
	X	Y																					
m	✓	✓																					
n	✓	✓																					
	X	Y																					
m	✓	✗																					
n	✓	✓																					
原紙張：60*30 單位紙：5*2			原紙張：24*12 單位紙：8*3																				
模式 8-3	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✓</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✗</td></tr></table>		X	Y	m	✓	✓	n	✓	✗		模式 8-4	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✗</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✓</td></tr></table>		X	Y	m	✗	✗	n	✓	✓	
	X	Y																					
m	✓	✓																					
n	✓	✗																					
	X	Y																					
m	✗	✗																					
n	✓	✓																					
原紙張：120*60 單位紙：12*8			原紙張：60*20 單位紙：7*5																				
模式 8-5	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✗</td></tr></table>		X	Y	m	✓	✗	n	✓	✗		模式 8-6	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✓</td></tr><tr><td>n</td><td>✗</td><td>✗</td></tr></table>		X	Y	m	✓	✓	n	✗	✗	
	X	Y																					
m	✓	✗																					
n	✓	✗																					
	X	Y																					
m	✓	✓																					
n	✗	✗																					
原紙張：70*7 單位紙：5*2			紙張：24*12 單位紙：6*5																				
模式 8-7	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✓</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td>✗</td><td>✗</td></tr></table>		X	Y	m	✓	✗	n	✗	✗		模式 8-8	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td>m</td><td>✗</td><td>✗</td></tr><tr><td>n</td><td>✓</td><td>✗</td></tr></table>		X	Y	m	✗	✗	n	✓	✗	
	X	Y																					
m	✓	✗																					
n	✗	✗																					
	X	Y																					
m	✗	✗																					
n	✓	✗																					
原紙張：140*20 單位紙：7*3			原紙張：66*22 單位紙：5*3																				
模式 8-9	<table border="1"><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		X	Y																			
	X	Y																					

原紙張：88*44 單位紙：5*3	<table border="1"> <tr> <td>m</td> <td>×</td> <td>×</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>×</td> <td>×</td> </tr> </table>	m	×	×	n	×	×			
m	×	×								
n	×	×								

【模式 9】 $X \neq Y$ (XY 成非倍數關係)、 $m \neq n$ (mn 成非倍數關係)

表 3-1-11

編號	代碼	模式分析	包含關係	編號	代碼	模式分析	包含關係																		
數例				數例																					
A	模式 9-1	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> </table>		X	Y	m	✓	✓	n	✓	✓		B	模式 9-2	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>×</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> </table>		X	Y	m	×	✓	n	✓	✓	
	X	Y																							
m	✓	✓																							
n	✓	✓																							
	X	Y																							
m	×	✓																							
n	✓	✓																							
原紙張：45*30 單位紙：5*3				原紙張：84*60 單位紙：10*4																					
C	模式 9-3	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>✓</td> <td>×</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> </table>		X	Y	m	✓	×	n	✓	✓		D	模式 9-4	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>×</td> <td>✓</td> </tr> </table>		X	Y	m	✓	✓	n	×	✓	
	X	Y																							
m	✓	×																							
n	✓	✓																							
	X	Y																							
m	✓	✓																							
n	×	✓																							
原紙張：72*60 單位紙：8*3				原紙張：70*45 單位紙：5*3																					
E	模式 9-5	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>✓</td> <td>×</td> </tr> </table>		X	Y	m	✓	✓	n	✓	×		F	模式 9-6	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>×</td> <td>×</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> </table>		X	Y	m	×	×	n	✓	✓	
	X	Y																							
m	✓	✓																							
n	✓	×																							
	X	Y																							
m	×	×																							
n	✓	✓																							
原紙張：60*35 單位紙：5*3				原紙張：100*60 單位紙：8*5																					
G	模式 9-7	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>×</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>×</td> <td>✓</td> </tr> </table>		X	Y	m	×	✓	n	×	✓		H	模式 9-8	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>×</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>✓</td> <td>×</td> </tr> </table>		X	Y	m	×	✓	n	✓	×	
	X	Y																							
m	×	✓																							
n	×	✓																							
	X	Y																							
m	×	✓																							
n	✓	×																							
原紙張：76*60 單位紙：5*3				原紙張：75*70 單位紙：7*3																					
I	模式 9-9	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>✓</td> <td>×</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>×</td> <td>✓</td> </tr> </table>		X	Y	m	✓	×	n	×	✓		J	模式 9-10	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>✓</td> <td>×</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>✓</td> <td>×</td> </tr> </table>		X	Y	m	✓	×	n	✓	×	
	X	Y																							
m	✓	×																							
n	×	✓																							
	X	Y																							
m	✓	×																							
n	✓	×																							
原紙張：55*33 單位紙：5*3				原紙張：120*70 單位紙：6*4																					
K	模式 9-11	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>×</td> <td>×</td> </tr> </table>		X	Y	m	✓	✓	n	×	×		L	模式 9-12	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>✓</td> <td>×</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>×</td> <td>×</td> </tr> </table>		X	Y	m	✓	×	n	×	×	
	X	Y																							
m	✓	✓																							
n	×	×																							
	X	Y																							
m	✓	×																							
n	×	×																							
原紙張：90*66 單位紙：6*4				原紙張：55*44 單位紙：5*3																					
M	模式 9-13	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>×</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>×</td> <td>×</td> </tr> </table>		X	Y	m	×	✓	n	×	×		N	模式 9-14	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>×</td> <td>×</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>✓</td> <td>×</td> </tr> </table>		X	Y	m	×	×	n	✓	×	
	X	Y																							
m	×	✓																							
n	×	×																							
	X	Y																							
m	×	×																							
n	✓	×																							
原紙張：100*70 單位紙：7*3				原紙張：66*44 單位紙：5*3																					
O	模式 9-15	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>×</td> <td>×</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>×</td> <td>✓</td> </tr> </table>		X	Y	m	×	×	n	×	✓		P	模式 9-16	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>×</td> <td>×</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>×</td> <td>×</td> </tr> </table>		X	Y	m	×	×	n	×	×	
	X	Y																							
m	×	×																							
n	×	✓																							
	X	Y																							
m	×	×																							
n	×	×																							
原紙張：94*80 單位紙：12*5				原紙張：90*50 單位紙：7*4																					



