中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080402

費先生與巴先生聯手出擊～數列間的關係及延伸

學校名稱：台中市北屯區東光國民小學

作者：	指導老師：
小六 李思穎 小六 張詠筑 小六 廖期煊 小六 陳珮文 小五 李念欣 小五 陳學威	方玉玲 戴榮輝

關鍵詞：　因數與倍數、費氏數列、巴斯卡三角形

費先生與巴先生聯手出擊~數列間的關係與延伸

壹、 摘要：

本研究主要從拼滿 8×8「方格盤」的活動中，發現 m × n 小長方形的邊長為 T × S 大長方形的邊長的因數時，即可利用數個 m × n 小長方形拼滿 T × S 大長方形。

利用 m × n 小長方形拼滿 T × S 大長方形的特性，探討利用 2×1 的長方形來拼貼 2×N「方格盤」拼貼方式的總數與個別數問題。發現拼滿 2×N「方格盤」的總數符合**費氏數列的規律**（$A_N=A_{N-1}+A_{N-2}$）；拼滿 2×N「方格盤」的個別數，可用公式（個別數＝ $\frac{(A+B)!}{(A!)\times(B!)}$）計算出來，其個別數也符合巴斯卡三角形特性。並發現 2×N「方格盤」的個別數與總數之間，是**巴斯卡三角形**與**費氏數列**關係的實證例子。

進而探討拼滿 3×N「方格盤」的總數，符合**三 N 數列的規律**（$A_N=4A_{N-1}+A_{N-2}$）。且 3×N「方格盤」個別數是 2×N「方格盤」個別數的延伸，**兩者具有相互的關係存在**。

貳、研究動機：

學校附近最近正在興建一棟大樓，發現到大樓外觀的磁磚很有規律的排列，但仔細一看卻是用長方形的磁磚拼貼而成，進而觀察學校內部及附近社區大樓時，也發現到大多數的大樓外觀及地板也都是用長方形拼貼而成，而且有時會有直橫交錯的狀況出現。突然間有個想法出現，長方形能拼滿正方形或長方形嗎？如果可以的話，有多少種不同方式來拼滿呢？

為解決這些問題，仔細回想上數學課時，老師曾在「因倍數」的單元中，教導如何算出某一個長方形最大可以用多少邊長的正方形拼滿。課堂上所教導的知識就是找出長與寬的最大公因數即可。

另外，在有關「規律」的單元裡，課本常常要我們從一列的數字中，發現它們的規律或邏輯性，較有印象的有(1)費氏數列，它的規律很特別，較不容易發現；(2)巴斯卡三角形，因為它是一個可以無限延伸的三角形，且延伸下去的形態，具有強烈的規律性。並從三角形中，可以發現更多有規律的數列。(3)三角形數，它的規律與三角形大小有關，而且可以透過公式快速計算出來（三角形數=$\frac{n\times(n+1)}{2}$， n 為第幾個三角形數）。

但這些知識並無法解決長方形能否拼滿正方形（或長方形）及有多少種不同方式來拼滿的問題。所以，當老師請我們利用 2×1 的長方形來拼滿 8×8「方格盤」後，雖然大家拼出來的方式不同，但發現原來正方形也可由長方形來拼滿，進而探討，當 m × n 小長方形與 T × S 大長方形有什麼關係時，才可以拼滿。並找出在 2×N 與 3×N 的長方形時，利用 2×1 的長方形可以有多少種不同方式來拼滿。

參、研究目的：

一、找出 m × n 的小長方形能拼完一個 T × S 的大長方形的特性。

二、找出拼滿 2 × N「方格盤」總數的特性。

三、找出拼滿 2 × N「方格盤」個別數的特性。

四、找出拼滿 3 × N「方格盤」總數的特性。

五、找出拼滿 3 × N「方格盤」個別數的特性。

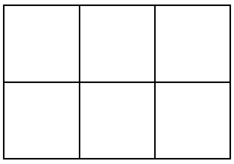
肆、研究設備及器材：

紙、鉛筆、螢光筆。

伍、 名詞定義；

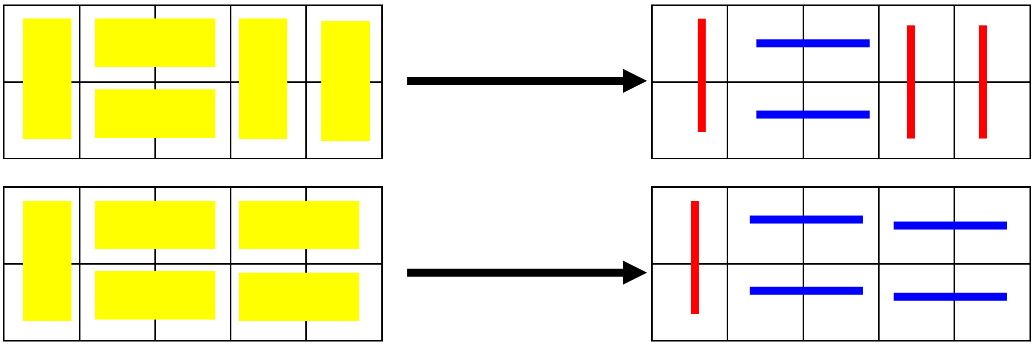
一、T × S 「方格盤」的意義：所謂 T × S 「方格盤」，即代表一個 T × S 大長方形。每個方格盤均以前數(T)代表寬，後數(S)代表長。例如：在 2×3 的方格盤下，能有多少種不同的拼貼方式。即代表所需拼貼完的方格盤，是一個 2×3 的長方形，其是由寬為 2，長為 3 的格子所組成，每個細格均為一平方單位。

範例：



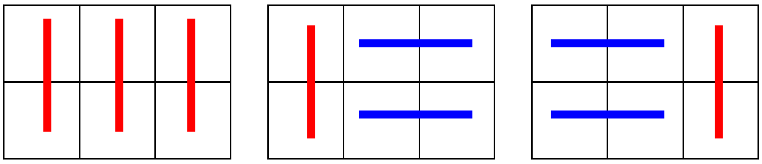
二、.紅棒與藍棒的定義：因爲研究中，均以 2x1 的小長方形來拼貼不同大小的長方形。爲區分拼貼時，直貼與橫貼的不同，將直貼的方法以紅色的直棒來代表，橫貼的方法以藍色的橫棒來代表。

範例：



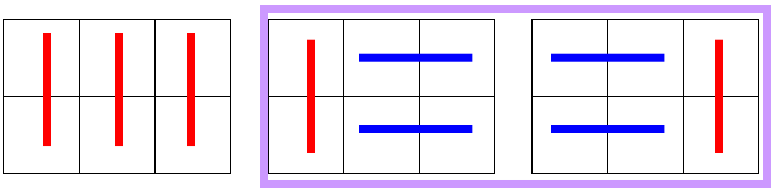
三、總數的定義：表示在某一種方格盤下，利用數個 2x1 的小長方形來拼貼時，能有多少種不一樣的拼貼方法。例如：在 2x3 的方格盤下，利用 3 個 2x1 的小長方形來拼貼時，總共可以有 3 種不同樣式的拼貼方法。所以在 2x3 方格盤中，其拼貼的總數爲 3。

範例：



四、個別數的定義：表示在某一種方格盤下，利用某特定數量的 2x1 的小長方形來直貼時，能有多少種不一樣的拼貼方法。亦即利用紅棒的枝數來加以分類。例如：在 2x3 的方格盤下，利用 3 個 2x1 的小長方形來拼貼時，總共可以有 3 種不同樣式的拼貼方法。再以紅色棒子的枝數來分類，可以分成 3 枝紅棒及 1 枝紅棒 2 種。所以在 2x3 方格盤中，3 枝紅棒的個別數爲 1；1 枝紅棒的個別數爲 2。

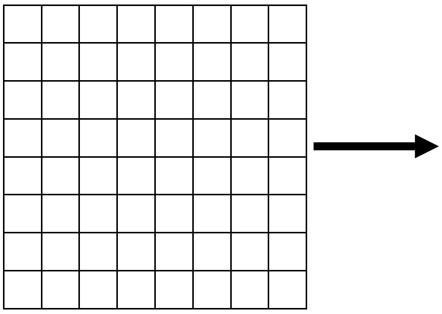
範例：



陸、研究過程、結果及討論：

一、找出 m × n 小長方形能拼完一個 T × S 的大長方形的特性。

（一）找出拼滿 8×8「方格盤」的正方形有哪幾種？



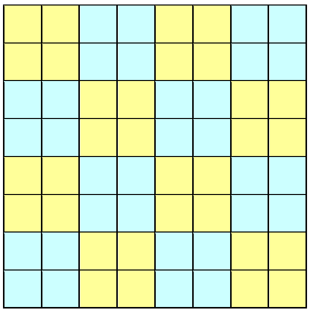
8×8「方格盤」

1. 8×8「方格盤」本身即為 8×8 的正方形，所以能拼滿的最大正方形為 8×8。

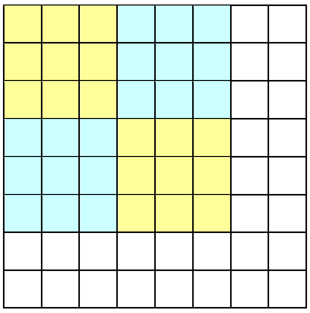
2.利用方格盤上，所畫分的正方形可知，能拼滿的最小正方形為 1×1。

3.猜想：在 1×1 與 8×8 之間的正方形有 2×2、3×3、4×4、5×5、6×6、7×7，這六種正方形是否都能拼滿 8×8 的「方格盤」呢？

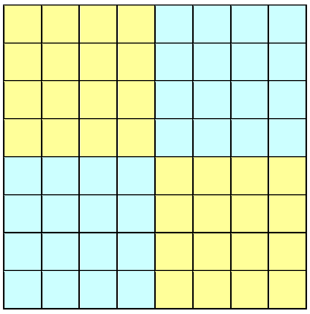
(1) 使用 2x2 正方形來拼，沒有留白的部份，故***能夠***拼滿 8×8 方格盤。



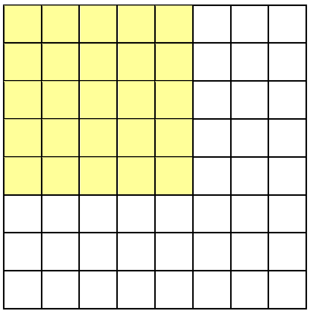
(2) 使用 3x3 正方形來拼，仍有留白的部份，故***不能夠***拼滿 8×8 方格盤。



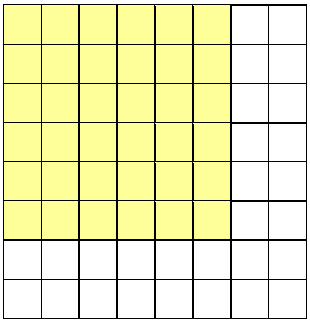
(3) 使用 4×4 正方形來拼，沒有留白的部份，故*能夠*拼滿 8×8 方格盤。



