中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第一名

040422

穿越網格愛上你

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 林奕含 高二 何念青	洪士薰 黃哲男

關鍵詞：　網格、漢彌頓路徑

摘要

在平面上，行數爲 n 列數爲 m(表成$n\times m$)的長方形網格中若有一由單位長水平或垂直線段連接所有相鄰格子點的折線，同時不重複經過任一格子點，這樣的折線稱之爲$n\times m$網格中的漢彌頓路徑，簡稱路徑。

我們研究了當$m=4{,}5$時，在$n\times m$網格中，所有從左下角(1,1)出發，右下角(n,1)結束的路徑總數$T(n,m)$以及從左上角(1,m)出發，右下角(n,1)結束的路徑總數$U(n,m)$。在過程中我們也計算了$n\times 3$、$n\times 4$的網格中由左下角出發，左上角結束的路徑，分別以$M(n,3), M(n,4)$表示總數。

我們得到下列的結果：

1. $n\times 4$的值：若令$V_k=T(k,4)+U(k,4)$，$W_k=T(k,4)-U(k,4)$，$k\in N$。

則數列$\langle V_k\rangle$ 及 $\langle U_k\rangle$滿足：

$$V_{k+4}=V_{k+3}+3V_{k+2}+V_{k+1}-V_k,$$
$$W_{k+4}=-W_{k+3}+3W_{k+2}-W_{k+1}-W_k。$$
$$V_1=1,\ W_1=-1,\quad V_2=1,\ W_2=1,\quad V_3=4,\ W_3=-4,\quad V_4=8,\ W_4=8.$$

2. $n\times 5$的值：

$T(n)=$

$$T(n-1)+T(n-3)-T(n-4)+3T(n\text{-}2)-3T(n\text{-}3)\text{-}T(n\text{-}5)+U(n\text{-}1)-2U(n\text{-}4)$$

$$+\sum_{k=1}^{n-7}\left\{\begin{array}{l} M(k\text{-}3)\left[-\frac{1}{4}T(n\text{-}k\text{-}2)-\frac{3}{4}T(n\text{-}k\text{-}3)+\frac{1}{4}T(n\text{-}k\text{-}5)-\frac{3}{4}U(n\text{-}k\text{-}1)+U(n\text{-}k\text{-}3)\text{-}U(n\text{-}k\text{-}4)\right] \\ +M(k\text{-}1)\left[2T(n\text{-}k\text{-}2)\text{-}3T(n\text{-}k\text{-}3)+U(n\text{-}k\text{-}1)\text{-}U(n\text{-}k\text{-}2)\text{-}2U(n\text{-}k\text{-}4)+U(n\text{-}k\text{-}5)\right] \\ +M(k+1)\left[\frac{7}{4}T(n\text{-}k\text{-}2)+\frac{1}{4}T(n\text{-}k\text{-}3)+\frac{5}{4}U(n\text{-}k\text{-}1)+\frac{5}{4}U(n\text{-}k\text{-}2)-3U(n\text{-}k\text{-}3)+\frac{2}{3}U(n\text{-}k\text{-}4)\right] \end{array}\right\}$$

$$+\frac{5}{4}M(n\text{-}1)+\frac{5}{4}M(n\text{-}2)+\frac{23}{2}M(n\text{-}3)+\frac{61}{2}M(n\text{-}4)+\frac{527}{2}M(n\text{-}5)+\frac{2013}{4}M(n\text{-}6)$$
$$+\frac{223}{2}M(n\text{-}7)+\frac{6817}{2}M(n\text{-}8)+\frac{507}{4}M(n\text{-}9)-\frac{1402}{2}M(n\text{-}10)$$

3. (1) $M(2\text{n-}1,3)=2^{n-1}$， $M(2\text{n},3)=0$

(2) $M(1,4)=1=M(2,4),\ M(3,4)=4,\ M(4,4)=8$。

當$n\geq 5$時， $M(n,4)=2M(n-1,4)+2M(n-2,4)-2M(n-3,4)+M(n-4,4)$

壹、研究動機

在第 66 屆 William Lowell Putnam 數學競賽中有一個有趣的數學問題：

$S_{n,3}=\{(a,b)\in N^2 \mid 1\le a\le n, 1\le b\le 3\}$，而 $L_{n,3}$ 表示所有由許多鉛直與水平的單位線段連接而成的路徑，即若 $l\in L_{n,3}$，則 $l=\{\ p_1\to p_2\to p_3\to\cdots\to p_{3n}\ \}$由點 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{3n}\in S_{n,3}$ 構成。而且滿足：(1) $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{3n}$ 互異 (2) p_i 及 p_{i+1} 相距一單位長，且 1≤ i＜3n-1 (3)每一個 $p\in S_{n,3}$ 都有特定的 i 使得 $p_i = p$ 。

試問從(1, 1)走到(n, 1)有多少種路徑?

經我們查詢發現這一問題中的路徑被稱之為所謂的*漢彌頓路徑*(*Hamiltonian path*)，而目前關於漢彌頓路徑的研究結果多半著重於所謂的存在性問題上，即關心什麼樣的點集會存在所謂的漢彌頓路徑。而我們的問題主要是想了解：在平面上，**行數為 n 列數為 m(表成 $n\times m$) 的網格中到底有多少從左下角(1,1)出發，右下角(n,1)或右上角(1,n)結束的漢彌頓路徑**，在我們進一步的查詢下，發現在 1997 年 Karen L. Collins, Lucia B. Krompart [1], 透過高等數學的方法找出了當 $m=4,5$ 時，若將所有漢彌頓路徑的總數表示成特定生成函數的係數，則他們可以用一組隱函數的關係表示出來，這樣的結果當然不能滿足好奇的我們，所以我們想尋求更為基本而直觀的解答，因為我們相信更基本且直觀的方法將有助於我們去找出一般的 $n\times m,\ \ m\ge 6$ 問題。事實上在 http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html 這個神奇的網站上， $n\times 4$ 及 $n\times 5$ 問題的答案就是他們提供的(網站上沒有 $n\times m,\ \ m\ge 6$ 情況的答案)。

而且這種網格可以應用在基因碼的表現型上(Gerald Rosen, ROOK’S TOUR REPRESENTATION OF THE GENETIC CODE, Bulletin of Mathematical Biology)，把每一條路徑對應到一種基因碼的表現型，也就是說，它的走法總數代表各種基因碼表現型的數量。這更加強了我們去找出所有 $n\times m$ 中的漢彌頓路徑總數的明顯公式的企圖。

貳、研究目的

在本文的研究中，我們試圖去找出在平面上，行數為 n 列數為 m = 4,5 (表成 $n\times m$)的長方形網格中，所有從左下角(1,1)出發，右下角(n,1)結束的漢彌頓路徑總數 $T(n,m)$

參、研究過程與方法

一、 $n\times4$

(一)分類與定義：

我們都是以**第一行的連通情形**來**分類**，為了方便討論，首先我們定義「連通值」:若該行中相鄰兩點有相連則記 1，不相連則記 0，由上而下可得一 2 進位的三位數，稱為連通值。

例如，


$(101)_2=5$


$(111)_2=7$

並且，我們用 $T_k(n,m)$ 代表行數為 n 列數為 m(表成 $n\times m$)的網格，從左下角(1,1)出發，右下角(n,1)結束，且連通值為 k 的路徑總數；同樣地，$U_k(n,m)$ 則代表從左上角(1,m)出發的情形。

引理 1

$n\times4$ 網格中所有由(1,1)出發，(n,1)結束的路徑其第一行的連通值必大於 4

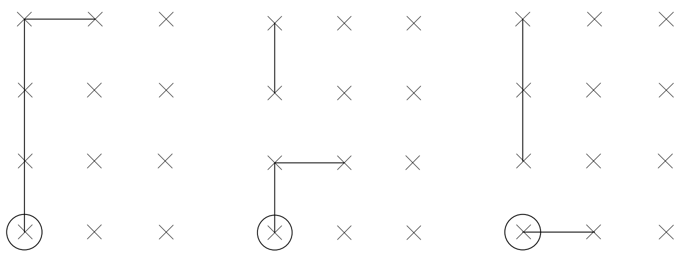
証明：因為(1,4)僅與(1,3)和(2,4)相鄰，所以(1,1)出發，(n,1)結束的路徑必經由路徑(1,3)—(1,4)，得証。

在後面的證明裡我們會常常應用到這個性質。

引理 2

$n\times4$ 網格中由(1,1)出發，(n,1)結束的路徑若第一行連通值為奇數，則必為 5 或 7；若為偶數，則必為 6

証明：



連通值為 7　　連通值為 5　　連通值為 6

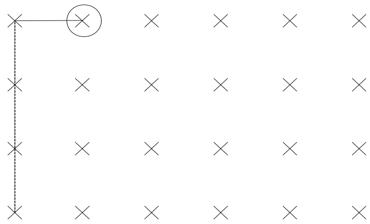
(二)計數：

引理 3　*連通值為 7*

$$T_7(n,4)=U(n-1,4)$$

証明：如下圖，連通值為 7 的路徑可視為 $(n-1)\times4$ 的格子中由(1,4)出發，(n-1,1)結束的路徑，得証。

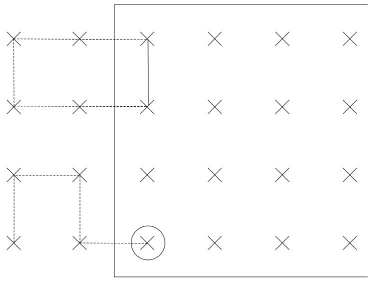
像這樣**省略部分路徑，把原有路徑視為另一路徑**，是我們的研究裡最主要的手法。



引理 4　*連通值爲 5*

$$T_5(n,4) = T(n-2,4)$$

證明：如下圖，第一行的連通值爲 5 的路徑可視爲 $(n-2)\times 4$ 的格子中由(1,1)出發，經過(1,3)—(1,4)，最後在(n-2,1)結束的路徑，由引理一得知它其實就是 $(n-2)\times 4$ 的格子中由(1,1)出發， (n-2,1)結束的路徑，得証。

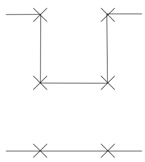


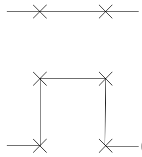
接著我們考慮第一行連通值爲 6 的路徑，在得到主要結果的過程中，我們會用到一種 $p\times 3$ **格子中由右下角(p,1)出發，右上角(p,3)結束的路徑，記總數爲** $M(\text{p},3)$ ，我們有下列結果：

