中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040419

截斷鐵三角-平行與垂直的作圖異想

學校名稱：臺北縣私立光仁高級中學

作者：	指導老師：
高一 李豪韋 高一 郭令波 高一 詹士緯 高一 佘宥逵	翁立衛 李明德

關鍵詞：　平行、垂直、三角形內部特殊定點(心)

截斷鐵三角—平行與垂直的作圖異想

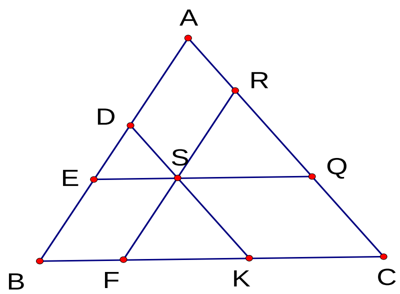
摘要

本研究有兩個研究問題，一是『三平行截線共點問題』，即考慮三角形兩邊上各找一點後連線並平行第三邊且此三線共點的特殊情況；二是『三邊垂線共點問題』，即研究三條垂直三邊的直線且交於一點的特殊情況。每個研究問題均包括探討三線共點的條件，並且在特殊作圖規則下，討論具有等量性質的定點以及特殊定點的應用。平行截線共點問題之研究結果提供重心、內心、傍心及垂心作圖的新方法，亦將內心的概念推廣至擬似內心，並推廣中線及半周長連線的概念。在垂直線共點問題研究中，本研究彙整外心、內心、擬似耐吉爾點及三等分周長點的共點關係，並深入探討截線段長度的各種關係。

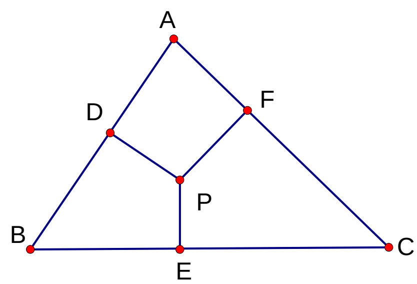
截斷鐵三角─平行與垂直的作圖異想

壹、研究動機

國三時學到「心」的問題－外心、內心、重心、垂心。隨著深入探討，發現大部分的心具有「等量」性質，如:外心與內心分別到三頂點、三邊等距；重心將三角形分為六個等積三角形。有些三角形的心是三角形三邊或邊的延長線上找一點向對面頂點連線且三線共點的特殊情況，如：重心。我們不禁要問：難道連線的規則，就只能在狹隘的框架中發展嗎？考慮三角形兩邊上各找一點後連線並平行第三邊且此三線共點的特殊情況(圖一)或是研究三條垂直三邊並交於一點的特殊情況(圖二)，這些情況下，有那些類似心的「等量」性質呢？這是我們好奇的問題。升上高一，接觸到 GSP 這套繪圖軟體，利用它提供的實驗與模擬功能，研讀相關文獻後，有初步發現，決定研究這個問題─更改連線規則，討論具有「等量」性質的三角形內部特殊定點。



圖一



圖二

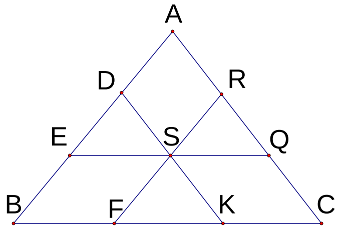
貳、研究問題

研究問題有兩個方向，一是作平行線，即考慮在三角形兩邊上各找一點後連線並平行第三邊且此三線共點的特殊情況，稱為『三平行截線共點問題』；第二個想法是作垂直線，研究三條垂直三邊的直線其交於一點的特殊情況，稱為『三邊垂線共點問題』。研究每一個問題之三線共點的條件，在特殊的作圖規則下，討論具有等量性質的定點以及這些特殊定點的應用。

參、研究器材 紙、筆、GSP4.06 版、文書處理軟體

肆、研究過程

第一部分：三平行截線共點問題的研究



一、共點條件的討論

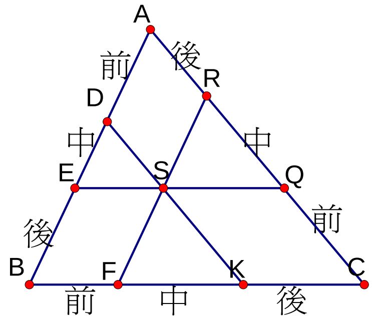
在三角形中任取一點，作與三邊的平行線，則有下列幾點發現：

1.圖中有三組平行四邊形：四邊形 ADSR、四邊形 EBFS、四邊形 SKCQ 為平行四邊形。

2.$\Delta ABC \sim \Delta AEQ \sim \Delta DBK \sim \Delta RFC \sim \Delta DES \sim \Delta RSQ \sim \Delta SFK$。

由相似可得，對應邊成比例：

3. $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{RQ}}{\overline{CA}}$，$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{RA}}{\overline{CA}}$，$\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{FK}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}$



4.三個對應邊比例之和為 1

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}，\frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}} \text{（由 3.可知）}$$

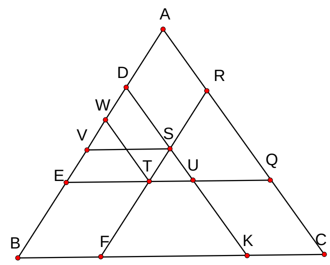
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}=1$$

同理 $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{FK}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{RQ}}{\overline{CA}}=1$，$\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{RA}}{\overline{CA}}=1$

以上討論可知，如果三截線共點時，從每邊所截出來的三個線段上，選取固定的位置其與全部的比值之和為 1。

反之，當三個對應比例和為 1 時，三截線會共點嗎？利用反證法，可知逆定理為真。

【證】：設三截線不共點（如右圖，其中 $\overline{VS}//\overline{BC}$，$\overline{WT}//\overline{CA}$）



$$\frac{\overline{FK}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{SF}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{VB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{VE}+\overline{EB}}{\overline{AB}}，\frac{\overline{RQ}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{RT}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AW}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AD}+\overline{DW}}{\overline{AB}}，$$

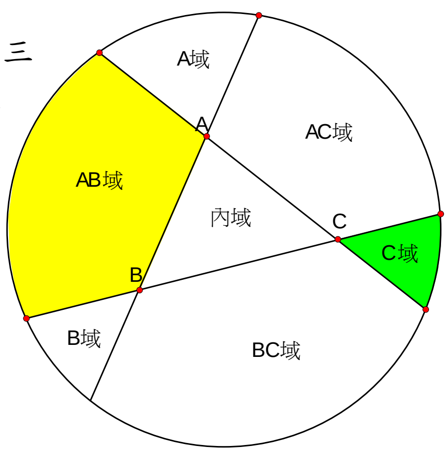
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{FK}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{RQ}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{VE}+\overline{EB}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{AD}+\overline{DW}}{\overline{AB}}=1+\frac{\overline{VE}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{DW}}{\overline{AB}}>1 \text{（矛盾）}$$

5.三個對應邊比例之和為 1 的推廣

我們發現當 S 在三角形的邊上及退化成頂點時，此關係式也成立。接著，要試驗點在三角形外時，共點的條件為何？

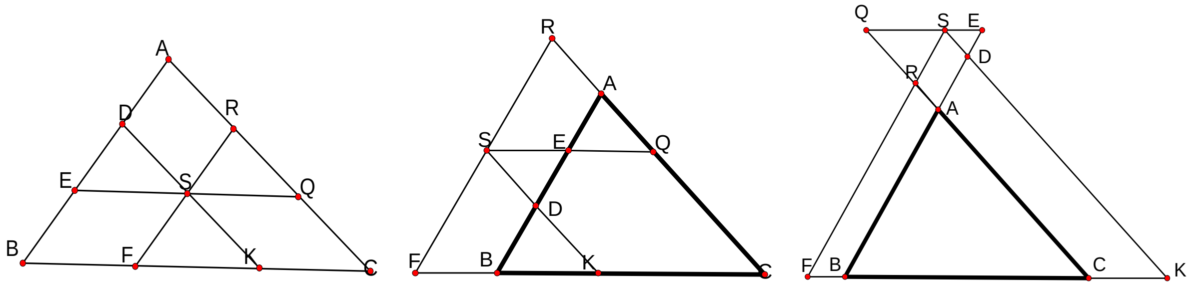
區域與方向的規約

在討論之前，需要對外部區域有嚴謹的定義。我們將三角形內部區域稱為內域；在考慮三角形的頂點、三邊與三邊的延長線之外，剩下的六個區塊可分成三塊『線外域』與三塊『點外域』；線外域是和三角形某邊相鄰的外部區域，以相鄰接的邊命名，如圖中黃色區域稱為 AB 域；點外域是某個頂點為主的外部對頂區域，以其該頂點命名，如圖中綠色區域稱為 C 域。



給定ΔABC，在不失一般性的情況下，規定 A、B、C 呈現逆時針順序。取任一點 S，作與 $\overline{AB}$ 平行的線段，並定義其與 $\overleftrightarrow{BC}$ 之交點為 F，與 $\overleftrightarrow{CA}$ 之交點為 R；作與 $\overline{BC}$ 平行的線段，定義與 $\overleftrightarrow{AB}$ 之交點為 E，與 $\overleftrightarrow{CA}$ 之交點為 Q，同樣地，作與 $\overline{CA}$ 平行的線段，定義與 $\overleftrightarrow{AB}$ 之交點定為 D，與 $\overleftrightarrow{BC}$ 之交點為 K。