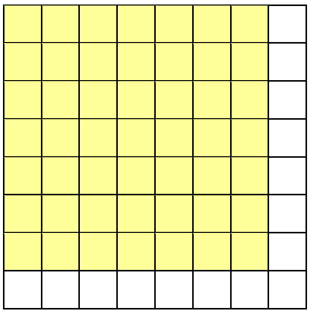
(4) 使用 5×5 正方形來拼，仍有留白的部份，故*不能夠*拼滿 8×8 方格盤。



(5) 使用 6×6 正方形來拼，仍有留白的部份，故*不能夠*拼滿 8×8 方格盤。



(6) 使用 7×7 正方形來拼，仍有留白的部份，故*不能夠*拼滿 8×8 方格盤。



4.結論：*能拼滿 8x8 方格盤的正方形有 1x1、2x2、4x4、8x8 四種。*

5.研究發現：*只要小正方形邊長為大正方形邊長的因數時，即可用小正方形拼滿大正方形。*

（二）找出可以拼滿 16x12 長方形的長方形有哪幾種？

1. 16 的因數有 1、2、4、8、16；12 的因數有 1、2、3、4、6、12。

2.猜想：由 2 組因數所成的長方形可以拼滿大長方形。而利用 2 組因數可以找出 30 種的組合。且由課堂所學可知，長方形邊長的公因數所形成的正方形必可拼滿，所以 1x1、2x2、4x4 必可拼滿大長方形。

(1)1x1、1x2、1x3、1x4、1x6、1x12 六種。

(2)2x1、2x2、2x3、2x4、2x6、2x12 六種。

(3)4x1、4x2、4x3、4x4、4x6、4x12 六種。

(4)8x1、8x2、8x3、8x4、8x6、8x12 六種。

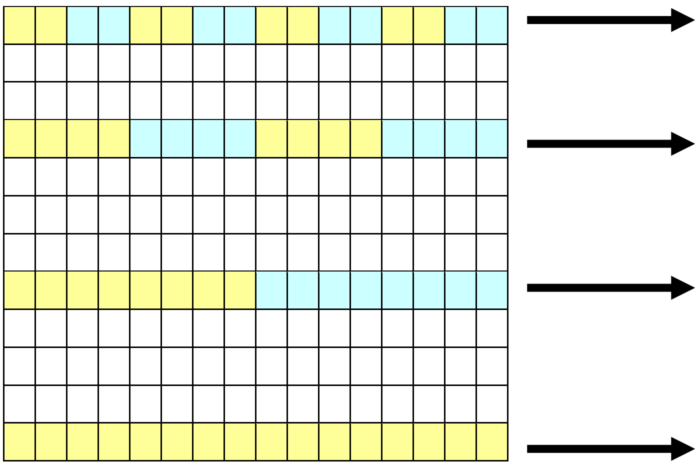
(5)16x1、16x2、16x3、16x4、16x6、16x12 六種。

(6)因爲 1x1、2x2、4x4 必可拼滿，經整理後，所需探討的只有 1x2、1x3、1x4、1x6、1x12、2x3、2x4、2x6、2x12、4x3、4x6、4x12、8x1、8x2、8x3、8x4、8x6、8x12、16x1、16x2、16x3、16x4、16x6、16x12。

(7)再將邊長較小的數字置前方(12x16 爲本身的長方形必可拼滿，不討論)，可分成六大組，整理如下：1x2、1x3、1x4、1x6、1x8、1x12、1x16；2x3、2x4、2x6、2x8、2x12、2x16；3x8、3x16；4x3、4x6、4x8、4x12、4x16；6x8、6x16；8x12。

3.將分組資料個別組討論。

(1)探討 1x2、1x3、1x4、1x6、1x8、1x12、1x16，這七個長方形是否能拼滿。



這一條能用 1x2 的長方形拼滿，只要複製 12 次就拼滿 16x12 的長方形

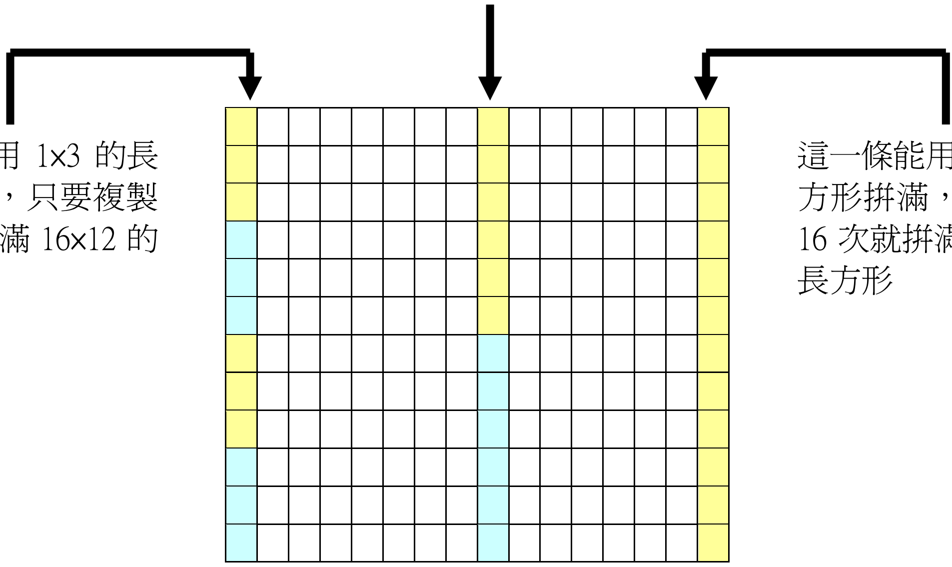
這一條能用 1x4 的長方形拼滿，只要複製 12 次就拼滿 16x12 的長方形

這一條能用 1x8 的長方形拼滿，只要複製 12 次就拼滿 16x12 的長方形

這一條能用 1x16 的長方形拼滿，只要複製 12 次就拼滿 16x12 的長方形

這一條能用 1x6 的長方形拼滿，只要複製 16 次就拼滿 16x12 的長方形

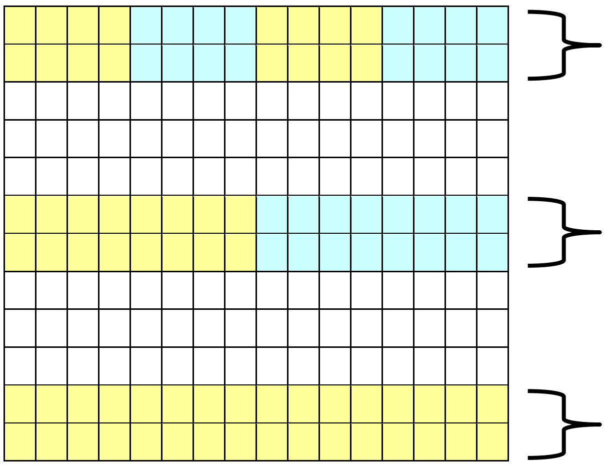
這一條能用 1x3 的長方形拼滿，只要複製 16 次就拼滿 16x12 的長方形



這一條能用 1x12 的長方形拼滿，只要複製 16 次就拼滿 16x12 的長方形

結論：***<u>當小長方形某一邊邊長爲 1 時，另一邊的邊長爲大長方形其中一邊邊長的因數即可拼滿</u>***。

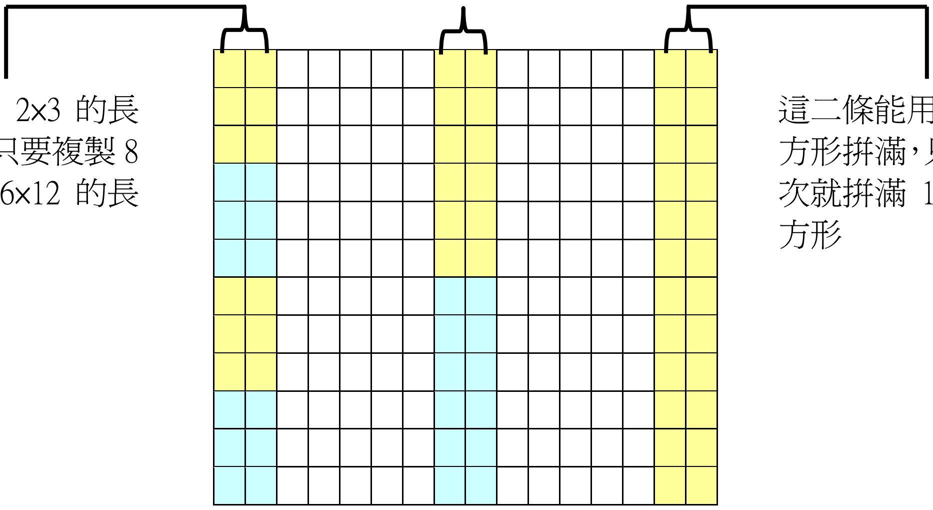
(2)探討 2x3、2x4、2x6、2x8、2x12、2x16，這六個長方形是否能拼滿。因爲 2 爲 16 與 12 的公因數，所以無論 2 擺在何處皆可以拼完一邊的邊長。所以先考慮另一邊邊長可以拼滿的方式。