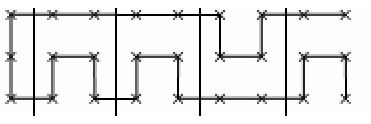
引理 5

$$M(\text{p},3) = \begin{cases} 2^{(p-1)/2} & \text{當 } p \text{ 爲奇數} \\ 0 & \text{當 } p \text{ 爲偶數} \end{cases}$$

證明：因爲 p×3 網格中由(p,1)開始，(p,3)結束之路徑必由下列(i)(ii)之一所組合而成：


(i)


(ii)


(以 p=9 爲例)

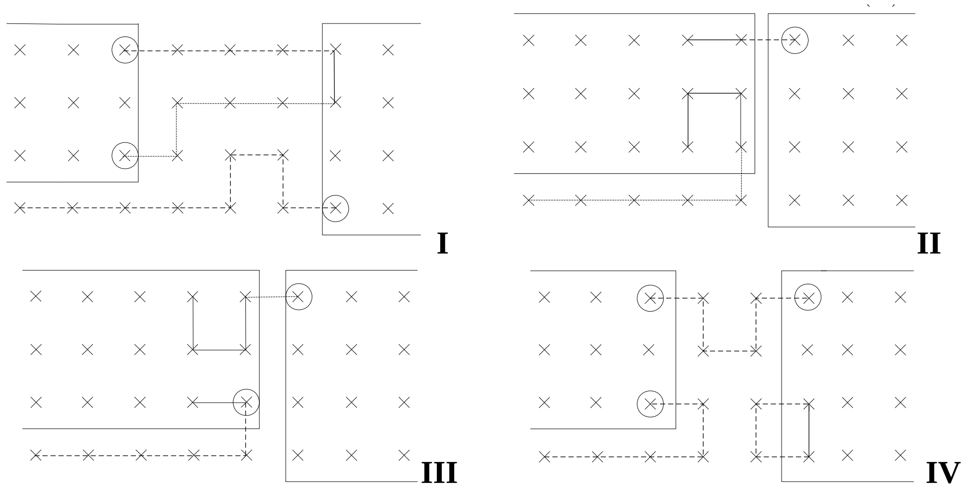
因此 $M(\text{p},3) = 2M(\text{p}-2,3)$

而顯然 $M(1,3) = 1$， $M(2,3) = 0$ ，故得証

引理 6　*連通值爲 6*

$$T_6(n,4) = \sum_{p=1}^{[\frac{n}{2}]-1} (3\cdot 2^{p-1})U(n-2p-1,4) + \sum_{p=1}^{[\frac{n-3}{2}]} 2^{p-1}T(n-2p-2,4) + M(n-1,3)$$

証明：考慮第一行的連通值爲 6 的路徑必爲下列四種之一



連通值爲 6 的路徑顯然比先前討論過的 7 及 5 複雜許多，它**不能單純對應到另一個網格，而是兩個網格(**前述的$M(p,3)$以及$T(n,4)$或$U(n,4)$**)**的組合。
而且**左右兩半的網格會受到一開始向右走的步數 k 的影響**。

(1)第 **I** 種的路徑可以分解成爲左半部的M(k-1,3) 和右半部的T(n-k-2,4) 的組成

此種路徑總數有：$\sum_{j=1}^{n-5} M(j,3)T(n-3-j,4)$

(2)第 **II** 種及第 **III** 種的總數和爲：$\sum_{j=1}^{n-2} M(j+1,3)U(n-(j+1),4)$

(3)第 **IV** 種的總數爲：$\sum_{j=1}^{n-4} M(j,3)U(n-2-j+1,4)$

由(1)、(2)及(3)的討論可得：

$$T_6(n,4)=\sum_{j=1}^{n-5} M(j,3)T(n-3-j,4)+\sum_{j=1}^{n-2} M(j+1,3)U(n-(j+1),4)+\sum_{j=1}^{n-4} M(j,3)U(n-2-j+1,4)$$

再由引理 5，本引理得証

定理 1

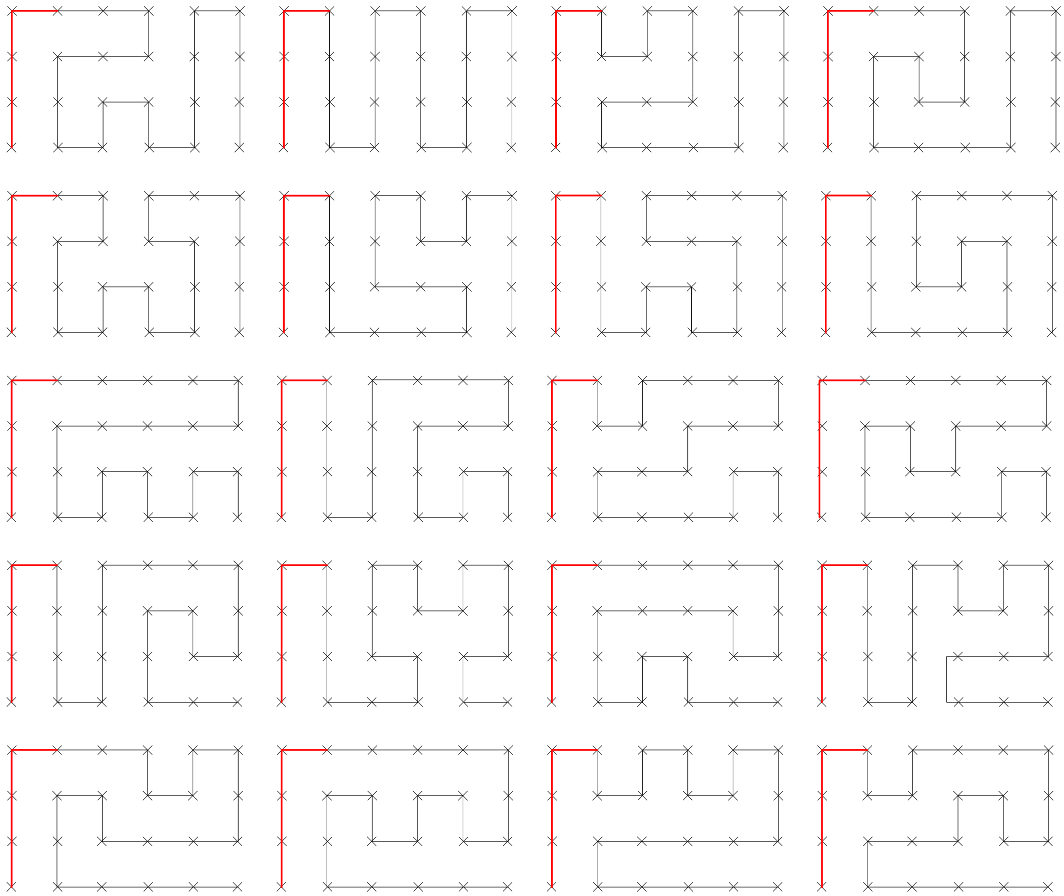
$$T(n,4)=T(n-2,4)+U(n-1,4)+\sum_{p=1}^{[\frac{n}{2}]-1}(3\cdot 2^{p-1})U(n-2p-1,4)+\sum_{p=1}^{[\frac{n-3}{2}]}2^{p-1}T(n-2p-2,4)+M(n-1)$$

$$U(n,4)=U(n-2,4)+T(n-1,4)+\sum_{p=1}^{[\frac{n}{2}]-1}(3\cdot 2^{p-1})T(n-2p-1,4)+\sum_{p=1}^{[\frac{n-3}{2}]}2^{p-1}U(n-2p-2,4)+M(n)$$

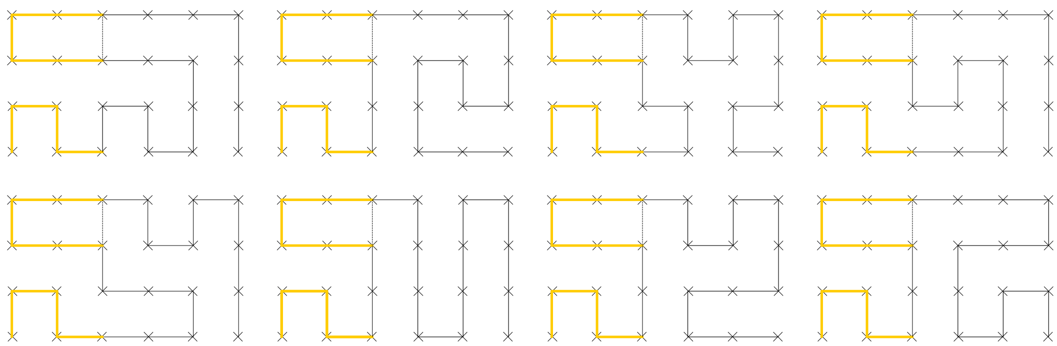
証明：因爲$U(n,4)$的計算如同$T(n,4)$，爲了閱讀上的方便我們只証明後者而省略前者。
由引理 2 知$T(n,4)=T_5(n,4)+T_7(n,4)+T_6(n,4)$，再由引理 3, 4 及 6 得証。

舉例：接著我們就舉6×4的例子，實際依照我們的分類流程做一次。

首先，以下是所有*連通值爲 7*的路徑
(紅色是它的固定路徑，右半部依我們的討論，就是一個完整的$U(5,4)$網格)

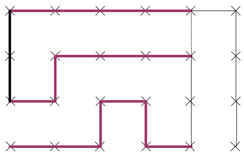


其次是*連通值爲 5*的路徑
(黃色是它的固定路徑，右半部是一個完整的$T(4,4)$網格)



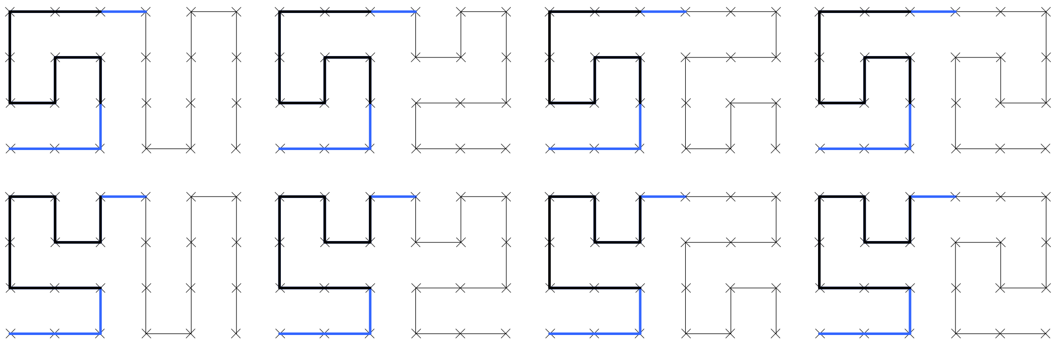
最後是*連通值爲 6*的路徑
同樣地，依照我們的分類，固定路徑有以下四種

第 **I** 種
(紫色部分是它的固定路徑，左半部是$M(1,3)$網格，右半部視爲一個$T(2,4)$)