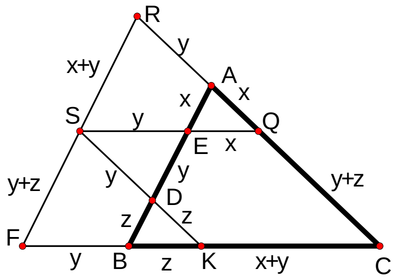
當 S 在三角形內部時，D, E, F, K, Q, R 各點的相對位置如下圖左所示；當 S 在線外域時，D, E, F, K, Q, R 各點順序如下圖中所示，以下圖中為例，當 S 移動至 AB 域時，E, D 兩點的相對位置會互換；當 S 在點外域時，D, E, F, K, Q, R 各點順序如下圖右所示，以下圖右為例，當 S 移動至 A 域時，E, D 兩點與 Q,R 兩點的相對位置會互換。



S 在線外域時的情況

令 $\overline{AE}$ ： $\overline{ED}$ ： $\overline{DB}$=x：y：z

我們發現諸多線段的比例皆可用 x、y、z 表示(如圖所示)



其中，$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{x+y}{x+y+z}$ ，$\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}=\frac{y}{x+y+z}$ ，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}=\frac{z+y}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}-\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}=\frac{x+y}{x+y+z}-\frac{y}{x+y+z}+\frac{x+y}{x+y+z}=1$$

$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=\frac{y}{x+y+z}$ ，$\frac{\overline{FK}}{\overline{BC}}=\frac{y+z}{x+y+z}$ ，$\frac{\overline{QR}}{\overline{CA}}=\frac{x+y}{x+y+z}$

$$\Rightarrow -\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{FK}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{QR}}{\overline{CA}}=-\frac{y}{x+y+z}+\frac{y+z}{x+y+z}+\frac{x+y}{x+y+z}=1$$

$\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}=\frac{y+z}{x+y+z}$ ，$\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}}=\frac{x+y}{x+y+z}$ ，$\frac{\overline{RA}}{\overline{CA}}=\frac{y}{x+y+z}$

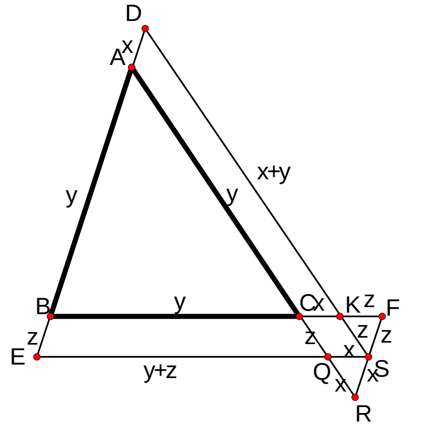
$$\Rightarrow \frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}}-\frac{\overline{RA}}{\overline{CA}}=\frac{y+z}{x+y+z}+\frac{x+y}{x+y+z}-\frac{y}{x+y+z}=1$$

發現對應邊比例之和為 1 的關係，原則上不變，只要和 A、B、C 順序(逆時針)方向相反者，變成負號即可。如第一式的 $\overline{BF}$ 、第二式的 $\overline{DE}$ 及第三式的 $\overline{RA}$ 。

S 在點外域時的情況

令 $\overline{DA}$ ： $\overline{AB}$ ： $\overline{BE}$ =x：y：z

我們發現諸多線段的比例皆可用 x、y、z 表示(如圖所示)



其中，$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{x}{y}$，$\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}=\frac{x+y+z}{y}$，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}=\frac{z}{y}$

$\Rightarrow -\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}-\frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}=-\frac{x}{y}+\frac{x+y+z}{y}-\frac{z}{y}=1$

$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=\frac{x+y+z}{y}$，$\frac{\overline{FK}}{\overline{BC}}=\frac{z}{y}$，$\frac{\overline{QR}}{\overline{CA}}=\frac{x}{y}$

$\Rightarrow \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}-\frac{\overline{FK}}{\overline{BC}}-\frac{\overline{QR}}{\overline{CA}}=\frac{x+y+z}{y}-\frac{z}{y}-\frac{x}{y}=1$

$\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}=\frac{z}{y}$，$\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}}=\frac{x}{y}$，$\frac{\overline{RA}}{\overline{CA}}=\frac{x+y+z}{y}$

$\Rightarrow -\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}-\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{RA}}{\overline{CA}}=-\frac{z}{y}-\frac{x}{y}+\frac{x+y+z}{y}=1$

對應邊比例之和為 1 的關係，原則上不變，只要將和 A、B、C 順序(逆時針)方向相反者，變成負號即可。如第一式的 $\overline{AD}$ 及 $\overline{CQ}$ 、第二式的 $\overline{FK}$ 及 $\overline{QR}$ 、第三式的 $\overline{EB}$ 及 $\overline{KC}$ 。

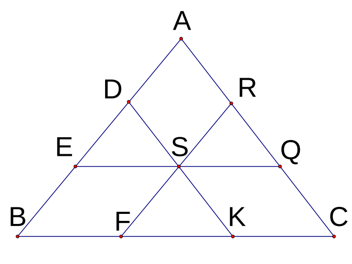
6.三角形每邊分成三段，其中兩段之和與第三段的比值，其乘積等於和加上二，即

(1).取 $\frac{前+中}{後}$ ： $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}\times\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}+\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}+\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}}+2$

(2).取 $\frac{前+後}{中}$ ： $\frac{\overline{AD}+\overline{EB}}{\overline{DE}}\times\frac{\overline{BF}+\overline{KC}}{\overline{FK}}\times\frac{\overline{CQ}+\overline{RA}}{\overline{RQ}}=\frac{\overline{AD}+\overline{EB}}{\overline{DE}}+\frac{\overline{BF}+\overline{KC}}{\overline{FK}}+\frac{\overline{CQ}+\overline{RA}}{\overline{RQ}}+2$

(3).取 $\frac{中+後}{前}$ ： $\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}}\times\frac{\overline{FC}}{\overline{BF}}\times\frac{\overline{QA}}{\overline{CQ}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}}+\frac{\overline{FC}}{\overline{BF}}+\frac{\overline{QA}}{\overline{CQ}}+2$

【證】:令 $\overline{AD}=X$，$\overline{DE}=Y$，$\overline{EB}=Z$，則 $\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}=\frac{Y+Z}{X}$ 、$\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}=\frac{\overline{BK}}{\overline{SQ}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{SR}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}=\frac{Y+Z}{X}$



同理 $\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}}=\frac{\overline{AD}+\overline{EB}}{\overline{DE}}=\frac{X+Z}{Y}$，$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{X+Y}{Z}$

而 $\frac{Y+Z}{X}\times\frac{X+Z}{Y}\times\frac{X+Y}{Z}=\frac{(X+Y)\times(X+Z)\times(Y+Z)}{XYZ}$

$=\frac{X^2Y+X^2Z+XYZ+XZ^2+XY^2+XYZ+ZY^2+YZ^2}{XYZ}$

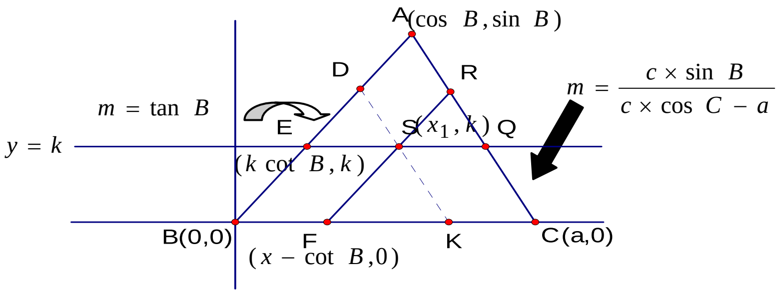
$=\frac{XY(X+Y)+XZ(X+Z)+YZ(Y+Z)+2XYZ}{XYZ}$

$$=\frac{Y+Z}{X}+\frac{X+Z}{Y}+\frac{X+Y}{Z}+2=\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}+\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}+\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}}+2$$

同理 $\frac{\overline{AD}+\overline{EB}}{\overline{DE}}\times\frac{\overline{BF}+\overline{KC}}{\overline{FK}}\times\frac{\overline{CQ}+\overline{RA}}{\overline{RQ}}=\frac{\overline{AD}+\overline{EB}}{\overline{DE}}+\frac{\overline{BF}+\overline{KC}}{\overline{FK}}+\frac{\overline{CQ}+\overline{RA}}{\overline{RQ}}+2$，

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}}\times\frac{\overline{FC}}{\overline{BF}}\times\frac{\overline{QA}}{\overline{CQ}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}}+\frac{\overline{FC}}{\overline{BF}}+\frac{\overline{QA}}{\overline{CQ}}+2$$

這個結果反之亦成立，我們利用解析法證明這個定理可以逆推。將三角形置於座標平面上，並將 B 置於原點，如下圖所示。



令 S 座標為(x_1, k)，則 $\overline{FR}$ 之直線方程式為 y－k＝tanB(x－ x_1)，F 點座標（$x_1-\frac{k}{\tan B}$, 0）＝（x－cotB, 0）

又 ΔCFR~ΔCBA$\Rightarrow\frac{\overline{CF}}{\overline{CR}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}\Rightarrow\frac{a-(x_1-\cot B)}{\overline{CR}}=\frac{a}{b}\Rightarrow\overline{CR}$ ＝b－$\frac{b}{a}$（x_1－cotB）

$$\Rightarrow\overline{RA}=b-\left[b-\frac{b}{a}(x_1-\cot B)\right]=\frac{b}{a}(x-\cot B)$$

