中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第二名

最佳(鄉土)教材獎

040424

中國藝『數』－由雙錢結不變量來探討結其性質

學校名稱：國立馬祖高級中學

作者：	指導老師：
高二 林豔麗	胡裕仁
高二 林世洹	洪儒

關鍵詞： 結理論、鍾氏多項式、拓樸

摘要

本文探討結理論及不變量，來建構結的數學模型，並由雙錢結為分析主體，最後找出結的數學表示式並推論判斷質結與複合結。

文章選擇雙錢結作為研究主題有二個主因：

①2000年，清大徐教授發表『把”雙錢結”一般化』一文，但文中只說明編結的方式[2]，卻沒說明它的結理論關係及數學模型。

②由課堂中師生的一時戲言所引出的好奇心。

文中利用結多項式及結群不變量來分辨質結與複合結，也印證高三所學數學不變量的具體意涵，更學會雙錢結的編結方式及其數學模型，在分析雙錢結的數學相關性質中，由W.P.及Alexander多項式方法得出一個判斷複合結與質結的數學現象：『**若結為質結則必存在唯一型不變量，若結為複合結則必存在一組以上同型不變量。**』

壹、研究動機

在某次上數學課時，有位女同學抱怨為什麼高中的數學那麼難，學那麼難有什麼用，結果老師就說『**數學是無所不在**』的一門科學，就如空氣，我們可能看不到，但卻一直在呼吸，那位女同學不服氣的硬要老師舉例，因此，老師就以那位同學頭髮上綁的中國結髮飾為例，說明了一個有關於『結』的數學典故。然而，課堂上老師並沒有解釋清楚，且我們也聽不太懂，但基於好奇心的驅使及對老師的質疑，便展開我們這一次的科學研究探索之旅。

貳、研究目的

經查證中國結的相關書籍之後[12]，發現女同學的髮飾”結”是雙錢結的一種，因此，便開始學習一些簡單的中國結的編結方法，並嘗試分析雙錢結的編結方式且建立其數學模型。

在進行資料蒐集時找到很多有關結的理論及其研究文獻，最令人意外的是清大徐教授在 2000 年時已發表有關的研究，經進一步研究後發現教授所發表的文中只說明編結的關係[2]，卻未說明它與其它結理論關係及代數群有關數學模型如何建立，也未教我們如何結合數學原理來建立雙錢結的模型，更沒提如何找出數學不變量來進行數學表示式。

基於上述原因，在本文中我們將以雙錢結來進行分析主體，並嘗試找出有關雙錢結的數學模型，定出下列研究目的：

（1）整理並分析結的數學模型及分析工具。

（2）找出雙錢結的四種數學不變量。

（3）將雙錢結依(2)找出的方式，予以建立數學模型。

（4）分析雙錢結的數學相關性質。

（5）由(1)至(4)的結果來對結進行歸納分析並找出其他的數學現象。

參、研究設備及器材

一、電腦壹台。

二、數學方程式符號編輯器 Equation、GSP、Word、Visio 軟體各壹套。

三、彩色印表機一台。

四、不同色彩的編結用繩數條，夾子數支。

肆、文獻探討及研究方法

1.結的不變量：由於希望在“結”中找出某些量使得對於等價的結，能給出相同的值。這樣的“量”，稱為「不變量(invariant)」。結理論中：若結作非破壞性的變動時，所得的值是相同且不會改變的，如同在高三理科數學課本中提及：二元二次圖形可以利用圖形方程式的不變量來平移或旋轉以簡化方程式的計算，並化成相關二次錐線的標準式。古典對於結的分析作法，是利用結以外的空間及其基本群(fundamental group)來取得不變量[11]。在關於『結』的研究中發現了原來結的不變量不止一種[1][4][5][6]，例如以下兩個結是否相同，相信大家都會立刻說不同。為什麼？「因為左邊的只有一個圈，右邊的有兩個圈。

圖 4-1

圖 4-2

由此可知**繩圈的數目**本身就是一個結的不變量，而拉長，重疊，反轉等變換，得出繩圈的數目並不會改變。數學上是利用 Reidemeister 形變定理來証明，所有的變換中繩圈的數目是不變量。

Reidemeister 形變定理：模樣不同而實質相同的結皆可通過連串而有限的三種方法互相變換而成[4][13]。

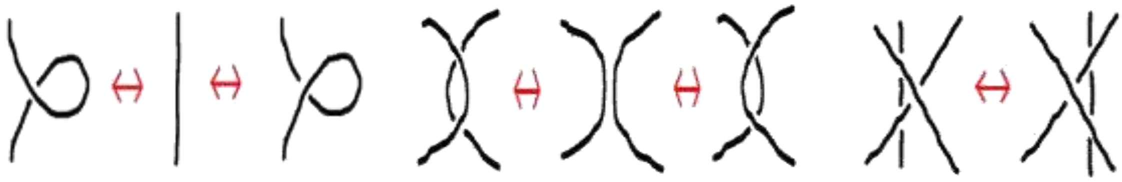


圖 4-3：TYPE-1 形變　　圖 4-4：TYPE-2 形變　　圖 4-5：TYPE-3 形變

Reidemeister 這個定理的最大用途是証明兩個結的不同。以圖 4-6、4-7 為例：可能會覺得其實兩個例子中第一步與最後一步中的結明顯是相同。

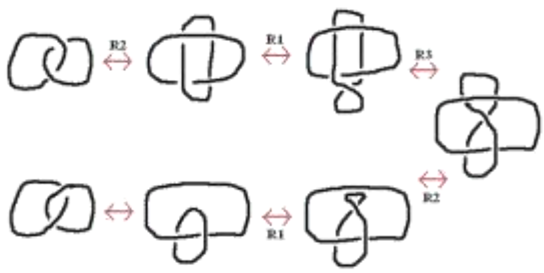


圖 4-6：兩個繩圈的結

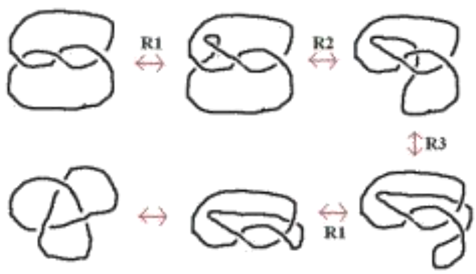


圖 4-7：三葉結

由觀察發現繩結數目在三種 Reidemeister 形變中均是保持的相同的結果。因此任何兩個模樣不同，但實際相同的結其繩圈數目是相同。此時可利用另一種不變量「**三色性**」如圖 4-9、4-10，繩結中每一個的重疊位置都可看成由三條「繩段」所組成。

