中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

最佳創意獎

080403

線上遊戲--探討線段與紙帶衍伸出的拓樸圖形與遊戲

學校名稱：私立維多利亞國民小學

作者：	指導老師：
小六 劉宇翔	陳素玲
小六 郭乃榕	黃峰文
小六 林立秦	
小六 陳建穎	
小六 范鏄瑋	
小六 劉駿翰	

關鍵詞：　拓撲、莫比烏斯帶 The Mobius Band、歐拉圖形

摘要

本研究討論一條線和兩條線打成死結或活結的原因，再探討有寬度的線段（紙帶）翻轉不同度數後黏合的情形，與由橡皮筋衍伸出的各種圖形有哪些規律與特色，最後我們也探討了一些和拓樸有關的遊戲並研究發明其他遊戲或魔術。從這次的研究中，我們發現生活中不起眼的繩子、紙帶與橡皮筋，竟然也隱含了數學的拓樸原理，而且從簡單的拓樸性質-物體或圖形在不割裂、破壞孔洞下，可任意伸縮及變形，就可以衍伸出許多神奇有趣的遊戲。

壹、研究動機

有一次我們一起玩一個叫雙人脫困的遊戲，發現挺有趣的，於是想上網查更多相關資料，結果發現這個遊戲和拓撲學有關，所以我們決定利用拓撲學中，物體或圖形在不割裂、破壞孔洞下，可任意伸縮及變形的性質，探討繩子打結、莫比烏斯帶、橡皮筋可做出的圖形和一些與拓撲學有關的小遊戲。

貳、研究問題

1.探討一條線和兩條線打死結或活結的原因。

2.探討有寬度的線段（紙帶）翻轉不同度數後的特性並將其應用在生活中。

（一）翻轉後的纸帶特性

（二）翻轉後的纸帶在生活中的應用

3.探討由一條橡皮筋衍伸出的各種圖形有哪些規律與特色。

（一）由一條橡皮筋做成的圖形有哪些規律與特色？

（二）由一條紙帶仿做橡皮筋做成的圖形有哪些規律與特色？

4.探討和拓樸有關的遊戲

(1)「仙人穿梭」遊戲所使用的原理與如何利用此原理製作更複雜的仙人穿梭問題並應用在生活中。

(2)找出「雙人脫困」遊戲的原理，並從中探討三人、四人…等脫困的規律及應用。

(3)探討橡皮筋魔術的原理，並利用此原理創作更多橡皮筋魔術。

参、研究文獻

（一）拓樸學（Topology）

拓樸學研究那些在變形後不改變的圖形的性質，如果一幅圖能連續變形成另外一幅圖，那麼我們可以說這兩幅圖拓樸等價，所以對拓樸學家而言，三角形和正方形甚至是圓屬於拓樸等價；球體和正方體也是拓樸等價。以曲線來說，不論有多長都可以分成閉合和非閉合的，如果曲線是閉合的，則它可以是纏繞得很複雜的，兩條以上的閉曲線可以互相套起來，而且有很多形式。總而言之，在不割裂、破壞孔洞下，做任意的伸縮及變形，這種變形不會影響或增加孔洞的數量，就叫做它的 “拓樸性質”。以上是簡單的

說法，再深入分類不在本研究範圍。

（二）莫比烏斯帶(Möbius strip)

在 1862~1865 年，兩位德國數學家莫比烏斯和 Johann Benedict Listing 分別發現，扭轉 180˚後再將兩頭粘接起來的紙帶只有一個面(單側曲面)，一隻小蟲可以爬遍整個曲面而不必跨過它的邊緣！這一神奇的單面紙帶被稱為“莫比烏斯帶”(Mobious strip)，從文獻得知，莫比烏斯帶還有下列性質：

1.可以一筆畫走完兩面不必跨過邊緣。

2.從中間剪開一個莫比烏斯帶，會形成兩個連在一起的環（並不是莫比烏斯帶）。

3.把帶子的寬度分為三分，並沿著分割線剪開的話，會得到兩個環，一個是窄一些的莫比烏斯帶，另一個則是旋轉了兩次再結合的環。

莫比烏斯帶在工業上有著特殊的重要性，例如它可作為汽車風扇或機械設計的傳動帶，比起傳統的傳動帶，在磨損方面，表現得更加均勻，同時可做到方向傳動。

（三）歐拉圖形（Eular）

中國民間很早就流傳著一筆畫的遊戲，依據長期實驗的經驗，如果圖的點全部都是偶點，則可以任選一點當作起點，一筆畫把這個圖形畫完。當圖形中通過某一點的路徑為奇數條時，這點稱為奇點；當圖形中通過某一點的路徑為偶數條時，這點稱為偶點。如果圖形有兩個奇點，則任選一奇點當起點可以一筆畫畫完，而另一個奇點便是終點。如果圖形有三個以上的奇點，那麼是一筆畫不出來的。一圖的點全部都是偶點，且起點和終點都是同一點，稱此圖為歐拉圖形。

（四）與拓樸相關的遊戲

市面上或網路上有一些小遊戲，或魔術，都和拓樸有關，例如

（1）雙人脫困：不解開手腕上的繩結,不破壞、剪斷繩子下,使兩人掙脫手上纏繞的繩子

（2）仙人穿梭：設法將兩個分別放置在兩端的圓環，放在同一端

（3）橡皮筋魔術：橡皮筋穿越(美國枷鎖)、將橡皮筋套在食指與中指，手指彎曲握拳再伸直，橡皮筋就被移到無名指與小指

通常大家只注意到這些繩子、紙帶、橡皮筋遊戲的神奇與趣味性，在本研究中，我們將仔細探究這些圖形和遊戲，並依據這些原理發明其他的玩法。

肆、研究工具

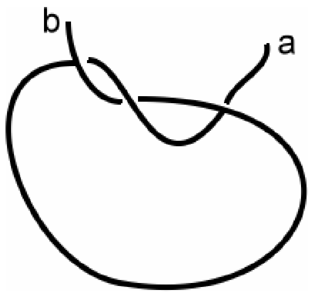
紙帶、中國繩、尼龍繩、圓環、厚紙板、橡皮筋、電腦小畫家、Photoimpact 繪圖軟體、衛生紙滾筒