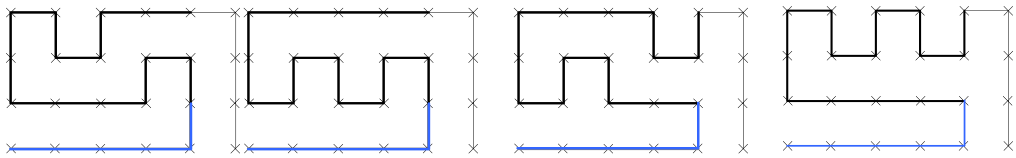


第 **II** 種及第 **III** 種
(藍色部分是它們的固定路徑)

(a) 左半部是 $M(3,3)$，右半部則是 $U(3,4)$

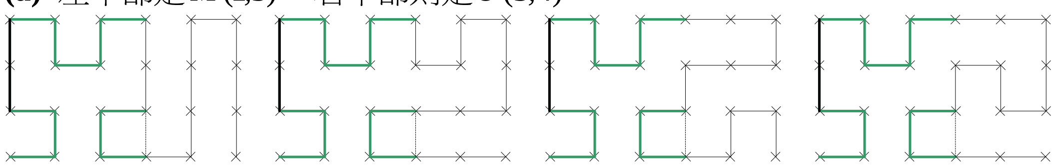


(b) 左半部是 $M(5,3)$，右半部則是 $U(1,4)$

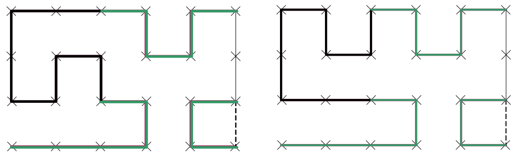


第 **IV** 種
(綠色部分是它們的固定路徑)

(a) 左半部是 $M(1,3)$，右半部則是 $U(3,4)$



(b) 左半部是 $M(3,3)$，右半部則是 $U(1,4)$

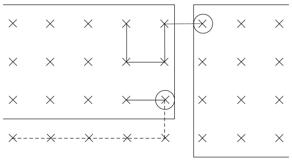


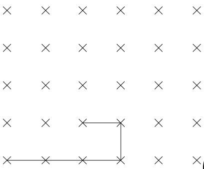
以上關於 6×4 的網格，由圖形以及程式 monkey try 得知它共有 47 種($T(6,4)=47$)，**與我們推導的結果完全相同**。

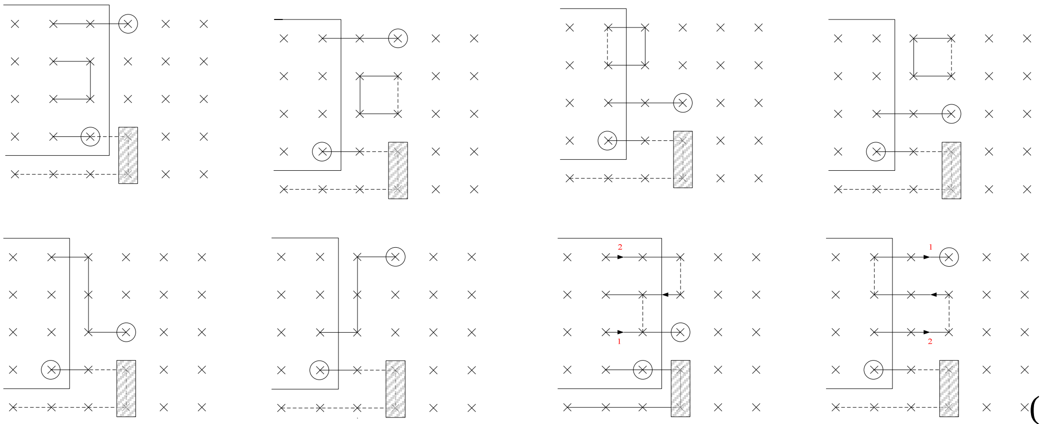
在實際討論 $n\times 4$ 之後，我們才發現這個**看似單純的題目其實頗複雜**，而接下來關於 $n\times 5$ 的討論，我們發現它**雖然只多了一列，卻比** $n\times 4$ **更加複雜許多**。

比如同樣是一開始水平向右，再向上，向左的情形： $n\times 4$ 只有一種固定路徑(圖一)；

$n\times5$(圖二)卻因爲多出來的「一列」，而有八種不同的固定路徑(圖三)。**這也是爲什麼平面上長方形網格的漢彌頓路徑總數公式尚未有人可以推廣到一般化**。


(圖一)


(圖二)


(圖三)

而以下關於$n\times5$的討論，因爲我們主要的手法都相同，所以就**粗體**標記出幾個比較特殊的手法以利閱讀。

二、$n\times5$

(一)分類與定義：

首先我們用與定義$n\times4$網格連通值相同的方法定義連通值。並且其中關於$T(n,5)$網格的連通值從上而下算起；$U(n,5)$則由下而上。

例如，


$(1010)_2=10$


$(1011)_2=11$

引理 7

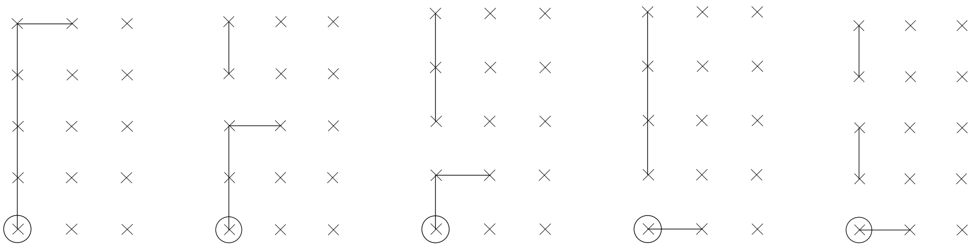
$n\times5$網格中由(1,1)或(1,5)出發，(n,1)結束的路徑其第一行的連通值必大於 8

証明：因爲(1,5)僅與(1,4)和(2,5)相鄰，所以(1,1)出發，(n,1)結束的路徑必經由路徑$(1,4)\to(1,5)$，得証。

引理 8

$n\times 5$ 網格中由(1,1)或(1,5)出發，(n,1)結束的路徑第一行的連通值若爲奇數，則必爲 11，13 或 15；若其連通值爲偶數，則必爲 10 或 14

證明：其第一行的連通值有以下五種



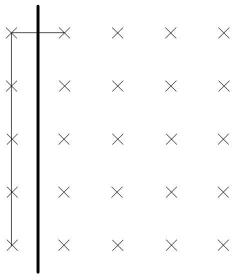
連通值爲 15　連通值爲 11　連通值爲 13　連通值爲 14　連通值爲 10

(二)計數：

引理 9　*連通值爲 15*

$$T_{15}(n,5)=U(n-1,5)$$

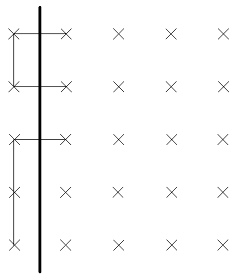
證明：如下圖，第一行的連通值爲 15 的路徑可視爲$(n-1)\times 5$的格子中由(1,5)出發，(n-1,1)結束的路徑，得證。



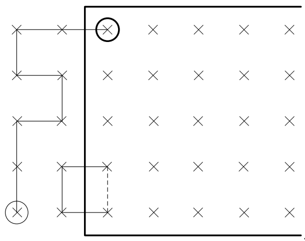
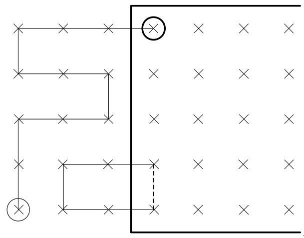
引理 10　*連通值爲 11*

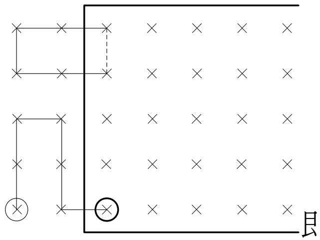
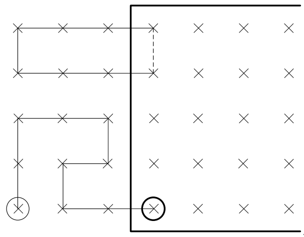
$$T_{11}(n,5)=\sum_{j=1}^{n-2}\left[T(j,5)+U(j,5)\right]$$

證明：下圖爲第一行的連通值爲 11 的網格一定會經過的路徑。



再向右 k 步之後，它可以再垂直上升或下降，如下示意圖


即$U(n-2,5)$

即$U(n-3,5)\cdots\cdots$

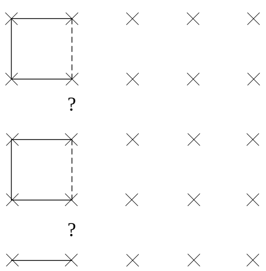

即$T(n-2,5)$

即$T(n-3,5)\cdots\cdots$

以此類推，則得證。

引理 11 *連通值爲 10*

$$T_{10}(n,5)=T(n-1,5)-T_{13}(n-1,5)$$

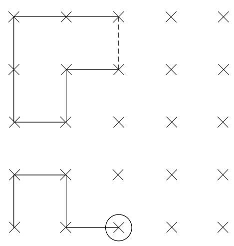
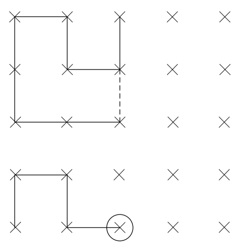
証明：如上圖，第一行的連通值爲 10 的路徑可視爲$(n-1)\times 5$的格子中由(1,1)出發，(n-1,1)結束且**第一行的連通值爲(1a1b)$_2$**，a , b$\in\{0,1\}$**的路徑，它的值可能爲** 10 , 11 , 14 , 15，**即除** 13 **之外所有的**情形，得証。