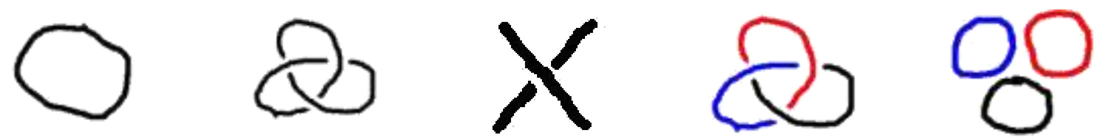


圖 4-8　圖 4-9　圖 4-10　圖 4-11　圖 4-12

若一個結的某一種模樣符合三色性的話，表示可以將該結的每一條繩段均塗上 A、B、C 三種顏色中的其中一種。如圖 4-11、4-12 所示，三色性在 Reidemeister 形變中是存在的，可知三色性是結的一種不變量。由於我們只能在平凡結如圖 4-8 上塗上一種顏色，因此平凡結不符合三色性，故三葉結及平凡結是不同的。結的研究中還有很多不變量，如：**Crossing Number**、**Unknotting Number** 及 **Linking Number** 等，因為結的分析方式及其不變量的探討眾多，本文將簡化研究目標，並找尋相關數學意涵做為研究主軸。

2.結理論(knot theory)：主要處理數學中的放置問題(Placement Problem)，廣義的放置問題如下，給定一空間 X，及兩個子空間 Y_1、Y_2 是否存在 X 及 f 使得 $f(Y_1)=f(Y_2)$？結理論主要是討論 $\mathbb{R}^3$ 中的 S_1，更精確的說，若 $f:S^1 \to S^3$ 是嵌射，則稱 $f(S_1)$ 是一個結，若二個結是同型(Same Type)就是說：在不破壞結的狀態，允許結本身做一些變形，結理論中的核心問題就是判斷二個結是否同型，為了簡化問題，通常假設結是 $\mathbb{R}^3$ 中的簡單封閉多角曲線(Simple Closed Polygonal Curve)，如圖4-13，如此可以選取適當的投影至平面上，使其沒有三重點且頂點不在交叉點上，例如三葉結(trefoil) 可以畫成下圖4-13，當然也可以畫得平滑些，如圖4-14[1]。

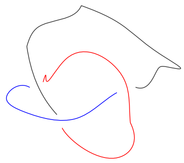


圖4-13

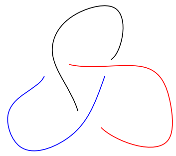


圖4-14

幾種常用的結不變量

1.結群(knot group)：判斷二個結是否同型並不是一件簡單的事，最好的方法是先找出一些結不變量(Knot Invariant)，即對於同型的結，給一個廣義的代數數值(如：數值、多項式及群等等)只要二個結所對應的代數數值不同，就可以判斷二個結是不同型。在眾多結不變量中，一個非常古老且重要的是結群(Knot Group)，結的餘集的基本群(Fundamental Group)，若 K 是一個結，則 K 的結群定義為 G。要如何描述結群 G 呢？可以將結投影至平面上，並為結選一個方向。假設結的投影圖有 n 個二重點，以「下穿越點」(Undercrossing Point) 為準，將結分成 n 個弧，弧的端點是從一個二重點的下穿越點出發，到下一個二重點時若是從上穿越(Overcrossing)則繼續向前，若是從下穿越(Undercrossing) 則停止，以三葉結為例，可以分成三個弧，如圖 4-15。選定圖 4-15 中一點 P 為基點(Base Point)，令 x_i 表通過 P 繞過第 i 個弧的閉路(Loop) (弧和閉路都以 x_i 表示)，閉路的方向是根據結的方向以右手規則定之如圖

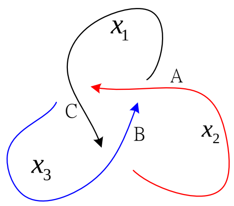


圖 4-15

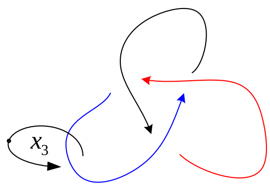
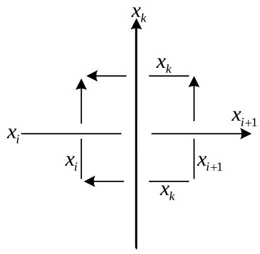


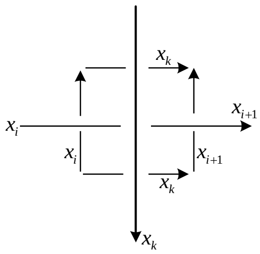
圖 4-16

4-16，則 $x_i \in$ 結群 G ，在每個交叉點上可以得到如圖 4-17、圖 4-18 的關係式(圖 4-19 畫得更清楚) 這樣總共得到 $r_1,\ldots,r_n$ 共 n 個關係。



$x_k x_i = x_{i+1} x_k$

圖 4-17



$x_i x_k = x_k x_{i+1}$

圖 4-18

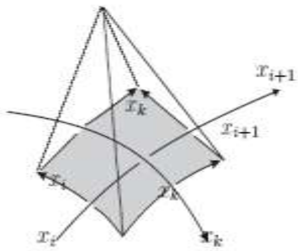


圖 4-18 的三維透視圖

圖 4-19

***Wirtinger presentation* 定理**： G 由 $x_1,\ldots,x_n$ 生成且任意 x_i 之間的關係式都可由 $\{r_1,\ldots,r_n\}$ 生成，即 $G=<x_1,\ldots,x_n \mid r_1,\ldots,r_n>$ 以三葉結為例，如圖 4-15，在交叉點 A ， $x_1x_2 = x_2x_3$ ， $x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1}=1$ ；在交叉點 B ， $x_2x_3 = x_3x_1$ ， $x_3x_1x_3^{-1}x_2^{-1}=1$ ；在交叉點 C ， $x_3x_1 = x_1x_2$ ， $x_1x_2x_1^{-1}x_3^{-1}=1$ 因為在 C 的關係式可由前二者得到，所以三葉結的結群 $G=$ $<x_1,x_2,x_3 \mid x_1x_2 = x_2x_3 = x_3x_1> = <x_1,x_2 \mid x_1x_2 = x_2x_1x_2x_1^{-1}> = <x_1,x_2 \mid x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}=1>$ 。