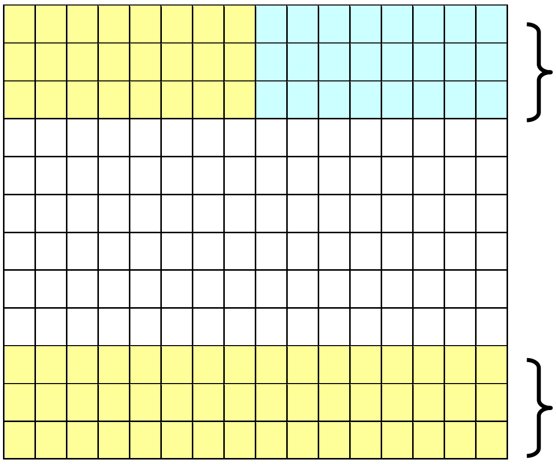
這二條能用 2x4 的長方形拼滿，只要複製 6 次就拼滿 16x12 的長方形

這二條能用 2x8 的長方形拼滿，只要複製 6 次就拼滿 16x12 的長方形

這二條能用 2x16 的長方形拼滿，只要複製 6 次就拼滿 16x12 的長方形

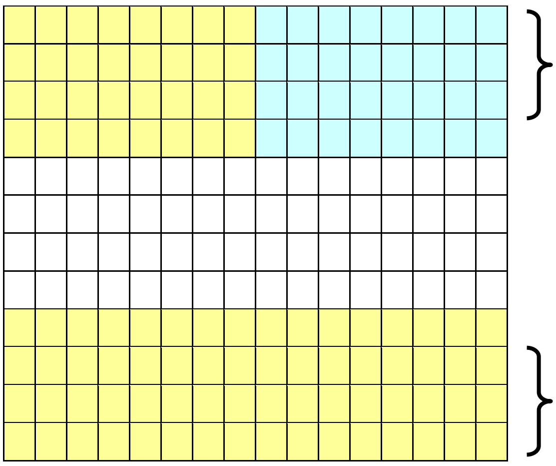


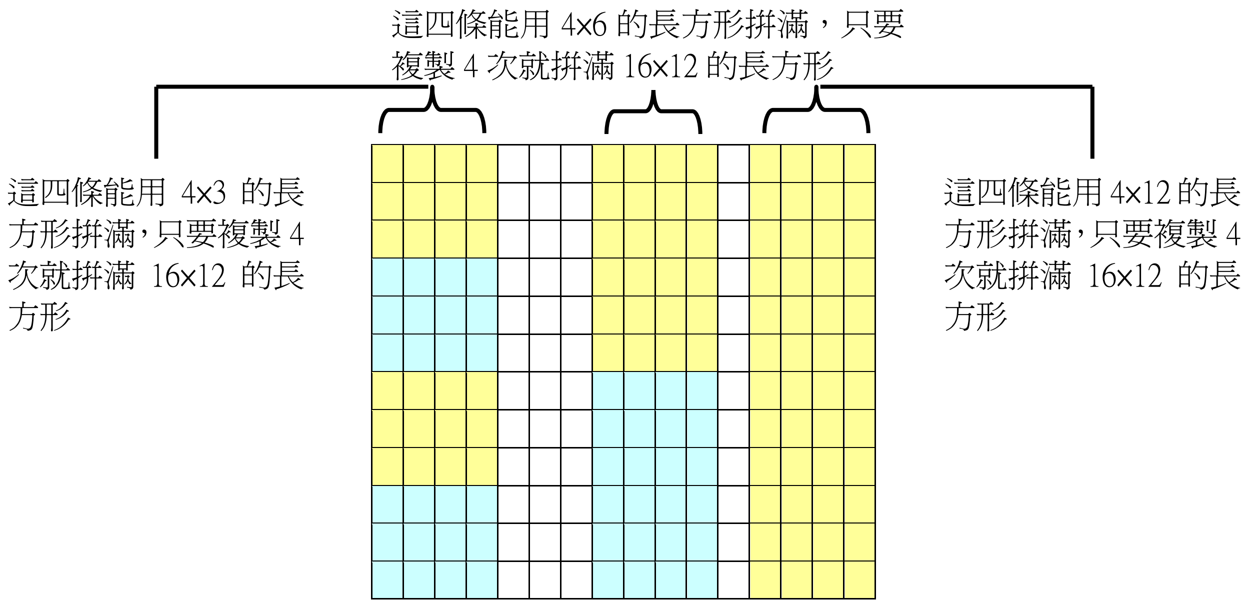
(3)探討 3×8、3×16，這二個長方形是否能拼滿。因爲 3 爲 12 的因數，8 與 16 爲 16 的因數，所以 3 必需考慮放在 12 的邊長上，8 與 16 必需考慮放在 16 的邊長上。



結論:：***<u>當小長方形一邊邊長只爲大長方形一邊邊長的因數時，小長方形另一邊的邊長必需爲大長方形另一邊邊長的因數，才可拼滿</u>***。

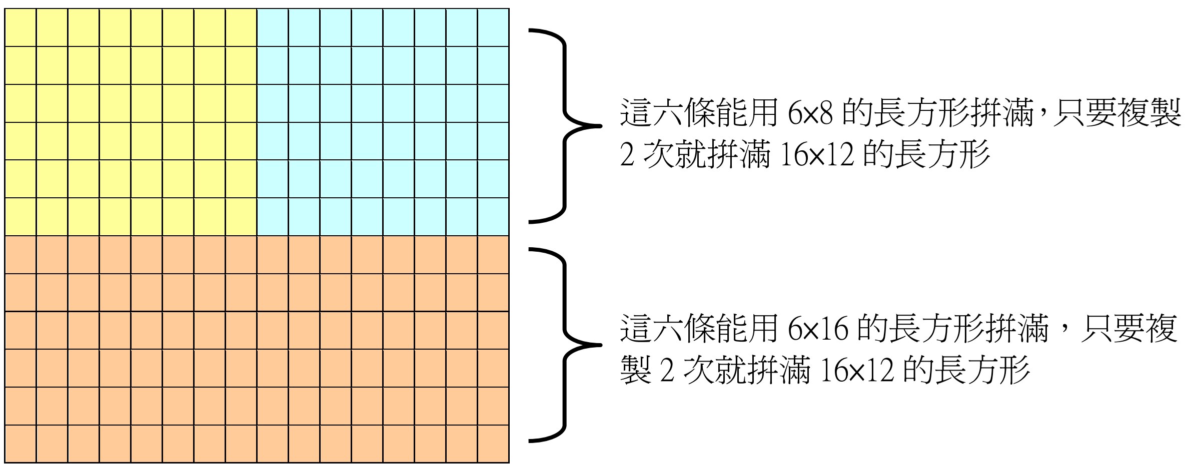
(4)探討 4×3、4×6、4×8、4×12、4×16，這五個長方形是否能拼滿。因爲 4 爲 16 與 12 的公因數，所以無論 4 擺在何處皆可以拼完一邊的邊長。所以先考慮另一邊邊長可以拼滿的方式。





結論:：***當小長方形一邊邊長爲大長方形兩邊長的公因數時，小長方形另一邊的邊長爲大長方形其中一邊邊長的因數，即可拼滿。***

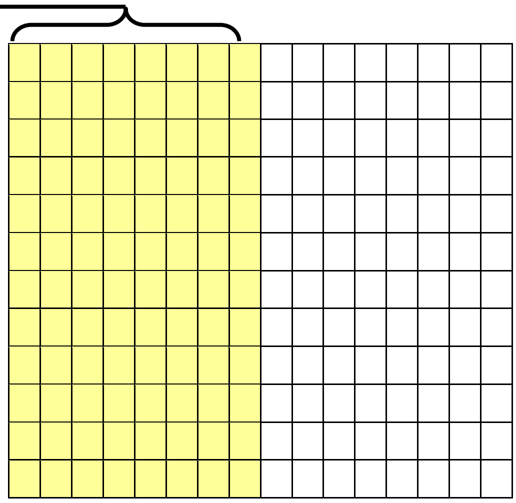
(5)探討 6×8、6×16，這二個長方形是否能拼滿。因爲 6 爲 12 的因數，8 與 16 爲 16 的因數，所以 6 必需考慮放在 12 的邊長上，8 與 16 必需考慮放在 16 的邊長上。



結論:：***當小長方形一邊邊長只爲大長方形一邊邊長的因數時，小長方形另一邊的邊長必需爲大長方形另一邊邊長的因數，才可拼滿***。

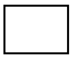
(6)探討 8×12，這一個長方形是否能拼滿。因爲 12 只爲 12 的因數，所以 12 必需考慮放在 12 的邊長上，8 必需考慮放在 16 的邊長上。

這八條能用 8×12 的長方形拼滿，只要複製 2 次就拼滿 16×12 的長方形



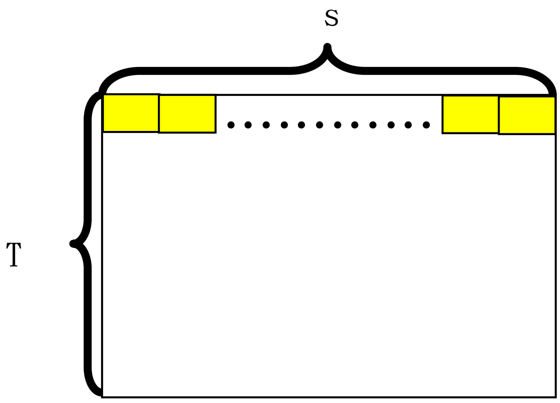
結論:：***當小長方形一邊邊長只爲大長方形一邊邊長的因數時，另一邊的邊長爲大長方形另一邊邊長的因數，即可拼滿***。

4. 研究發現：**當小長方形的邊長爲大長方形邊長的因數組成時，即可用數個小長方形拼滿。所以拼滿 16×12 的長方形(含正方形)共有 30 種。**

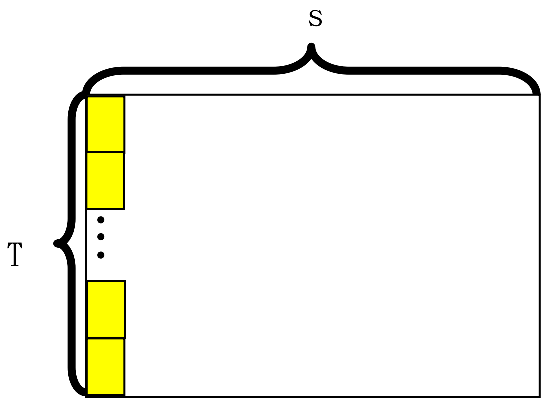
（三）探討 m × n 小長方形()能拼完一個 T × S（  ）大長方形的特性

1.如果m爲 T 與 S 的公因數，n 必需符合什麼條件才能拼滿。

因爲m爲 T 與 S 的公因數，所以先考慮 n 放的位置。



如果 n 放在邊長 S 時，如果要拼滿，n 必需爲 S 的因數

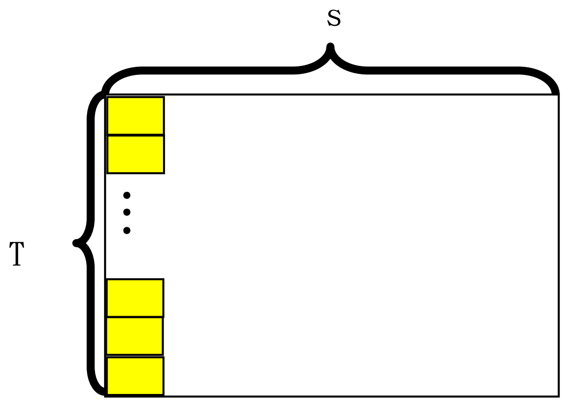


如果 n 放在邊長 T 時，如果要拼滿，n 必需爲 T 的因數

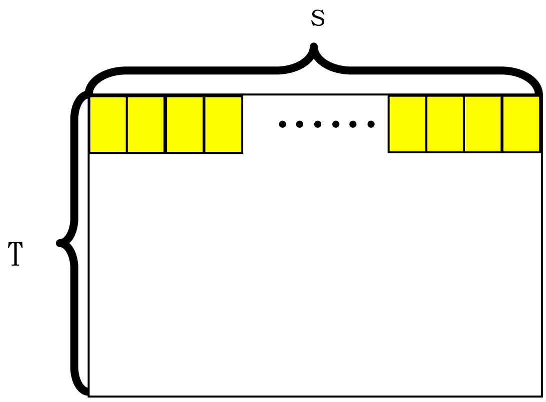
結論：***當m爲 T 與 S 的公因數時，n 必需爲 S 或 T 的因數。***