【過程 3-2】 依據過程 3-1 的各種模式，找出切割數量的最佳解模式。

由過程 3-1 共分析出 56 種可行的模式，每種模式我們都至少找 3 組以上符合的數據進行切割數的探討，再嘗試去用不同的切法找出所能切割出的最大數量。

結果

1. 由過程中，我們不斷思考可以切割出較大數量的方法(原紙張以橫向擺放)，歸納出以下幾種：

※我們定義：“ $\left\lfloor \frac{Y}{n} \right\rfloor$ ”表示 $\frac{Y}{n}$ 其結果的整數值。

※下列切法中，若餘數 $>n$ ，則可以再轉向繼續切割，若切法一可以完切，那麼就不用再繼續第二種切法了，因為我們的目的要找出最佳切法。

切法一： $\left\lfloor \frac{Y}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{X}{m} \right\rfloor \dots\dots$ 橫向切法

當餘數 $\geq n$ 則可再轉向，算式變為 $\left\lfloor \frac{Y}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{X}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r1}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{Y}{m} \right\rfloor$

註： $r1$ 代表 $\frac{X}{m}$ 的餘數； $r2$ 代表 $\frac{Y}{m}$ 的餘數

【例】 (9-16-7) $X*Y = 85*50$ ， $m*n = 15*8 \Rightarrow$ 完切 35 塊

$$\left\lfloor \frac{50}{8} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{85}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{8} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{50}{15} \right\rfloor = 6 \times 5 + 1 \times 3 = 33(\text{塊})$$

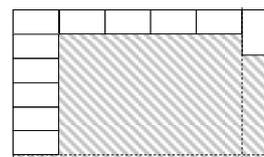


圖 3-2-1

切法二： $\left\lfloor \frac{X}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{Y}{m} \right\rfloor \dots\dots$ 縱向切法

當餘數 $\geq n$ 則可再轉向，算式變為 $\left\lfloor \frac{X}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{Y}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r2}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{X}{m} \right\rfloor$

【例】 (9-16-6) $X*Y = 50*30$ ， $m*n = 11*7 \Rightarrow$ 完切 19 塊

$$\left\lfloor \frac{50}{7} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{30}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8}{7} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{50}{11} \right\rfloor = 7 \times 2 + 1 \times 4 = 18(\text{塊})$$

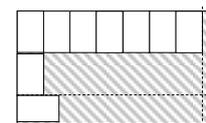


圖 3-2-2

切法三： $\left\lfloor \frac{Y}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{X}{n \times m} \right\rfloor \times n + \left\lfloor \frac{r3}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{Y}{n \times m} \right\rfloor \times n \dots\dots$ 運用公倍數(適用於原紙張較大時)

當餘數 $\geq n$ 則可再繼續轉向

註： $r3$ 代表 $\frac{X}{n \times m}$ 的餘數

【例】(9-11-4) $X*Y=85*50$, $m*n=5*3 \Rightarrow$ 完切

$$\left\lfloor \frac{50}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{85}{15} \right\rfloor \times 3 + \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{50}{15} \right\rfloor \times 3 + \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor$$

$$= 16 \times 5 \times 3 + 3 \times 3 \times 3 + 1 \times 2 = 269(\text{塊})$$

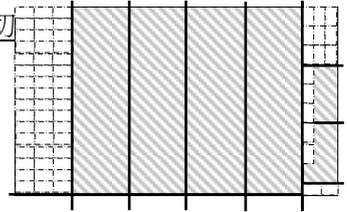
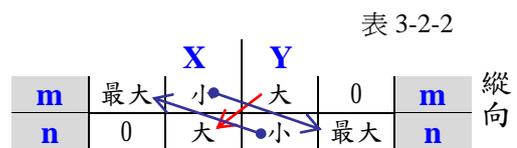
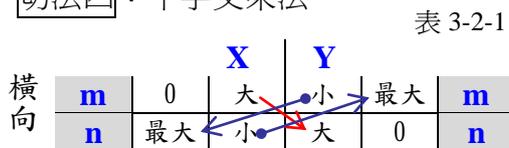


圖 3-2-3

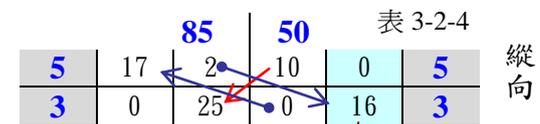
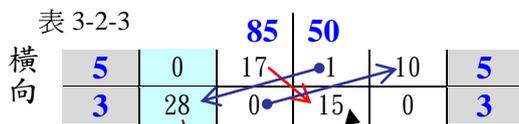
當數字間沒有成倍數關係時，不管我們是橫向排列還是縱向排列，總是會有剩餘，一浪費就是整排的，因此，當我們切割到模式 8 時，我們開始又有一個新想法：若能利用 2 種邊長(n、m)將原紙張的長寬(X、Y)盡量塞滿，那麼或許又可以切割出更多塊數了，也就是考慮 $K_1n + K_2m = X$ 或 Y 之問題，因此我們想出了第四種切法：

切法四：十字交乘法



【例】(9-11-4) $X*Y=85*50$, $m*n=5*3 \Rightarrow$ 完切 283 塊

※藍色區域表示有剩餘。



剩餘的面積較少(2*5)