引理 12 *連通值爲 13*

$$T_{13}(n,5)=2T(n-2,5)+T_{13}(n-3,5)-T(n-3,5)-T_{11}(n-2,5)\text{ ；}$$

証明：第一行的連通值爲 13 的路徑必爲下列二者之一

前一種顯然爲$T(n-2,5)$；後者可視爲T網格中第一行連通值不小於 12 的路徑，由引理 8 可得其路徑總數爲$T(n-2,5)-T_{11}(n-2,5)-T_{10}(n-2,5)$，其中，由引理 5 知$T_{10}(n-2,5)=T(n-3,5)-T_{13}(n-3,5)$。

綜合以上討論，本引理成立。

接著我們考慮第一行連通值爲 10 及 14 的路徑，在得到主要結果的過程中，我們會用到$n\times 4$ **格子中由右下角(p,1)出發，右上角(p,4)結束的網格，記總數爲** $M(n,4)$ 以及 $n\times 4$ **格子中由右下角(p,1)出發，(p,2)結束的網格，記總數爲** $N(n,4)$ ，我們有下列結果：

(三) $M(n,4)$ 及 $N(n,4)$ 的計算：

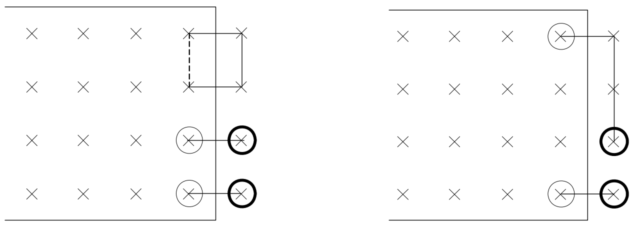
定義 $M(n,4)$ 表示 $n\times 4$ 的網格中，由(n,1)出發(n,4)結束的路徑總數。

定義 $N(n,4)$ 表示 $n\times 4$ 的網格中，由(n,1)出發(n,2)結束的路徑總數。

引理 13

$$N(n,4)=N(n-1,4)+M(n-1,4)$$

証明： $N(n,4)$ 一開始的路徑可分爲下列兩種：



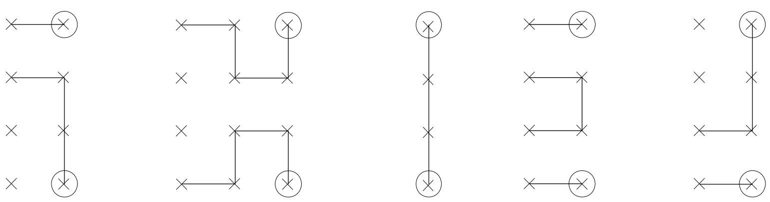
前一種可視爲 $(n-1)\times 4$ 的網格中，從 $(n-1,1)$ 出發 $(n-1,2)$ 結束的路徑，即 $N(n-1,4)$ ；另一種則是 $(n-1,1)$ 出發 $(n-1,4)$ 結束的路徑，即 $M(n-1,4)$ ，得証。

引理 14

當 $n\geq 5$ *時* $\quad M(n,4)=2M(n-1,4)+2M(n-2,4)-2M(n-3,4)+M(n-4,4)$

且 $M(1,4)=1=M(2,4),\ M(3,4)=4,\ M(4,4)=8$

証明：爲方便証明，將 M 網格依其第一行的連通值區分，若爲奇數，則必爲 3、5 或 7；若爲偶數，則必爲 2 或 6。(如下圖)



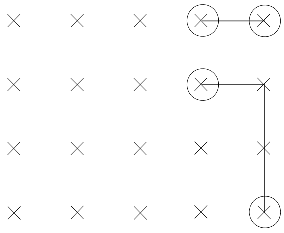
連通值爲 3　　連通值爲 5　　連通值爲 7　　連通值爲 2　　連通值爲 6

它們的總數分別以 $M_3(n,4)$ 、 $M_5(n,4)$ 、 $M_7(n,4)$ 、 $M_2(n,4)$ 及 $M_6(n,4)$ 表示。

當 $n<5$ 時直接計算可得。所以底下我們考慮 $n\geq 5$ 的情形：

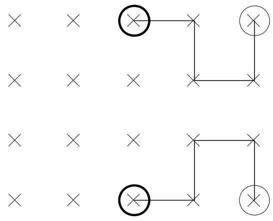
顯然， $M_7(n,4)=1$

1.連通值爲 3



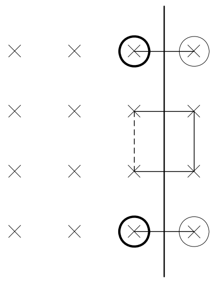
即 $M_3(n,4)=N(n-1,4)$

2.連通值爲 5



顯然可視爲 $M(n-2,4)$ ，故得： $M_5(n,4)=M(n-2,4)$

3.連通值爲 2



可視爲 M 網格中第一行的連通值爲$(a1b)_2$的情形，其中 $a,b\in\{0,1\}$ ，它的值可能爲 3、2 和 6，也就是除了 5 之外所有的情形。
故得： $M_2(n,4)=M(n-1,4)-M(n-3,4)$

4. 類似於 $M_3(n,4)$ 的討論， $M_6(n,4)=N(n-1,4)=M_3(n,4)$

綜合(1)~(4)的討論，本引理成立。

引理 **15** *連通值爲 10 及 14*

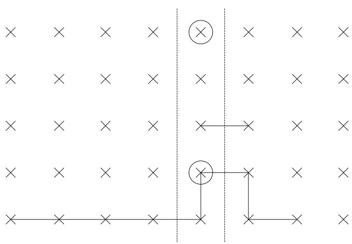
$$T_{10}(n,5)+T_{14}(n,5)=$$

$$\sum_{k=1}^{n-4}\left[M_3(k+1,4)+M_5(k+1,4)\right]T_{13}(n-k,5)+$$

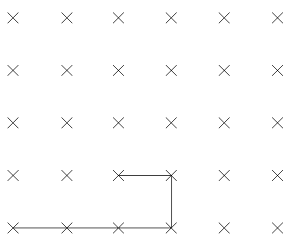
$$\sum_{k=1}^{n-2}\left[M_2(k,4)+M(k-1,4)+2N(k-1,4)\right]\left[U_{11}(n-k,5)+U(n-k,5)-U_{13}(n-k,5)+U(n-k-1,5)+T_{11}(n-k,5)\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{n-2}M_5(k+1,4)U(n-(k+1),5)+\sum_{k=1}^{n-2}M_3(k+1,4)U(n-(k+1),5)+\sum_{k=1}^{n-2}M_3(k+1,4)U(n-k,5)$$

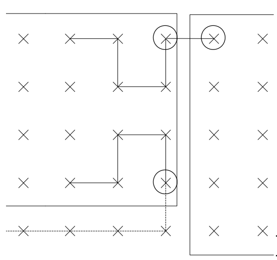
証明：第一行的連通值爲 10 或 1 4 所經的路徑必爲下列五種之一



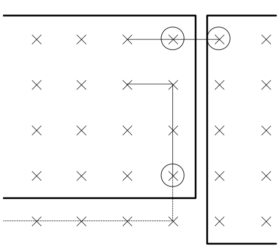
I

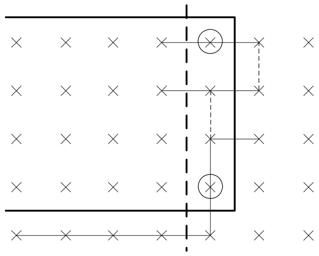


II



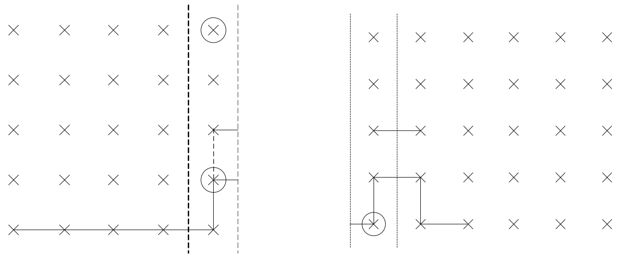
III


IV


V

1. 路徑 **I** 的總數爲 $\sum_{k=1}^{n-4}\left[M_3(k+1,4)+M_5(k+1,4)\right]\alpha(n-k,5)$

它的路徑沿著虛線劃分後，便可以視爲如下兩部份的組成



其中左半部可視爲 $M(k+1,4)$ 的網格中，第一行的連通值爲$(a\ b1)_2$， $a,b\in\{0,1\}$ 的情形。它的值可能爲 3 和 5，即 $M_3(k+1,4)+M_5(k+1,4)$ 。

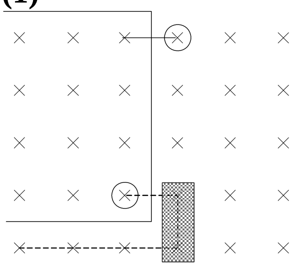
右半部則是 $T_{13}(n-k,5)$ 。以下也都用類似的方式證明。

2. 路徑 **II** 的總數爲

$$\sum_{k=1}^{n-2}\left[M_2(k,4)+M(k-1,4)+2N(k-1,4)\right]\left[U_{11}(n-k,5)+U(n-k,5)-U_{13}(n-k,5)+U(n-k-1,5)+T_{11}(n-k,5)\right]$$

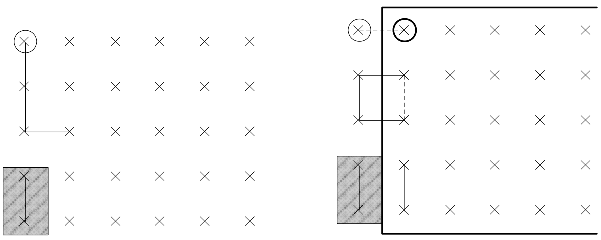
它在向左 k 步後第一次走垂直，並再向左走一步之後，可能有以下八種路徑

(1)



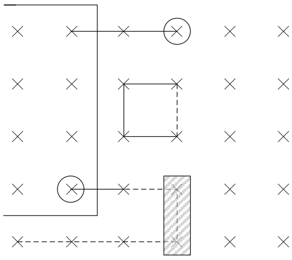
總數爲 $\sum_{k=1}^{n-2}M(k,4)\left[U_{11}(n-k,5)+U(n-k,5)-U_{13}(n-k,5)\right]$

証明；顯然，左半部爲$M(k,4)$；右半部則是$U(n-k,5)$ 的網格中，不經過$(1,1)$及$(1,2)$兩點的情況，走法總數有$U_{11}(n-k,5)+U(n-k,5)-U_{13}(n-k,5)$，證明如下：右半部的固定路徑有以下兩種