2.如果 n 爲 T 與 S 的公因數，m 必需符合什麼條件才能拼滿。

因爲 n 爲 T 與 S 的公因數，所以先考慮 m 放的位置。



如果m放在邊長T時，如果要拼滿，m必需爲T的因數

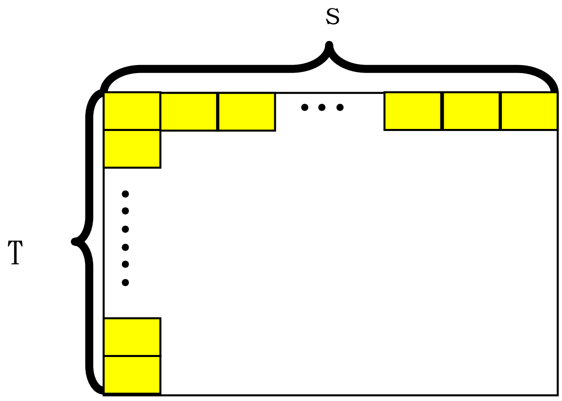


如果m放在邊長S時，如果要拼滿，m必需爲S的因數

結論：*當 n 爲 T 與 S 的公因數時，m 必需爲 S 或 T 的因數。*

3.如果 m 只爲 T 的因數，n 必需符合什麼條件才能拼滿。

因爲 m 只爲 T 的因數，所以 m 必需放在 T 的邊上， n 必需放在 S 的邊上。

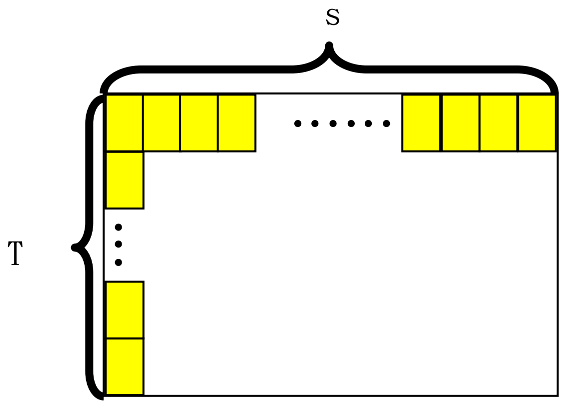


m必需放在邊長T上，如果要拼滿，
n 必需爲 S 的因數

結論：*當m只爲 T 的因數時，n 必需爲 S 的因數。*

4.如果 m 只爲 S 的因數，n 必需符合什麼條件才能拼滿。

因爲 m 只爲 S 的因數，所以 m 必需放在 S 的邊上， n 必需放在 T 的邊上。

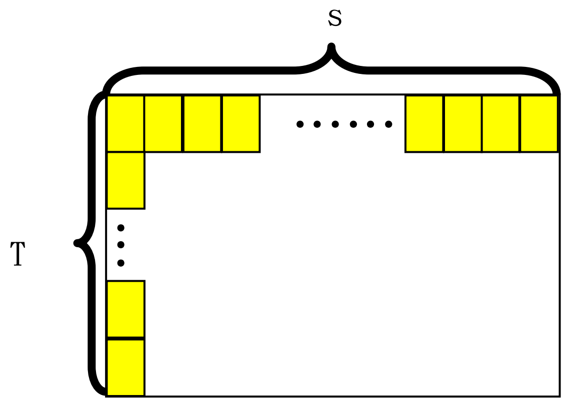


m必需放在邊長S上，如果要拼滿，
n 必需爲 T 的因數

結論：*當m只爲 S 的因數時，n 必需爲 T 的因數。*

5.如果 n 只爲 T 的因數，m 必需符合什麼條件才能拼滿。

因爲 n 只爲 T 的因數，所以 n 必需放在 T 的邊上， m 必需放在 S 的邊上。

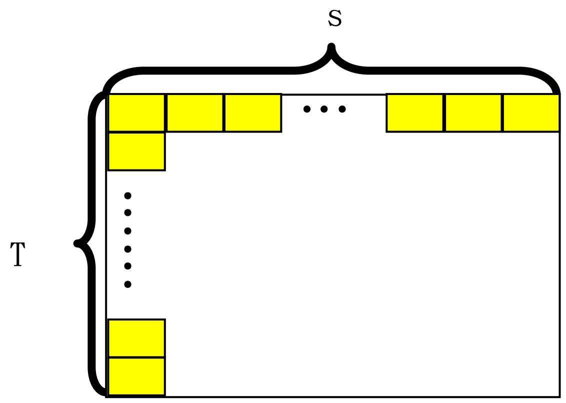


n 必需放在邊長 T 上，如果要拼滿，
m 必需爲 S 的因數

結論：***<u>當 n 只爲 T 的因數時，m 必需爲 S 的因數。</u>***

6.如果 n 只爲 S 的因數，m 必需符合什麼條件才能拼滿。

因爲 n 只爲 S 的因數，所以 n 必需放在 S 的邊上， m 必需放在 T 的邊上。



n 必需放在邊長 S 上，如果要拼滿，
m 必需爲 T 的因數

結論：***<u>當 n 只爲 S 的因數時，m 必需爲 T 的因數。</u>***

7. 研究發現：如果 m × n 的長方形能拼完一個 T × S 的長方形時，有以下幾點特性。

(1)當 m 、 n 爲 T 和 S 的公因數時，必可拼滿。

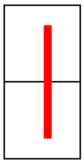
(2)當 m(或 n)爲 T 和 S 的公因數時， n (或m)必需爲 T 或 S 的因數。

(3)當 m 只爲 T （或 S ）的因數時， n 必需爲 S （或 T ）的因數。

二、找出拼滿 2xN「方格盤」個別數及總數的規律性（N＝1～10）。

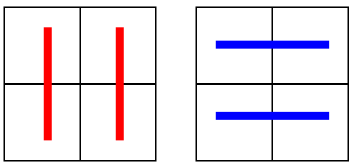
（一）先以土法煉鋼的方式畫出可能的圖形，而從整理每個人畫完之後的資料發現，在 2x1、2x2、2x3、2x4、2x5、2x6 的拼法上，除順序不盡相同之外，每個人的總數都是一致，並利用直棒的個數來加以分類，分別如下：