剩餘的面積較多(2*10)

$$17 \times 15 + 1 \times 28 = 283(\text{塊})$$

$$10 \times 25 + 2 \times 16 = 282(\text{塊})$$

分析圖如下：

想法：此能先填滿的區塊愈大愈好！

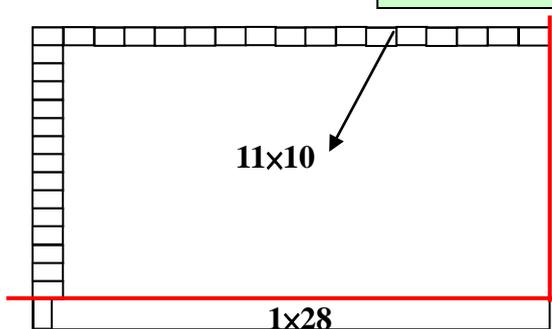


圖 3-2-4

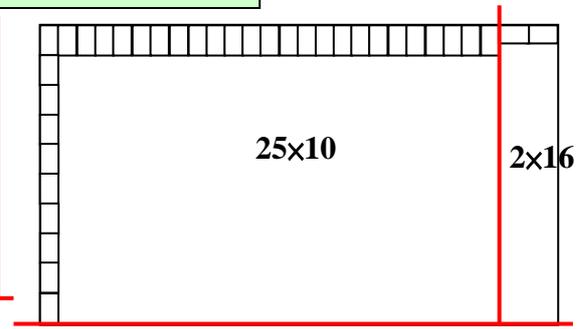


圖 3-2-5

2. 我們利用上述四種切法列舉三百多組紙模來實際做切割數的推算，並歸納以下幾點結果及切割的原則：(切割數據請見附件資料及實驗記錄單)

- (1) 當(X、Y)與(m、n)兩兩關係皆為倍數關係時 <如 $m \subset X$ 且 $n \subset X$ >，使用方法一 $(\frac{Y}{n} \times \frac{X}{m})$ 或方法二 $(\frac{X}{n} \times \frac{Y}{m})$ 皆可進行完全切割。

說明：這裡的 $m \subset X$ 指的是 X 是 m 的倍數(但不包含 $X=m$)， m 的所有因數皆包含在 X

的所有因數裡面。

從模式分析表中**只要有兩個✓**同時出現在對角線上(如下圖),皆可以完切。

	X	Y
m	✓	✓
n	✓	✓

	X	Y
m	✓	✗
n	✗	✓

	X	Y
m	✓	✓
n	✓	✗

	X	Y
m	✓	✗
n	✓	✓

	X	Y
m	✗	✓
n	✓	✗

圖 3-2-6

例：(9-3-4) $X*Y=90*60$ $m*n=18*5 \Rightarrow$ 完全切割 60

$$\rightarrow \text{切法一} : \left\lfloor \frac{60}{5} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{90}{18} \right\rfloor = 12 \times 5 = 60$$



(2) 當 $\frac{Y}{m}$ 或 $\frac{X}{m}$ 所形成的餘數 $\geq n$ 時,則可再進行轉向,又可以增多數量。

例：(8-5-12) $X*Y=210*14$ $m*n=5*3 \Rightarrow$ 完切 196

$$\rightarrow \text{切法二} : \left\lfloor \frac{210}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{14}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{210}{5} \right\rfloor = 70 \times 2 + 1 \times 42 = 182$$

(3) 若長短邊(即橫向及縱向放置)皆有剩餘時,則以剩餘面積較少者為優,如下例:

例：有一邊可以完全切割時<X及Y皆為m(n)的倍數>

(8-6-2) $X*Y=120*40$ $m*n=8*7 \Rightarrow$ 完切 85

$$\rightarrow \text{切法一} : \left\lfloor \frac{40}{7} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{120}{8} \right\rfloor = 5 \times 15 = 75 \dots \dots \text{剩餘面積 } 5 \times 120 = 600$$

$$\rightarrow \text{切法二} : \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{40}{8} \right\rfloor = 17 \times 5 = 85 \dots \dots \text{剩餘面積 } 1 \times 40 = 40$$

(4) 利用公倍數原則(切法三)來處理,有時又能優於切法一及切法二,但沒有絕對性。

例：(8-4-22) $X*Y=192*48$ $m*n=9*4 \Rightarrow$ 完切 256

$$\rightarrow \text{切法一} : \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{192}{9} \right\rfloor = 12 \times 21 = 252 <\text{無法轉向}>$$

$$\rightarrow \text{切法二} : \left\lfloor \frac{192}{4} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{48}{9} \right\rfloor = 48 \times 5 = 240 <\text{無法轉向}>$$

$$\rightarrow \text{切法三-a} : \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{192}{36} \right\rfloor \times 4 + \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{48}{9} \right\rfloor = 255$$

$$\rightarrow \text{切法三-b} : \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{192}{36} \right\rfloor \times 4 + \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{48}{36} \right\rfloor \times 4 + \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{12}{9} \right\rfloor = 255$$

※方法三-a與方法三-b不同於第二次轉向時再以公倍數來切割,但兩

者做出的效果是一樣的。

(5) 較佳的切割方法是“十字交乘法”，尤其是當 X 或 Y 可以分解成 $K_1n + K_2m$ 時，所切出的個數多數可以達到接近完切，或與完切相同的數量。

例：(8-7-6)X*Y=200*20 $m*n=8*3 \Rightarrow$ 完切 166

→切法一： $\left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{200}{8} \right\rfloor = 6 \times 25 = 150$ <無法轉向>

→切法二： $\left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{20}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{200}{8} \right\rfloor = 66 \times 2 + 1 \times 25 = 157$ <無法轉向>

→切法三： $\left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{200}{24} \right\rfloor \times 3 + \left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{20}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{8}{8} \right\rfloor = 149$