E 點之座標為（k·cotB, k），$\overline{BE}=\sqrt{k^2\cot^2 B+k^2}$ ＝k·cscB

若滿足 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}\times\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}+\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}+\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}}+2$

$$\Rightarrow\frac{c-k\cdot\csc B}{k\cdot\csc B}\times\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}\times\frac{b-\frac{b}{a}(x-k\cdot\cot B)}{\frac{b}{a}(x-k\cdot\cot B)}=\frac{c-k\cdot\csc B}{k\cdot\csc B}+\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}+\frac{b-\frac{b}{a}(x-k\cdot\cot B)}{\frac{b}{a}(x-k\cdot\cot B)}+2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{c}{k\cdot\csc B}-1\right)\times\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}\times\left(\frac{a}{x_1-k\cdot\cot B}-1\right)=\left(\frac{c}{k\cdot\csc B}-1\right)+\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}+\left(\frac{a}{x-k\cdot\cot B}-1\right)+2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{c}{k\cdot\csc B}\times\frac{a}{x_1-k\cdot\cot B}-\frac{c}{k\cdot\csc B}-\frac{a}{x_1-k\cdot\cot B}\right)\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}=\frac{c}{k\cdot\csc B}+\frac{a}{x_1-k\cdot\cot B}$$

(令 $\frac{c}{k\cdot\csc B}$ =s、$\frac{a}{x_1-k\cdot\cot B}$ =t)

$$\Rightarrow\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}=\frac{s+t}{st-s-t}\Rightarrow\overline{BK}=\frac{s+t}{st-s-t+s+t}\times a=\frac{\frac{c(x_1-k\cdot\cot B)+a\cdot k\cdot\csc B}{k\cdot\csc B(x_1-k\cdot\cot B)}}{\frac{ac}{k\cdot\csc B(x_1-k\cdot\cot B)}}\times a=\frac{c(x_1-k\cdot\cot B)+a\cdot k\cdot\csc B}{a}$$

$\Rightarrow$k 座標為（$\frac{c(x_1-k\cdot\cot B)+a\cdot k\cdot\csc B}{c}$,0）

$$m_{\overline{SK}}=\frac{0-k}{x_1-k\cdot\cot B+\frac{a\cdot k\cdot\csc B}{c}-x_1}=\frac{1}{\cot B-\frac{a}{c}\csc B}=\frac{c}{c\cdot\cot B-a\cdot\csc B}=\frac{c\cdot\sin B}{c\cdot\cos B-a}$$

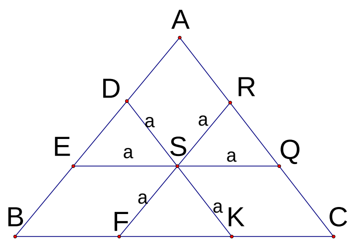
$\because\overline{DK}$ 與 $\overline{SK}$ 斜率相同，又 $\overline{SK}$ 與 $\overline{CA}$ 平行，則 $\overline{DK}$ 與 $\overline{CA}$ 平行

$\therefore$D、S、K 三點共線。由此可證明：「三邊中任兩段之和與第三段的比值，其乘積等於和加上二」為三線共點的充要條件。

二、截線段長的討論

原想探討三角形中三條平行截線交於一點時所截成的六條截線段等長的情形，類似到邊等長(內心)或是到頂點等長(外心)之類的情況，不過，這種特殊情況，只發生在正三角形。

1.六條相等的情況只發生在正三角形



$\because\triangle$DES~$\triangle$RSQ~$\triangle$SFK~$\triangle$ABC $\Rightarrow\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DS}}{\overline{ES}}=1$

且 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SQ}}{\overline{RS}}=1$ 因此 $\overline{AB}$ ∶ $\overline{BC}$ ∶ $\overline{CA}$ =1∶1∶1

2.不可能恰有五條截線段相等

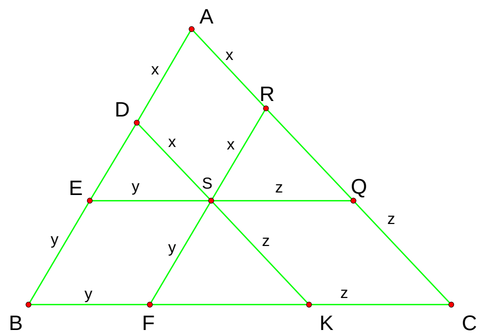
3.四條截線段相等發生在等腰三角形且過內心的三組平行截線。

4.恰有三組截線長度相等的情況之討論：

(1)發生在通過內心的三組等長的平行截線:

透過相似與比例可求出三菱形的邊長。

令三邊 $\overline{AB}=c$、$\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$，菱形 ADSR、EBFS 與 SKCQ 的邊長分別為 x、y、z



$\because\triangle$DES~$\triangle$ABC $\therefore\frac{x}{y}=\frac{b}{a}$

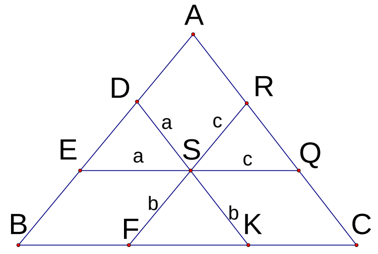
同理$\because\triangle$RSQ~$\triangle$ABC、$\triangle$SFK~$\triangle$ABC

$\therefore\frac{x}{z}=\frac{c}{a}$、$\frac{y}{z}=\frac{c}{b}\Rightarrow$x∶y∶z=bc∶ac∶ab

令 x=tbc、y=tac、z=tab 代入 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}$=1

$\Rightarrow \frac{tbc}{c}+\frac{tac}{a}+\frac{tab}{b}=1 \Rightarrow t=\frac{1}{a+b+c}$ 則 $x=\frac{bc}{a+b+c}$、$y=\frac{ac}{a+b+c}$、$z=\frac{ab}{a+b+c}$

即菱形邊長為所屬的兩邊之乘積除以周長

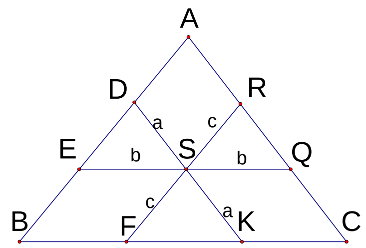


(2)如右圖，同一組等長截線段恰發生在同一個”小”三角形中，

$\triangle RSQ \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SQ}}{\overline{RS}}=\frac{c}{c}=1$

$\triangle SFK \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SK}}{\overline{SF}}=\frac{b}{b}=1$

$\Rightarrow \overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:1:1$ 此情況僅發生在正三角形。



(3)如右圖，三組等長的截線段散佈在三個”小”三角形中，

由於△DES~△RSQ

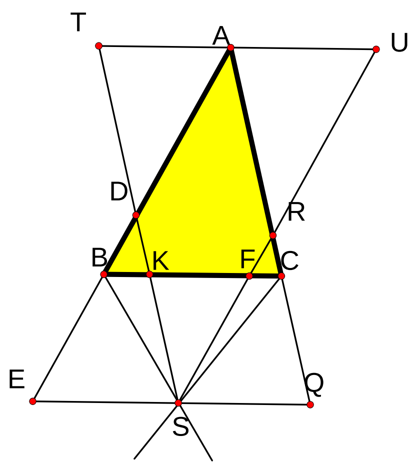
$\Rightarrow \overline{DS}:\overline{ES}=\overline{RQ}:\overline{SQ}=a:b=\overline{RQ}:b \Rightarrow \overline{RQ}=a$

又 $\overline{AR}=\overline{DS}=a=\overline{SK}=\overline{QC}$，因此 Q,R 為 $\overline{CA}$ 上的三等分點。

同理，D,E 為 $\overline{AB}$ 上的三等分點，F,K 為 $\overline{BC}$ 上的三等分點。因此，此情況發生在三等分點的位置上且△DES、△RSQ 與△SFK 為全等三角形。

三、傍心的探討：求對 A 的傍心

接者想找出和內心一樣，使用角平分線做出的傍心(如圖)。



$\because \overline{AS}$ 平分 $\angle BAC$ 且 $\overline{AS}$ 為平行四邊形 ADSR

$\therefore$平行四邊形 ADSR 為菱形

同理平行四邊形 BESF、平行四邊形 CQSK 為菱形

令 $\overline{AD}=x$、$\overline{BF}=y$、$\overline{CQ}=z$

作過 A 平行 $\overline{BC}$ 的線，再延長 $\overline{DK}$ 與 $\overline{FR}$，分別交於 T、U

則 $\overline{AT}=z$、$\overline{AU}=y$

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AT}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{x}{z}=\frac{c}{a}$、$\frac{\overline{AR}}{\overline{AU}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{b}{a} \Rightarrow x:y:z=bc:ac:ab$

令 $x=tbc$、$y=tac$、$z=tab$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}+\frac{-\left(\overline{CQ}\right)}{\overline{CA}}=1\Rightarrow\frac{tbc}{c}+\frac{tac}{a}+\frac{-tab}{b}=1\Rightarrow t=\frac{1}{-a+b+c}$$

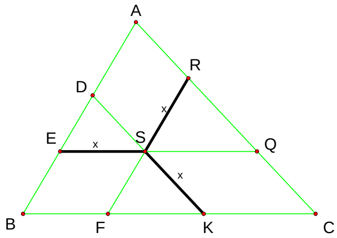
$x=\dfrac{bc}{-a+b+c}$ 、 $y=\dfrac{ac}{-a+b+c}$ 、 $z=\dfrac{ab}{-a+b+c}$

同理，對 B 的傍心、對 C 的傍心之 x、y、z 分別是 $\dfrac{bc}{a-b+c}$、$\dfrac{ac}{a-b+c}$、$\dfrac{ab}{a-b+c}$ 及 $\dfrac{bc}{a+b-c}$、$\dfrac{ac}{a+b-c}$ 、 $\dfrac{ab}{a+b-c}$ 。