1.在 2x1 的方格盤下，僅有 1 種排列的方法。



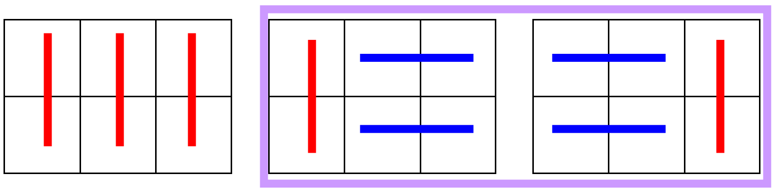
整理：1 直－1 種　　共 1 種

2.在 2x2 的方格盤下，有 2 種排列的方法。



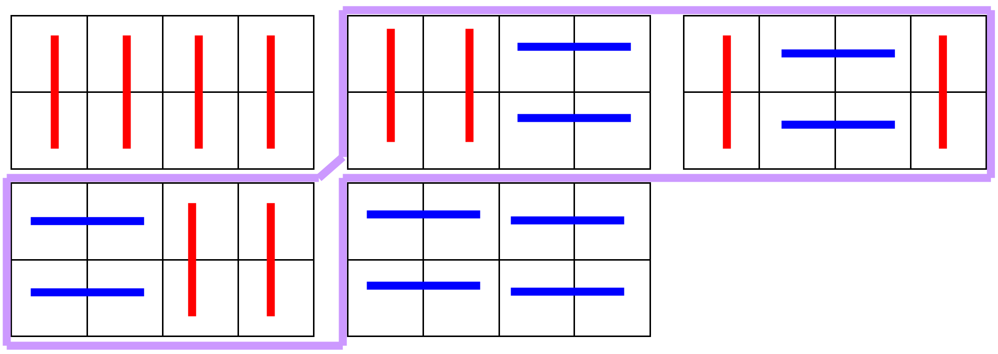
整理：2 直－1 種
0 直－1 種　　共 2 種

3.在 2x3 的方格盤下，有 3 種排列的方法。



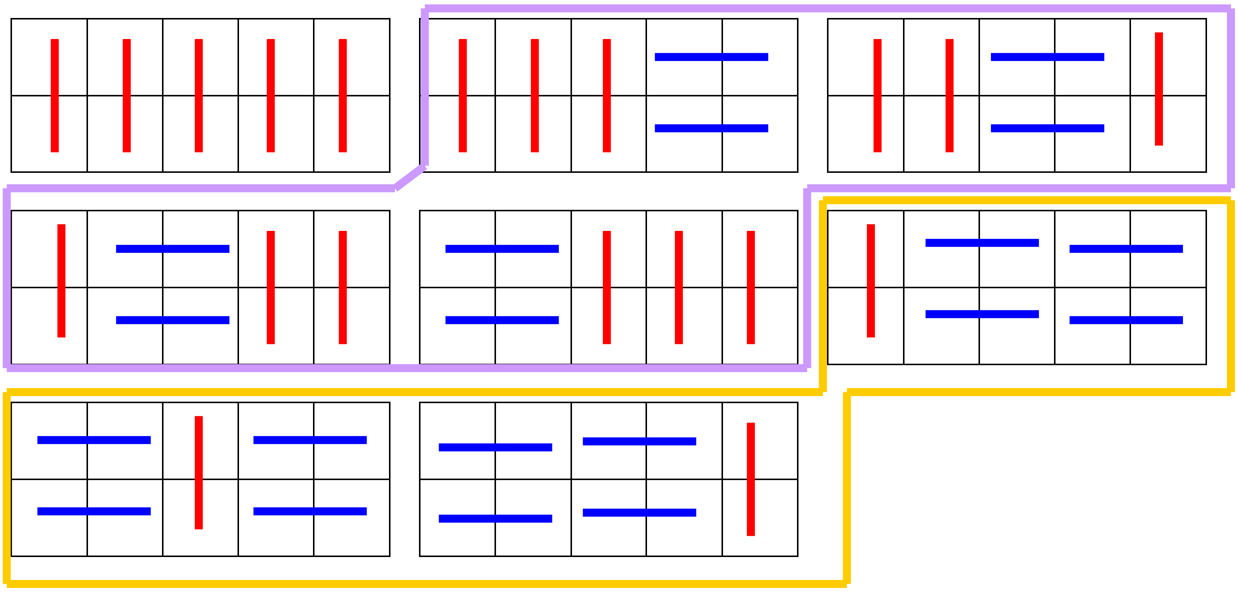
整理：3 直－1 種
1 直－2 種　　共 3 種

4.在 2x4 的方格盤下，有 5 種排列的方法。



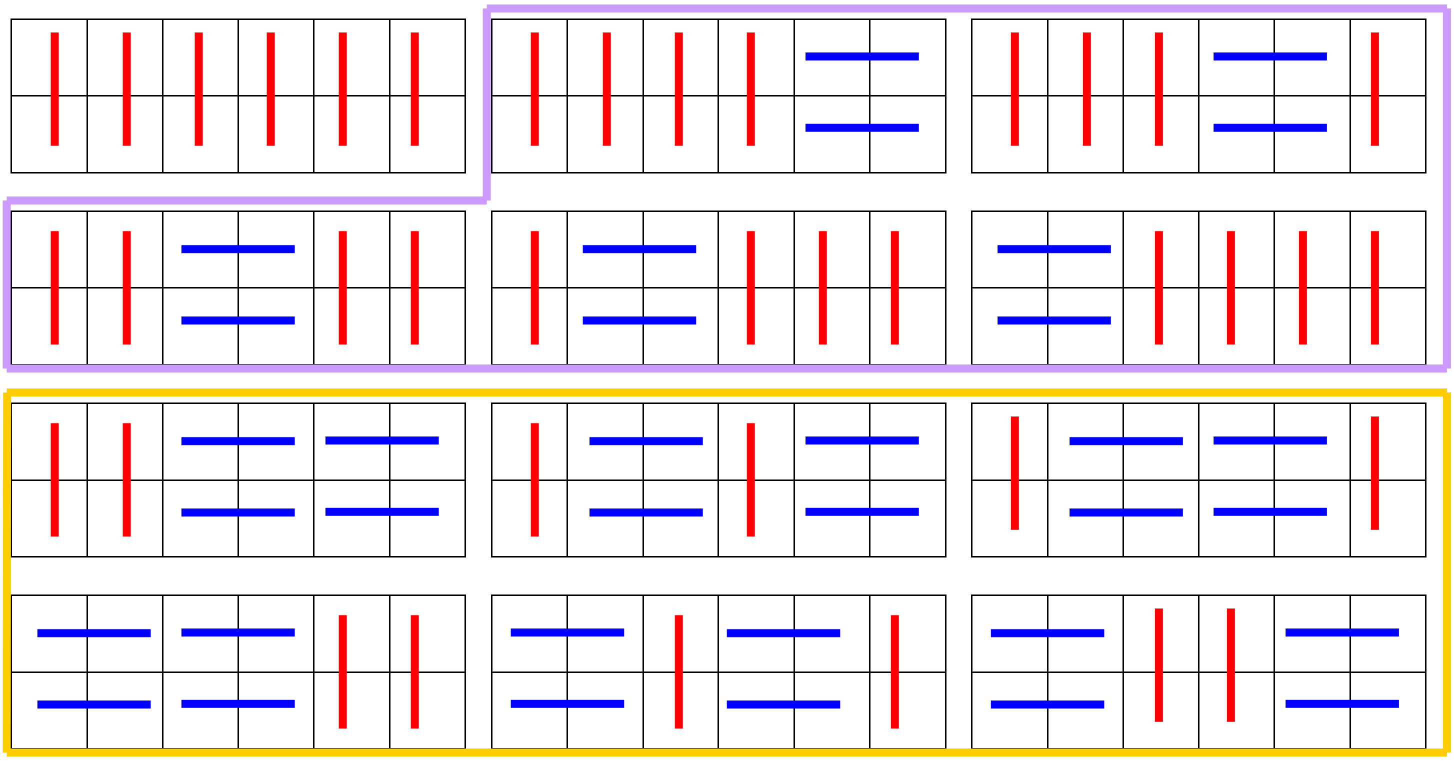
整理：4 直－1 種
2 直－3 種
0 直－1 種　　共 5 種

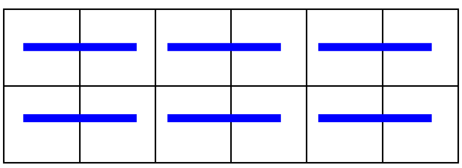
5.在 2x5 的方格盤下，有 8 種排列的方法。



整理：5 直－1 種
3 直－4 種
1 直－3 種　　共 8 種

6.在 2x6 的方格盤下，有 13 種排列的方法





整理：6 直－1 種
4 直－5 種
2 直－6 種
0 直－1 種　共 13 種

（二）整理上述資料後，繪製成下表，

1. 2x1 到 2x6 的總數依序爲：1、2、3、5、8、13。這些數字與課堂曾看過的費氏數列很像。

2. 每一列的總數都是每一列的個別數加總之和，而其個別數又與巴斯卡三角形內的數字相符合。

   (1)由 0 直出發，往下及斜下皆爲 1。

   (2)每一格數字皆爲上方及左上方的數字之和。

（三）推測在總數部份的紅色區塊符合費氏數列的規律；在個別數部份的紅色區塊符合上述 2 點規律。

	個別數											總數
	0 直	1 直	2 直	3 直	4 直	5 直	6 直	7 直	8 直	9 直	10 直	
2 × 1		1										1
2 × 2	1		1									2
2 × 3		2		1								3
2 × 4	1		3		1							5
2 × 5		3		4		1						8
2 × 6	1		6		5		1					13
2 × 7		4		10		6		1				21
2 × 8	1		10		15		7		1			34
2 × 9		5		20		21		8		1		55
2 ×10	1		15		35		28		9		1	89

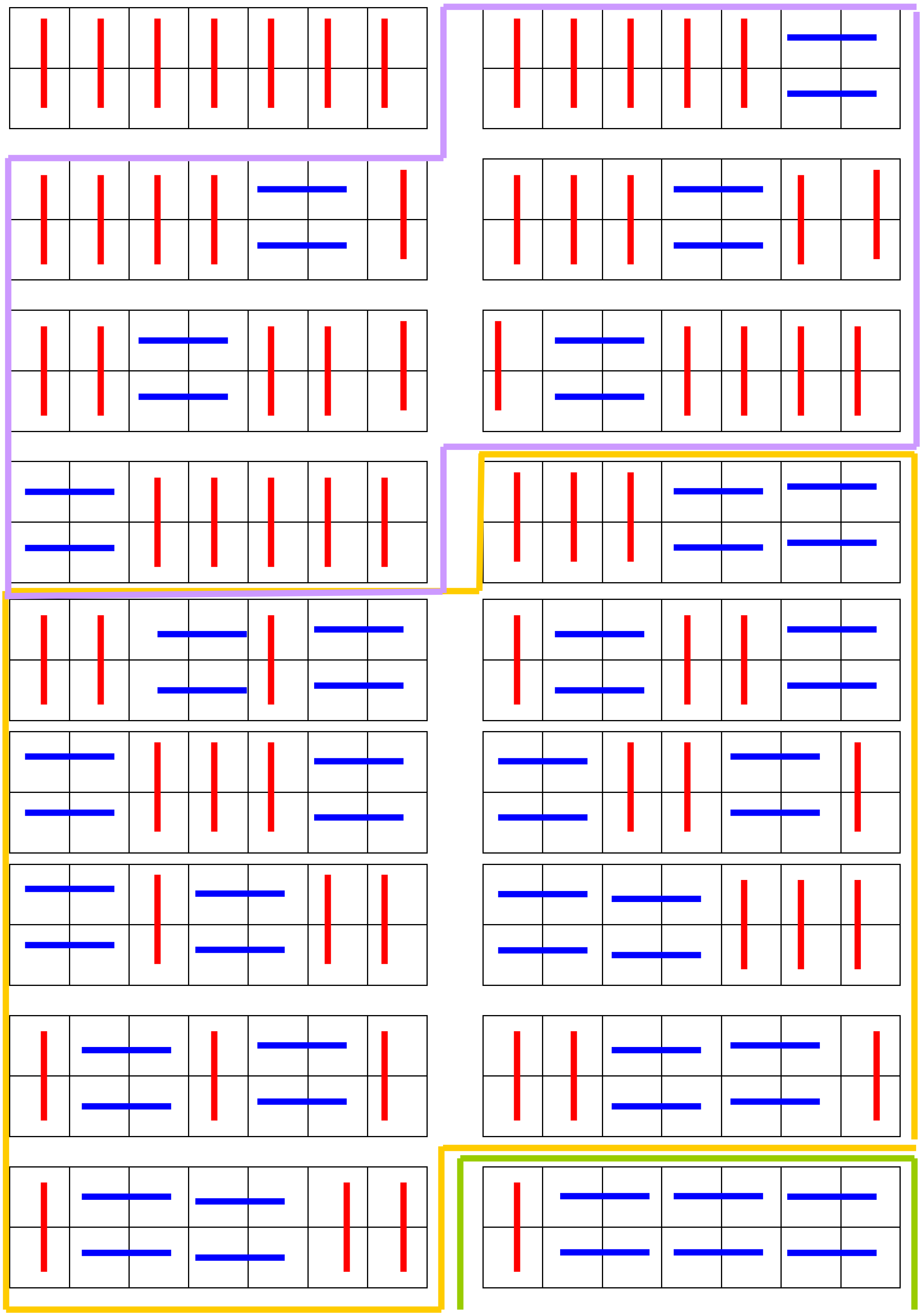
(黃色爲實際繪圖結果；紅色爲推測部份)