→切法四： $25 \times 4 + 1 \times 66 = 166$

表 3-2-4

8	×	25	1	2	8
3	66	4	1	1	3

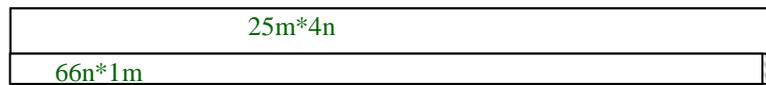


圖 3-2-6

(6) 做了很多切割例子後，發現有些還是距離完切有 2 塊的差距，因此我們再繼續思索，能否讓差距再少一些呢？結果，我們又想出了**切法五~十字交乘填滿法**，即儘量不要剩餘，舉例說明如下：

例：(5-4-7)X*Y=29*29 $m*n=5*3 \Rightarrow$ 完切 56

→切法一： $\left\lfloor \frac{29}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{29}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{29}{5} \right\rfloor = 9 \times 5 + 1 \times 5 = 50$

→切法二：同上

→切法三： $\left\lfloor \frac{29}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{29}{15} \right\rfloor \times 3 + \left\lfloor \frac{14}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{29}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{14}{5} \right\rfloor = 27 + 20 + 2 = 49$

→切法四： $8 \times 4 + 3 \times 5 + 1 \times (9 - 3) + 2 = 55$

表 3-2-5

5	5	1	4	×	5
3	1	8	3	9	3

還有 11 的空間，所以可以再轉向排 2 塊

紫色圈及橘色圈的部分要同時保持同一個模式，如下紫圈之值(3×8)大於上紫圈之值(4×5)，下橘圈之值(3×8)也需大於上橘圈(4×5)之值，其目的在於能產出完整的 D 區塊。

→切法五： $8 \times 4 + 1 \times 8 + 3 \times 4 + 3 \times 1 = 55$

表 3-2-6

5	4	1	4	1	5
3	3	8	3	8	3

讓下一步又可以利用轉向填滿或讓損失值更少

中間空出的區塊長寬為 $29 - 5 \times (4 + 1) \dots$ 即減去 5 個 m (由圖中看出)

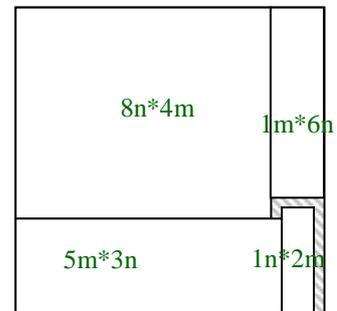


圖 3-2-7

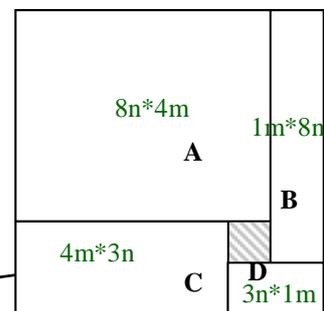


圖 3-2-8

→切法五(旋轉排法)： $4 \times 3 \times 4 + 1 \times 2 \times 4 = 56$...利用中間空位再繼續排入

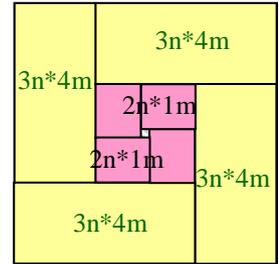
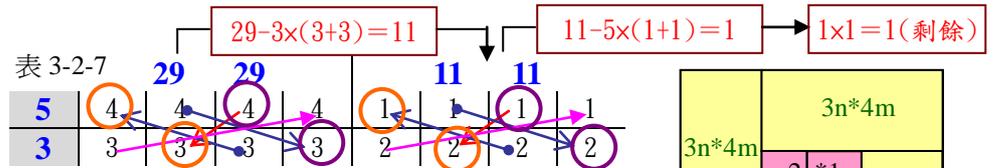


圖 3-2-9

總結上部分的結果，我們得到一個不錯的結果，可以利用切法四及切法五相互搭配，之前用切法一到切法四無法完切的數據，又可多產生數組可以完切的結果。

3. 當我們找出最佳的切割規律後，我們再回頭去分析當初讓印刷廠老闆讓我們“驚訝”的A4紙張切法（前活動一之圖 1-3-2），雖然其邊長之間是無法剛好整除的，但我們嘗試用最佳切法（即十字交乘法）來推四六版紙張切A4紙張所能切出的最大量及切割圖，結果竟是成功的（如下圖），我們驚喜萬分，也能用算式推出我們當初嘗試排出的〈圖 1-3-3〉，雖然我們無法用嚴謹的證明式來證明我們的切法必定是最佳解，但是我們所推出的數量都已經接近完切了，這讓我們相當興奮。

四六版紙張 $X*Y = 1090*787$ ， $m*n = 297*210 \Rightarrow$ 完切 13 塊

$1090 \div 297 = 3 \dots 199 \dots 0$
$2 \dots 496 \dots 2$
$1 \dots 793 \dots 3$
$787 \div 297 = 2 \dots 193 \dots 0$
$1 \dots 490 \dots 2$

$1090 \div 210 = 5 \dots 40 \dots 0$
$4 \dots 250 \dots 0$
$3 \dots 460 \dots 1$
$2 \dots 670 \dots 2$
$1 \dots 880 \dots 2$
$787 \div 210 = 3 \dots 157 \dots 0$
$2 \dots 367 \dots 1$
$1 \dots 577 \dots 1$

表 3-2-8

	1090	787	
297	0	3	1
210	5	0	2

$3 \times 2 + 1 \times 5 = 11$ (塊)

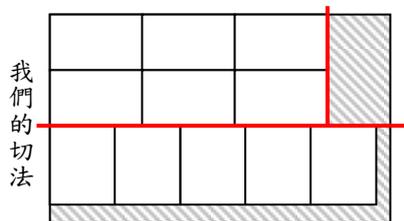


圖 3-2-1016

表 3-2-9

	1090	787	
297	0	2	1
210	5	2	0

$2 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times (5 - 2) = 11$ (塊)