由上述 Wirtinger presentation 的計算方式發現結的結群可利用生成元關係寫成[5]。

2.Alexander 多項式：Alexander 多項式需要的工具是 Fox 的微分法 [1]。以三葉結為例，來求 Alexander 多項式的方法：設 $G=<x_1,x_2 \mid x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}=1>$ ，令 $r = x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}$ 得出 $A=\dfrac{\partial r}{\partial x_1}= 1+x_1x_2 - x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}$ 、 $B=\dfrac{\partial r}{\partial x_2}= x_1 - x_1x_2x_1x_2^{-1} - x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}$ ，以矩陣表示為 $[A,B]$ $A=1+x_1x_2 - x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}$ 、 $B=x_1 - x_1x_2x_1x_2^{-1} - x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}$，將其中的變數都用 t 代入即可得 Alexander 矩陣為 $[-1+t-t^2 \quad 1-t+t^2]$，所以三葉結的 Alexander 多項式為 $\Delta(t)=-1+t-t^2$ [1][4][9]。

3.Conway 多項式：若 Alexander 多項式 $\Delta(t)$ 乘上 $\pm t^{\lambda}$，則可要求 Alexander 多項式滿

足下列二個性質:(1) $\Delta(1)=1$、(2) $\Delta(t)=\Delta(t^{-1})$ 這樣的 Alexender 多項式可改寫成另一種形式，即 $\nabla_K(z)\in Z[z]$，其中 $z=t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{-1}{2}}$，這個新的多項式就是 Conway 多項式。事實上，Conway 多項式是定義在有向結或環上。

Conway 多項式的公設：

(1)任意有向結或環都對應一個 Conway 多項式 $\nabla_K(z)\in Z[z]$ 且同型的結或環對應相同的多項式。

(2)若 K 是不打結(unknot)，則 $\nabla_K(z)$ =1。

(3)若 K^+、K^-、L 在某個交叉點如下圖(圖 4-20-圖 4-22)。

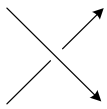


圖 4-20： K^+

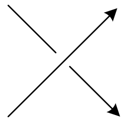


圖 4-21： K^-

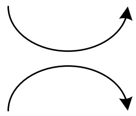


圖 4-22： L

則 $\nabla_{K^+}-\nabla_{K^-}=Z\nabla_L$。從以上性質還可以導出，若環 L 可以分成二部分(Split Link)，則 $\nabla_L(z)=0$。則利用以上這些性質來計算三葉結的 Conway 多項式，因為 K^+ 是不打結，$\nabla_{K^+}=1$，$1-\nabla_{K^-}=Z\nabla_{L^-}$，又 L^+ 可分成二部分，M 是不打結，∇_{L^+}=0，$\nabla_M=1$，$0-\nabla_{L^-}$ = $Z\nabla_M=Z$，可得三葉結的 Conway 多項式 $\nabla_{K^-}=1+Z^2$ [1]。

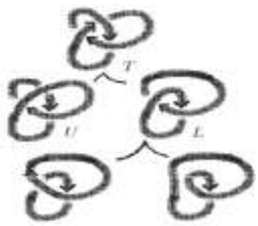


圖 4-23：三葉結的線圖樹

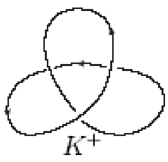


圖 4-24

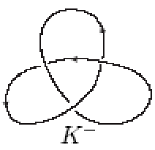


圖 4-25

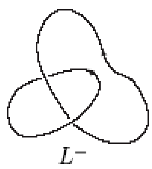


圖 4-26

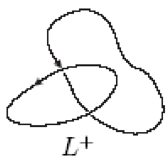


圖 4-27

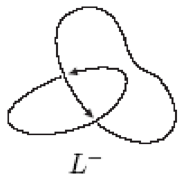


圖 4-28

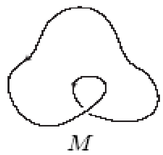


圖 4-29

線圍樹(Skein Tree)分析法：線圍樹是紀錄一個結的線圖中經過“跨越”或“改變跨

越”過程中的所有結與鏈結。樹上的每個“節點”代表一個結，距原有結最遠的代表未打結的結。若任意結存在如此的“解結”的程序是由於任一結的線圖都能經由一系列“改變跨越”(Crossing Switches) 而成為不打結或無連結的線圖，見圖 4-30。

圖 4-30：標準的未打“結”的結

圖 4-30 表示一個不打結的線圖。畫法是由圖中箭頭處開始，沿著線圖凡遇跨越處先畫“上跨越”再畫“下跨越”，這可能的最簡單的結線圖畫法，因為無須做任何的更正，當要跨過線圖中存在的線時只須穿過它的下面。標準的不打結線圖永遠是不打結的，試著用手沿著圖 4-30 走一遭，可知利用標準的不打結線圖存在的事實，可由一個給定的線圖 K 與標準不打結線圖在平面上經相同投影所產生的不同而得到以交換跨越而使線圖 K 不打結的程序。這個交換的程序可用來製造一個線團樹的 **Conway 多項式**並計算 K 的 **Jones 多項式**。

4.Jones 多項式：1985 年 Jones 以一個不變量「Jones 多項式」成功解決結與鏡相的問題，結束了 Alexander 多項式在結理論的數學地位。由於 Jones 利用辮子群得到一個新的結不變量，使得對於等價的結，能給出相同的值。即結作「非破壞性」的變動時，所得的值是相同且不會改變的。通常以 $V_k(t)$ 代表 Jones 不變量，這是一個以 $t^{\frac{1}{2}}$ 及 $t^{\frac{-1}{2}}$ 為變數的多項式。

Jones 多項式的公設：

(1)若二個有向鏈結 K，K' 是同倫(ambient isotopic、即：咖啡杯 v.s.甜甜圈)，則它們的 **Jones** 多項式是相等的，即 $V_K(t)=V_{K'}(t)$。