伍、研究方法

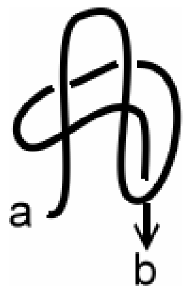
活動一、探討一條線和兩條線打死結或可解開的原因

（一）探討一條線的打結情形

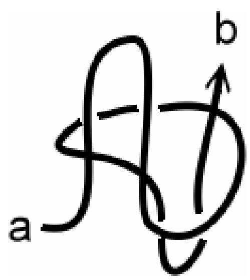
有一條線，一端為 a，一端為 b，將 a 端穿入 a、b 端交叉形成的圈中，形成中國結中的單結（如圖一）。將 ab 端拱成一個彎曲，由 b 端繞此彎曲，穿入 b 端和彎曲形成的圈中（如圖二）。同圖二，但 b 端最後穿入圈中時拱成一個彎曲，再由圈中穿出（如圖三）。



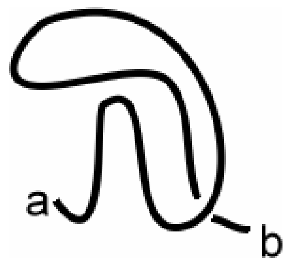
圖一



圖二



圖三



圖四

從圖一、圖二、圖三所形成的結，我們試著探討其中可否拉開結的原因

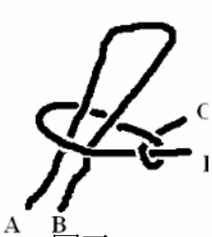
1.拉圖二的 a 端和圖三的 a、b 兩端都能解開結使成原來的一條線，這三端都是在打結的圈中拱成一個彎曲才穿出來的。

2.拉圖一的 a、b 兩端和圖二的 b 端都無法解開結，這三端都是直接從圈中穿出。

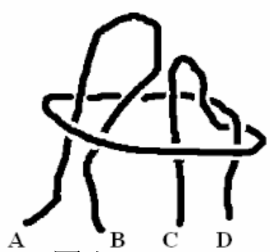
（二）探討兩條線的打結情形

（1）比較圖五、圖六

將一條線折成一彎曲，另一條線繞住彎曲綁一個圖一結（如圖五）。將一條線折成一彎曲，另一條線繞住彎曲綁一個圖二結（如圖六）。

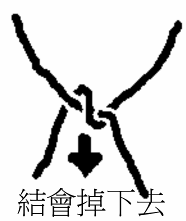


圖五



圖六

圖七



圖八

圖九

1.圖五拉任一端線都不能將整個結解開，最多也只能拉 A 或 B 端讓彎曲脫離而已。

2.圖六拉 C 端可以讓整個結解開。因為圖六是一個圖二結和一個彎曲的結合，這個彎曲被圖二結綁住，也就是說只要拉開裡頭的圖二，便可全部鬆開，而要拉開圖二必須拉 C 端，所以只要拉 C 端就可以讓整個結解開。

（2）比較圖七、圖九

1.圖七是將兩條線的兩端各打一個圖一結。圖九是將兩條線的上端先各自繞一個彎曲再打成圖一結，下端則再打一次圖一結。兩結都須打兩次圖一結才可固定，否則會鬆開（如圖八）。

2.圖七和圖九都無法拉任一條線使部分或整個結解開，因圖七和圖九都是由圖一打來的，而圖一是死結。

由（一）（二）討論一條線或兩條線的打結情形可知，當線的一端是從圈穿出去，使在圈圈的另一端時，拉此端，結不可解開，當線的一端是彎成一個彎曲時，兩端在圈的同一邊，拉此端即可解開繩結。依此結論三條線以上打的結可類推。

活動二、探討有寬度的線段（紙帶）翻轉不同度數後的特性

（一）翻轉後的紙帶特性

在尋找拓樸學的資料時，我們認識了「莫比烏斯帶」，吸引我們將紙帶翻轉、分割，探討其產生的結果。將長 L、寬 W 的紙帶翻轉 180˚、360˚、540˚作分割，下表是分割結果。

表一 紙帶轉度與分割結果表

轉度	距帶邊 $\frac{1}{n}$ 分割 n=1,2,3,4,5,6	分割結果 (度數，長度，寬度)×份數	翻轉度數和	可否一筆畫走完所有面
0 度	1（不分割）	(0˚，L，W)×2	0˚	否
0 度	$\frac{1}{2}$ 分割	(0˚，L，$\frac{W}{2}$)×2	0˚	否
180 度（180×1）	1（不分割）	(180˚，L，W)×1	180˚	可
180 度	$\frac{1}{2}$ 分割	(360˚，2L，$\frac{W}{2}$)×1	360˚	否
180 度	$\frac{1}{3}$ 分割	(360˚，2L，$\frac{W}{3}$)×1 ＋(180˚，L，$\frac{W}{3}$)×1	540˚	否
180 度	$\frac{1}{4}$ 分割	(360˚，2L，$\frac{W}{4}$)×2	720˚	否
180 度	$\frac{1}{5}$ 分割	(360˚，2L，$\frac{W}{5}$)×2 ＋(180˚，L，$\frac{W}{5}$)×1	900˚	否
180 度	$\frac{1}{6}$ 分割	(360˚，2L，$\frac{W}{6}$)×3	1080˚	否
360 度（180×2）	1（不分割）	(360˚，L，W)×1	360˚	否
360 度	$\frac{1}{2}$ 分割	(360˚，L，$\frac{W}{2}$)×2	720˚	否
360 度	$\frac{1}{3}$ 分割	(360˚，L，$\frac{W}{3}$)×3	1080˚	否
360 度	$\frac{1}{4}$ 分割	(360˚，L，$\frac{W}{4}$)×4	1440˚	否
360 度	$\frac{1}{5}$ 分割	(360˚，L，$\frac{W}{5}$)×5	1800˚	否