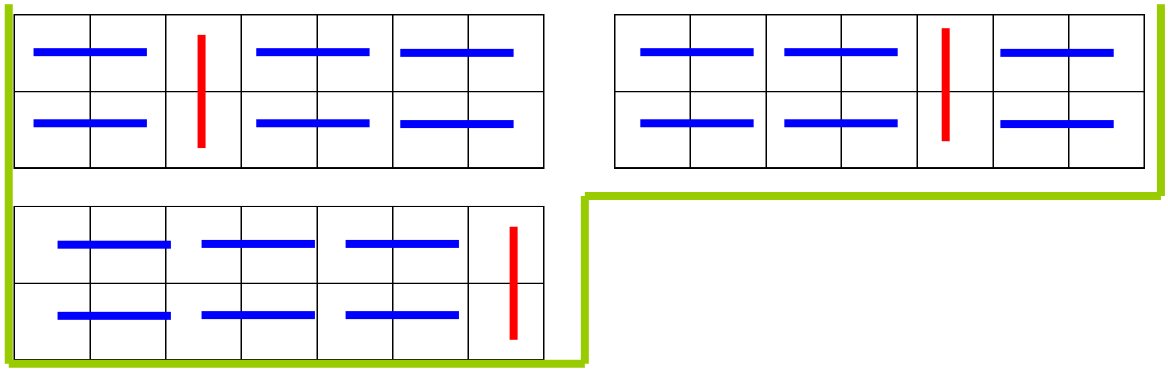
類似巴斯卡三角形

疑似費氏數列

（四）再整理各人資料，比對推測部份。

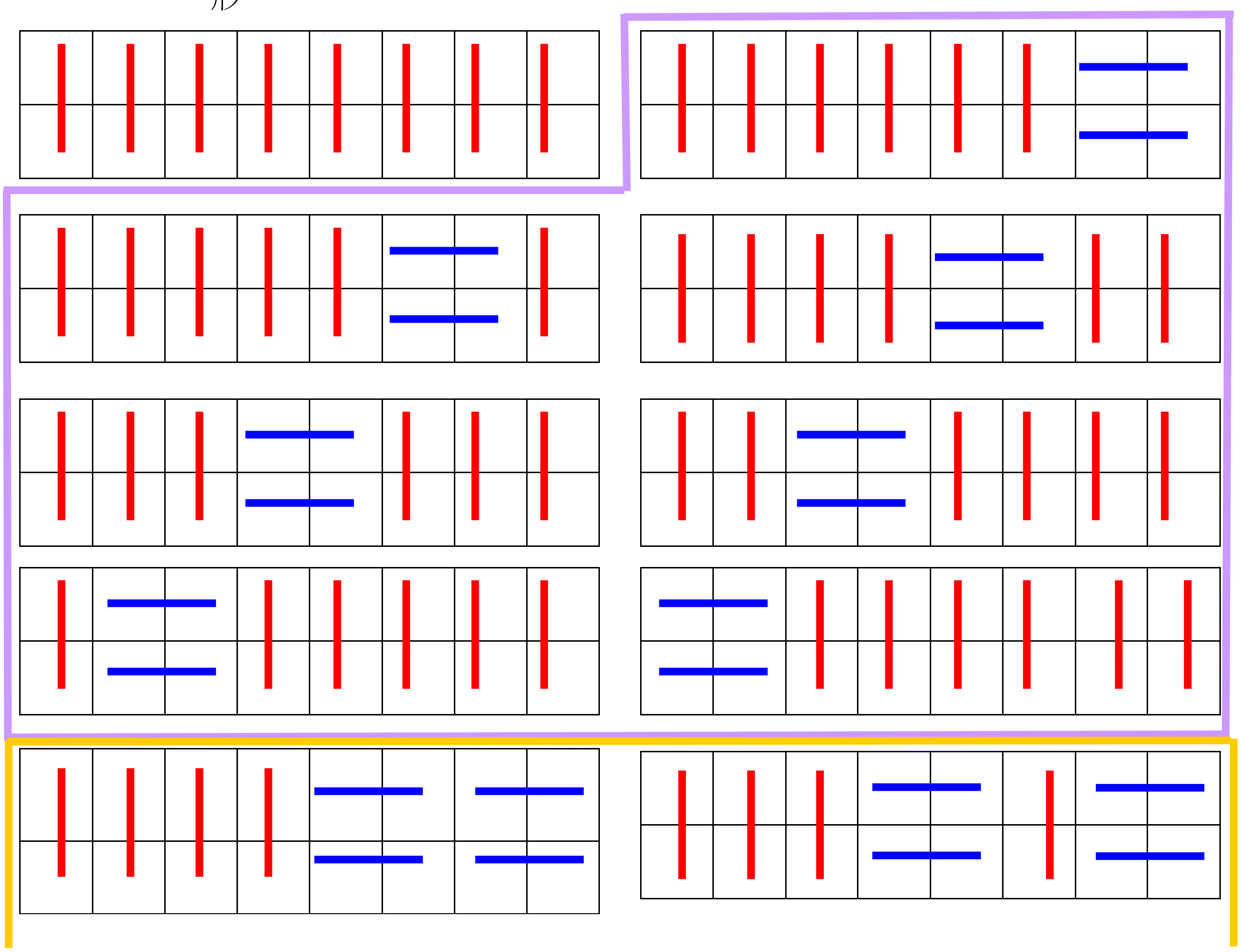
1. 整理資料後發現，2x7 的方格盤下，共有 21 種排列的方法，確實符合推測的情形。

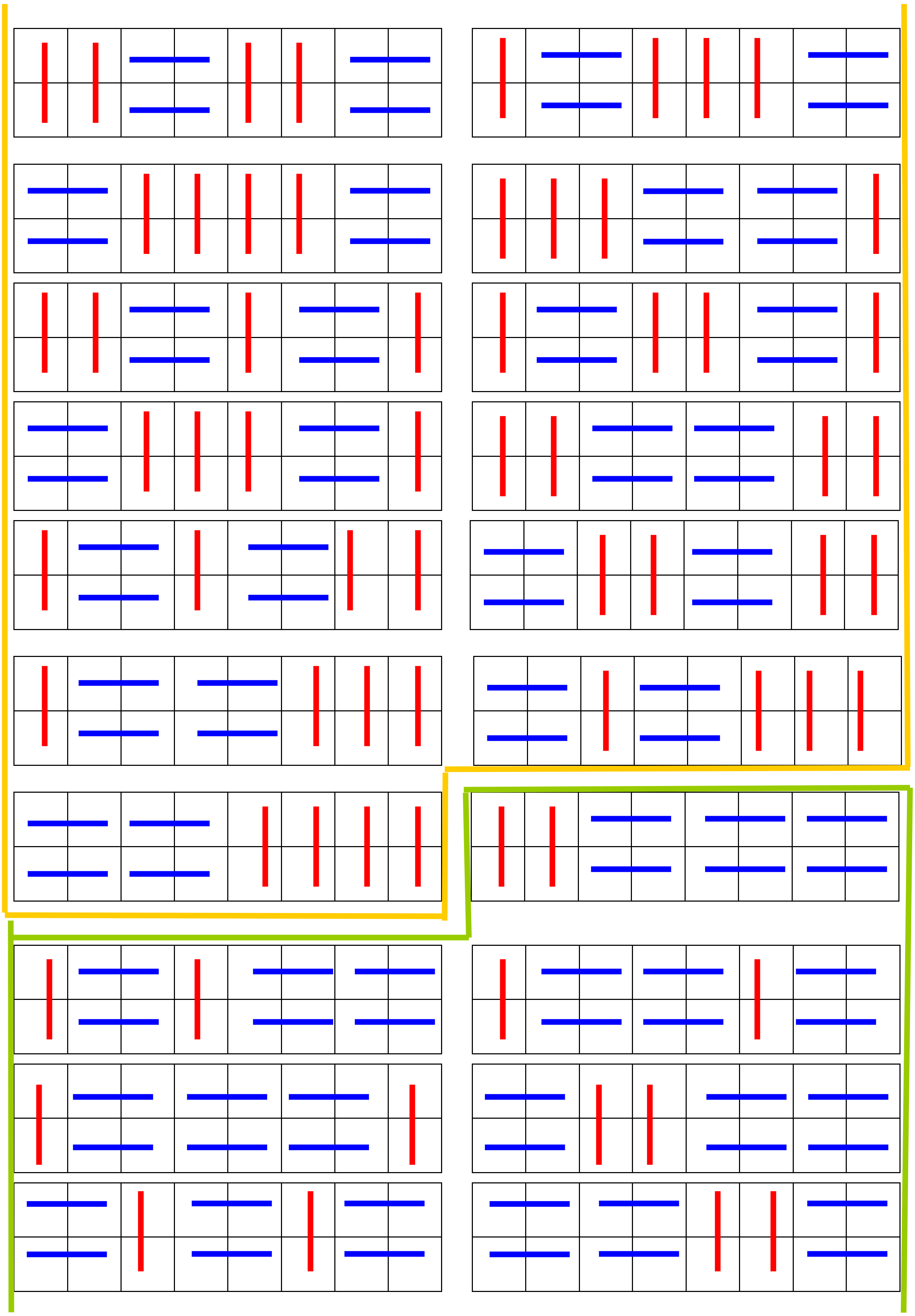


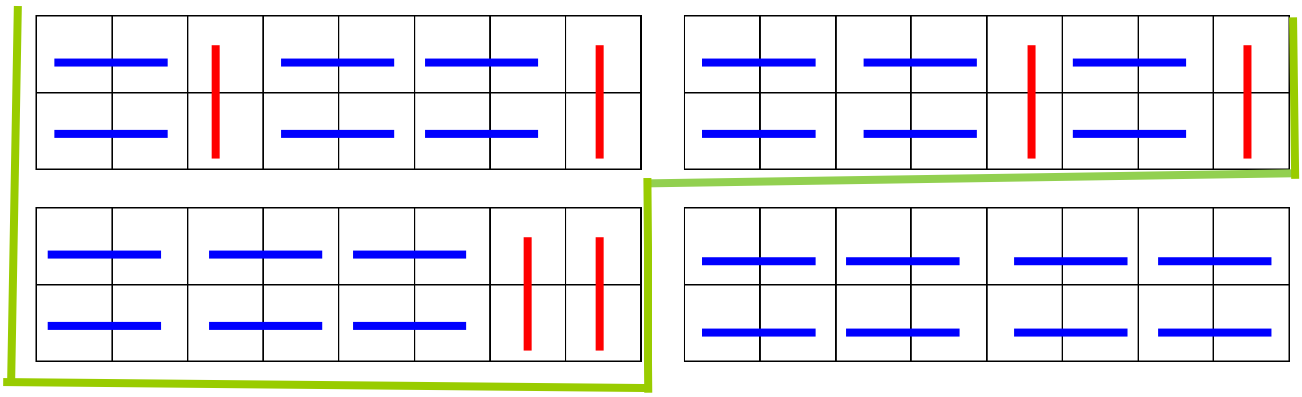


整理：7 直—1 種
5 直—6 種
3 直—10 種
1 直—4 種　共 21 種

2. 整理資料後發現，2x8 的方格盤下，共有 34 種排列的方法，確實符合推測的情形。







整理：8 直－1 種
　　　6 直－7 種
　　　4 直－15 種
　　　2 直－10 種
　　　0 直－1 種　共 34 種

（五）驗證 2x7、2x8 的總數之後，發現 2xN 的總數應該符合符費氏數列的規律；個別數也符合當初所預期的 2 點規律。本研究符合費氏數列的規律如下：

$$A_N = A_{N-1} + A_{N-2} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{費氏數列規律}$$
$$A_1 = 1, A_2 = 2$$

	個別數											總數
	0 直	1 直	2 直	3 直	4 直	5 直	6 直	7 直	8 直	9 直	10 直	
2 × 1		1										1
2 × 2	1		1									2
2 × 3		2		1								3
2 × 4	1		3		1							5
2 × 5		3		4		1						8
2 × 6	1		6		5		1					13
2 × 7		4		10		6		1				21
2 × 8	1		10		15		7		1			34
2 × 9		5		20		21		8		1		55
2 ×10	1		15		35		28		9		1	89

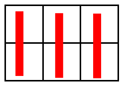
(黃色爲實際繪圖結果；紫色爲驗證部份；紅色爲推測部份)

類似巴斯卡三角形

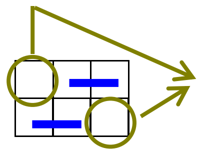
疑似費氏數列

（六）雖經 2 次驗證後，確定 2xN 的總數可能符合費氏數列的規律，個別數符合當初所預期的 2 點規律。但 2x7、2x8 之後的總數與個別數是否仍爲如此呢？我們企圖利用每個圖形中，直棒與橫棒的枝數轉換成 A 與 B 的符號，並利用排列組合的方式，計算出每種狀況下的個別數及總數。

1. 直棒子移動時，每枝棒子都是個別分開不會互相影響。每枝棒子佔用 2 格。以符號 A 代表 1 枝直棒子。



2. 橫棒子移動時，上下兩枝棒子互相影響，不能單獨動一枝。所以橫棒子每次移動需動一組（2 枝橫棒子），每組佔用 4 格。以符號 B 代表一組橫棒子。



3. 以 2x5「方格盤」爲例，將排好的 2x1 的棒子轉換成 A 與 B 的代號。

轉換方式：直棒子一枝佔用 2 格；橫棒子組一組佔用 4 格，所以有 10 個格子時，我們可以利用「2xA＋4xB＝10」算式，找出符合的直棒子數（A）及橫棒子組（B）有多少個。

如果 A 爲 0 時，B 不是整數，所以不行；如果 A 爲 1 時，B 爲 2（直棒子 1 枝，橫棒子 4 枝）。
如果 A 爲 2 時，B 不是整數，所以不行；如果 A 爲 3 時，B 爲 1（直棒子 3 枝，橫棒子 2 枝）。
如果 A 爲 4 時，B 不是整數，所以不行；如果 A 爲 5 時，B 爲 0（直棒子 5 枝，橫棒子 0 枝）。