(2)若 U 是無結的閉曲線則 $V_U(t)$=1。

(3)若三有向鏈結 K^+，K^-，L 除了在圖 4-20 至圖 4-22 所示的局部部分之外都相等，則它們的 **Jones** 多項式有如下的關係：$t^{-1}V_{K^+}(t)=tV_{K^-}(t)+(t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{-1}{2}})V_L(t)$。

線圈樹分析方法：以三葉結為例，來找出 **Jones** 多項式。

在圖 4-23 畫出三葉結的線圈樹以計算其 **Jones** 多項式。這個樹將三葉結 **Jones** 多項式的計算化簡為計算某些不打結的結。為了明瞭如何計算不打結的結，在此情況下公設指出：$t^{-1}V_{U^+}(t)=tV_{U^-}(t)+(t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{-1}{2}})V_{U^0}(t)$。這裡$U^+$與$U^-$分別代表只有一個分量的正扭曲及負扭曲，$U^0$則是將$U^+$與$U^-$中的扭曲扯平成為不打結的二個圓。

圖 4-31：U^+

圖 4-32：U^-

圖 4-33：U^0

見圖 4-31 至 4-33。因此 $(t^{-1}-t)1=(t^{1/2}-t^{1/2})V_{U^0}$。所以 $d=V_{U^0}=(t^{-1}-t)/(t^{1/2}-t^{-1/2})$ $=-(t^{1/2}+t^{-1/2})$。因此在結中每加一個不打結的分量就是對不變量乘上一個 $d=-(t^{1/2}+t^{-1/2})$ 的倍數。在圖 4-30 中，T 代表三葉結，U 表未打結的平凡結而 L 表二個未打結圓環所組成之結。

依公設可知

$$t^{-1}V_T-tV_U=(t^{1/2}-t^{-1/2})V_L \text{、} t^{-1}V_L-td=(t^{1/2}-t^{-1/2})V_L$$

所以

$$V_L=t(td+(t^{1/2}-t^{-1/2}))=-t^{5/2}-t^{1/2}\text{。}$$

而

$$V_T=t(t+(t^{1/2}-t^{-1/2})V_L)=t(t+(t^{1/2}-t^{-1/2})(-t^{5/2}-t^{1/2}))$$
$$=t(t-t^3-t+t^2+1)=t(-t^3+t^2+1)=-t^4+t^3+t\text{。}$$

同理可證三葉結的鏡像 T^* (即將 T 中上、下跨越顛倒所得)得到的不變量 $V_{T^*}=-t^{-4}+t^{-3}+t^{-1}$。以三葉結為例來進行分析：假設分別稱這兩個結為 A 及 B。

圖 4-34：A.左三葉結

圖 4-35：B.右三葉結

A、B 互為鏡向，考慮這兩個結所形成的四個有向結，並找出它們的 Jones 多項式。




圖 4-36：$t^{-1}+t^{-3}-t^{-4}$ 圖 4-37：$t^{-1}+t^{-3}-t^{-4}$ 圖 4-38：$t+t^{3}-t^{4}$ 圖 4-39：$t+t^{3}-t^{4}$

由圖 4-36 至圖 4-39，只要向後一反，立刻可以看出左邊的兩個有向結其實是相同的。同樣地右邊的兩個亦是相等。即 A 所形成的所有有向結的 Jones 多項式均為 $t^{-1}+t^{-3}-t^{-4}$，B 所形成的所有有向結的 Jones 多項式均為 $t+t^{3}-t^{4}$。因此，得到的結論是，A 和 B 本身已不相同，而它也透露出 Jones 多項式可以有效解決結的鏡射問題。

根據上述一系列對於”結”的數學表示式及相關定理，知道結的分析主要藉由各種不變量以建立數學模型。因此下一節除了要找雙錢結的編結方式外，並利用其不變量來找出其數學模型表示式，最後將其一般化並透過多項式分析來解析雙錢結的其它性質。

伍、研究過程及結果

要進行本次研究，必須將雙錢結一般化（因為髮飾關係），先介紹其編結方式、如下圖 5-1 及 5-2[12]。

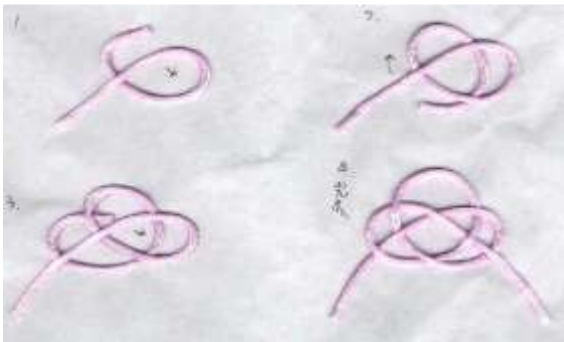


圖 5-1：雙錢結

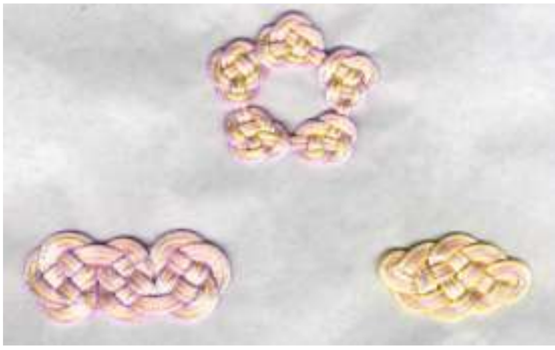


圖 5-2：雙錢結應用

雙錢結：因為西洋結藝中有一種結叫做“土耳其頭” Turk’s head，土耳其人的頭結(另譯：纏頭結)，老師說同學的頭髮上綁中國結髮飾是類似這土耳其頭結的雙錢結，經查證之後與它們真的是同一類的結[2][12]。

圖 5-3：雙錢結

圖 5-4：雙錢結

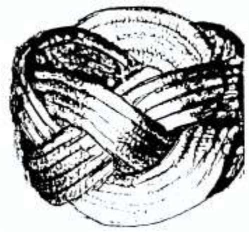


圖 5-5：土耳其頭結

清大的徐道寧教授曾在數學傳播中發表『把”雙錢結”一般化』一文，但讀其文後，發現徐教授雖然已經完成了”雙錢結”一般化，但她以編結的方式來分析，只說明編雙錢結的圈數及辮數的對應關係卻未介紹它的其它數學模型 [2]，因此本文將以第肆節中提及的文獻方法分析雙錢結的數學模型並將其建構成本文研究結果。