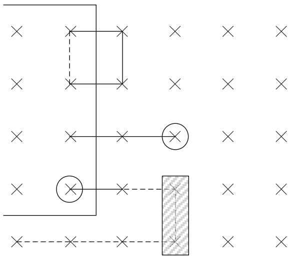
前者是$U_{11}(n-k,5)$；後者爲$U(n-k-1,5)$的網格中第一行的連通值由下而上爲(1a1b)$_2$的情形，其值可能爲 10、11、14、15，即$U(n-k,5)-U_{13}(n-k,5)$。

(2)



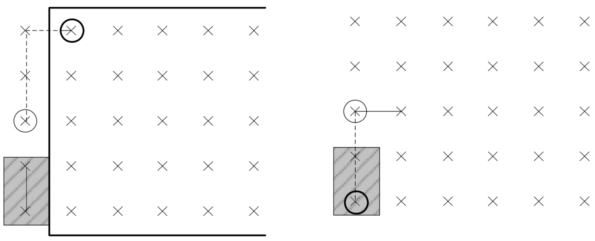
總數爲$\sum_{k=1}^{n-2}M(k-1,4)\left[U_{11}(n-k,5)+U(n-k,5)-U_{13}(n-k,5)\right]$

(3)



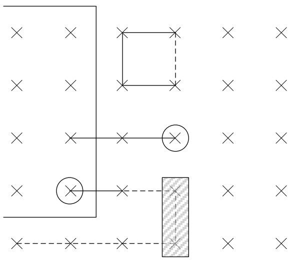
總數爲$\sum_{k=1}^{n-2}N(k-1,4)\left[U(n-k-1,5)+T_{11}(n-k,5)\right]$

左半部顯然爲(三)的討論中的$N(n-1,4)$；右半部則是$(n-\mathrm{k})\times 5$的格子中，由(1,3)出發，但是不經過(1,1)及(1,2)兩點的情況，走法總數有$U(n-k-1,5)+T_{11}(n-k,5)$，證明如下：右半部的固定路徑有以下兩種



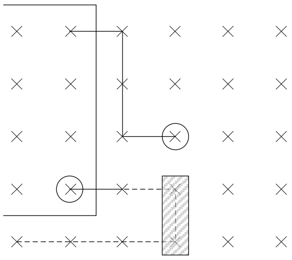
顯然前者爲$U(n-1,5)$；後者爲$T_{11}(n,5)$。
以下都用類似的方法証明。

(4)



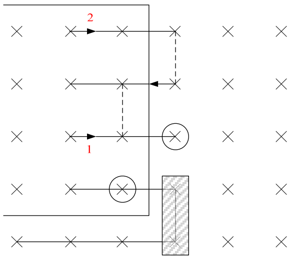
總數爲$\sum_{k=1}^{n-2}N(k-1,4)\times\left[U(n-k-1,5)+T_{11}(n-k,5)\right]$

(5)



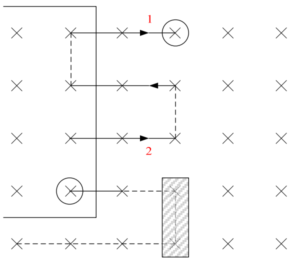
總數爲$\sum_{k=1}^{n-2} M(k-1,4)\left[U(n-k-1,5)+T_{11}(n-k,5)\right]$

(6)



總數爲$\sum_{k=1}^{n-2} M_2(k,4)\left[U(n-k-1,5)+T_{11}(n-k,5)\right]$

(7)



總數爲$\sum_{k=1}^{n-2} N(k-1,4)\left[U_{11}(n-k,5)+U(n-k,5)-U_{13}(n-k,5)\right]$

3. 路徑 **III** 的總數爲$\sum_{k=1}^{n-2} M_5(k+1,4)U(n-(k+1),5)$

4. 路徑 **IV** 的總數爲$\sum_{k=1}^{n-2} M_3(k+1,4)U(n-(k+1),5)$

5. 路徑 **V** 的總數爲$\sum_{k=1}^{n-2} M_3(k+1,4)U(n-k,5)$

由 1,2,3,4,5 的討論可得：

$$T_{10}(n,5)+T_{14}(n,5)=\sum_{k=1}^{n-4}\left[M_3(k+1,4)+M_5(k+1,4)\right]T_{13}(n-k,5)+$$

$$\sum_{k=1}^{n-2}\left[M_2(k,4)+M(k-1,4)+2N(k-1,4)\right]\left[U_{11}(n-k,5)+U(n-k,5)-U_{13}(n-k,5)+U(n-k-1,5)+T_{11}(n-k,5)\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{n-2} M_5(k+1,4)U(n-(k+1),5)+\sum_{k=1}^{n-2} M_3(k+1,4)U(n-(k+1),5)+\sum_{k=1}^{n-2} M_3(k+1,4)U(n-k,5)$$

再進一步與前面引理直接計算整理可得

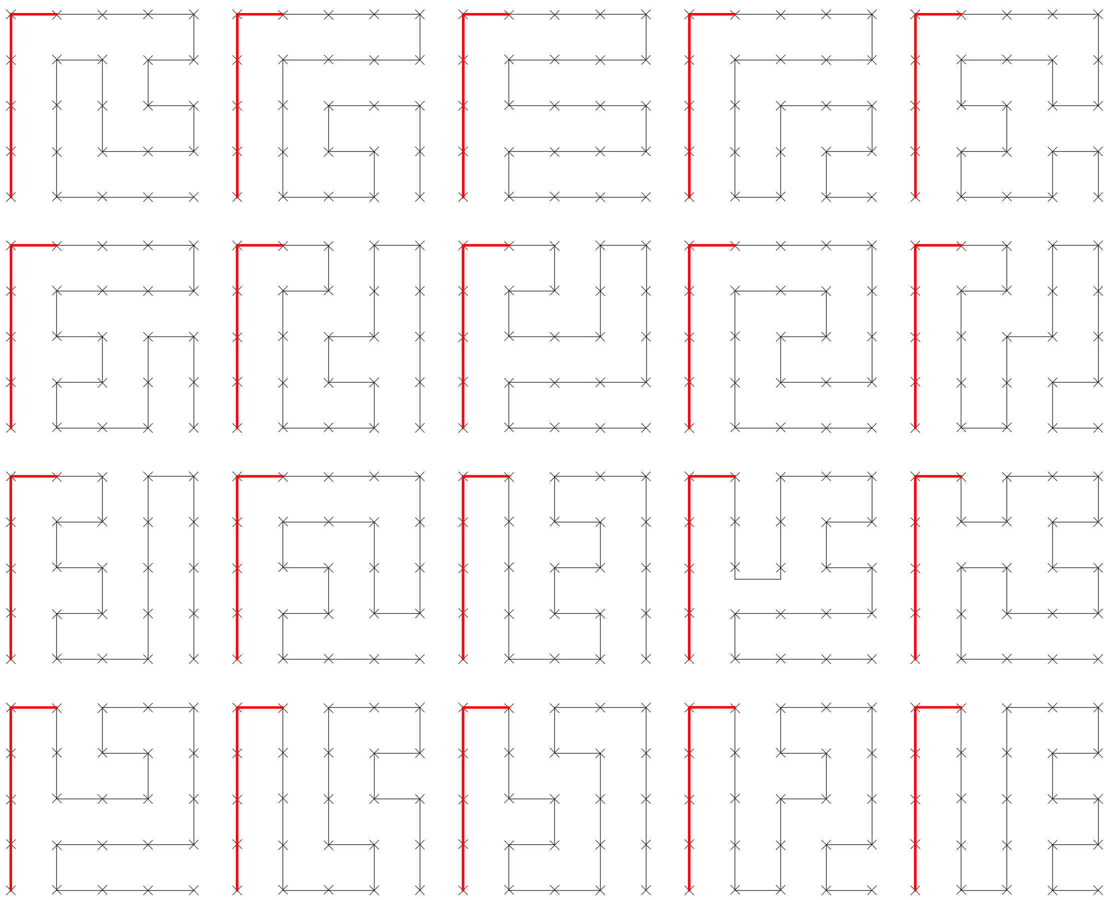
定理 2

$$
\begin{aligned}
T(n)= & \\
& T(n-1)+T(n-3)-T(n-4)+3T(n\text{-}2)-3T(n\text{-}3)\text{-}T(n\text{-}5)+U(n\text{-}1)-2U(n\text{-}4) \\
& +\sum_{k=1}^{n-7}\left\{\begin{array}{l}
M(k\text{-}3)\left[-\frac{1}{4}T(n\text{-}k\text{-}2)-\frac{3}{4}T(n\text{-}k\text{-}3)+\frac{1}{4}T(n\text{-}k\text{-}5)-\frac{3}{4}U(n\text{-}k\text{-}1)+U(n\text{-}k\text{-}3)\text{-}U(n\text{-}k\text{-}4)\right] \\
+M(k\text{-}1)\left[2T(n\text{-}k\text{-}2)\text{-}3T(n\text{-}k\text{-}3)+U(n\text{-}k\text{-}1)\text{-}U(n\text{-}k\text{-}2)\text{-}2U(n\text{-}k\text{-}4)+U(n\text{-}k\text{-}5)\right] \\
+M(k+1)\left[\frac{7}{4}T(n\text{-}k\text{-}2)+\frac{1}{4}T(n\text{-}k\text{-}3)+\frac{5}{4}U(n\text{-}k\text{-}1)+\frac{5}{4}U(n\text{-}k\text{-}2)-3U(n\text{-}k\text{-}3)+\frac{2}{3}U(n\text{-}k\text{-}4)\right]
\end{array}\right\} \\
& +\frac{5}{4}M(n\text{-}1)+\frac{5}{4}M(n\text{-}2)+\frac{23}{2}M(n\text{-}3)+\frac{61}{2}M(n\text{-}4)+\frac{527}{2}M(n\text{-}5)+\frac{2013}{4}M(n\text{-}6) \\
& +\frac{223}{2}M(n\text{-}7)+\frac{6817}{2}M(n\text{-}8)+\frac{507}{4}M(n\text{-}9)-\frac{1402}{2}M(n\text{-}10)
\end{aligned}
$$

証明：如同 $n\times 4$ ，我們爲了閱讀上的方便省略 $U(n,5)$ 的推導。由引理 8 知 $T(n,5)=T_{11}(n,5)+T_{13}(n,5)+T_{15}(n,5)+T_{10}(n,5)+T_{14}(n,5)$ ，再由引理 9、10、11、12 及 15 得証。