四、擬似內心的探討：

我們對於三段截線段長度相等的情形最感到興趣，令此長度為 x ，則：

$$\frac{x}{\overline{AB}}+\frac{x}{\overline{BC}}+\frac{x}{\overline{CA}}=1\Rightarrow x=\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CA}}{(\overline{AB}\times\overline{BC})+(\overline{BC}\times\overline{CA})+(\overline{CA}\times\overline{AB})}=\frac{1}{\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{BC}}+\frac{1}{\overline{CA}}}$$

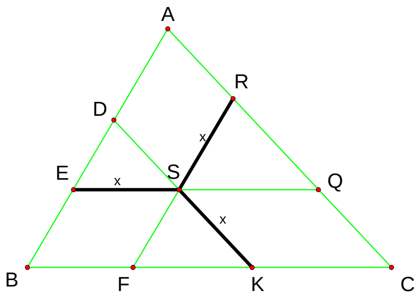


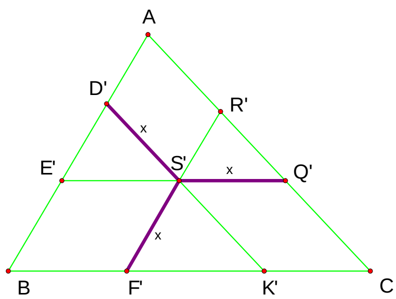
即 x 為三角形三邊長調和平均的三分之一。

我們知道內心到三邊**垂直距離**相同，此方法求出的內部定點到三邊連線段等長，只差在不具垂直條件，但他和內心都有"到邊的路徑等長"的意味，因此稱之擬似內心。為了找出點在邊上的位置，需求出 x 與各邊的比值：

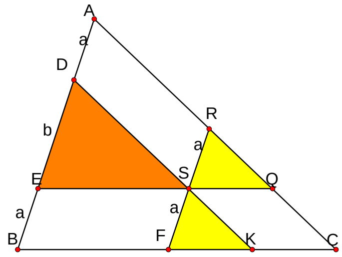
$\dfrac{1}{\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{BC}}+\frac{1}{\overline{CA}}}\times\dfrac{1}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BC}\times\overline{CA}}{(\overline{AB}\times\overline{BC})+(\overline{BC}\times\overline{CA})+(\overline{CA}\times\overline{AB})}$，同理 x 與 $\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 的比值分別為 $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{CA}}{(\overline{AB}\times\overline{BC})+(\overline{BC}\times\overline{CA})+(\overline{CA}\times\overline{AB})}$ 和 $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{(\overline{AB}\times\overline{BC})+(\overline{BC}\times\overline{CA})+(\overline{CA}\times\overline{AB})}$ 。

在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 分別取一點 E′、K′、R′且 $\overline{E'B}=\overline{K'C}=\overline{R'A}$，則可得另一個擬似內心（如下圖），在非正三角形的情況下，擬似內心有兩個。

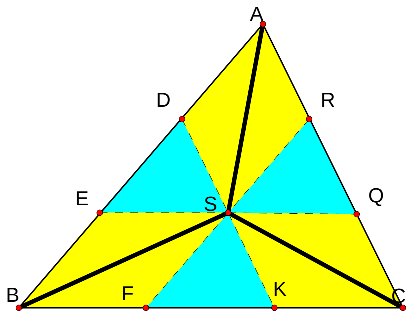




五、等積性質與重心的討論



當 $\overline{AD}=\overline{EB}$，則$\Delta$RSQ$\cong\Delta$SFK（如圖）。同理，$\overline{AD}=\overline{DE}$ 時，ΔDES$\cong\Delta$SFK，$\overline{DE}=\overline{EB}$ 時，ΔDES$\cong\Delta$SFK。當三條平行線交於一點，邊上三段中，若有其中兩段相等，則ΔDES、ΔSFK、ΔRSQ 會有一組全等三角形。



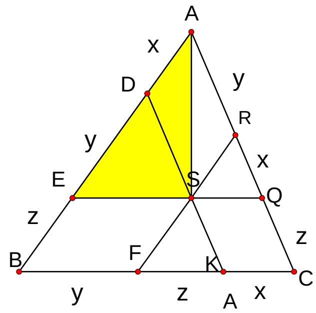
因此當三角形邊長分為三等分時，ΔRSQ$\cong\Delta$SFK$\cong\Delta$DES；三個平行四邊形的面積也相等；由一個內部的小三角形與相鄰的平行四邊形組合成一個梯形之面積也會相等。因此，當三角形邊長被三等分時點 S 為重心。反之，若點 S 為重心，作三平行線，三角形邊長會被三等分。

六、垂心的探討

處理完內心、擬似內心及重心問題之後，想要同樣以平行作圖方式做出垂心。

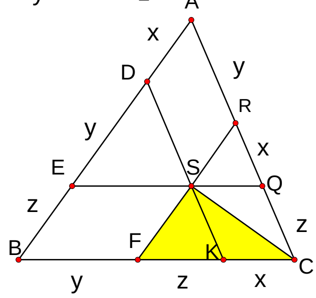
當 S 為垂心且 $\overline{AD}:\overline{DE}:\overline{EB}$=x：y：z 時，$\overline{BF}:\overline{FK}:\overline{KC}$ 與 $\overline{CQ}:\overline{QR}:\overline{RA}$ 的比例則為 x,y,z 輪換。

在ΔAES 中，$\overline{AE}^2=\overline{ES}^2+\overline{SA}^2 \Rightarrow \left(c\times\dfrac{x+y}{x+y+z}\right)^2=\left(a\times\dfrac{y}{x+y+z}\right)^2+\left(c\times\sin B\times\dfrac{x+y}{x+y+z}\right)^2$



$$\Rightarrow\left(c\times\frac{x+y}{x+y+z}\right)^2-\left(c\times\sin B\times\frac{x+y}{x+y+z}\right)^2=\left(a\times\frac{y}{x+y+z}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(1^2-\sin^2 B\right)\left(c\times\frac{x+y}{x+y+z}\right)^2=\left(a\times\frac{y}{x+y+z}\right)^2$$



$$\Rightarrow\cos^2 B=\frac{\left(a\times\dfrac{y}{x+y+z}\right)^2}{\left(c\times\dfrac{x+y}{x+y+z}\right)^2}\Rightarrow\ \cos B=\frac{ay}{cx+cy}$$

同理，在ΔCFS 中可得到 $\cos B=\dfrac{cz}{ax+az}$ 又 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ay}{cx+cy}$

$$\Rightarrow 2a^2y=\left(a^2+c^2-b^2\right)x+\left(a^2+c^2-b^2\right)y\Rightarrow\left(a^2+c^2-b^2\right)x=\left(a^2+b^2-c^2\right)y$$

同理，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{cz}{ax+az}\Rightarrow\left(a^2+c^2-b^2\right)x=\left(c^2+b^2-a^2\right)z$

$\Rightarrow$ x：y：z $=\dfrac{1}{a^2+c^2-b^2}$ ： $\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}$ ： $\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}$

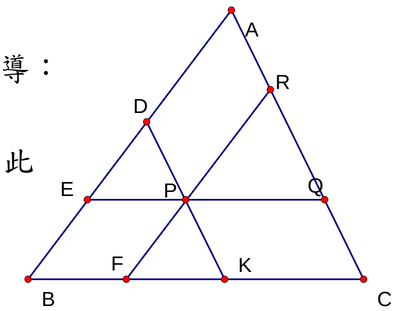
$\Rightarrow$ x∶y∶z $=(a^2+b^2-c^2)(c^2+b^2-a^2):(c^2+b^2-a^2)(c^2+a^2-b^2):\ (a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)$

知道 x:y:z 的比例時，$\overline{AD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EB}$、$\overline{BF}$、$\overline{FK}$、$\overline{KC}$、$\overline{CQ}$、$\overline{QR}$及$\overline{RA}$的長度即可分別求出。由此，可作出垂心的位置。

七、上下面積的比例為 K 時，三線共點的討論

原先想討論平行截線將三角形截成上下兩部分等積的情況，但是發現：過兩條等積平行截線交點的平行截線無法將三角形截成上下等積的兩個部分。

以下圖為例，$\overline{EQ}$將△ABC 截成等積的兩部分，即△AEQ 的面積等於四邊形 EQCB 的面積，同樣地，$\overline{RF}$將△ABC 截成等積的兩部分，$\overline{EQ}$與$\overline{RF}$交於 P，$\overline{DK}$通過 P 點且平行$\overline{AC}$，但$\overline{DK}$無法將△ABC 截成等積的兩部分。因為根據前述推導：



$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}+\dfrac{\overline{BK}}{\overline{KC}}+\dfrac{\overline{CR}}{\overline{RA}}+2=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BK}}{\overline{KC}}\times\dfrac{\overline{CR}}{\overline{RA}}$，而$\dfrac{\overline{CR}}{\overline{RA}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$，因此

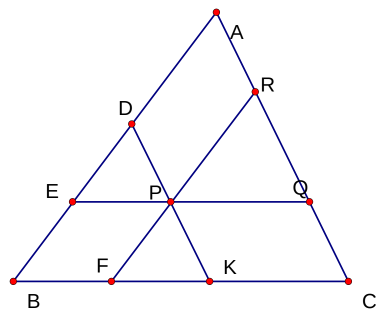
$(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}+1)+\dfrac{\overline{BK}}{\overline{KC}}+2=(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}+1)\times\dfrac{\overline{BK}}{\overline{KC}}\Rightarrow\dfrac{\overline{BK}}{\overline{KC}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