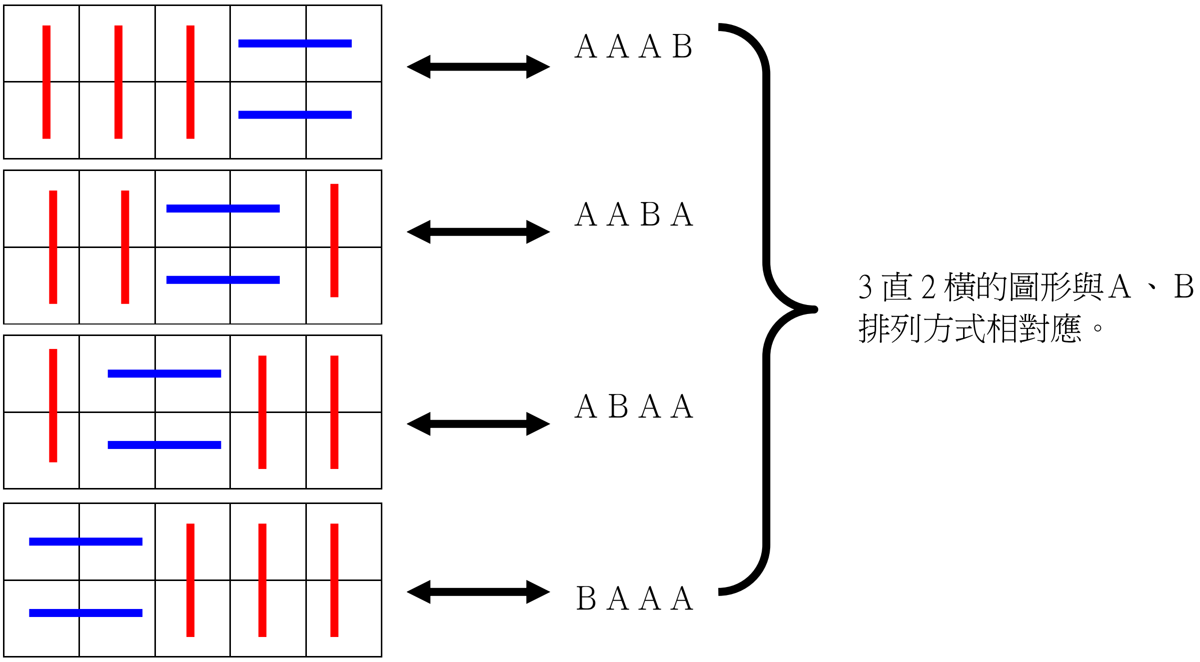
A（直棒子數）		1		3		5
B（橫棒子組）		2		1		0
合計		10		10		10

一一對應

直棒子數		1		3		5
橫棒子數		4		2		0
合計		5		5		5

A 、B 次數與直、橫棒子枝數對照圖

4. 在 2x5「方格盤」中，符合 3 直 2 橫（即 3A1B）的有 4 種情形，其圖形與代號間的關係如下：



5.從排列組合的公式可以發現，當有 3 個 A 與 1 個 B 來做排列時，其計算的公式爲：$\dfrac{4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)\times1}=4$，確實符合圖形的數目。

6. 結論：

(1)圖形與 A、B 的代號可相互轉換，每個圖形與 A、B 排列的方式一一對應。

(2)利用 A、B 符號代替繪製圖形，可節省繪圖的時間，並可利用數學計算式來計算個別數各爲多少。

$$個別數=\frac{(A+B)!}{(A!)\times(B!)}$$

A 爲直棒子的枝數；B 爲橫棒子組組數

（七）從個別數的公式來預測 2 × 9 的個別數如下。

<table>
<tr><td colspan="4">2 × 9 (18 格)個別數計算</td></tr>
<tr><td>直、橫計算方法</td><td colspan="3">2×A＋4×B＝18
由公式可得五組答案：
9 個 A，0 個 B——＞9 直，0 橫
7 個 A，1 個 B——＞7 直，2 橫
5 個 A，2 個 B——＞5 直，4 橫
3 個 A，3 個 B——＞3 直，6 橫
1 個 A，4 個 B——＞1 直，8 橫</td></tr>
<tr><td rowspan="5">個別數計算
$\frac{(A+B)!}{(A!)\times(B!)}$</td><td>9A0B
(9 直 0 橫)</td><td>$\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)}=1$</td><td>1 種</td></tr>
<tr><td>7A1B
(7 直 2 橫)</td><td>$\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)\times1}=8$</td><td>8 種</td></tr>
<tr><td>5A2B
(5 直 4 橫)</td><td>$\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(5\times4\times3\times2\times1)\times(2\times1)}=21$</td><td>21 種</td></tr>
<tr><td>3A3B
(3 直 6 橫)</td><td>$\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)\times(3\times2\times1)}=20$</td><td>20 種</td></tr>
<tr><td>1A4B
(1 直 8 橫)</td><td>$\frac{5\times4\times3\times2\times1}{1\times(4\times3\times2\times1)}=5$</td><td>5 種</td></tr>
<tr><td>總數</td><td colspan="2"></td><td>55 種</td></tr>
</table>

（八）從個別數的公式來預測 2 × 10 的個別數如下。

<table>
<tr><td colspan="4">2 × 10(20 格) 個別數計算</td></tr>
<tr><td>直、橫計算方法</td><td colspan="3">2×A＋4×B＝20
由公式可得五組答案：
10 個 A，0 個 B——＞10 直，0 橫
8 個 A，1 個 B——＞8 直，2 橫
6 個 A，2 個 B——＞6 直，4 橫
4 個 A，3 個 B——＞4 直，6 橫
2 個 A，4 個 B——＞2 直，8 橫
0 個 A，5 個 B——＞0 直，10 橫</td></tr>
<tr><td rowspan="6">個別數計算
$\frac{(A+B)!}{(A!)\times(B!)}$</td><td>10A0B
(10 直 0 橫)</td><td>$\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)}=1$</td><td>1 種</td></tr>
<tr><td>8A1B
(8 直 2 橫)</td><td>$\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)\times1}=9$</td><td>9 種</td></tr>
<tr><td>6A2B
(6 直 4 橫)</td><td>$\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(6\times5\times4\times3\times2\times1)\times(2\times1)}=28$</td><td>28 種</td></tr>
<tr><td>4A3B
(4 直 6 橫)</td><td>$\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(4\times3\times2\times1)\times(3\times2\times1)}=35$</td><td>35 種</td></tr>
<tr><td>2A4B
(2 直 8 橫)</td><td>$\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{(2\times1)\times(4\times3\times2\times1)}=15$</td><td>15 種</td></tr>
<tr><td>0A5B
(0 直 10 橫)</td><td>$\frac{5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1}=1$</td><td>1 種</td></tr>
<tr><td>總數</td><td colspan="2"></td><td>89 種</td></tr>
</table>

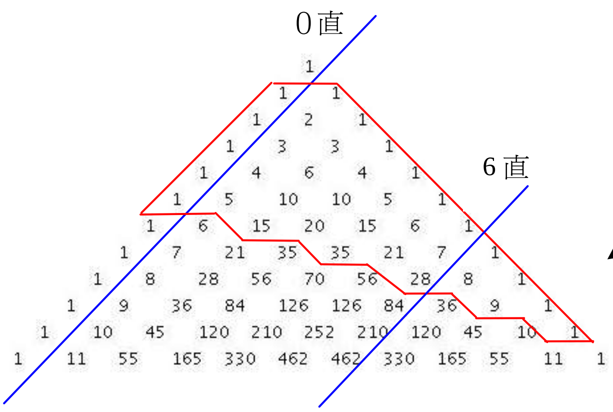
（十）將上述計算的個別數及總數填入表格後，發現細格內的數字確實符合當初所預期的數字，且與巴斯卡三角形的數字相符合（註 1）；總數部份與費氏數列一致（註 2）。

	0 直	1 直	2 直	3 直	4 直	5 直	6 直	7 直	8 直	9 直	10 直	總數
2 × 1		1										1
2 × 2	1		1									2
2 × 3		2		1								3
2 × 4	1		3		1							5
2 × 5		3		4		1						8
2 × 6	1		6		5		1					13
2 × 7		4		10		6		1				21
2 × 8	1		10		15		7		1			34
2 × 9		5		20		21		8		1		55
2 ×10	1		15		35		28		9		1	89

(黃色爲實際繪圖結果；紫色爲驗證部份；水藍色爲計算部份)