360 度	$\frac{1}{6}$分割	(360°，L，$\frac{W}{6}$)×6	2160°	否
540 度（180×3）	1（不分割）	(540°，L，W)×1	540°	可
540 度	$\frac{1}{2}$分割	(1080°，2L，$\frac{W}{2}$)×1	1080°	否
540 度	$\frac{1}{3}$分割	(1080°，2L，$\frac{W}{3}$)×1 ＋(540°，L，$\frac{W}{3}$)×1	1620°	否
540 度	$\frac{1}{4}$分割	(1080°，2L，$\frac{W}{4}$)×2	2160°	否
540 度	$\frac{1}{5}$分割	(1080°，2L，$\frac{W}{5}$)×2 ＋(540°，L，$\frac{W}{5}$)×1	2700°	否
540 度	$\frac{1}{6}$分割	(1080°，2L，$\frac{W}{6}$)×3	3240	否
720 度（180×4）	1（不分割）	(720°，L，W)×1	720°	否
720 度	$\frac{1}{2}$分割	(720°，L，$\frac{W}{2}$)×2	1440°	否
720 度	$\frac{1}{3}$分割	(720°，L，$\frac{W}{3}$)×3	2160°	否
720 度	$\frac{1}{4}$分割	(720°，L，$\frac{W}{4}$)×4	2880°	否
720 度	$\frac{1}{5}$分割	(720°，L，$\frac{W}{5}$)×5	3600°	否
720 度	$\frac{1}{6}$分割	(720°，L，$\frac{W}{6}$)×6	4320°	否

在上表中，距帶邊$\frac{1}{n}$分割，是把一條紙帶分割成 n 等分（即分割數是 n），翻轉度數和是分割結果的翻轉度數乘以條數，當不做任何翻轉時，翻轉度數等於 o。

將上表作成結論

（1）翻轉度數和＝未分割前的翻轉度數×n，n 是分割數。

（2）作$\frac{1}{n}$分割，紙帶的寬度是$\frac{W}{n}$。

（3）180°的莫比帶進行$\frac{1}{n}$分割時，只需剪$\frac{n}{2}$圈。

（4）翻轉 180°的紙帶分割後只會產生 180°、360°的紙帶，因爲最外圈的兩個會結合。

（5）任兩個長度相同的紙帶分割後，如果翻轉度數和相同，分割結果的翻轉度數和條數就會相同，但長度和寬度不相同。前提是這兩條紙帶翻轉結果的度數一定要有相同的時候，例如 180˚分割後只能產生翻轉 180˚或 360˚的紙帶，所以不能和 540˚、720˚…作比較。

（6）紙帶是莫比帶時，作$\frac{1}{n}$分割，當 n 是偶數，會產生$\frac{n}{2}$條，翻轉度數、長度為原來 2 倍的紙帶；n 是奇數時，就會產生一條翻轉度數、長度與原來相同長度的紙帶及$\frac{n-1}{2}$條翻轉度數、長度為原來 2 倍的紙帶

（7）紙帶是非莫比帶時，作$\frac{1}{n}$分割，會產生 n 條翻轉度數和原來相同的紙帶、長度為 L 的紙帶。

（二）翻轉後的紙帶在生活中的應用

利用莫比烏斯帶可一筆走完兩面的原理，我們將其套在圓筒上，做成載物的滾輪，此滾輪因為表面耗損的面積增加，使壽命增加。（如圖十）

我們發現當旋轉 180 度時，只有一個轉折，圓筒轉動時摺痕會固定在一處，紙帶轉動，圓筒不會受到阻擋；但旋轉 540 度時，因為有兩個轉折，圓筒轉動時，第一個轉折會被第二個轉折阻礙，使得整個滾輪轉動不順利，所以表皮紙帶旋轉 180 度所作成的滾輪會比較方便好用。

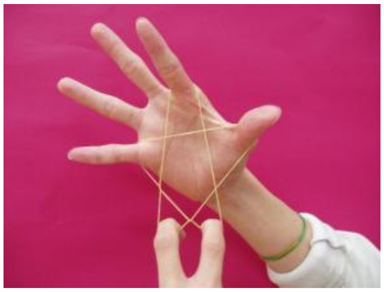
圖十　旋轉 180 度的輸送帶

活動三、探討由一條橡皮筋衍伸出的各種圖形有哪些規律與特色

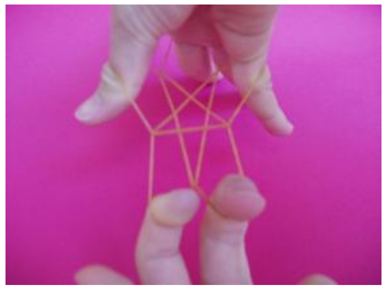
（一）由一條橡皮筋做成的圖形有哪些規律與特色

我們把橡皮筋放在手中把玩，發現一條橡皮筋就可以做出很多有趣的圖形 ，於是我們試著探討這些圖形是不是也具有前面所說的 “做任意的伸縮及變形，且不會影響或增加孔洞數量”的“拓樸性質” 。