表示△BKD 面積和△ABC 面積之比=$\left(\sqrt{2}+1\right)^2:\left(\sqrt{2}+3\right)^2$，兩者比值並不等於二分之一。

接下來，探討:三條平行截線，每一條均將三角形分成上下面積比例為 K 且三線共點時，K 值應為多少？

若$\dfrac{areaEBCQ}{areaAEQ}=\dfrac{areaKCAD}{areaBKD}=\dfrac{areaRABF}{areaCRF}=\dfrac{1}{K}$，

$\dfrac{areaABC}{areaAEQ}=\dfrac{areaABC}{areaBKD}=\dfrac{areaABC}{areaCRF}=\dfrac{K+1}{K}$



∴ areaAEQ=areaBKD=areaCRF

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{AD}=\overline{EB}$，同理，$\overline{BF}=\overline{KC},\overline{CQ}=\overline{RA}$

∵ADPR、EPFB、PQCK 為平行四邊形∴$\overline{AR}=\overline{DP}=\overline{QC}=\overline{PK}\Rightarrow\overline{DP}=\overline{PK}$

同理，$\overline{AD}=\overline{PR}=\overline{BE}=\overline{PF}\Rightarrow\overline{PR}=\overline{PF}$，$\overline{PE}=\overline{BF}=\overline{KC}=\overline{PQ}\Rightarrow\overline{PQ}=\overline{PE}$

又 $\overline{DK}//\overline{AC},\overline{FR}//\overline{AB},\overline{EQ}//\overline{BC}$ 且 $\overline{EQ},\overline{FR},\overline{DK}$ 互相平分

∴D 為 $\overline{AE}$ 中點，R 為 $\overline{AQ}$ 中點，K 為 $\overline{CF}$ 中點

∴D、E、F、K、Q、R 為∆ABC 三邊長三等分點⇒$\dfrac{areaAEQ}{areaABC}=\dfrac{2^2}{3^2}=\dfrac{4}{9}$ ⇒ $\dfrac{areaAEQ}{areaEQCB}=\dfrac{4}{5}$

即三條平行截線，每一條均將三角形分成上下面積比例為 $\dfrac{4}{5}$ 時，此三截線會共點。

【另解】：根據前述推導：$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}+\dfrac{\overline{BK}}{\overline{KC}}+\dfrac{\overline{CR}}{\overline{RA}}+2=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BK}}{\overline{KC}}\times\dfrac{\overline{CR}}{\overline{RA}}$，

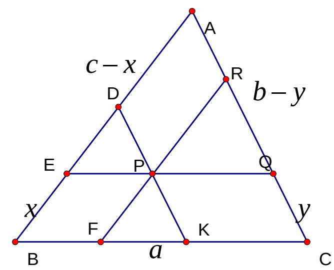
令 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{\overline{BK}}{\overline{KC}}=\dfrac{\overline{CR}}{\overline{RA}}$=K，利用上式可得，3K+2=K^3 ⇒ K^3－3K－2=0

⇒可求出 K=2 或－1(重根，不合)

因此當 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{\overline{BK}}{\overline{KC}}=\dfrac{\overline{CR}}{\overline{RA}}$=2，三截線段共點且 $\dfrac{areaAEQ}{areaABC}=\dfrac{2^2}{3^2}=\dfrac{4}{9}$⇒$\dfrac{areaAEQ}{areaEQCB}=\dfrac{4}{5}$ 與前述結果殊途同歸。

八、上部分折線為周長 K 倍時，三線共點的討論

我們討論的是:平行截線將三角形截成上下周長相等的情況。如圖中 $\overline{EQ}$ 將△ABC 截成等周長的兩部分，即 $\overline{EA}+\overline{AQ}=\overline{EB}+\overline{BC}+\overline{CQ}$ 。



若 $\overline{EQ}$ 將△ABC 截成等周長的兩部分，令 $\overline{EB}=x$，$\overline{QC}=y$，

則 $a+x+y=s$ (半周長)

$c-x+b-y=s$

⇒$(x+y)=s-a$ 又因 $\dfrac{c-x}{x}=\dfrac{b-y}{y}$ ⇒ $cy=bx$⇒$x:y=c:b$，則 $x=\dfrac{c(s-a)}{b+c}$，$y=\dfrac{b(s-a)}{b+c}$

同理，$\overline{RF}$ 將△ABC 截成等周長兩部分，則 $\overline{BF}$ 與 $\overline{RA}$ 可分別求出，$\overline{BF}=\dfrac{a(s-c)}{a+b}$，

$\overline{RA}=\dfrac{b(s-c)}{a+b}$。若 $\overline{DK}$ 亦將△ABC 截成等周長的兩部分，則 $\overline{AD}$ 與 $\overline{KC}$ 可分別求出，

$\overline{AD}=\dfrac{c(s-b)}{a+c}$，$\overline{KC}=\dfrac{a(s-b)}{a+c}$。

我們從共點關係式中檢查：$\dfrac{\frac{c(s-a)}{b+c}}{c}+\dfrac{\frac{b(s-c)}{a+b}}{b}+\dfrac{\frac{a(s-b)}{a+c}}{a}$ 之值

$$\dfrac{\frac{c(s-a)}{b+c}}{c}+\dfrac{\frac{b(s-c)}{a+b}}{b}+\dfrac{\frac{a(s-b)}{a+c}}{a}=\dfrac{s-a}{b+c}+\dfrac{s-c}{a+b}+\dfrac{s-b}{a+c}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{b}{a+c})$$

而利用算幾不等式可求出 $(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c})\geq\frac{3}{2}$ 因此 $\frac{\frac{c(s-a)}{b+c}}{c}+\frac{\frac{b(s-c)}{a+b}}{b}+\frac{\frac{a(s-b)}{a+c}}{a}=$ $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c})\leq\frac{3}{4}\neq1$ 不會滿足共點的關係 $\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{AR}}{\overline{CA}}=1$。

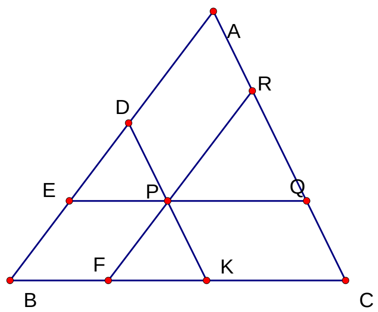
另一方面，從共點的關係式中 $\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{AR}}{\overline{CA}}=1$ 可得 $\frac{\frac{c(s-a)}{b+c}}{c}+\frac{\frac{b(s-c)}{a+b}}{b}+\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}}=1$

$\Rightarrow\frac{(s-a)}{b+c}+\frac{(s-c)}{a+b}+\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}}=1$ 則 $\overline{KC}=\frac{a}{2}(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b})$ 而這個值和等周長假設前提下求出的 $\overline{KC}=\frac{a(s-b)}{a+c}$ 值不同，可知三條等周平行截線不會共點。

因此討論：當三條平行截線將三角形上面截出的折線部分長度為周長的 K 倍時，K 要為何？才能恰好使得三截線共點。

令 $\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，T 為周長，$\overline{AE}=x$，$\overline{AQ}=y$，$x+y=KT$ (K 為常數)

$\frac{x}{c}=\frac{y}{b}\ \Rightarrow x=KT\times\frac{c}{b+c}$、$y=KT\times\frac{b}{b+c}$



根據前面所推出的公式得知 $\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{AR}}{\overline{CA}}=1$

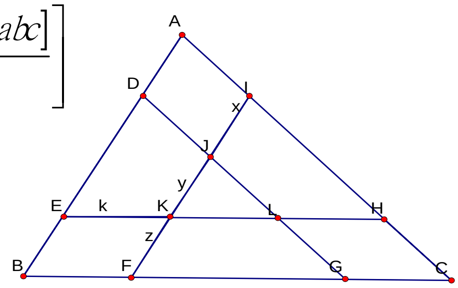
又 $\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=\left(c-KT\times\frac{c}{b+c}\right)\times\frac{1}{c}=1-\frac{KT}{b+c}=1-\frac{K(a+b+c)}{b+c}$

則有：

$$1-\frac{K(a+b+c)}{a+c}+1-\frac{K(a+b+c)}{a+b}+1-\frac{K(a+b+c)}{b+c}=1\Rightarrow 2=\frac{K(a+b+c)}{a+b}+\frac{K(a+b+c)}{b+c}+\frac{K(a+b+c)}{c+a}$$

$$=K\left(3+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)==K\left[\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+3abc+3(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right]$$

$$=K\left[\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+3abc+3[(a+b+c)(ab+bc+ac)-abc]}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right]$$



$$=K\left[\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right]$$

$$K=\frac{2(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca)}=2\times\frac{\text{兩兩和之積}}{(\text{周長})(\text{三邊平方和}+\text{三倍兩兩積之和})}$$

九、三線不共點的討論

討論三截線不共點更一般的情況，發現多組截線段呈固定比例：$x : y : z : k$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{IJ} : \overline{JK} : \overline{KF} \\
&= \overline{LH} : \overline{KL} \quad : \overline{EK} \\
&= \quad \overline{JL} : \overline{LG} : \overline{DJ}
\end{aligned}
$$

利用上述多條線段呈現的四個比例，能深入探討此圖形的幾何性質，例如可利用餘弦定理算出九條截線之長度；綜觀上圖發現三條平行截線將大三角形分成七塊區域，其中區塊的形狀有三角形、平行四邊形、梯形，則可透過七塊區域與ΔABC 的比值算出這七塊區域的面積。進而求出由合併之後的三角形、平行四邊形及梯形面積。