（1）整理並分析出結的數學模型及分析工具：本文的第肆節中，提及各種文獻及網路資源的相關方法，並以最常舉例說明的三葉結為例，說明如何利用結的分析工具，分析出各式結的數學模型。例如：①Wirtinger Presentation 結群定理來表示出編結的上下穿越的順序關聯性及其**結群不變量**表示式。②Fox 的微分法來找出**亞歷山大多項式不變量**。③線團樹分析方式找出 **Conway 多項式不變量**。④線團樹分析方式找出 **Jones 多項式不變量**。我們將找出雙錢結的四種結不變量，最後再由結不變量的群及多項式組成，判斷它的延伸討論性質，例如：質結或複合結、鏡向結與非鏡向結。

研究過程：雙錢結代數化

（2）找出雙錢結的相關數學不變量：由（1）中提及的方式，我們先找出四種雙錢結不變量，並將雙錢結依照其上、下穿越的路線方法予以分析得出下圖 5-6，再依所分

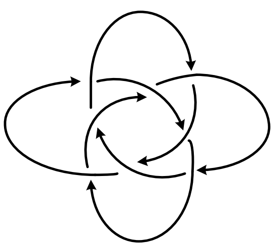


圖 5-6：未著色的雙錢結

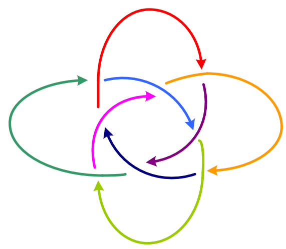


圖 5-7：著色的雙錢結

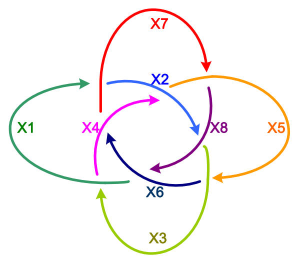


圖 5-8：W-P 之後的雙錢結

段產生的弧予以著色如圖 5-7，以 **Wirtinger Presentation**（W-P）的方式表示的結群 G 如圖 5-8。由於在質結中，例如：三葉結、八字結等皆可將結群 G 予以著色標號並

找出其模數[4][5]，若將雙錢結予以著色後試圖予以 2b-a 的法則標號，但我們卻無法求算出模數。因此可推論雙錢結可能非質結!

利用生成字元和其上下穿越的關係可得出雙錢結的結群不變量 $G = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \mid x_1x_3 = x_7x_1 , x_2x_4 = x_8x_2 , x_3x_5 = x_1x_3 , x_4x_6 = x_2x_4 , x_5x_7 = x_3x_5 , x_6x_8 = x_4x_6 , x_7x_1 = x_5x_7 , x_8x_2 = x_6x_8 \rangle$ 共 8 個關係式。其 Wirtinger Presentation 為 $G = \langle x_1, x_3 \mid x_1x_3 = x_7x_1 \rangle = \langle x_1, x_3 \mid x_1x_3 = x_1x_3x_1^{-1}x_1 \rangle = \langle x_1, x_3 \mid x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_1^{-1} = 1 \rangle$，經整理分類之後可個別得出共 10 種不同的 Wirtinger Presentation，並區分出兩種類型一種有 **10 個字元連乘**、另一種有 **6 個字元連乘**兩種類別。

Fox 微分法(Fox differential calculus)

令 F 是由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是由所生成的，對於 F 中的任意字元 $r = x_{j_1}^{e_1} x_{j_2}^{e_2} \cdots x_{j_k}^{e_k}$、$e_i \in \{1, -1\}$。

定義自由群微分方式：$\frac{\partial r}{\partial x_1}$，$\frac{\partial r}{\partial x_2}$，…，$\frac{\partial r}{\partial x_n}$ 為 $\frac{\partial r}{\partial x_j} = e_1\delta_{jj1}x_{j_1}^{\frac{1}{2}(e_1-1)} + e_2\delta_{jj2}x_{j_2}^{\frac{1}{2}(e_2-1)} + \cdots$，

$\delta_{jj_i}, i \in N$ 視為一指標函數。因此將雙錢結群經 Fox 微分後可個別得出兩種類型的 Wirtinger Presentation 進行 Fox 微分以計算出它的微分結果如下：

①**6 個字元連乘**：$G = \langle x_1, x_3 \mid x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_1^{-1} = 1 \rangle$

$\frac{\partial r}{\partial x_1} = 1 - x_1x_3x_1^{-1} + x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1} - x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_1^{-1} = 0$，令字元為變數 $t \Rightarrow 1 - t = 0$。

$\frac{\partial r}{\partial x_3} = x_1 - x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1} = 0$，令字元為變數 $t \Rightarrow t - 1 = 0$。

②**10 個字元連乘**：$G = \langle x_1, x_3 \mid x_1x_3x_3^{-1}x_1x_3x_3^{-1}x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1} = 1 \rangle$

$\frac{\partial r}{\partial x_1} = 1 + x_1x_3x_1^{-1} - x_1x_3x_3^{-1}x_1x_3x_3^{-1}x_3x_1^{-1} - x_1x_3x_3^{-1}x_1x_3x_3^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1} = 0$，令字元為變數 $t \Rightarrow$ $t - t^2 = 0 \Rightarrow 1 - t = 0$。

$\frac{\partial r}{\partial x_3} = x_1 - x_1x_3x_3^{-1} + x_1x_3x_3^{-1}x_1 - x_1x_3x_3^{-1}x_1x_3x_3^{-1} + x_1x_3x_3^{-1}x_1x_3x_3^{-1} - x_1x_3x_3^{-1}x_1x_3x_3^{-1}x_3x_1^{-1}x_3^{-1}$ $= 0$，令字元為變數 $t^2 - t = 0 \Rightarrow t - 1 = 0$。

由此二式証明了不同的 Wirtinger Presentation 所表示的關係，只要利用同樣定義的表示方式皆可得出相同結群的 Fox 微分，在本例中試驗的對象也以 Alexander 多項式結