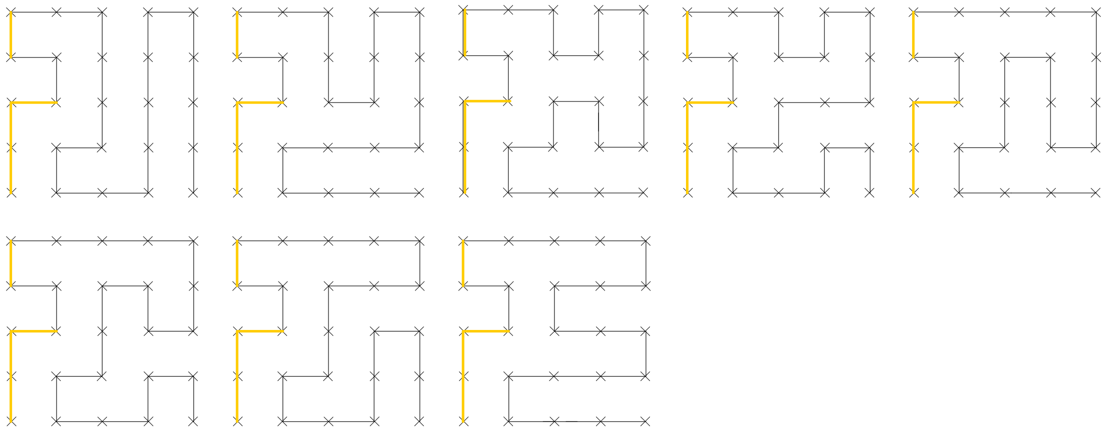
舉例：接著我們舉 5×5 的例子，依照我們的分類流程實際做一次。

也是首先討論*連通值爲 15* 的路徑
（紅色是它的固定路徑，右半部依我們的討論，就是一個完整的 $U(4,5)$ 網格）

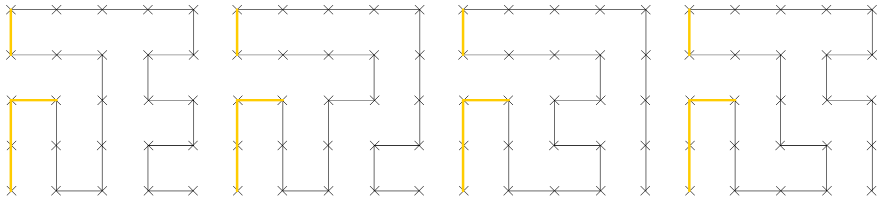


其次討論*連通值爲 11* 的路徑
(黃色是它的固定路徑)

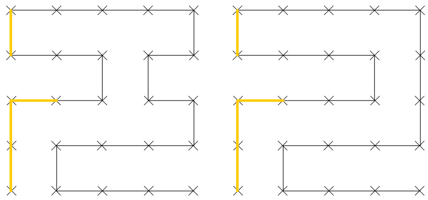
(a) 右半部是完整的 $U(3,5)$



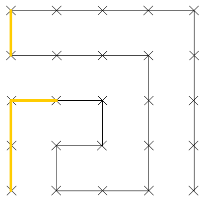
(b) 右半部是完整的 $T(3,5)$



(c) 右半部是完整的 $U(2,5)$

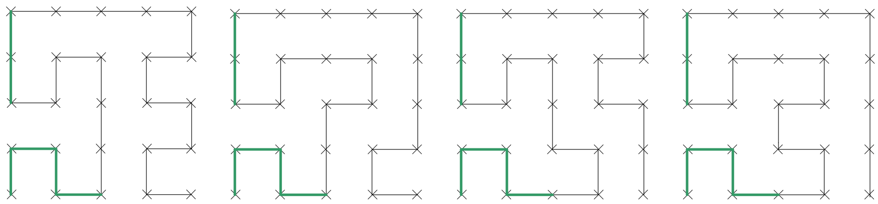


(d) 右半部是完整的 $T(2,5)$

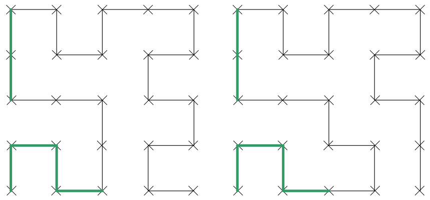


接著討論*連通值爲 13* 的路徑
(綠色是它的固定路徑)

(a) 右半部是 $T(3,5)$



(b) 右半部是完整的T網格扣掉連通值爲 10 及 11 兩種，也就是$T(3,5)-T_{11}(3,5)-T_{10}(3,5)$

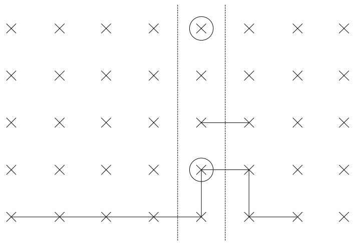


連通值爲 10 及 14 的路徑

(藍色是它的固定路徑，同樣地，依照我們的分類有以下五種)

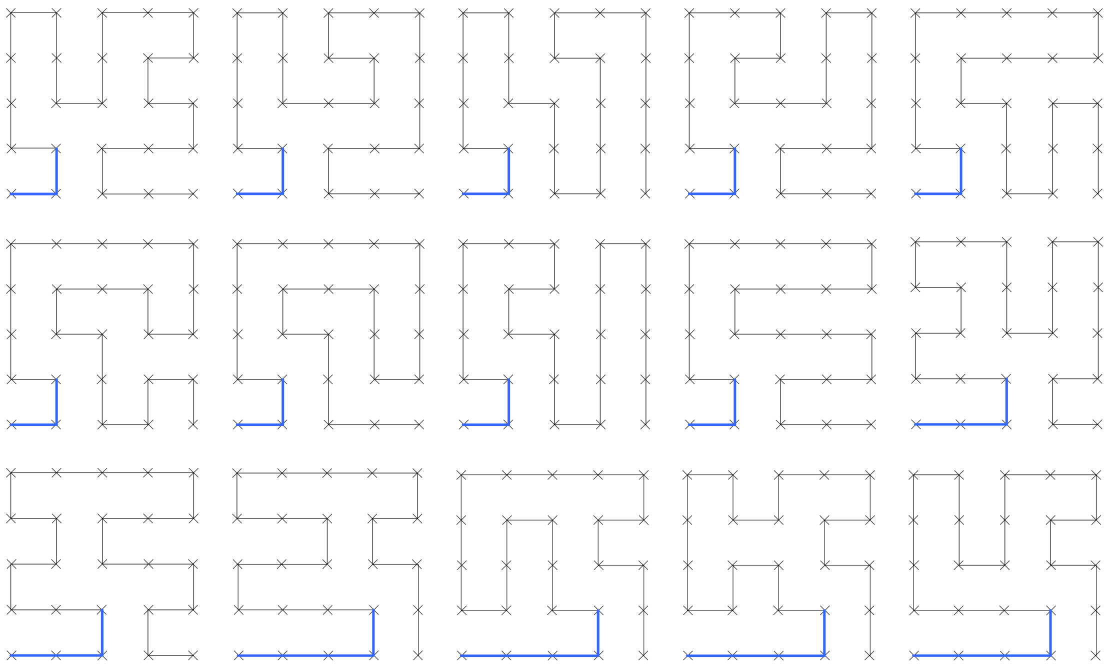
第 **I** 種

也就是如下圖的路徑，在行數爲 5 時沒有此情況

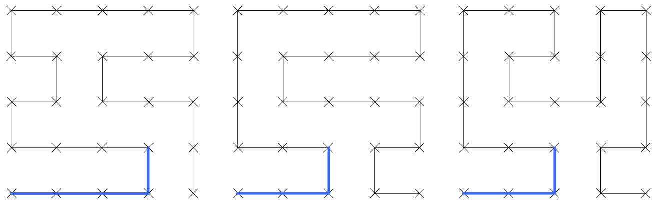


第 **II** 種

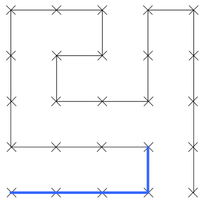
(1) 左半部是完整的M網格，右半部可視爲一個缺失了(1,1)及(1,2)兩點的U網格



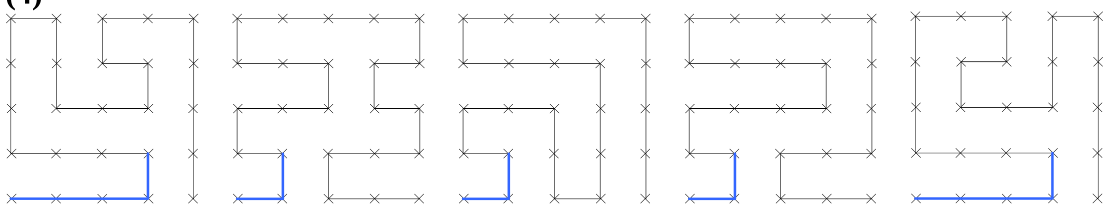
(2) 類似(1)的手法



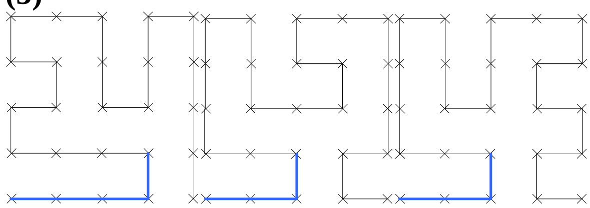
(3) 左半部是完整的 N 網格，右半部可視爲一個缺失了(1,1)及(1,2)兩點的 T 網格，以下(4)(5)(6)(7)手法類似