特別是當三截線比例成「逆時針相同」時，發現： $x:y:z=k:y:x \Rightarrow x^2=kz$，

$k:y:x=z:y:k \Rightarrow xz=k^2$，兩式相乘$\Rightarrow x^3z=k^3z \Rightarrow x=k$，同理，$k=z$。可得：當三截線段比成「逆時針相同」時，每條截線三段長比為$1:m:1 \ \ (m \in R^+)$

令$\overline{IJ}:\overline{JK}:\overline{KF}=1:m:1$，則$\overline{BF}$：$\overline{FJ}$：$\overline{JC}$=$\overline{CK}$：$\overline{KN}$：$\overline{NA}$=$\overline{AD}$：$\overline{DE}$：$\overline{EB}$$=1:(m+1):1$

當 m=0，為三截線共點的情況，若保持三截線比例成「逆時針相同」的條件，可推得三條平行截線互相平分且將三邊三等分，此三線共點，為「重心」。因此「重心」可視為三截線比例成「逆時針相同」的情況下的一個特例。

第二部分　三邊垂線共點問題的研究

一、共點條件的討論

考慮三邊垂線交於一點的情況，發現：間隔截線段長度的平方和相等。

【證】：△PEB 與△PEC 以 $\overline{PE}$ 為共同的邊⇒ $\overline{PB}^2-\overline{BE}^2=\overline{PC}^2-\overline{CE}^2$　同理，

$\overline{PC}^2-\overline{CF}^2=\overline{PA}^2-\overline{AF}^2$ 且 $\overline{PA}^2-\overline{AD}^2=\overline{PB}^2-\overline{BD}^2$

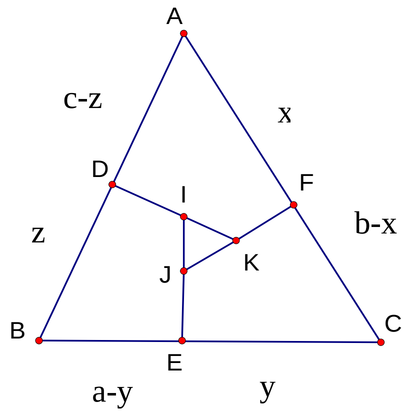
三式相加⇒ $\overline{BE}^2+\overline{CF}^2+\overline{AD}^2=\overline{CE}^2+\overline{AF}^2+\overline{BD}^2$

反之，在三垂線不共點時，三垂線會兩兩交一點(如下圖中 I、J、K 三點)。因為 ADKF 四點共圓，所以∠A+∠IKF＝180°，又∠IKF+∠IKJ＝180°，因此得知∠A＝∠IKJ，同理∠B＝∠JIK、∠C＝∠IJK　可推出 ΔABC≈ΔKIJ。

在 ΔABC≈ΔKIJ 的情況下

設 $\overline{IJ}=\alpha a$、$\overline{JK}=\alpha b$、$\overline{IK}=\alpha c$

令 $\overline{ID}=r_1$、$\overline{JE}=r_2$、$\overline{KF}=r_3$



$\Rightarrow (r_2+\alpha a)^2+(a-y)^2=r_1^2+z^2$

$(r_3+\alpha b)^2+(b-x)^2=r_2^2+y^2$

$(r_1+\alpha c)^2+(c-z)^2=r_3^2+x^2$

三式相加得　$(a-y)^2+(b-x)^2+(c-z)^2+2\alpha(r_1c+r_2a+r_3b)+\alpha^2(a^2+b^2+c^2)=x^2+y^2+z^2$

這顯示三垂線不共點的情況下，間隔線段平方和不相等。當三垂線共點時(α=0)，可得間隔線段平方和相等；因此，間隔線段平方和相等是三垂線共點的充要條件。

二、特殊定點的討論

從前述推論可知三邊垂線交於一點，須滿足 $\overline{DA}^2+\overline{FC}^2+\overline{EB}^2=\overline{CE}^2+\overline{AF}^2+\overline{BD}^2$，考慮相等關係：

1. $\overline{DA}=\overline{BD}$、$\overline{EB}=\overline{CE}$、$\overline{FC}=\overline{AF}$

此時 P 點為外心

2. $\overline{DA}=\overline{AF}$ 、 $\overline{FC}=\overline{CE}$ 、 $\overline{EB}=\overline{BD}$

利用符號化簡：

令 $c-z=y \quad \Rightarrow c=y+z$ (如右圖)

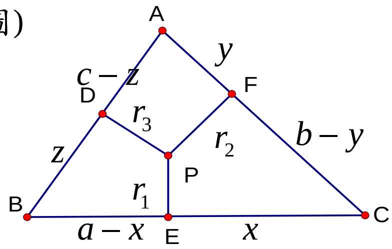
$b-y=x \quad \Rightarrow b=x+y$

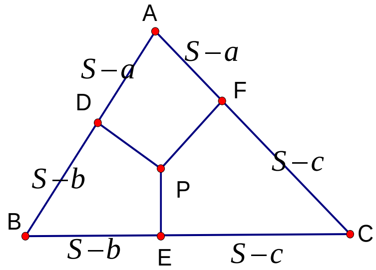
$a-x=z \quad \Rightarrow a=x+z$

又 $x=S-(y+z) \Rightarrow x=S-c$

$y=S-(x+z) \Rightarrow y=S-a$

$z=S-(x+y) \Rightarrow z=S-b$





$\therefore \overline{DA}=\overline{AF}=S-a$ ， $\overline{FC}=\overline{CE}=S-c$ ， $\overline{EB}=\overline{BD}=S-b$ (如上圖所示)

又 $\overline{DA}=\overline{AF}=S-a$ ，∠ADP=∠AFP=90° ， $\overline{AP}=\overline{AP} \Rightarrow \Delta APD \cong \Delta APF \Rightarrow$ ∠PAD=∠PAF

$\Rightarrow \overline{AP}$ 為∠FAD 的角平分線，同理 $\overline{BP}$ 及 $\overline{CP}$ 為∠DBE 及∠FCE 的角平分線，則 P 為內心。

3. $\overline{DA}=\overline{CE}$ 、 $\overline{FC}=\overline{BD}$ 、 $\overline{EB}=\overline{AF}$

$c-z=x \Rightarrow c=x+z$

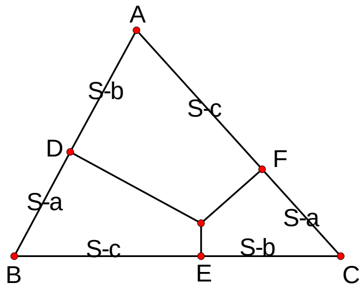
$b-y=z \Rightarrow b=y+z$

$a-x=y \Rightarrow a=x+y$

又 $x=S-(y+z) \Rightarrow x=S-b$

$y=S-(x+z) \Rightarrow y=S-c$

$z=S-(x+y) \Rightarrow z=S-a$

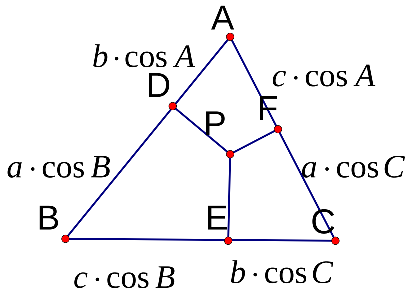


$\therefore \overline{DA}=\overline{CE}=S-b$ ， $\overline{FC}=\overline{BD}=S-a$ ， $\overline{EB}=\overline{AF}=S-c$ (如上圖所示)

P 點和耐吉爾點有類似的結果，耐吉爾點是 $\overline{AE}$ 、 $\overline{BF}$ 與 $\overline{CD}$ 的交點，而本題是過三邊上 D,E,F 的垂線交點，連線方式不同，但對於周長所截成的六條線段長都是 $S-a$, $S-b$, $S-c$ 。而折線 $\overline{DA}+\overline{AF}$ 、 $\overline{FC}+\overline{CE}$ 與 $\overline{EB}+\overline{BD}$ 的長度恰好分別和三邊長 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 相等，可以看成是邊長的挪移。

4.垂心

由三角函數性質可推得下列長度關係：



$\overline{AD}=b\cos A$，$\overline{BD}=c-b\cos A$，

$\overline{BE}=c\cos B$，$\overline{EC}=a-c\cos B$，

$\overline{FC}=a\cos C$，$\overline{AF}=b-a\cos C$

檢驗平方和是否相等：

$$\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{FC}^2=b^2\cos^2 A+c^2\cos^2 B+a^2\cos^2 C$$

$$\overline{BD}^2+\overline{EC}^2+\overline{AF}^2=a^2+b^2+c^2+b^2\cos^2 A+c^2\cos^2 B+a^2\cos^2 C-2bc\cos A-2ac\cos B-2ab\cos C$$

兩式相減，運用餘弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

化簡 $\overline{BD}^2+\overline{EC}^2+\overline{AF}^2-(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{FC}^2)=a^2+b^2+c^2-2bc\cos A-2ac\cos B-2ab\cos C$

$=a^2+b^2+c^2-(b^2+c^2-a^2)-(a^2+c^2-b^2)-(a^2+b^2-c^2)=a^2+b^2+c^2-(a^2+b^2+c^2)=0$

$\therefore \overline{BD}^2+\overline{EC}^2+\overline{AF}^2=\overline{BD}^2+\overline{EC}^2+\overline{AF}^2$，因此三垂線共點。