不變量推出它的數學不變量即$t-1$或$1-t$的雙錢結的 Alexander 多項式結不變量。

Conway 多項式結不變量分析：由圖 5-9 及 Conway 結多項式定義$\nabla K^{+}-\nabla K^{-}=Z\nabla L$可證出：在線團樹圖 5-9 中的(一)至(九)中可以得出如下所示之結果：(一)$\because \nabla K^{+}-\nabla K^{-}=Z\nabla L \Rightarrow 0-\nabla K^{-}=Z \Rightarrow \boxed{\nabla K^{-}=-Z}$。(二)$1-\nabla K^{-}=-Z^{2} \Rightarrow \boxed{\nabla K^{-}=Z^{2}+1}$。(三)$K^{-}=0 \cdot L=1 \Rightarrow \nabla K^{+}-0=Z \Rightarrow \boxed{\nabla K^{+}=Z}$。(四)$\because L=Z$、$\nabla K^{-}=1 \Rightarrow \boxed{\nabla K^{+}=Z^{2}+1}$。(五)$L=Z^{2}+1 \cdot \nabla K^{+}=0 \Rightarrow 0-\nabla K^{-}=Z^{3}+Z \Rightarrow \boxed{\nabla K^{-}=-Z^{3}-Z}$。(六)$\nabla K^{+}=1$、$\nabla L=-Z^{3}-Z \Rightarrow 1-\nabla K^{-}=-Z^{4}-Z^{2} \Rightarrow \boxed{\nabla K^{-}=Z^{4}+Z^{2}+1}$。(七)$\nabla K^{-}=0$、$\nabla L=1 \Rightarrow \boxed{\nabla K^{+}=Z}$。(八)$\nabla K^{+}=Z$、$\nabla L=Z^{4}+Z^{2}+1 \Rightarrow Z-\nabla K^{-}=Z^{5}+Z^{3}+Z \Rightarrow \boxed{\nabla K^{-}=-Z^{5}-Z^{3}}$。(九)$\nabla K^{-}=Z^{2}+1$、$\nabla L=-Z^{5}-Z^{3} \Rightarrow \nabla K^{+}-(Z^{2}+1) =-Z^{6}-Z^{4}$，所以$\nabla K^{+}=-Z^{6}-Z^{4}+Z^{2}+1 \Rightarrow \boxed{\nabla K^{+}=(1-Z^{2})(1+Z^{2})^{2}}$。所以本分析方法除了證明雙錢結確實為一複合結，也找出其 conway 結多項式不變量為$(1-Z^{2})(1+Z^{2})^{2}$。

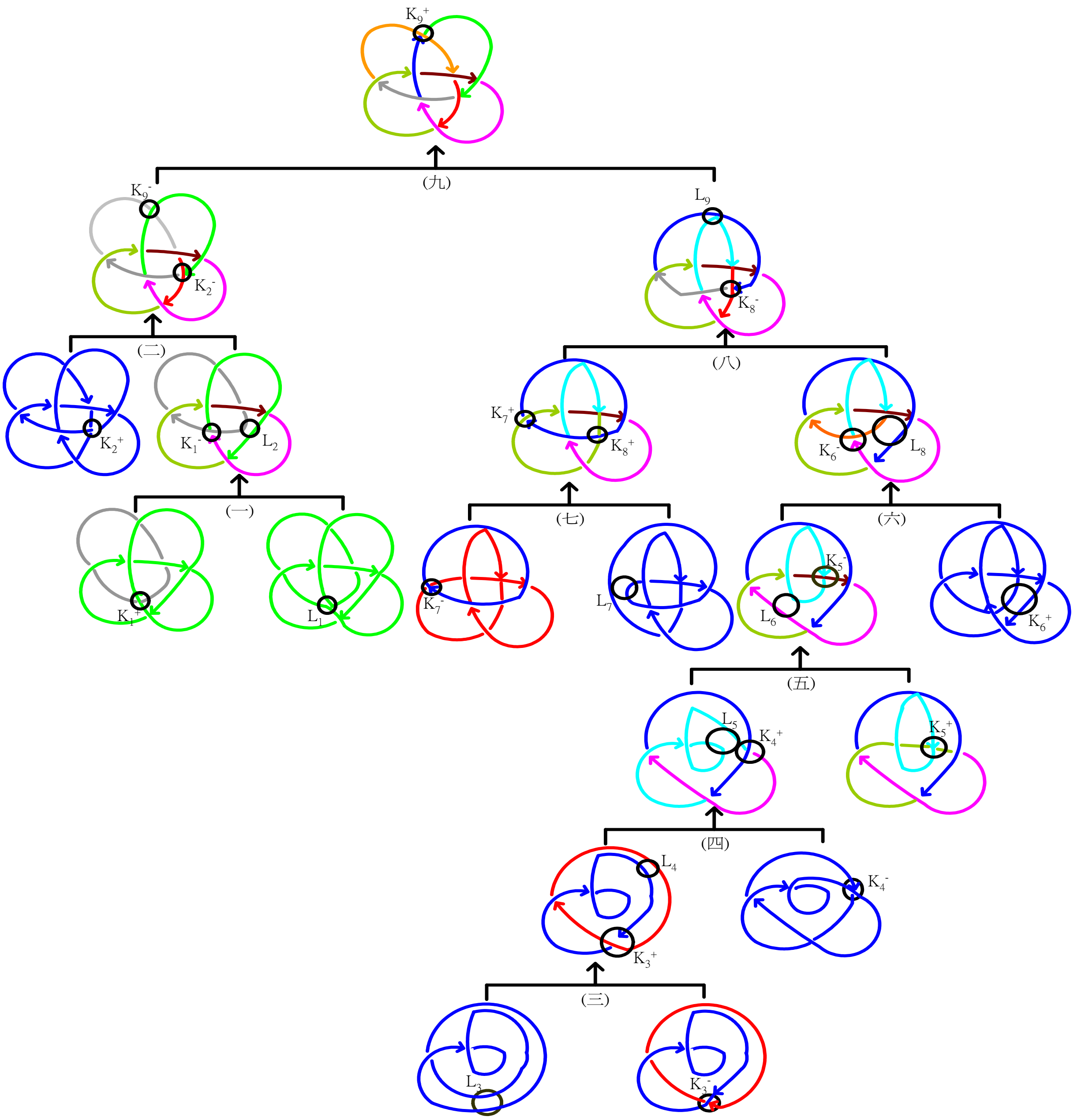


圖 5-9：雙錢結的 conway 線圈樹

線圈樹分析 Jones 多項式結不變量分析：

由圖 5-9 及 Jones 多項式定義 $t^{-1}V_T - tV_U = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_L$ 可證出：依線圈樹圖 5-9 的上下穿越順序，