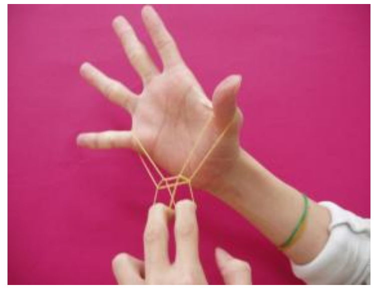
利用橡皮筋作出的圖形如下



圖十一 星星



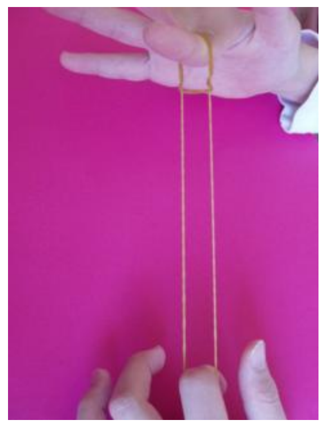
圖十二 雙星



圖十三 房子

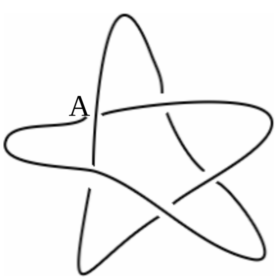
圖十四 熱氣球

圖十五 剪刀

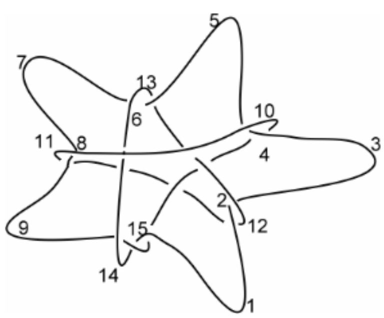


圖十六 鋸子

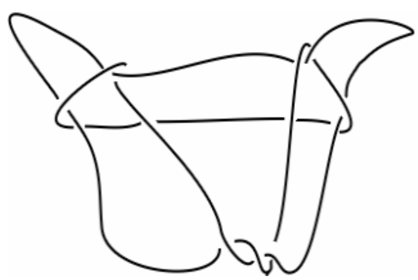
以圖十一爲例，我們發現固定其中任何一個頂點，都可一筆畫畫完橡皮筋做的圖形，並回到原來的起點。



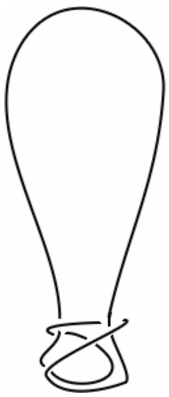
圖十七 一筆畫星星

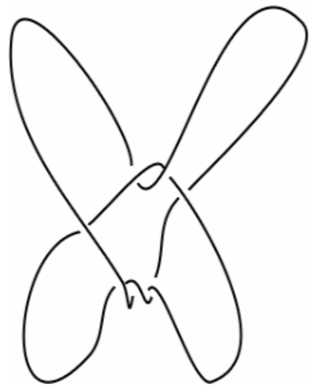


圖十八 一筆劃雙星



圖十九 一筆劃房子





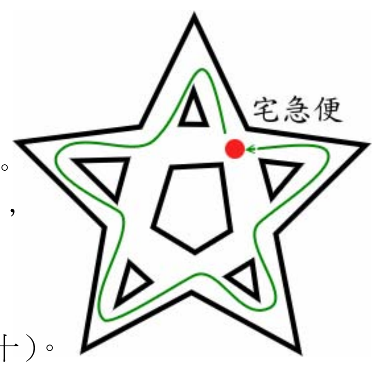
圖二十 一筆畫熱氣球　　圖二十一 一筆畫剪刀　　圖二十二　一筆畫鋸子

觀察我們用橡皮筋作出的圖形，發現所有點都是偶點，因為每一次將橡皮筋拉到另一邊時，都是一次拉住兩條（即點的兩端 ），所以每個點所接起的路徑一定是偶數，這些圖形可一筆畫走完，屬於我們文獻中提到的歐拉圖形。

再探討這些圖形與拓樸性質的關係，因為一條橡皮筋是一個有彈性的「圈」，不管它拉得多長，轉幾圈，它永遠只是「一個圈」。

由上述探討，我們對於橡皮筋衍伸出的圖形有以下結論

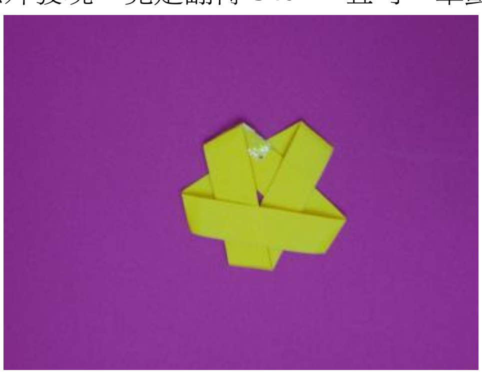
1. 橡皮筋衍伸出的圖形中，路徑和路徑交接的點一定是偶點。
   可用一筆畫畫完，且起點和終點是同一個點，符合歐拉圖形。
2. 橡皮筋衍伸出的圖形，不管怎麼拉怎麼繞，都還是一個圈圈，
   符合本研究探討的拓樸性質。
3. 利用一筆畫畫完的原理，我們想到可以規劃宅急便
   司機開車的路線，不必重複路徑，就能將貨物送完（如圖三十）。



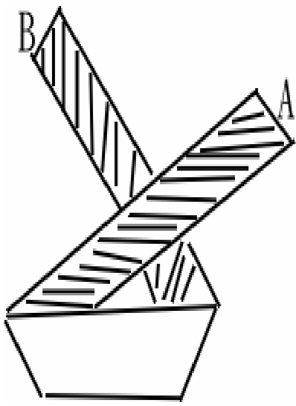
圖三十　宅急便路線圖

（二）由一條紙帶仿做橡皮筋做成的圖形有哪些規律與特色

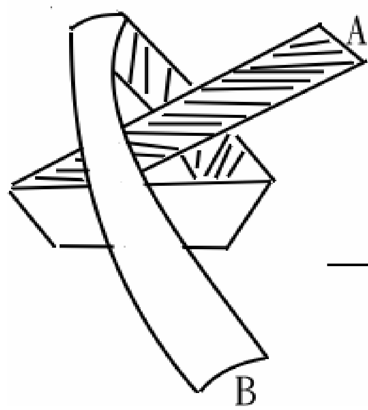
我們無意中用線段摺成如圖十一的星星，並將頭尾兩端黏合（如圖二十三），拆開後意外發現，竟是翻轉 540°，且可一筆劃走完兩面的莫比帶（如圖二十四）