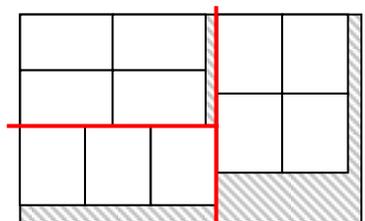


圖 3-2-11

【過程 3-3】利用切割的最佳解模式來推論不同版紙切割其它常用紙張規格大小所能切出的最大量及切割模式。

當我們成功找出最佳解模式後，我們終於可以用推理方式來探討活動一預留下來的問題，以四六版、大菊版、中菊版及小菊版紙張分別切割 A3 影印紙、B4 影印紙及八開圖畫紙做探討：

1.我們利用十字交乘法來進行切割探討，結果如下：

		A3 影印紙				表 3-3-1									
完切塊數	四六版 (6)	1090 787	$2 \times 2 = 4$ (塊)	$2 \times 1 + 1 \times 3 = 5$ (塊)											
		<table border="1"> <tr><td>420</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>420</td></tr> <tr><td>297</td><td>3</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>297</td></tr> </table>	420	0	2	0	1	420	297	3	0	2	0	297	
	420	0	2	0	1	420									
	297	3	0	2	0	297									
1090 787	$2 \times 2 = 4$ (塊)	$3 \times 1 = 3$ (塊)													
<table border="1"> <tr><td>420</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>420</td></tr> <tr><td>297</td><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>297</td></tr> </table>	420	0	2	1	1	420	297	3	0	1	0	297			
420	0	2	1	1	420										
297	3	0	1	0	297										
大菊版 (4)	939 635	$2 \times 2 = 4$ (塊)	$3 \times 1 = 3$ (塊)												
	<table border="1"> <tr><td>420</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>420</td></tr> <tr><td>297</td><td>3</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>297</td></tr> </table>	420	0	2	0	1	420	297	3	0	2	0	297		
420	0	2	0	1	420										
297	3	0	2	0	297										
中菊版 (4)	939 635	$2 \times 2 = 4$ (塊)	$3 \times 1 = 3$ (塊)												
	<table border="1"> <tr><td>420</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>420</td></tr> <tr><td>297</td><td>0</td><td>3</td><td>0</td><td>2</td><td>297</td></tr> </table>	420	2	0	1	0	420	297	0	3	0	2	297		
420	2	0	1	0	420										
297	0	3	0	2	297										
小菊版 (4)	889 635	$2 \times 2 = 4$ (塊)	$3 \times 1 = 3$ (塊)												
	<table border="1"> <tr><td>420</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>420</td></tr> <tr><td>297</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>297</td></tr> </table>	420	0	2	0	1	420	297	2	0	2	0	297		
420	0	2	0	1	420										
297	2	0	2	0	297										
小菊版 (4)	889 635	$2 \times 2 = 4$ (塊)	$3 \times 1 = 3$ (塊)												
	<table border="1"> <tr><td>420</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>420</td></tr> <tr><td>297</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>297</td></tr> </table>	420	2	1	1	0	420	297	0	1	0	2	297		
420	2	1	1	0	420										
297	0	1	0	2	297										
小菊版 (4)	876 622	$2 \times 2 = 4$ (塊)	$3 \times 1 = 3$ (塊)												
	<table border="1"> <tr><td>420</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>420</td></tr> <tr><td>297</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>297</td></tr> </table>	420	0	2	0	1	420	297	2	0	2	0	297		
420	0	2	0	1	420										
297	2	0	2	0	297										
小菊版 (4)	876 622	$2 \times 2 = 4$ (塊)	$3 \times 1 = 3$ (塊)												
	<table border="1"> <tr><td>420</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>420</td></tr> <tr><td>297</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>297</td></tr> </table>	420	2	1	1	0	420	297	0	1	0	2	297		
420	2	1	1	0	420										
297	0	1	0	2	297										
B4 影印紙															
四六版 (9)	1090 787	$2 \times 4 = 8$ (塊)	$2 \times 3 + 1 \times 2 = 8$ (塊)												
	<table border="1"> <tr><td>364</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>364</td></tr> <tr><td>257</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>3</td><td>257</td></tr> </table>	364	2	0	2	0	364	257	0	4	0	3	257		
364	2	0	2	0	364										
257	0	4	0	3	257										
四六版 (9)	1090 787	$2 \times 4 = 8$ (塊)	$2 \times 3 + 1 \times 2 = 8$ (塊)												
	<table border="1"> <tr><td>364</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>364</td></tr> <tr><td>257</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>0</td><td>257</td></tr> </table>	364	0	2	0	2	364	257	4	1	3	0	257		
364	0	2	0	2	364										
257	4	1	3	0	257										
大菊版 (6)	939 635	$2 \times 2 = 4$ (塊)	$1 \times 3 + 1 \times 2 = 5$ (塊)												
	<table border="1"> <tr><td>364</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>364</td></tr> <tr><td>257</td><td>3</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>257</td></tr> </table>	364	0	2	0	1	364	257	3	0	2	0	257		
364	0	2	0	1	364										
257	3	0	2	0	257										
大菊版 (6)	939 635	$2 \times 2 = 4$ (塊)	$1 \times 3 + 1 \times 2 = 5$ (塊)												
	<table border="1"> <tr><td>364</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>364</td></tr> <tr><td>257</td><td>0</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>257</td></tr> </table>	364	2	0	1	0	364	257	0	3	1	2	257		
364	2	0	1	0	364										
257	0	3	1	2	257										