$\because V_T = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$ 、 $V_L = 1 \therefore$

（1） $t^{-1}(-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) = tV_{k^-} + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \Rightarrow \boxed{V_{k^-} = -t^{-\frac{5}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}$。

（2）$t^{-1}V_{k^+}=tV_{k^-}+(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})(-t^{-\frac{5}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})$，$V_{k^+}=1\Rightarrow\boxed{V_{k^-}=t^{-1}+t^{-3}-t^{-4}}$。

（3）$t^{-1}V_{k^+}=t(-t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})+(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})\Rightarrow\boxed{V_{k^+}=-t^{\frac{5}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}}$。

（4）$t^{-1}V_{k^+}=t+(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})\ (-t^{\frac{5}{2}}-t^{\frac{1}{2}})\Rightarrow\boxed{V_{k^+}=t^{1}+t^{3}-t^{4}}$。

（5）$t^{-1}(-t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})=tV_{k^-}+(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})\ (t+t^{3}-t^{4})\Rightarrow\boxed{V_{k^-}=t^{\frac{7}{2}}-2t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}-t^{-\frac{3}{2}}-t^{-\frac{5}{2}}}$。

（6）$t^{-1}=tV_{k^-}+(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})(t^{\frac{7}{2}}-2t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}-t^{-\frac{3}{2}}-t^{-\frac{5}{2}})\Rightarrow\boxed{V_{k^-}=-t^{3}+3t^{2}-3t+2\quad-2t^{-1}}$
$\boxed{+3t^{-2}-t^{-4}}$。

（7）$t^{-1}V_{k^+}=t(-t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})+(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})\Rightarrow\boxed{V_{k^+}=-t^{\frac{5}{2}}-t^{\frac{1}{2}}}$。

（8）$t^{-1}(-t^{\frac{5}{2}}-t^{\frac{1}{2}})=tV_{k^-}+(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})$（$-t^{3}+3t^{2}-3t+2-2t^{-1}+3t^{-2}-t^{-4}$）$\Rightarrow\boxed{V_{k^-}=t^{\frac{5}{2}}\quad-4t^{\frac{3}{2}}}$
$\boxed{+5t^{\frac{1}{2}}-5t^{-\frac{1}{2}}+3t^{-\frac{3}{2}}-5t^{-\frac{5}{2}}+3t^{-\frac{7}{2}}+t^{-\frac{9}{2}}-t^{-\frac{11}{2}}}$。

（9）$t^{-1}V_{k^+}=t(t^{-1}+t^{-3}-t^{-4})+(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})$（$t^{\frac{5}{2}}-4t^{\frac{3}{2}}+5t^{\frac{1}{2}}-5t^{-\frac{1}{2}}+3t^{-\frac{3}{2}}-5t^{-\frac{5}{2}}+3t^{-\frac{7}{2}}+t^{-\frac{9}{2}}\quad-t^{-\frac{11}{2}}$）

$\Rightarrow\boxed{V_{k^+}=t^{4}-5t^{3}+9t^{2}-9t+8-7t^{-1}+7t^{-2}-2t^{-3}-2t^{-4}+t^{-5}}$。

同理，若將線圍樹圖 5-9 的上下穿越順序互換，亦可得出下列結果：

$\boxed{V_{k^-}=t^{5}-2t^{4}-2t^{3}+7t^{2}-7t+8-9t^{-1}+9t^{-2}-5t^{-3}+t^{-4}}$。

（3）將雙錢結數學模型：

雙錢結的數學模型	
不變量種類	**群表示 V.S.多項式表示**
W.P.結群（兩類情形）	6 字元連乘：$G=<x_1,x_3\mid x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_1^{-1}=1>$
	10 字元連乘：$G=<x_1,x_3\mid x_1x_3x_3^{-1}x_1x_3x_3^{-1}x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}=1>$
Alexander（兩類情形）	6 字元連乘：$1-t$ 或 $t-1$。
	10 字元連乘：$t-t^{2}$ 或 $t^{2}-t$。
Conway（線圍樹分析）	$(1-Z^{2})(1+Z^{2})^{2}$

Jones （線圈樹分析）	$V_{k^+}=t^4-5t^3+9t^2-9t+8-7t^{-1}+7t^{-2}-t^{-3}-2t^{-4}+t^{-5}$。　或 V_{k^+} 的鏡像 $V_{k^-}=t^5-2t^4-2t^3+7t^2-7t+8-9t^{-1}+9t^{-2}-5t^{-3}+t^{-4}$。

（4）分析雙錢結的數學相關性質：行文至此發現一件有趣的結果，即雙錢結在 **Wirtinger Presentation 結群不變量**及 **Alexander 多項式結不變量**中，都可以分出二個類似的同型；即 **10 個字元連乘**對 **6 個字元連乘**及$t-t^2$ 對$1-t$ ，由第肆節中的文獻可知雙錢結是一個複合結。而找其不變量的同時可以推論：**『若結為質結則必存在唯一型不變量，若結為複合結則必存在一組以上同型不變量。』**相關証明可由多項式代數證明得之，也可參考下例：三葉結 Alexander 多項式結不變量為$1-t+t^2$ 、八字結 Alexander 多項式結不變量為$1-3t+t^2$，而三葉結與八字結都是有名的質結，且其不變量皆只有唯一型。因此可推測若一個結經 W.P.及 Alexander 多項式結不變量，分析出其結不變量是唯一的，則為質結。此點可由 W.P.、Alexander 多項式及 Conway 多項式的結果中看出雙錢結有二個同型不變量，因此可以推定雙錢結是一個複合結，而此三種情形的結果卻和我們一開始分析出的結群數不同，即一個結不一定上下穿越的結比較多，它就會比較複雜，因此也呼應了 Reidemeister 形變的理論。至於由線團樹分析的 Jones 多項式，在雙錢結上我們無法給出更多的結論，但卻檢驗了 Jones 的多項式它對複合結仍舊可以順利找到它的鏡像不變量表示式。