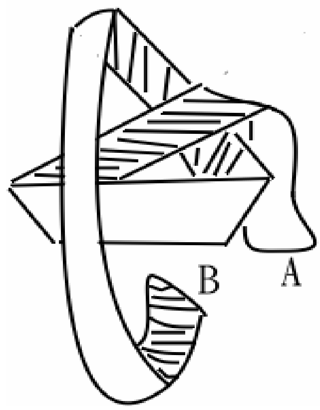
圖二十三　用紙帶摺成的星星　　　　圖二十四　翻轉 540°的莫比烏斯帶



圖二十五　用紙帶摺星星步驟一



圖二十六　用紙帶摺星星步驟二

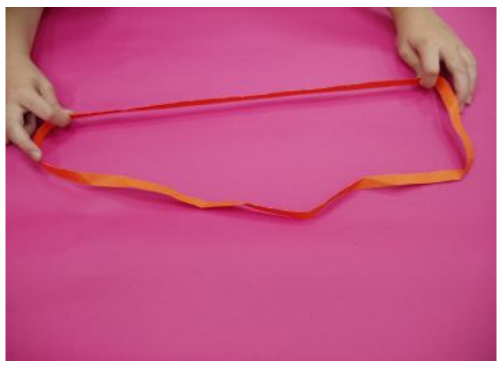


圖二十七　用紙帶摺星星步驟三

圖二十五、二十六、二十七爲用紙帶摺成星星的步驟。在圖中我們可以看出當紙帶摺成如圖二十五時，紙帶 B 端的反面與 A 端的反面相接（斜線爲反面），形成第一次翻轉 180˚，把 B 往下摺形成第二次翻轉 180˚（如圖二十六），最後當 B 端的正面與 A 端的正面相接，形成第三次翻轉 180˚（如圖二十七）。

我們再用紙帶摺成如圖十二的雙星，並將頭尾兩端黏合（如圖二十八）。


圖二十八　用紙帶摺成的雙星


圖二十九　翻轉 540˚的莫比烏斯帶

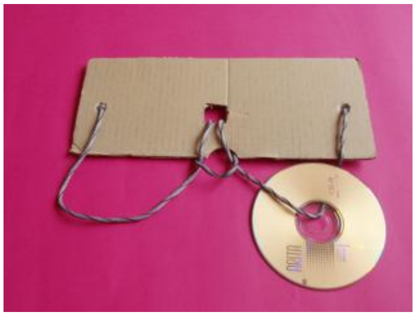
如圖十八，我們發現最外圈的大星星折痕會因爲一正一反互相抵銷 而變成 0˚，所以整個圖只剩下一個星星，折一個星星需翻轉 540 ˚，所以折一個雙星至少須翻轉 540˚（如圖二十九）。

由上發現，我們歸納出用紙帶摺成的星星或雙星具有以下特性

1. 因其符合“做任意的伸縮及變形，這種變形不會影響或增加孔洞數量”的拓樸特性，所以可用一條紙帶摺成。
2. 紙帶兩端黏合後，拉其中一角可使圖形拆開成一個大圈圈。
3. 拆開後的圖形因摺的過程中有反摺的情形，所以會形成翻轉過的紙帶，且此紙帶與莫比烏斯帶同構，均可一筆畫畫完兩面。

活動四、探討和拓樸有關的遊戲

我們在網路上找到和拓樸有關的遊戲，有仙人穿梭、雙人脫困及橡皮筋魔術，除了探討這些遊戲的解法之外，也嘗試將遊戲加深改版。

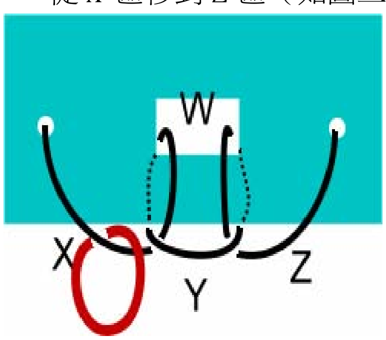


圖三十一仙人穿梭遊戲

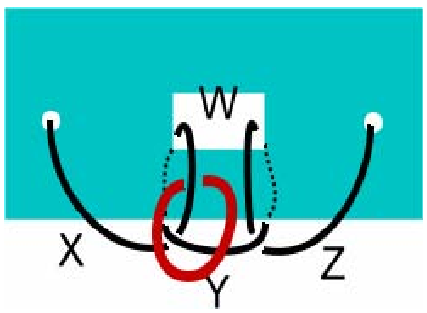
圖三十二　雙人脫困遊戲

（一）仙人穿梭（如圖三十一）

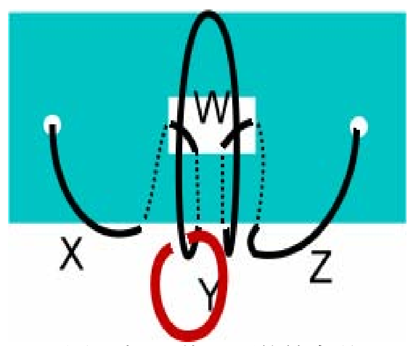
利用一條線穿梭在厚纸板上的三個洞，在不破壞線段、厚纸板、圓環的情形下，將圓環從 X 區移到 Z 區（如圖三十三）步驟如圖三十四-圖三十七。