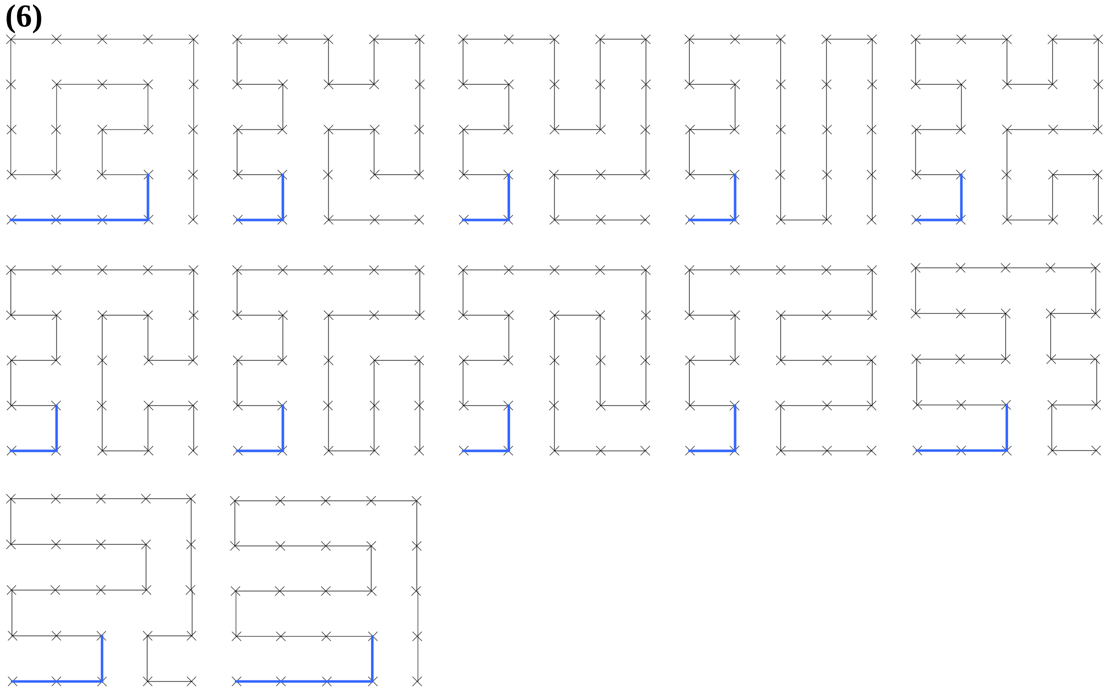
(4)



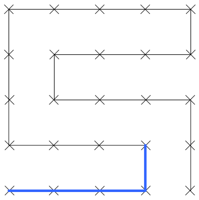
(5)



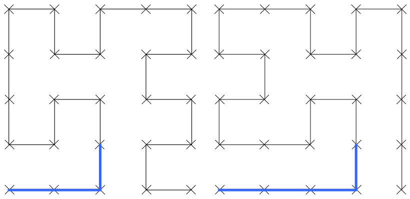
(6)



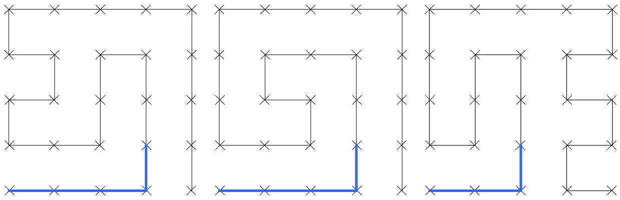
(7)



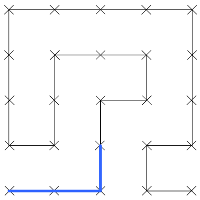
第 **III** 種 以下都類似 II 的手法



第 **IV** 種



第 **V** 種



以上關於5×5的網格，由圖形以及程式 monkey try 得知它共有 86 種($T(5,5)=86$)，**與我們推導的結果完全相同**。

肆、研究結果

一、 $n\times 4$的結果：

因爲$T(n,4), U(n,4)$滿足定理一，若令$V_k=T(k,4)+U(k,4)$，$W_k=T(k,4)-U(k,4)$，$k\in N$ 。

經由簡單的計算，可得到關於數列$\langle V_k\rangle$ 及 $\langle U_k\rangle$的遞迴關係式：

(1) $$V_{k+4}=V_{k+3}+3V_{k+2}+V_{k+1}-V_k\ ,$$

(2) $$W_{k+4}=-W_{k+3}+3W_{k+2}-W_{k+1}-W_k\ 。$$

而由$T(i,4), U(i,4),\ i=1,2,3,4$可以得到下列初始條件：

(3) $$V_1=1,\ W_1=-1,\quad V_2=1,\ W_2=1,\quad V_3=4,\ W_3=-4,\quad V_4=8,\ W_4=8.$$

註解 1：

V_k與W_k的特徵方程式分別爲

(4) $$f(x)\equiv x^4-x^3-3x^2-x+1=0$$

(5) $$g(x)\equiv x^4+x^3-3x^2+x+1=0$$

令$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$及$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$分別表示方程式$f(x)=0$及$g(x)=0$的四個相異實根，則

(6) $$V_k=\lambda_1\alpha_1{}^k+\lambda_2\alpha_2^k+\lambda_3\alpha_3{}^k+\lambda_4\alpha_4{}^k,$$

(7) $$W_k=\mu_1\beta_1{}^k+\mu_2\beta_2^k+\mu_3\beta_3{}^k+\mu_4\beta_4{}^k,$$

其中常數$\lambda_i,\ \mu_i$, $i=1,2,3,4$ ，滿足初始條件(3)。

因此，可得下列結果：

(8) $$T(k,4)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}(\lambda_j\alpha_j{}^k+\mu_j\beta_j^k)\quad ,\quad U(k,4)=\frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{4}\lambda_j\alpha_j{}^k-\mu_j\beta_j^k\right\}\ ，k\in\mathbf{N}$$

二、 $n\times 4$結果的驗証：

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
V	1	1	4	8	20	47	111	264	624	1480	3505	8305	19676	46616	110444
W	-1	1	-4	8	-20	47	-111	264	-624	1480	-3505	8305	-19676	46616	-110444
T	**0**	**1**	**0**	**8**	**0**	**47**	**0**	**264**	**0**	**1480**	**0**	**8305**	**0**	**46616**	**0**
U	**1**	**0**	**4**	**0**	**20**	**0**	**111**	**0**	**624**	**0**	**3505**	**0**	**19676**	**0**	**110444**

16	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
261663	619935	1468752	3479776	8244304	19532449	46276385	109638260	259755560
261663	-619935	1468752	-3479776	8244304	-19532449	46276385	-109638260	259755560
261663	**0**	**1E+06**	**0**	**8244304**	**0**	**46276385**	**0**	**259755560**
0	**619935**	**0**	**3479776**	**0**	**19532449**	**0**	**109638260**	**0**

32	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**
2.57862E+11	6.10927E+11	1.44741E+12	3.42922E+12	8.12451E+12	1.92486E+13	4.5604E+13
2.57862E+11	-6.10927E+11	1.44741E+12	-3.42922E+12	8.12451E+12	-1.92486E+13	4.5604E+13
2.57862E+11	**0**	**1.4474E+12**	**0**	**8.1245E+12**	**0**	**4.56E+13**
0	**6.10927E+11**	**0**	**3.42922E+12**	**0**	**1.92486E+13**	**0**

根據 http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html
這個神奇的網站上所提供的答案，數列{T(2n,4)}為：
0，1，8，47，264，1480，8305，46616，261663，1468752，8244304，46276385，259755560，1458042831，8184190168，45938958232，257861540369，1447411446840，8124514782015，45603992276896，255981331487648…

而數列{U(2n+1,4)}為：1，4，20，111，624，3505，19676，110444，619935，3479776，19532449，109638260，615414276，3454402959，19390027600，108838828241，610926955724，3429215026140，19248644351551，108045225087424，606472354675265…
完全符合我們的計算。

(2)接著我們再提供兩個小程式 T_NX4.exe 及 U_NX4.exe 以窮舉的方法去找出所有的路徑，也完全符合我們的結果。(程式碼如附件二)

三、n×5

$$
\begin{aligned}
&T(n)-T(n-1)-T(n-3)+T(n-4)=\\
&3T(n\text{-}2)-3T(n\text{-}3)\text{-}T(n\text{-}5)+U(n\text{-}1)-2U(n\text{-}4)\\
&+\frac{5}{4}M(n\text{-}1)+\frac{5}{4}M(n\text{-}2)+\frac{23}{2}M(n\text{-}3)+\frac{61}{2}M(n\text{-}4)+\frac{527}{2}M(n\text{-}5)+\frac{2013}{4}M(n\text{-}6)\\
&+\frac{223}{2}M(n\text{-}7)+\frac{6817}{2}M(n\text{-}8)+\frac{507}{4}M(n\text{-}9)-\frac{1402}{2}M(n\text{-}10)\\
&+\sum_{k=1}^{n-7}\left\{\begin{array}{l}
M(k\text{-}3)\left[-\frac{1}{4}T(n\text{-}k\text{-}2)-\frac{3}{4}T(n\text{-}k\text{-}3)+\frac{1}{4}T(n\text{-}k\text{-}5)-\frac{3}{4}U(n\text{-}k\text{-}1)+U(n\text{-}k\text{-}3)\text{-}U(n\text{-}k\text{-}4)\right]\\
+M(k\text{-}1)\left[2T(n\text{-}k\text{-}2)\text{-}3T(n\text{-}k\text{-}3)+U(n\text{-}k\text{-}1)\text{-}U(n\text{-}k\text{-}2)\text{-}2U(n\text{-}k\text{-}4)+U(n\text{-}k\text{-}5)\right]\\
+M(k+1)\left[\frac{7}{4}T(n\text{-}k\text{-}2)+\frac{1}{4}T(n\text{-}k\text{-}3)+\frac{5}{4}U(n\text{-}k\text{-}1)+\frac{5}{4}U(n\text{-}k\text{-}2)-3U(n\text{-}k\text{-}3)+\frac{2}{3}U(n\text{-}k\text{-}4)\right]
\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

四、$M(n,3),\ M(n,4)$

若$M(n,3),\ M(n,4)$分別表示$n\times 3,\ n\times 4$的網格中，由(n,1)出發(n,4)結束的路徑總數。

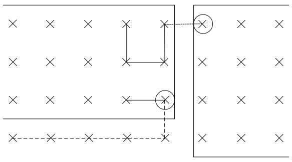
(1) $M(\mathrm{p},3) = \begin{cases} 2^{(p-1)/2} & \text{當 } p \text{為奇數} \\ 0 & \text{當 } p \text{為偶數} \end{cases}$

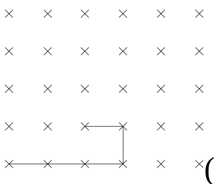
(2) $M(1,4)=1=M(2,4),\ M(3,4)=4,\ M(4,4)=8$ 。
當$n\geq 5$時， $M(n,4)=2M(n-1,4)+2M(n-2,4)-2M(n-3,4)+M(n-4,4)$