雖然間隔線段之平方和相等，但間隔線段之和卻不相等：

$$\overline{FA}+\overline{EC}+\overline{DB}=c\cos A+b\cos C+a\cos B=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$$

$$=\frac{ab^2c+ac^3-a^3c+a^2bc+b^3c-bc^3+a^3b+abc^3-ab^3}{2abc}=\frac{abc(a+b+c)+ac(c^2-a^2)+bc(b^2-c^2)+ab(a^2-b^2)}{2abc}$$

$$\overline{CF}+\overline{BE}+\overline{AD}=a\cos C+c\cos B+b\cos A=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

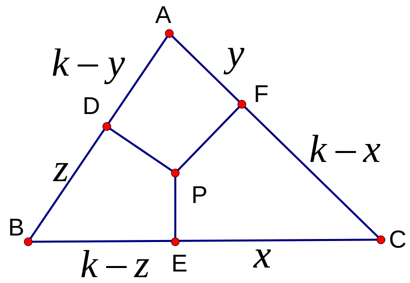
$$=\frac{a^3c+ab^2c-ac^3+a^2bc+bc^3-b^3c+ab^3+abc^3-a^3b}{2abc}=\frac{abc(a+b+c)+ac(a^2-c^2)+bc(c^2-b^2)+ab(b^2-a^2)}{2abc}$$

這個例子衝擊原先的猜測：認為在間隔線段之平方和相等的情況下，有可能也會推得間隔線段之和相等的事實，不過，在垂心這個例子中，我們得到了一個反例。

三、三等分周長點的討論

這一段要討論的是：三垂線段$\overline{PE}$、$\overline{PF}$與$\overline{PD}$在三邊上的垂足 E、F 與 D 將三角形周長分成三等分的作圖問題。

令$k=\dfrac{a+b+c}{3}$為三分之一周長，由前述論証可知三垂線欲交於一點，$\overline{DA}$、$\overline{AF}$、$\overline{FC}$、$\overline{CE}$、$\overline{EB}$與$\overline{BD}$必須滿足：(相關符號請見附圖)

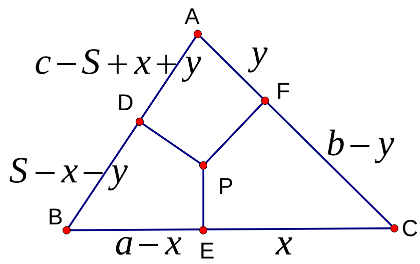


$$x^2+y^2+z^2=(k-x)^2+(k-y)^2+(k-z)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=3k^2+x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)k$$

$$\Rightarrow 3k=2(x+y+z)=a+b+c \Rightarrow x+y+z=\frac{a+b+c}{2}=S\text{(半周長)}$$

因此，$z=S-x-y$代入



$$\overline{DA}+\overline{AF}=c-S+x+y+y=\frac{a+b+c}{3}\text{(三分之一周長)}$$

$$\overline{FC}+\overline{CE}=x-y+b=\frac{a+b+c}{3}\text{(三分之一周長)}$$

可解出$x=\overline{CE}=\dfrac{s+a-b}{3}=\dfrac{3a+c-b}{6}$，$y=\overline{AF}=\dfrac{s+b-c}{3}=\dfrac{3b+a-c}{6}$

代入$S-x-y$，$a-x$，$b-y$，$c-S+x+y$之後，可得$\overline{BD}$、$\overline{EB}$、$\overline{FC}$與$\overline{DA}$的長度分別為$\dfrac{3c+b-a}{6}$、$\dfrac{3a+b-c}{6}$、$\dfrac{3b+c-a}{6}$、$\dfrac{3c+a-b}{6}$。

四、內心、外心、三等分周長點的連結

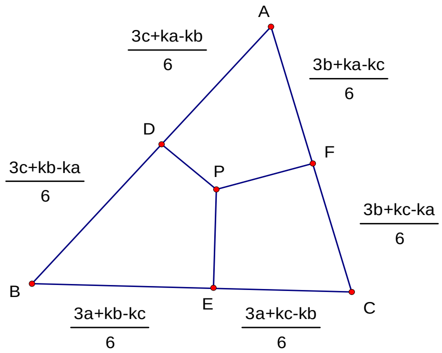
從先前研究可知內心、外心、三等分周長點的各邊長度有關係，以$\overline{BE}$、$\overline{CF}$為例，外心是$\overline{BE}=\dfrac{3a+0b-0c}{6}$、$\overline{CF}=\dfrac{3b+0c-0a}{6}$時做垂線得到的交點，內心是$\overline{BE}=\dfrac{3a-3b+3c}{6}$、$\overline{CF}=\dfrac{3a+3b-3c}{6}$時做垂線所得到的交點，三等分周長點是$\overline{BE}=\dfrac{3a+1b-1c}{6}$、$\overline{CF}=\dfrac{3b+1c-1a}{6}$時做垂線所得到的交點，因此我們討論$\overline{BE}=\dfrac{3a+kb-kc}{6}$、$\overline{CF}=\dfrac{3b+kc-ka}{6}$時（$k$為整數參數），是否會交於一點，於是我們檢驗間隔截線段長度平方和是否相等？

$$\overline{FA}^2+\overline{EC}^2+\overline{DB}^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}+k^2\left[\left(\frac{a-c}{6}\right)^2+\left(\frac{c-b}{6}\right)^2+\left(\frac{b-a}{6}\right)^2\right]+\frac{k}{6}(ab-bc+ac-ab+bc-ca)$$

$$\overline{CF}^2+\overline{BE}^2+\overline{AD}^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}+k^2\left[\left(\frac{a-c}{6}\right)^2+\left(\frac{c-b}{6}\right)^2+\left(\frac{b-a}{6}\right)^2\right]+\frac{k}{6}(bc-ab+ab-ac+ac-bc)$$

$$\Rightarrow \overline{FA}^2+\overline{EC}^2+\overline{DB}^2=\overline{CF}^2+\overline{BE}^2+\overline{AD}^2$$

因間隔截線段長度平方和相等，故可知三垂線交於一點。



彙整研究發現，當$\overline{AD}$、$\overline{DB}$、$\overline{BE}$、$\overline{EC}$、$\overline{CF}$與$\overline{FA}$的長度表示為$\frac{3c+ka-kb}{6}$、$\frac{3c+kb-ka}{6}$、$\frac{3a+kb-kc}{6}$、$\frac{3a+kc-kb}{6}$、$\frac{3b+kc-ka}{6}$與$\frac{3b+ka-kc}{6}$時(如圖)，不論k值為何，均可得到以下性質：

1.間隔截線段長度和相等

$$\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=\frac{3c+ka-kb}{6}+\frac{3a+kb-kc}{6}+\frac{3b+kc-ka}{6}=\frac{3a+3b+3c}{6}=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\overline{DB}+\overline{EC}+\overline{FA}=\frac{3c+kb-ka}{6}+\frac{3a+kc-kb}{6}+\frac{3b+ka-kc}{6}=\frac{a+b+c}{2}$$

2.間隔截線段長度平方和相等

$\overline{FA}^2+\overline{EC}^2+\overline{DB}^2=\overline{CF}^2+\overline{BE}^2+\overline{AD}^2$（先前已証）

3.間隔截線段長度之兩兩乘積和相等

$\because$ S$=\overline{FA}+\overline{EC}+\overline{DB}=\overline{CF}+\overline{BE}+\overline{AD}$ $\therefore(\overline{FA}+\overline{EC}+\overline{DB})^2=(\overline{CF}+\overline{BE}+\overline{AD})^2$

$$\Rightarrow \overline{FA}\times\overline{EC}+\overline{FA}\times\overline{DB}+\overline{EC}\times\overline{DB}=\overline{CF}\times\overline{BE}+\overline{CF}\times\overline{AD}+\overline{BE}\times\overline{AD}$$

4.間隔截線段長度之立方和減其三倍三邊乘積相等

$\because$ $\overline{FA}+\overline{EC}+\overline{DB}=\overline{CF}+\overline{BE}+\overline{AD}$ 且 $\overline{FA}\times\overline{EC}+\overline{FA}\times\overline{DB}+\overline{EC}\times\overline{DB}=\overline{CF}\times\overline{BE}+\overline{CF}\times\overline{AD}+\overline{BE}\times\overline{AD}$

$\overline{FA}^2+\overline{EC}^2+\overline{DB}^2=\overline{CF}^2+\overline{BE}^2+\overline{AD}^2$

$$\therefore \overline{FA}^3+\overline{EC}^3+\overline{DB}^3-3(\overline{FA}\times\overline{EC}\times\overline{DB})=\overline{CF}^3+\overline{BE}^3+\overline{AD}^3-3(\overline{CF}\times\overline{BE}\times\overline{AD})$$

(1).當$\overline{FA}\times\overline{EC}\times\overline{DB}=\overline{CF}\times\overline{BE}\times\overline{AD}$的情況時，間隔截線段長度之立方和相等。

(2).當間隔截線段長度和相等、平方和相等、兩兩乘積和相等及三邊乘積相等時，間隔截線段長度之四次方和相等

$$\overline{FA}^4+\overline{EC}^4+\overline{DB}^4=\left(\overline{FA}^2+\overline{EC}^2+\overline{DB}^2\right)^2-2(\overline{FA}\cdot\overline{EC}+\overline{FA}\cdot\overline{DB}+\overline{EC}\cdot\overline{DB})+4\overline{FA}\cdot\overline{EC}\cdot\overline{DB}(\overline{FA}+\overline{EC}+\overline{DB})$$

$$\overline{BE}^4+\overline{AD}^4+\overline{CF}^4=\left(\overline{BE}^2+\overline{AD}^2+\overline{CF}^2\right)^2-2(\overline{BE}\cdot\overline{AD}+\overline{BE}\cdot\overline{CF}+\overline{AD}\cdot\overline{CF})+4\overline{BE}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{CF}(\overline{BE}+\overline{AD}+\overline{CF})$$