中菊版 (6)		889 635				$2 \times 2 = 4$ (塊)	$1 \times 3 + 1 \times 2 = 5$ (塊)
		$364 \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 364 \\ 257 \end{array}$					
小菊版 (6)		876 622				$2 \times 2 = 4$ (塊)	$1 \times 3 + 1 \times 2 = 5$ (塊)
		$364 \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 364 \\ 257 \end{array}$					
八開圖畫紙							
四六版 (8)		1090 787				$2 \times 4 = 8$ (塊)	$2 \times 1 + 1 \times 4 + 1 \times 1 = 7$ (塊)
		$385 \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 385 \\ 265 \end{array}$					
大菊版 (5)		939 635				$2 \times 2 = 4$ (塊)	$1 \times 2 + 1 \times 2 = 4$ (塊)
		$385 \begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 385 \\ 265 \end{array}$					
中菊版 (5)		889 635				$2 \times 2 = 4$ (塊)	$1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$ (塊)
		$385 \begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 385 \\ 265 \end{array}$					
小菊版 (5)		876 622				$2 \times 2 = 4$ (塊)	$1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$ (塊)
		$385 \begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 385 \\ 265 \end{array}$					

由於切出的塊數較少，所以較不能看出十字交乘的功效，但是由上表中我們也歸納出一些事實：

- (1) 菊版紙張適合盡適合切 A 系列的影印紙。
- (2) 四六版紙張適合切 B 系列的影印紙或圖畫紙。
- (3) 當在紙張長寬 XY 都無法整除單位長寬 mn，且也無法利用 $K_1n + K_2m$ 來湊足 X 或 Y 時，若使用切法一或切法二其餘數皆很小時，也可能是最

佳的切割數。

活動四：應用研究成果設計製作遊戲拼盤組。

整個研究除了可以應用在紙張的最佳裁切，當然也可以運用在實際生活的地板拼貼或平面空間物品的擺放：

【活動 4-1】實際找家中的櫥櫃模擬物品擺放的推算。

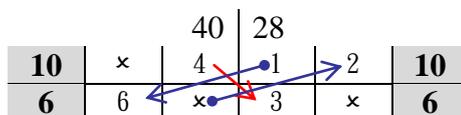
尋找生活中的一些櫥櫃空間擺放物品或拼貼地板的問題，來印證我們的實驗，實驗中我們皆以平面來探討。

結果

1. 在 40cm*28cm 的書櫃上擺放錄音帶盒(長寬 10cm*6cm) ⇒ 最佳解 18 盒

→作法一： $\left\lfloor \frac{40}{6} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{28}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8}{6} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{40}{10} \right\rfloor = 6 \times 2 + 1 \times 4 = \underline{16}$ 表 4-1-1

→作法二： $4 \times 3 + 1 \times 6 = \underline{18}$

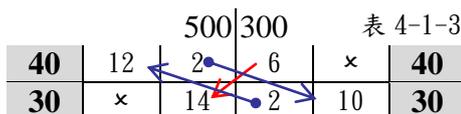
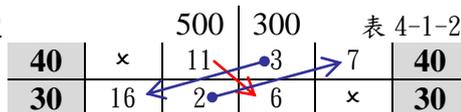


2. 在室內 5m*3m 的地板全部鋪上長方形地墊 40cm*30cm ⇒ 最佳解 125 塊

→作法一： $\left\lfloor \frac{300}{30} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{500}{40} \right\rfloor + = 10 \times 12 = \underline{120}$ 表 4-1-2

→作法二： $\left\lfloor \frac{500}{30} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{300}{40} \right\rfloor = 16 \times 7 = \underline{112}$

→作法三： $14 \times 6 + 2 \times 12 + 2 \times (10 - 2) = \underline{124}$

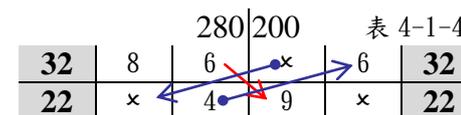


3. 一張 A4 的紙張去除邊緣，僅留下 280mm*200mm，共可以擺滿多少張一寸(32mm*22mm)的照片 ⇒ 最佳解 79 塊

→作法一： $\left\lfloor \frac{200}{22} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{280}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{24}{22} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{200}{32} \right\rfloor = 9 \times 8 + 1 \times 6 = \underline{78}$

→作法二： $\left\lfloor \frac{280}{22} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{200}{32} \right\rfloor = 12 \times 6 = \underline{72}$

→作法三： $6 \times 9 + 4 \times 6 = \underline{78}$



【活動 4-2】利用研究成果設計製作遊戲拼盤組，供班級同學來挑戰。

我們利用活動三所找出的切法四及切法五(十字交乘)來反推設計出十六組遊戲拼盤組(包含正方形及長方形模板)，目標在於用一般排法無法排出完切的塊數，而用十字交乘法的交錯排法才可以完成的為主。希望設計出來的遊戲拼盤能具挑戰性，納入班上的益



智玩具收藏組。



結果 (拼組結果請見附件三)

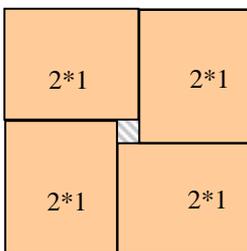
表 4-2-1

正方形	拼盤 1	拼盤 2	拼盤 3	拼盤 4	拼盤 5	拼盤 6	拼盤 7	拼盤 8
模板	11*11	19*19	29*29	31*31	11*11	15*15	26*26	30*30
單位元件	5*3	5*3	5*3	5*3	7*4	7*4	7*4	7*4
完拼	8	24	56	64	4	8	24	32
剩餘面積	1	1	1	1	9	1	4	4
單向排法	6			60		6		28
轉向排法		21	50		3		21	
十字交乘	8	24	56	64	4	8	24	32