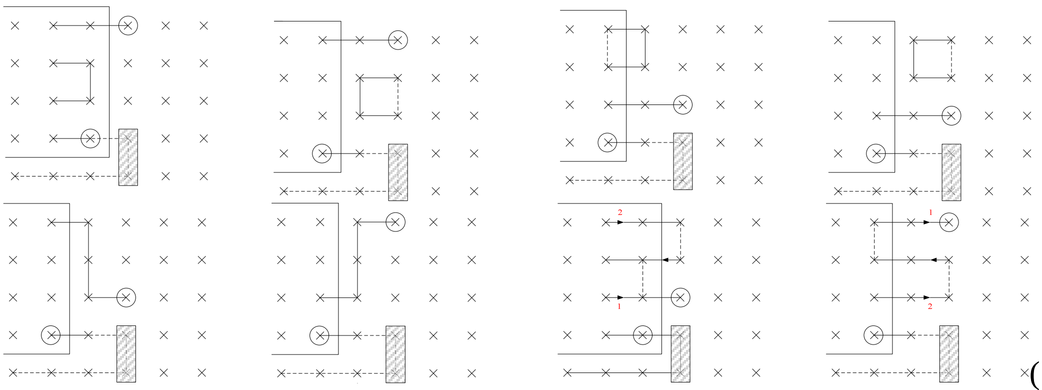
由 Excel 計算 此數列為 1, 1, 4, 8, 23, 55, 144, 360, 921, 2329, 5924, 15024, 38159, 96847,…
以我們所附的程式(附件三)SPEED_NM1.exe 及 SPEED_NM2.exe 以窮舉的方法驗算完全符合我們的計算。

五、$n\times 4$與$n\times 5$之比較，我們發現它雖然只多了一列，$n\times 5$卻比$n\times 4$更加複雜許多。

比如同樣是一開始水平向右，再向上，向左的情形：$n\times 4$只有一種固定路徑(圖一)；$n\times 5$(圖二)卻因爲多出來的「一列」，而有八種不同的固定路徑(圖三)。**這也是爲什麼平面上長方形網格的漢彌頓路徑總數公式尚未有人可以推廣到一般化。這個看似單純的題目其實頗複雜**


(圖一)


(圖二)


(圖三)

伍、結論

1. 關於行數爲 n 列數爲 m(表成$n\times m$)的網格我們目前所得的結果有$m=4$及 5，而對於$m\geq 6$之情況，依 K. L. Collins 及 L. B. Krompart[1] 所言，是很難的問題他們無法解答。我們對於一般$m\geq 6$網格的路徑，猜測也可以以我們的方法分析，但是還需要一段時間。

2. 在 K. L. Collins 及 L. B. Krompart[1]的結果中，$T(n,m),\ U(n,m),\ m=4,5$是由生成函數的的關係來描述：
   即令

$$F(4,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}T(n,4)x^n\ ,\quad G(4,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}U(n,4)x^n\ ,\quad F(5,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}T(n,5)x^n\ ,\quad G(5,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}U(n,5)x^n$$

$$q(x)=x^8-7x^6+9x^4-7x^2+1\ ,$$

$$p(x)=x^{12}+2x^{11}+5x^{10}+18x^9-24x^8+10x^7+30x^6-46x^5+2x^4+28x^3-7x^2-4x+1\ ,$$

$$r(x)=x(x^{10}+x^8+4x^7-10x^6+2x^5-2x^4+9x^3-3x^2-3x+1)\ ,$$

$$s(x)=x^2(-6x^7+5x^6+6x^4-6x^3+1)\ ,$$

則下列式子成立：

$$q(x)F(4,x)=x(x^4-3x^2+1)\ ,$$

$$q(x)G(4,x)=x^2(x^2+1)\ ,$$
$$p(x)F(5,x)=r(x)\ ,$$
$$p(x)G(5,x)=s(x)\ 。$$

相較之下，我們**比前述作者更爲直觀，其中獨特的分類方式也讓某些特定路徑變得容易討論**。

3. 其實我們在過程中，除了求出由(1,1)出發(n,4)結束的網格路徑，也**額外求出了由(n,1)出發(n,4)結束(也就是$M(n,m), m=3,4$)及由(n,1)出發(n,2)結束($N(n,m), m=3,4$)以及有虧格的網格路徑總數**，這有助於我們將一般性的$n\times m$的問題分割成上述圖形的組合，再估計它的總數。

4. 最後我們再附上二個程式(附件三)SPEED_NM1.exe 及 SPEED_NM2.exe 以窮舉的方法去找出$n\times m$問題的所有路徑，但執行程式的時間是很耗費時間的。

陸、參考文獻

[1] Karen L. Collins, Lucia B. Krompart, The number of Hamiltonian path in a rectangular grid, Discrete Mathematics, **169** (1997) 29-38

[2]Gerald Rosen, ROOK'S TOUR REPRESENTATION OF THE GENETIC CODE, Bulletin of Mathematical Biology, Vol. 53, No. 6, pp. 845-851 (1991)

附件一

n	V	W	T	U
1	1	-1	**0**	**1**
2	1	1	**1**	**0**
3	4	-4	**0**	**4**
4	8	8	**8**	**0**
5	20	-20	**0**	**20**
6	47	47	**47**	**0**
7	111	-111	**0**	**111**
8	264	264	**264**	**0**
9	624	-624	**0**	**624**
10	1480	1480	**1480**	**0**
11	3505	-3505	**0**	**3505**
12	8305	8305	**8305**	**0**
13	19676	-19676	**0**	**19676**
14	46616	46616	**46616**	**0**
15	110444	-110444	**0**	**110444**
16	261663	261663	**261663**	**0**
17	619935	-619935	**0**	**619935**
18	1468752	1468752	**1468752**	**0**
19	3479776	-3479776	**0**	**3479776**
20	8244304	8244304	**8244304**	**0**
21	19532449	-19532449	**0**	**19532449**
22	46276385	46276385	**46276385**	**0**
23	109638260	-109638260	**0**	**109638260**
24	259755560	259755560	**259755560**	**0**
25	615414276	-615414276	**0**	**615414276**
26	1458042831	1458042831	**1458042831**	**0**
27	3454402959	-3.454E+09	**0**	**3454402959**
28	8184190168	8184190168	**8184190168**	**0**
29	19390027600	-1.939E+10	**0**	**19390027600**
30	45938958232	4.5939E+10	**45938958232**	**0**
31	1.08839E+11	-1.088E+11	**0**	**1.08839E+11**
32	2.57862E+11	2.5786E+11	**2.57862E+11**	**0**
33	6.10927E+11	-6.109E+11	**0**	**6.10927E+11**
34	1.44741E+12	1.4474E+12	**1.44741E+12**	**0**
35	3.42922E+12	-3.429E+12	**0**	**3.42922E+12**
36	8.12451E+12	8.1245E+12	**8.12451E+12**	**0**
37	1.92486E+13	-1.925E+13	**0**	**1.92486E+13**
38	4.5604E+13	4.5604E+13	**4.5604E+13**	**0**
39	1.08045E+14	-1.08E+14	**0**	**1.08045E+14**
40	2.55981E+14	2.5598E+14	**2.55981E+14**	**0**
41	6.06472E+14	-6.065E+14	**0**	**6.06472E+14**
42	1.43686E+15	1.4369E+15	**1.43686E+15**	**0**
43	3.40421E+15	-3.404E+15	**0**	**3.40421E+15**
44	8.06527E+15	8.0653E+15	**8.06527E+15**	**0**

附件二

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
int
```

```
n=0,m=4,number_of_vertex=0;
void clear_vertex(int x, int y, char *mx)
{
    mx[x+y*n]=0;
}

void mark_vertex(int x, int y, char *mx)
{
    mx[x+y*n]=1;
}

char detect_vertex(int x, int y, char *mx)
{
    return mx[x+y*n];
}

void output_matrix(char *mx)
{
    int i=0,j=0;
    for(j=0;j<m;j++)
    {
        for(i=0;i<n;i++)
        {
            printf("%1d",detect_vertex(i,j,mx));
        }
        printf("\n");
    }
}

int Number_of_Path(int x, int y, int step, char *matrix)
{
    long int move_up=0,move_down=0,move_right=0,move_left=0;
    int i=0;
    static char m2[60];
    printf(" %d-%d (Step %d)\n",x,y,step);
    output_matrix(matrix);
    if(step==number_of_vertex)
    {
        clear_vertex(x,y,matrix);
        if((x==n-1)&&(y==0))
        {
            printf(" Done!\n");
            return 1;
        }
        else
        {
            printf(" Fail!\n");
            return 0;
        }
    }
```

```
    step++;

    for(i=0;i<number_of_vertex;i++)
        m2[i]=matrix[i];

    if((y>0)&&(detect_vertex(x,y-1,m2)==0))
    {
        mark_vertex(x,y-1,m2);
        move_up=Number_of_Path(x,y-1,step,m2);
    }
    if((y<m-1)&&(detect_vertex(x,y+1,m2)==0))
    {
        mark_vertex(x,y+1,m2);
        move_down=Number_of_Path(x,y+1,step,m2);
    }
    if((x>0)&&(detect_vertex(x-1,y,m2)==0))
    {
        mark_vertex(x-1,y,m2);
        move_left=Number_of_Path(x-1,y,step,m2);
    }
    if((x<n-1)&&(detect_vertex(x+1,y,m2)==0))
    {
        mark_vertex(x+1,y,m2);
        move_right=Number_of_Path(x+1,y,step,m2);
    }
    clear_vertex(x,y,matrix);
    return move_up+move_down+move_left+move_right;
}

void main()
{
    int i=0,j=0;
    static char matrix[60];
    clrscr();
    printf("\nPlease input n=?");
    scanf("%d",&n);
    number_of_vertex=n*4;
    for(i=0;i<n;i++)
        for(j=0;j<m;j++)
            clear_vertex(i,j,matrix);
    output_matrix(matrix);

    printf("n=%d m=%d numer of vertex=%d\n",n,m,number_of_vertex);

    mark_vertex(0,0,matrix);

    printf("\nNumber of Path = %d\n",Number_of_Path(0,0,1,matrix));
    getch();
}
```

【評語】040422

1)漢彌頓路徑是具研究潛力的主題，本件作品引用連通值概念對初始路徑進行分類的概念，進而推導路徑個數之演算式，確實是具創新的優秀作品。

2)作者群表達能力甚佳，然作品名稱雖新潮卻無法顯示作品內容，建議重新思考更貼切的名稱。

3)摘要中提及基因碼表現型之數量，建議強化此方面之應用性聯絡且著手處理 m 大於等於 6 之情形，必能進一步提昇本作品之學術及應用價值。

4)建議將本作品列為國際科展儲備作品。