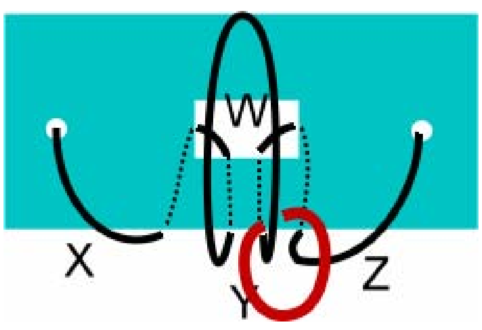
圖三十三 將圓環從 X 區移到 Z 區



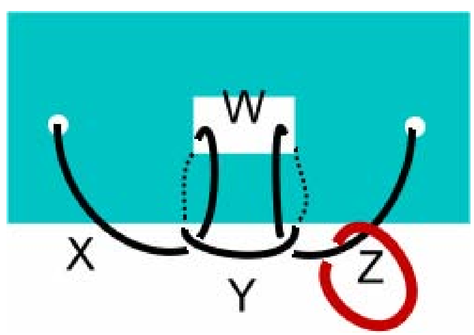
圖三十四 將圓環從 X 區移到 Y 區



圖三十五 將 Y 區的線穿過 W 洞，向前拉到底



圖三十六 將圓環穿入卡在 Y 區線上的兩個圈

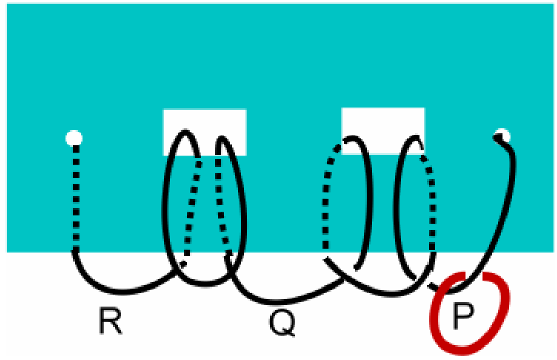


圖三十七 將圓環從 Y 區移到 Z 區

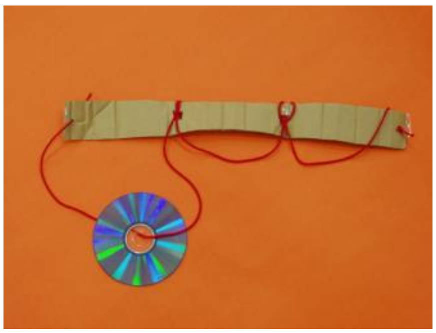
不論有幾個區域，都可將圓環從一端移到另一端。

以上做法中，因為圓環都只是在正面繞著，並沒有繞到背面，我們試著將圓環從正面繞到反面（如圖三十八）。

圓環可利用上述仙人穿梭的步驟從 P 區到 Q 區，此時圓環順著線在厚紙版的正面繞 ，接下來 Q 區到 R 區的線，纏繞方式與 P 區到 Q 區相反，此時，圓環是順著線在厚紙版的反面繞 ，依此纏繞方式，我們順利將圓環從厚紙板正面繞到後面。



圖三十八 將圓環從正面繞到背面



圖三十九仙人穿梭加強版

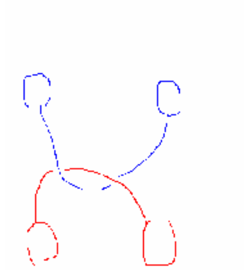
圖四十 繩子纏繞方式

另外，利用仙人穿梭的原理，我們想到可以將衣服或帽子的裝飾，在不破壞不剪斷縫線的情形下 ，可任意變換位置，改變造型，如圖四十一。

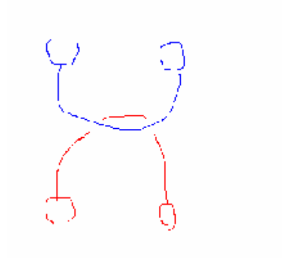
圖四十一 可改變裝飾位置的帽子

（二）雙人脫困遊戲（如圖三十二）

將兩條線的兩端各綁住一個圓環，套在兩人的雙手（如圖四十二）設法在不破壞線與圓環的情形下，使兩人手上纏住的線分開。



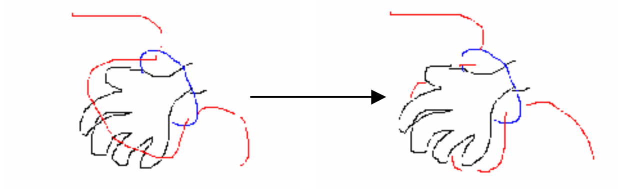
圖四十二　雙人未脫困的情形



圖四十三　雙人脫困的情形

雙人脫困方法如下：

（1）圖四十二右邊的紅線在藍線上，把右邊的紅線從藍色的圈圈套進，並由圓環後向前穿出，由上往下繞過手，如圖四十四，再把套進圈圈的線拉出來，就解開了。

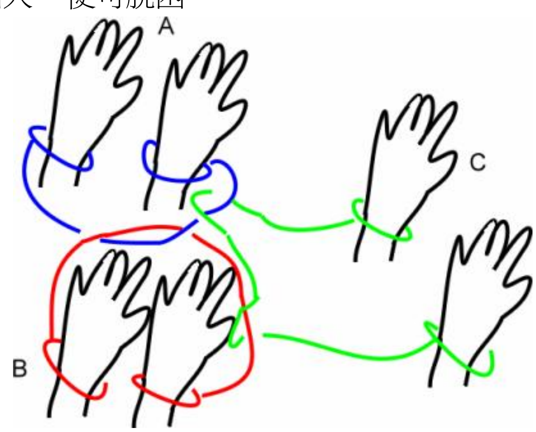


圖四十四 這時紅線在上繞過手，使紅線在下

（2）圖四十二左邊的紅線在藍線下，把左邊的紅線從藍色的圈圈套進，並由圓環後向前穿出，由下往上繞過手，再把套進圈圈的線拉出來，就解開了。

結論：1.雙人脫困遊戲和活動一解開兩條線打結的方法一樣，都是以一個彎曲的方式穿套，拉任何一端都可以解開，又如仙人穿梭的方法，雖然無法讓圓環通過孔洞，可是卻可將線穿過，使圓環繞到別區。

2.三人脫困同活動二－將紙帶翻轉 180 度做五分之一分割會形成三個圈的纏繞方式(如圖四十五），即 A 套 B 和 C、B 套 C 和 A，C 套 A 和 B。若有一百個人綁在一起，就是把繩子套過另外九十九個人，便可脫困。