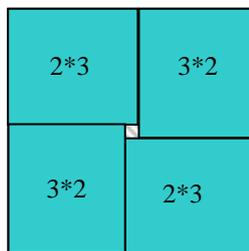
註：單向排法即表示依一般橫向排列（或縱向）時已無法轉向的排法。

轉向排法即表示依一般橫向排列（或縱向）時還可再轉向的排法。

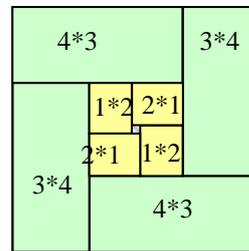
【拼盤 1】



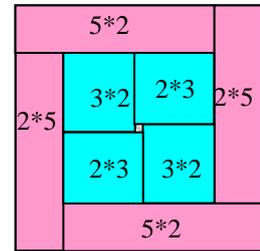
【拼盤 2】



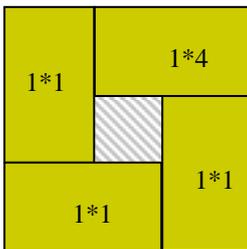
【拼盤 3】



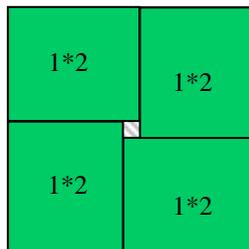
【拼盤 4】



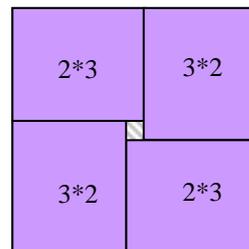
【拼盤 5】



【拼盤 6】



【拼盤 7】



【拼盤 8】

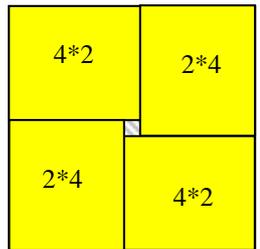
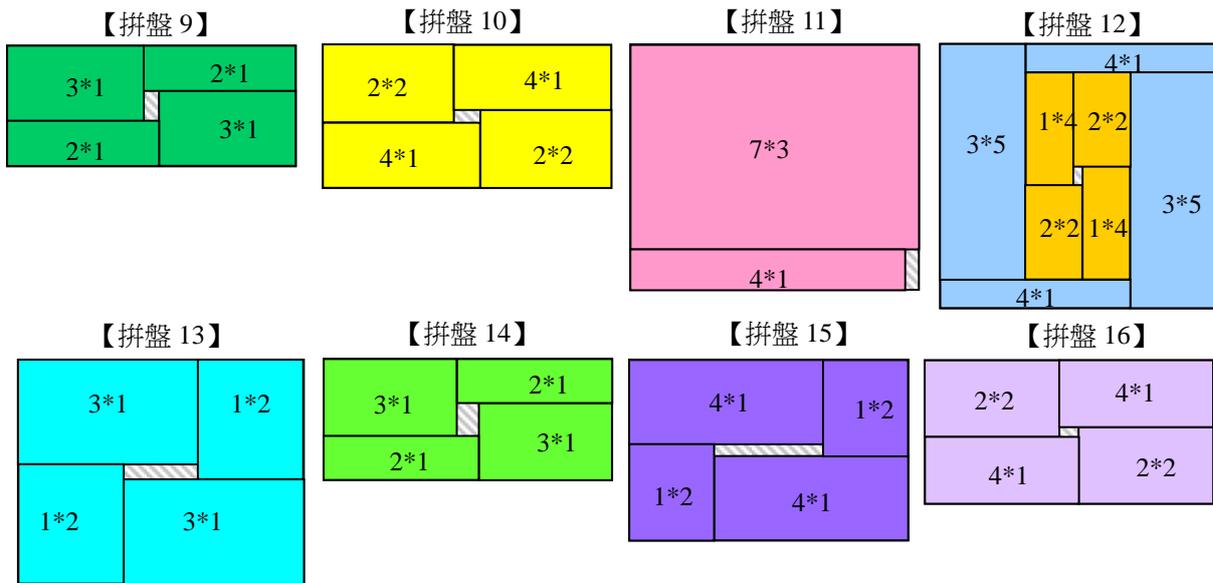


表 4-2-2

長方形	拼盤 9	拼盤 10	拼盤 11	拼盤 12	拼盤 13	拼盤 14	拼盤 15	拼盤 16
模板	19*8	22*11	21*18	29*28	19*15	26*11	23*15	30*15
單位元件	5*3	5*3	5*3	5*3	7*4	7*4	7*4	7*4
完拼	10	16	25	54	10	10	12	16
剩餘面積	2	2	2	2	5	6	9	2
單向排法		14	24		8		10	14
轉向排法	9		25	50	8	9		
十字交乘	10	16		54	10	10	12	16

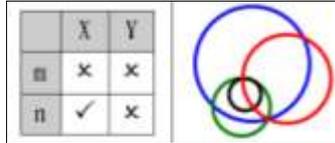


七、研究結論：

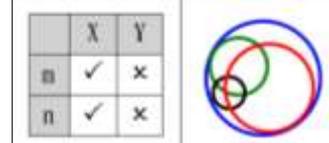
1. 印刷廠進貨紙張以四六版、中菊版及大菊版為主，而 A 系列影印紙(A3、A4、A5)是以菊版紙來切割，B 系列影印紙及常見的圖畫紙或筆記簿是以四六版來切割。
2. 一般 A4 又稱菊八開，即以中菊版紙等分成八份，但現在已有多數廠商是以大菊版來切較符合經濟效益，可以切成九份，又稱菊九開。雖然也可以用四六版來切割 11 張 A4，但相對的損失面積較多，所以不划算。
3. 以全開紙張切出指定 K 數，在完全切割的狀況下，質數 K 僅 2 種方式 ($W \div K \rightarrow w$ 、 $L \div K \rightarrow 1$)，合數 K 則至少有 3 種切法以上(採因數分解模式可推出)。
4. 以全開紙張切出指定 K 數，在非完全切割的狀況下，可以利用 K 數的分解模式 來等分寬邊或長邊。

5. 在非完全切割的狀況下無法看出固定哪一種切法較符合經濟效益，但可知在同一種切割分配模式中，以 \langle 紙張的寬邊來等分成單位紙張的寬邊 (即 $\frac{W}{\text{直切塊數}} \rightarrow w$) \rangle 比將 \langle 紙張的寬邊當成單位紙張的長邊 (即 $\frac{W}{1}$) \rangle 來得好。
6. 原紙張與單位紙張個別長寬關係共可分成九種模式 56 種搭配模式，可以利用圓圈來表徵其之間的關係。