符合巴斯卡三角形　　符合費氏數列

（註 1）巴斯卡三角形如下：



紅色區域內與本研究所發現的數字相符合

（註 2）費氏數列如下：

1, 1, 2, 3, 5, 8, 1 3, 2 1, 3 4, 5 5, 8 9, 1 4 4, 2 3 3, 3 7 7…………

紅色區域內與本研究所發現的數字相符合

三、找出拼滿 3xN「方格盤」個別數及總數的規律性（N＝1～20）。

（一）先剔出無法拼出的 N

1. 因爲 3xN「方格盤」的 N 爲奇數時，其格子總數必爲奇數；N 爲偶數時，其格子總數必爲偶數。

2. 2x1 的棒子一次佔用 2 格，無論使用多少枝直的或橫的棒子，其總數必爲偶數。

3. 結論：3xN的N必需爲偶數才能讓 2x1 的棒子拼滿。

（二）先簡化 3xN「方格盤」變成 2xN「方格盤」。

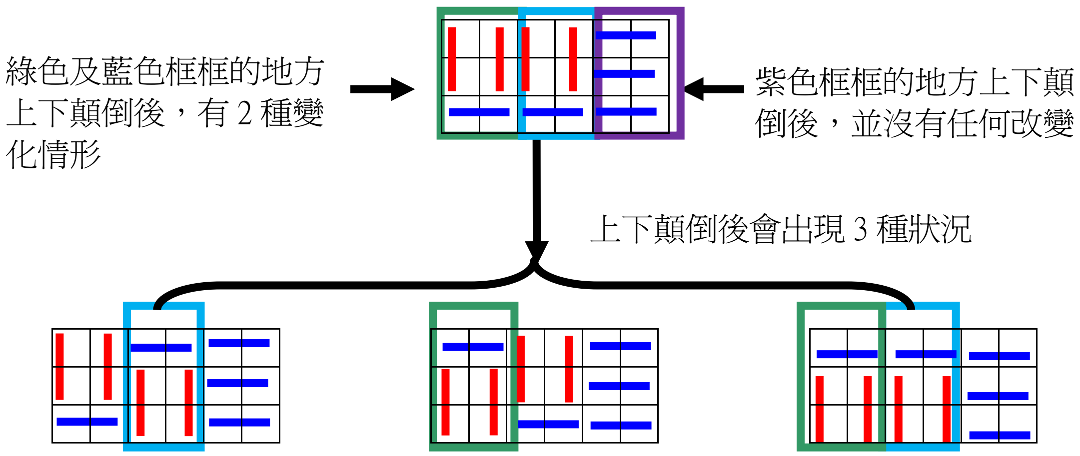
範例：以 3 × 6「方格盤」中，4 直爲例子。

1. 把下面那一層先遮起來,會發現其實就是 3 × 6「方格盤」可以轉變成 2 × 6「方格盤」。

2. 2 × 6「方格盤」在 4 直時，有 5 種排法。所以 3 × 6「方格盤」在固定最下層爲橫棒子的時候，也有 5 種排法。

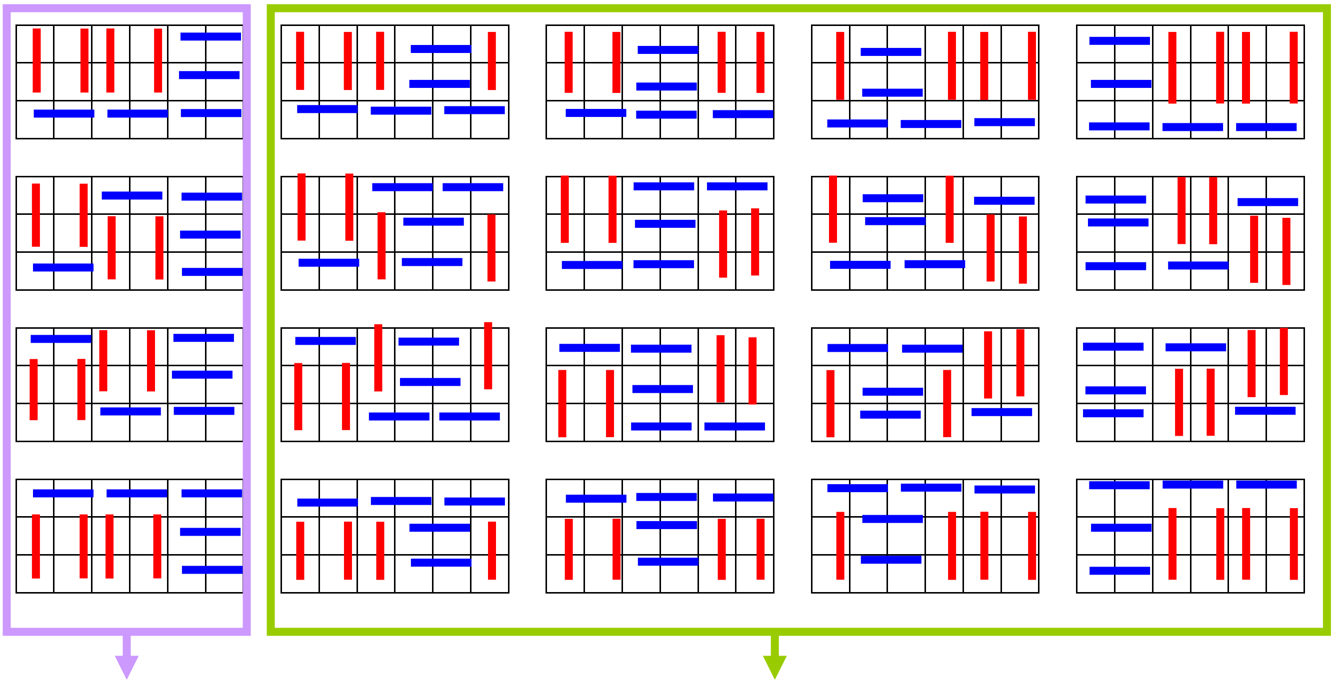
(三)找出 3 × N「方格盤」的變化數。

1. 以固定最下層爲橫棒子爲基礎，因爲左右移動不影響最下層的棒子變化，考慮上下顛倒的狀況。發現只有在具有 2 直一橫的地方，下上顛倒才有意義。



結論：在 2 直 1 橫的地方下上顛倒才有意義，每一組(2 直 1 橫)皆有 2 種變化，若有 S 組時，共有 2^S 種變化情形(包含最原始的圖形)

2. 找出每一種變化情形的排列方式。



3x6「方格盤」
4 直變化數有 4 種

每一種變化皆有 5 種情形(包含本身圖形)
與 2x6「方格盤」的 4 直排列數相同

3x6「方格盤」的 4 直排列數共 20 個

結論：1. 3x6「方格盤」每一種變化的排列次數與 2x6 的排列次數相同，所以只要找出 2x6 的排列次數後即可知道 3x6 每一種變化的排列次數。

2. 利用 3x6「方格盤」的變化數乘以 2x6「方格盤」的排列數即可知道 3x6「方格盤」的排列數。

(四) 找出拼滿 3xN「方格盤」個別數及總數。

1. 利用 2xN「方格盤」的排列數與 3xN「方格盤」的變化數找出 3xN「方格盤」個別數。

2xN「方格盤」的排列數												
	0 直	2 直	4 直	6 直	8 直	10 直	12 直	14 直	16 直	18 直	20 直	總數
2 × 2	1	1										2
2 × 4	1	3	1									5
2 × 6	1	6	5	1								13
2 × 8	1	10	15	7	1							34
2 ×10	1	15	35	28	9	1						89
2 ×12	1	21	70	84	45	11	1					233
2 ×14	1	28	126	210	165	66	13	1				610
2 ×16	1	36	210	462	495	286	91	15	1			1597
2 ×18	1	45	330	924	1287	1001	455	120	17	1		4181
2 ×20	1	55	495	1716	3003	3003	1820	680	153	19	1	10946

將每一個細格的數字乘以變化數

3xN「方格盤」的變化數												
	0 直	2 直	4 直	6 直	8 直	10 直	12 直	14 直	16 直	18 直	20 直	
變化數	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	

結果如下

3xN「方格盤」的排列數 ＝(2xN「方格盤」的排列數) × (3xN「方格盤」的變化數)												
	0 直	2 直	4 直	6 直	8 直	10 直	12 直	14 直	16 直	18 直	20 直	總數
2 × 2	1	2										3
2 × 4	1	6	4									11
2 × 6	1	12	20	8								41
2 × 8	1	20	60	56	16							153
2 ×10	1	30	140	224	144	32						571
2 ×12	1	42	280	672	720	352	64					2131
2 ×14	1	56	504	1680	2640	2112	832	128				7953
2 ×16	1	72	840	3696	7920	9152	5824	1920	256			29681
2 ×18	1	90	1320	7392	20592	32032	29120	15360	4352	512		110771
2 ×20	1	110	1980	13728	48048	96096	116480	87040	39618	9728	1024	413403

2. 從 3×N「方格盤」的個別數及總數的表格中可以發現，個別數並不符合巴斯卡三角形的形態，總數也不符合費氏數列的規律。但將細格內及總數的數字，經討論及網路查詢資料後發現，其個別數與總數，也找出數條有規律的數列型態。其數列如下：

	0 直	2 直	4 直	6 直	8 直	10 直	12 直	14 直	16 直	18 直	20 直	總數
3 × 2	1	2										3
3 × 4	1	6	4									11
3 × 6	1	12	20	8								41
3 × 8	1	20	60	56	16							153
3 ×10	1	30	140	224	144	32						571
3 ×12	1	42	280	672	720	352	64					2131
3 ×14	1	56	504	1680	2640	2112	832	128				7953
3 ×16	1	72	840	3696	7920	9152	5824	1920	256			29681
3 ×18	1	90	1320	7392	20592	32032	29120	15360	4352	512		110771
3 ×20	1	110	1980	13728	48048	96096	116480	87040	39618	9728	1024	413403

$$A_n = \frac{n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}{6}$$

$$A_n = 2^n$$

$$A_n = n\times(n+1)$$

$$A_n = 4A_{n-1} - A_{n-2}$$

$$A_n = 1$$

柒、結論：

一、如果 m×n 的長方形能拼完一個 T×S 的長方形時，有以下幾點特性。

（一）當m、n為T和S的公因數時，必可拼滿。

（二）當m(或n)為T和S的公因數時，n(或m)必需為T或S的因數。

（三）當m只為T（或S）的因數時，n必需為S（或T）的因數。

二、2xN「方格盤」的排列總數符合費氏數列的規律性。其規律性為：

$A_N = A_{N-1} + A_{N-2}$…………費氏數列規律，$A_1 = 1, A_2 = 2$

三、2xN「方格盤」的個別數可透過排列組合的計算式計算，其方式為：

個別數 $= \dfrac{(A+B)!}{(A!)\times(B!)}$ (A 為直棒子枝數；B 為橫棒子組數)，而且個別數符合巴斯卡三角形的特性。

	0 直	1 直	2 直	3 直	4 直	5 直	6 直	7 直	8 直	9 直	10 直	合計
2 × 1		1										1
2 × 2	1		1									2
2 × 3		2		1								3
2 × 4	1		3		1							5
2 × 5		3		4		1						8
2 × 6	1		6		5		1					13
2 × 7		4		10		6		1				21
2 × 8	1		10		15		7		1			34
2 × 9		5		20		21		8		1		55
2 ×10	1		15		35		28		9		1	89

符合巴斯卡三角形特性

符合費氏數列特性

四、發現 2xN「方格盤」的個別數與總數之間是巴斯卡三角形與費氏數列關係的實證例子。

五、3xN「方格盤」的排列總數符合 3N 規律。其規律為：

$$A_n = 4A_{n-1} - A_{n-2}$$

六、3xN「方格盤」的個別數有以下幾點特性：

(一) 3xN「方格盤」內的個別數為 2xN「方格盤」個別數的延伸。

(二) 3xN 表格中的個別數為（2xN 的個別數）×（3xN 的變化數）

(三) 3xN「方格盤」的個別數中，有部份數字形成常見的規律數列。

	0 直	2 直	4 直	6 直	8 直	10 直	12 直	14 直	16 直	18 直	20 直	總數
3 × 2	1	2										3
3 × 4	1	6	4									11
3 × 6	1	12	20	8								41
3 × 8	1	20	60	56	16							153
3 ×10	1	30	140	224	144	32						571
3 ×12	1	42	280	672	720	352	64					2131
3 ×14	1	56	504	1680	2640	2112	832	128				7953
3 ×16	1	72	840	3696	7920	9152	5824	1920	256			29681
3 ×18	1	90	1320	7392	20592	32032	29120	15360	4352	512		110771
3 ×20	1	110	1980	13728	48048	96096	116480	87040	39618	9728	1024	413403

$$A_n = \frac{n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}{6}$$

$$A_n = 2^n$$

$$A_n = n\times(n+1)$$

$$A_n = 1$$

$$A_n = 4A_{n-1} - A_{n-2}$$

捌、參考資料：

一、南一數學學習領域教師手冊（民 94）。國小數學第十一冊。第二單元 因數和倍數。台南：南一書局企業股份有限公司。

二、南一數學學習領域教師手冊（民 95）。國小數學第十冊。第八單元 怎樣解題。台南：南一書局企業股份有限公司。

三、康軒數學學習領域教學別冊（民 95）。國小數學第十一冊。第一單元　最大公因數與最小公倍數。台北：康軒文教事業股份有限公司。

四、The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences 網站，民國 97 年 4 月 22 日。取自 http://www.research.att.com/~njas/sequences/

【評語】080402

本作品是以小長方形來拼滿大長方形的方格盤，學生操作熟練，解釋清楚，並找到數學的規律性，最重要的，能利用課堂的因、倍數來解決問題，更是難能可貴的地方。