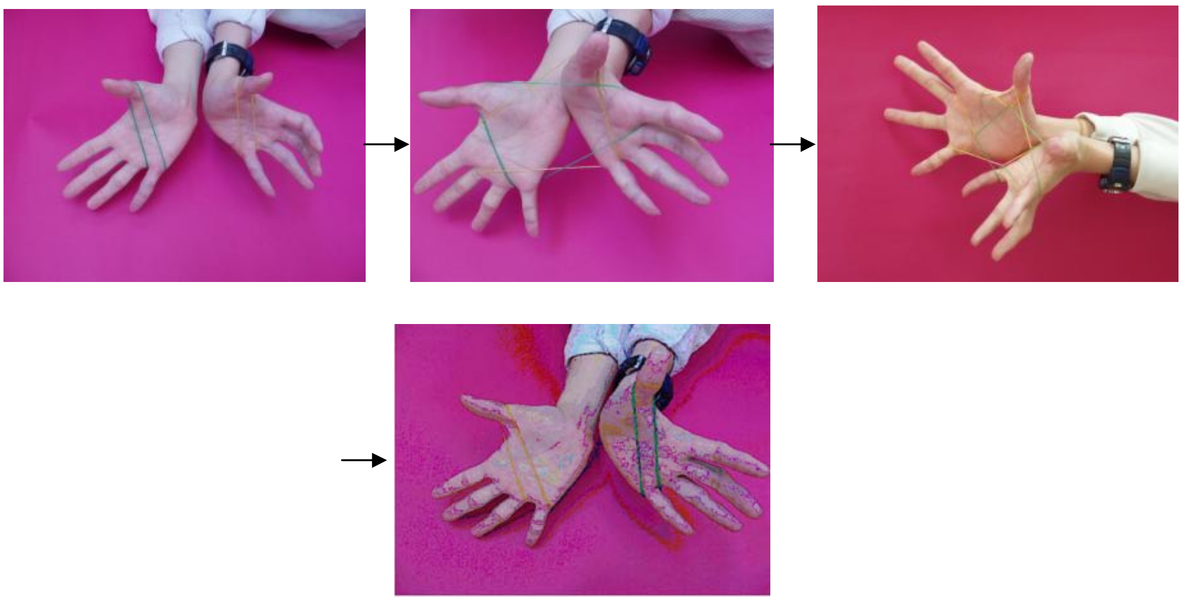
圖四十五 三個人的纏繞情形

3.利用雙人脫困的原理，我們想到可以將繩子套在兩節車廂之間，使車廂雖然套得很緊，但解開時只要將鐵鍊套入洞內，就可以輕易將兩節車廂分開。

（三）橡皮筋魔術

網路上有一些很有趣的橡皮筋魔術，也是利用本研究所討論的拓樸原理，幾番研究與改良，我們用自己的方式將部份魔術呈現並創作新的橡皮筋魔術。

魔術一、移形幻影：在不將橡皮筋從手指中拿起的狀態下，交換兩手的橡皮筋



圖四十六 移形幻影魔術步驟

作法（如圖四十六）:

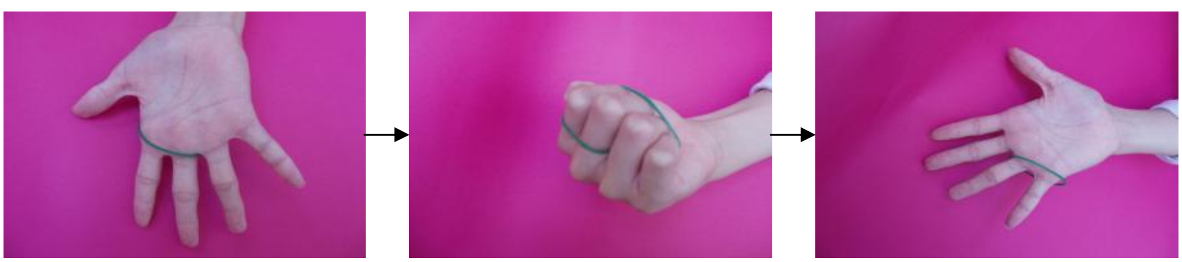
1 將紅色和藍色的橡皮筋分別套在兩手的拇指和小指上

2 其中一手的中指將另一手套住的橡皮筋下方那條繩子拉出來，另一手照做，形成六角星的形狀

3 將兩手的拇指和小指向六角星的中心伸進再翻出

4 放掉中指套住的橡皮筋

魔術二、瞬間移動：將原來套在食指和中指的橡皮筋套到無名指和小指



圖四十七 瞬間移動魔術步驟

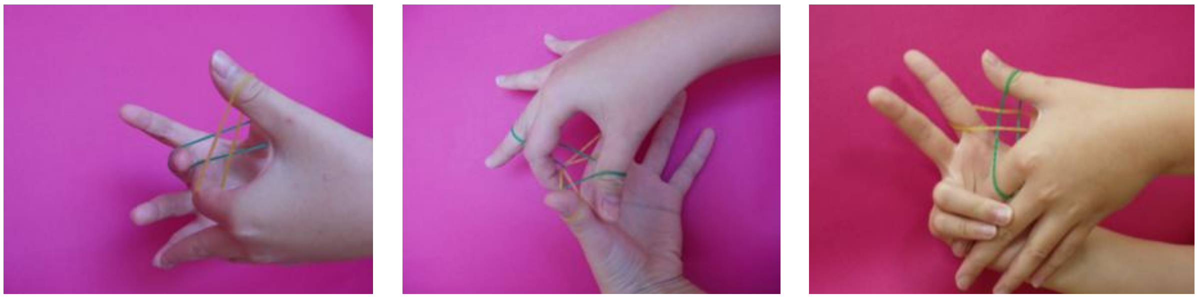
作法（如圖四十七）：

1 將橡皮筋套在右手的食指和中指上

2 將橡皮筋往左拉，讓食指、中指、無名指和小指前端一起套進橡皮筋形成的大洞裡。

3 張開手，橡皮筋就變成套在無名指和小指了。

魔術三、乾坤大挪移 1：將兩手的橡皮筋在不放開手的情況下交扣



圖四十八 乾坤大挪移 1 步驟

作法（如圖四十八）

1 將兩條橡皮筋各套在兩手的拇指和中指上。

2 把綠色橡皮筋放到黃色橡皮筋和勾著黃色橡皮筋的手之間

3.勾著綠色橡皮筋的的食指放到黃色橡皮筋和勾著黃色橡皮筋的手之間勾起綠色橡皮筋。

魔術四、乾坤大挪移 2：將交扣的橡皮筋在不放手的情況下分離

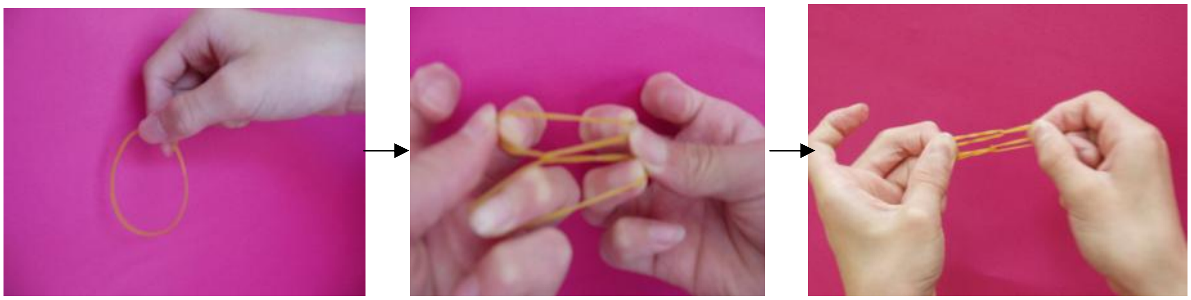
圖四十九 乾坤大挪移 2 步驟

作法（如圖四十九）：

1 把套在食指上的橡皮筋套在中指

2.食指套進拇指套住的洞裡

魔術五、是一還是二：讓一條橡皮筋看起來就像有兩條橡皮筋纏在一起



圖五十 是一還是二步驟

作法（如圖五十）：

1 將一條橡皮筋彎成八字型

2 將在上面的線往下折，疊在下面的線往下折，

3 橡皮筋會對折成另一個小圓

4 在圓的另一端兩邊的線交叉成十字

5 將步驟 2 的方法再做一次

以上的橡皮筋魔術，不管是用一條或兩條橡皮筋，無論橡皮筋如何纏繞，終究還是會回到原貌。

陸、研究結果與結論

歸納活動一至活動四，得到以下結論

1. 當線的一端是彎成一個彎曲時，兩端在圈圈的同一邊，拉此端即可解開繩結。
2. 翻轉度數和＝未分割前的翻轉度數×n，n 是分割數。
3. 作 $\frac{1}{n}$ 分割，紙帶的寬度是 $\frac{W}{n}$ 。
4. 180° 的莫比帶進行 $\frac{1}{n}$ 分割時，只需剪 $\frac{n}{2}$ 圈。且分割後只會產生 180°、360°的紙帶，因爲最外圈的兩個會結合。
5. 任兩個長度相同的紙帶分割後，若翻轉度數和相同，分割結果的翻轉度數和條數就會相同，但長度和寬度不相同。前提是這兩條紙帶翻轉結果的度數一定要有相同的時候。
6. 紙帶是莫比帶時，作 $\frac{1}{n}$ 分割，當 n 是偶數，就會產生 $\frac{n}{2}$ 條，翻轉度數、長度爲原來 2 倍的紙帶；n 是奇數時，就會產生一條翻轉度數、長度和原來相同長度的紙帶及 $\frac{n-1}{2}$ 條翻轉度數、長度爲原來 2 倍的紙帶
7. 紙帶是非莫比帶時，作 $\frac{1}{n}$ 分割，就會產生 n 條翻轉度數和原來相同的紙帶、長度爲 L 的紙帶。
8. 橡皮筋衍伸出的圖形中，路徑和路經交接的點一定是偶點。可一筆畫畫完，且起點和終點是同一個點，符合歐拉圖形。
9. 橡皮筋衍伸出的圖形，不管怎麼拉怎麼繞，都還是一個圈圈，符合本研究探討的拓樸性質。
10. 用紙帶摺成的星星或雙星具有以下特性

（1）可用一條紙帶摺成。拉其中一角可使圖形拆開。

（2）拆開後恰巧是翻轉過的紙帶，且此紙帶與莫比帶同構，可一筆畫畫完兩面。

11. 我們找出仙人穿梭、雙人脫困與部分橡皮筋魔術的原理，並自創前後穿梭、三人以上脫困與其他橡皮筋魔術。
12. 利用本研究的討論結果，我們做了以下應用

（1）利用莫比帶可一筆走完兩面的原理，做成載重物的滾輪。

（2）利用仙人穿梭的原理，將衣服或帽子的裝飾，在不破壞不剪斷縫線的情形下，任意變換位置，改變造型。

（3）利用雙人脫困的原理，可將繩子套在兩節車廂之間，使車廂雖然套得很緊，但解開時只要將鐵鍊套入洞內，就可輕易將兩節車廂分開。

（4）利用一筆畫畫完的原理，可規劃宅急便司機開車的路線，不必重複路徑，就能有效率地將貨物送完。

柒、研究發展與建議

這次的研究，我們發現生活中不起眼的繩子、紙帶與橡皮筋，竟隱含了數學的拓樸原理，且從一個簡單的拓樸性質-物體或圖形在不割裂、破壞孔洞下，可任意伸縮及變形，就可衍伸出許多神奇有趣的遊戲，我們相信這些簡單的原理，不只可以套用在遊戲上，今後一定也能應用在生活上，爲生活帶來更多便利。

捌、參考資料

參考書籍

1.康軒版 國小數學第十一冊第八單元圓面積。

2.康軒版 國小數學第十二冊第五單元柱體的體積。

3.伊凡.莫斯科維奇，蔣勵、康俊譯（2007，七月）。IQ 向上！ 1000 個大腦思考遊戲（下）。城邦文化事業股份有限公司。

網路資源：

1.http://www.chiuchang.org.tw/download/docu/club/topology.pdf 生生不息的莫比烏斯帶-拓樸學奇趣

2.http://city.udn.com/v1/blog/article/article.jsp?uid=ijtsai&f_ART_ID=379458 橡皮筋魔術

3.http://tw.myblog.yahoo.com/in-magiclife/article?mid=177 魔術教學

【評語】080403

1. 本作品能將遊戲情境細步分析，探討數學特性與原則。
2. 具多元巧思，能將研究結果推廣應用於某些生活情境中。
3. 變化多，極富遊戲趣味性。