【模式 7】 $X \neq Y$ (XY 成非倍數關係)
 $m \neq n$ (mn 成倍數關係)



【模式 8】 $X \neq Y$ (XY 成倍數關係)
 $m \neq n$ (mn 成非倍數關係)



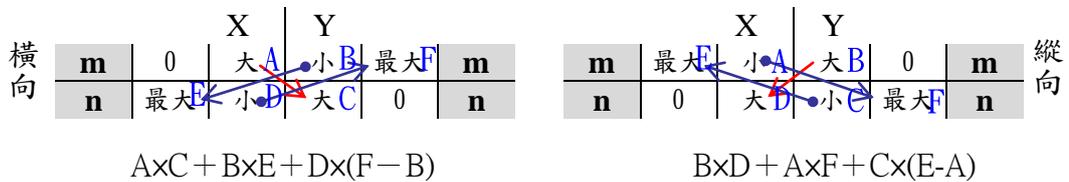
7. 原紙張面積 ÷ 單位紙張面積所成的整數值，必為切割數量的最大值，但未必每種組合皆能成功切出此最大值，其原紙張與單位紙張間之倍數關係及其餘數能否再進行轉向是其關鍵所在。
8. 我們歸納出五種切割方式：

切法一： $\left\lfloor \frac{Y}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{X}{m} \right\rfloor \dots$ 橫向切法... 當餘數 $\geq n$ 時 $\rightarrow \left\lfloor \frac{Y}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{X}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r1}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{Y}{m} \right\rfloor$

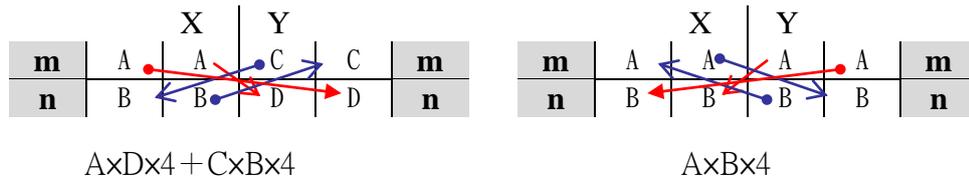
切法二： $\left\lfloor \frac{X}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{Y}{m} \right\rfloor \dots$ 縱向切法... 當餘數 $\geq n$ 時 $\rightarrow \left\lfloor \frac{X}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{Y}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r2}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{X}{m} \right\rfloor$

切法三： $\left\lfloor \frac{Y}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{X}{n \times m} \right\rfloor \times n + \left\lfloor \frac{r3}{n} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{Y}{n \times m} \right\rfloor \times n \dots$ 運用公倍數

切法四：十字交乘法



切法五：十字交乘填滿法 (呈旋轉狀) 請見過程 3-2-(6)



9. 在做切割數的推算時，發現其是否能完切除了倍數關係是一個要素外，餘數也是一個重要的因素，歸納以下幾點結果及切割的原則：(切割數據請見附件二及實驗記錄單)

1. 當 (X, Y) 與 (m, n) 兩兩關係皆倍數關係時 \langle 如 $m \subset X$ 且 $n \subset X$ \rangle ，使用切法一

$(\frac{Y}{n} \times \frac{X}{m})$ 或切法二 $(\frac{X}{n} \times \frac{Y}{m})$ 皆可進行完切。

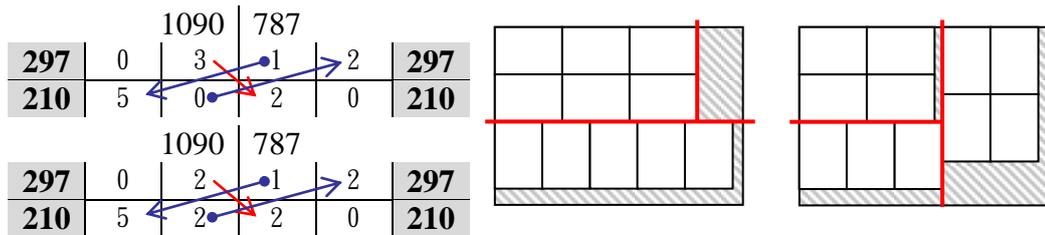
2. 當 $\frac{Y}{m}$ 或 $\frac{X}{m}$ 所形成的餘數 $> n$ 時，則可再進行轉向，又可以增多數量。

3. 若長短邊皆會有剩餘時，則長邊剩餘優於短邊剩餘。

4. 利用公倍數原則(切法三)來處理，有時能優於切法一、二，但沒有絕對性。

5. 切割的最佳解法是“十字交乘填滿法”搭配“旋轉排法”，尤其是儘量讓 X 或 Y 可以分解成 $K_1n + K_2m$ 沒有剩餘時，所切出的個數多數可以達到接近完切，或與完切相同的數量。

10. 我們可以利用十字交乘法來驗證四六版切 11 張 A4 的分解圖。



11. 菊版紙張適合切 A 系列的影印紙，四六版紙張適合切 B 系列的影印紙或圖畫紙。

12. 我們的研究成果，可以有效運用在平面空間的利用或紙張應用的效能上，更進一步可以設計成好玩且具挑戰性的遊戲拼盤。

八、參考資料

喬恩·米林登 (民 95)。動動腦 數學會更好。台北市：商周出版
 最新課程標準高職課本—製圖-----東大圖書公司
 網路資訊

九、活動剪影



【評語】 080404

1. 主題新穎有趣，兼具數學性，實用性與遊戲性。
2. 難度適中能將國小數學做了很好的應用。
3. 利用「十字交乘填滿法」搭配「旋轉排法」以求出切割的「最佳解法」的方法甚具創意，且解說過程清楚、表達能力頗佳。