陸、討論

『結不變量』的綜合應用探討：數學上關於結理論探討的問題，注意的都是在封閉的環，對於多於一個繩圈的稱之為鏈結(link)。從纏繞得很複雜的結中找出活結，是結理論的一個中心問題。結理論家也很有興趣把所有結分類，以決定兩個表面上看起來不一樣的結是否相等。為証明兩個結是相等的，一個很直接的方法就是試著去旋轉或拉扯，使得兩個結長得一樣。但即使經過長時間的努力仍無法達成的時候，並不表示兩結一定不相等，可能是它們需要很特別的方法才能達到，也就是利用各式形變方法。

Conway 多項式：以雙錢結作為研究分析的主體，其中一個原因是我們推測，三圈四瓣結的雙錢結可能為二圈三瓣結的三葉結的衍生結，而在推論出雙錢結的 Conway 多項式的不變量後，同時也驗證了這一點，在 Conway 不變量中我們發現雙錢結的不變量 $(1-Z^2)(1+Z^2)^2$ 能提出三葉結的不變量 $(1-Z^2)$ 作為因數，另外為證實 Conway 有此特性，我們藉由兩個三葉結組成的祖母結作分析，發現其不變量正好為三葉結不變量的平方。

Alexander 多項式：在我們以 2a-b 的方式尋找雙錢結的唯一解時，發現為複合結的雙錢結，因找不出模數而不適用，再進一步研究，我們發現質結都有模數如：Figure Eight Knot，Stevedore’s Knot，Miller Institute Knot，Solomon’s Knot，皆能以 2a-b 的方式找出唯一解，而複合結如：祖母結，雙錢結找不出模，因此，我們推論複合結無唯一解，而後我們改以 Fox 微分來求出雙錢結亞歷山大多項式的兩個解。

Jones 多項式：在發現線團數的建構方法後，我們將公式帶入，由下往上推論找出 Jones 不變量，為驗證我們所求的值是否正確，我們依照 Jones 能分辨鏡相的原理畫出了鏡相雙錢結的線團樹，帶入公式找出不變量，發現其為正雙錢結不變量的指數變號。

WP 多項式：我們分析結的接連關係，找出字元連成的表示法，為求精確性我們將雙錢結的每個節點作分析，全都能規納至十字元連成和六字元連成，而此兩種表示法也證明了複合結有兩種以上的同型不變量。

更重大的發現是，若雙錢結（即一個任意複合結）予以著色標號，將無法求算出模數，因此可推定雙錢結非質結，透過將 W.P.法、Alexander 多項式及線團樹分析得出的 Conway 多項式皆可再提出因式相乘知，若質結以多項式表示則必無法再提出其**整係數因式**即**同型不變量**，若以**群**表示則無法再求出其**模數**。且在分析雙錢結的數學相關性質中更得出一個判斷複合結與質結的重要性質:『**若結為質結則必存在唯一型不變量，若結為複合結則必存在一組以上同型不變量。**』

柒、結論

結理論的未來：結理論在物理數學上有重大的應用。它可以幫助物理學家去決定兩個表面上不一樣的場理論是否真的不一樣。並且企圖把物理上的相對論和量子力學統一起來，對其而言整個世界都是由很細小的弦所組成的。不一樣的粒子，就對應於不一樣的振動的弦。物理上的弦就像數學上位於三度空間的結。結在生物學上用途也非常大，特別是在研究 DNA 的時候特別的立體結構--雙股螺旋結構，呈扭曲、絞擰、打結和圈套等形狀，這正好是數學中的結理論研究的對象[13]。

我們順利解決了所要探討的雙錢結編結的關係，並由四種結群不變量的分析，順利建構完成我們的模型，補齊了徐教授當時未提的部分，也順利完成此次的研究目的。而透過分析雙錢結的數學相關性質及研究過程中，發現出了結不變量所找出的**質結**與**複合結**的分類方式：若質結以多項式表示則必無法再提出其**整係數因式**即**同型不變量**，若以**群**表示則無法再求出其**模數**。而結的不變量有許多種，我們之所以使用此四種，主要是因為其不只能找到結的不變量，也能表現結的不同特性，如：Conway 不變量能看出結的衍生關係，Jones 多項式能分辨鏡相，亞歷山大多項式和 WP 的表示法能分辨質結和複合結。

捌、參考資料及其他

[1] 郎一全，幾種古典的結不變量，數學傳播第25卷第二期，2001。

[2] 徐道寧，把"雙錢結"一般化，數學傳播第 24 卷第一期，2000。

[3] 謝春忠，"結"論-非結論，數學傳播第 30 卷第三期，2006。

[4] Louis H.Kauffman 著 謝春忠譯，結(1)，數學傳播第 25 卷第二期，2001。

[5] Louis H.Kauffman 著 謝春忠譯，結(2)，數學傳播第 25 卷第三期，2001。

[6] Louis H.Kauffman 著 謝春忠譯，結(3)，數學傳播第 25 卷第三期，2001。

[7] Louis H.Kauffman 著 謝春忠譯，結(4)，數學傳播第 26 卷第一期，2002。

[8] Louis H.Kauffman 著 謝春忠譯，結(5)，數學傳播第 26 卷第二期，2002。

[9] Alexander polynomail，Wolfram MathWorld，from http://mathworld.wolfram.com/ AlexanderPolynomial.html [英文]。

[10] Jones polynomail，Wolfram MathWorld，from http://mathworld.wolfram.com/ JonesPolynomial.html [英文]。

[11] 楊樹文，結與結的不變量，數學傳播第 25 卷第二期，2001。

[12] 華軒巧藝社，中國結示範圖片，from http://www.chihlee.edu.tw/org/org04/newpage20.htm。

[13] 從解手繩到 DNA，from http://db.math.ust.hk/articles/knot/c_knot.htm??。

【評語】040424

1) 結理論當中的概念，名詞等，若由動態立體幾何環境下進行動態展示，則更能夠掌握到科展「追求具體呈現」的精神。

2) 作品說明書首頁所列的關鍵詞「結理論」、「鍾式多項式」、「拓僕」的每一個名詞及概念需要一學期的大學、研究所課程來討論。這類的問題不可能在國際奧林匹亞競試中出現。數學教育界的學者該研究本作品是否值得鼓勵作爲中學生的研究題材。