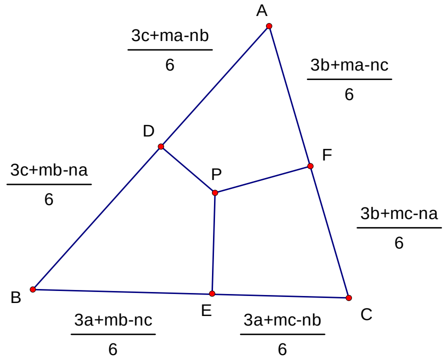
$$\therefore \overline{FA}^4+\overline{EC}^4+\overline{DB}^4=\overline{BE}^4+\overline{AD}^4+\overline{CF}^4$$

將 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 上的分點 D、E、F 所截成線段 $\overline{AD}$ 、$\overline{DB}$ 、$\overline{BE}$ 、$\overline{EC}$ 、$\overline{CF}$ 與 $\overline{FA}$ 長為 $\frac{3c+ka-kb}{6}$ 、$\frac{3c+kb-ka}{6}$ 、$\frac{3a+kb-kc}{6}$ 、$\frac{3a+kc-kb}{6}$ 、$\frac{3b+kc-ka}{6}$ 與 $\frac{3b+ka-kc}{6}$ 時，三垂線共點，產生的性質彙整如下：

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
名稱	內心		間隔三等分周長點	外心	相鄰三等分周長點		擬似耐吉爾點
三段長度相同輪換	相鄰	無	無	間隔	無	無	相鄰
間隔長度和相同	是	是	是	是	是	是	是
間隔長度平方和相同	是	是	是	是	是	是	是
間隔長度立方和相同	是	否	否	是	否	否	是
間隔長度四次方和相同	是	否	否	是	否	否	是
間隔長度之積相等	是	否	否	是	否	否	是
其他	到三邊等距		間隔三等分	到三頂點等距	相鄰三等分		

有單參數的經驗之後，想推廣成為兩個參數的情況，擬研究：

當 $\overline{AD}$、$\overline{DB}$、$\overline{BE}$、$\overline{EC}$、$\overline{CF}$ 與 $\overline{FA}$ 的長度表為 $\frac{3c+ma-nb}{6}$、$\frac{3c+mb-na}{6}$、$\frac{3a+mb-nc}{6}$、$\frac{3a+mc-nb}{6}$、$\frac{3b+mc-na}{6}$ 與 $\frac{3b+ma-nc}{6}$(如圖)且三垂線交於一點時，m 與 n 之間的關係，



我們先檢驗間隔長度的平方和是否相等：

$$\overline{AF}^2+\overline{CE}^2+\overline{BD}^2=\left(\frac{3b+ma-nc}{6}\right)^2+\left(\frac{3a+mc-nb}{6}\right)^2+\left(\frac{3c+mb-na}{6}\right)^2$$

$$=\left[\frac{b}{2}+\left(\frac{ma-nc}{6}\right)\right]^2+\left[\frac{a}{2}+\left(\frac{mc-nb}{6}\right)\right]^2+\left[\frac{c}{2}+\left(\frac{mb-na}{6}\right)\right]^2$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4}{4}+\left[\left(\frac{ma-nc}{6}\right)^2+\left(\frac{mc-nb}{6}\right)^2+\left(\frac{mb-na}{6}\right)^2\right]+\frac{m-n}{6}(ab+bc+ac)$$

$$\overline{FC}^2+\overline{EB}^2+\overline{DA}^2=\left(\frac{3b+mc-na}{6}\right)^2+\left(\frac{3a+mb-nc}{6}\right)^2+\left(\frac{3c+ma-nb}{6}\right)^2$$

$$=\left[\frac{b}{2}-\left(\frac{na-mc}{6}\right)\right]^2+\left[\frac{a}{2}-\left(\frac{nc-mb}{6}\right)\right]^2+\left[\frac{c}{2}-\left(\frac{nb-ma}{6}\right)\right]^2$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4}{4}+\left[\left(\frac{mc-na}{6}\right)^2+\left(\frac{mb-nc}{6}\right)^2+\left(\frac{mb-na}{6}\right)^2\right]+\frac{n-m}{6}(ab+bc+ac)$$

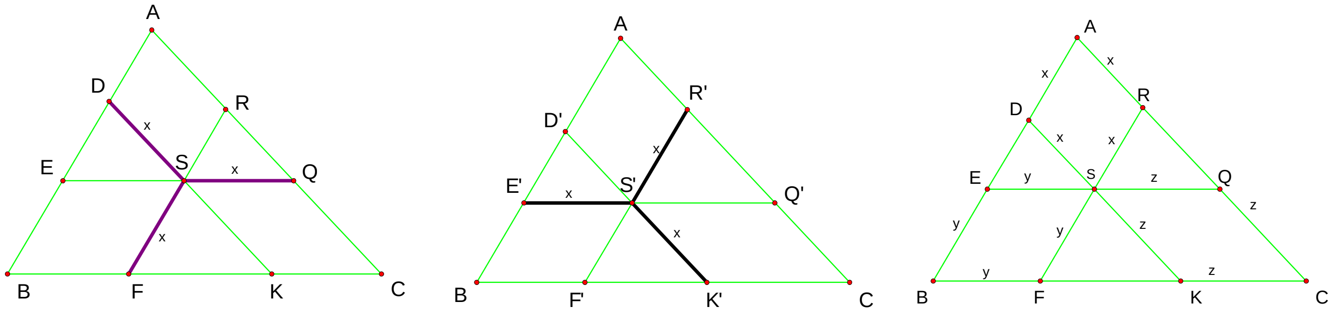
若$\overline{AF}^2+\overline{CE}^2+\overline{BD}^2=\overline{FC}^2+\overline{EB}^2+\overline{DA}^2$，則$m=n$。表示，只要討論單參數的情況即可。

伍、總結

本研究問題有兩個：一是『三平行截線共點問題』，二是『三邊垂線共點問題』。研究發現：當交點在內部時，三平行截線共點的充要條件有兩個，一為『三個對應比例和為 1』，二為『在三截線共點時，每邊分成三段，其中兩段之和與第三段的比值其乘積等於和加上 2』。當交點在外部時，『三個對應比例和為 1』的關係，原則上不變，只要將和 A、B、C 順序(逆時針)方向相同反者，變成負號即可。

研究三條平行線段交於內部一點時所截成的六條截線段長度，發現除正三角形外，不可能有六條截線段長度相等；不可能有五條截線段長度相等；四條截線段長度相等發生在等腰三角形中且過內心的六組平行截線；有三條截線段相等的情況有很多種，其中到『三邊連線段長相同』(如下圖左、中所示)的情況最令我們感到興趣，該交點稱之為『擬似內心』，除非是正三角形，擬似內心通常有兩個，擬似內心到三邊的截線段長度為

$\dfrac{1}{\dfrac{1}{\overline{AB}}+\dfrac{1}{\overline{BC}}+\dfrac{1}{\overline{CA}}}$，即為三角形三邊長調和平均的三分之一。

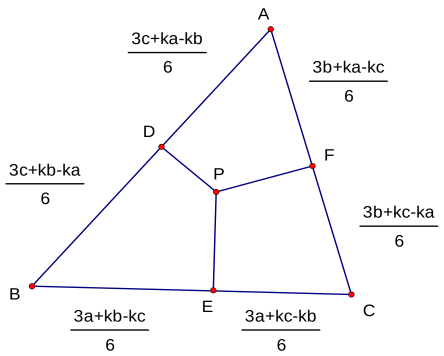


本研究提供重心、內心、傍心與垂心作圖的新方法。發現當三角形邊長分為三等分時，所作的平行截線交點為重心，反之亦成立。當平行四邊形 ADSR、EBFS 與 SKCQ 為菱形，S 為內心；此時菱形邊長為『夾邊乘積除以周長』，兩菱形的頂點位置可決定內心的位置(見上頁圖右)。傍心的作法延自於內心，由於點位於外部，部分符號要改為負之外，作法大致相同。當 S 為垂心時，$\overline{AD}$ ： $\overline{DE}$ ： $\overline{EB}$ 和邊長有關(比例請見 p.9 ~p.10 說明)，若將比例換成 $\overline{AD}$ 與 $\overline{EB}$，可由平行截線交點求出垂心的位置。

除推廣重心、內心、傍心與垂心的作圖外，亦推廣中線的概念，發現三條平行截線，每一條均將三角形分成上下面積比例為 $\dfrac{4}{5}$ 時，三截線會共點。並推廣半周長連線的概念，發現三條平行截線均將三角形分成上下周長比例為 $2\times\dfrac{\text{兩兩和之積}}{(\text{周長})(\text{三邊平方和}+\text{三倍兩兩積之和})}$ 時，三截線會共點。

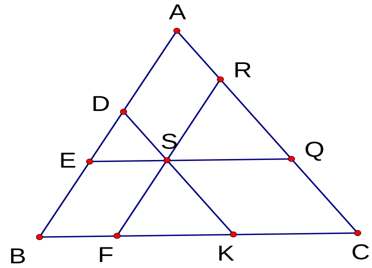
三邊垂線共點時，必須滿足相間隔截線段長度平方和相等。我們是在$\overline{AD}$、$\overline{DB}$、$\overline{BE}$、$\overline{EC}$、$\overline{CF}$與$\overline{FA}$長分別為$\frac{3c+ka-kb}{6}$、$\frac{3c+kb-ka}{6}$、$\frac{3a+kb-kc}{6}$、$\frac{3a+kc-kb}{6}$、$\frac{3b+kc-ka}{6}$與$\frac{3b+ka-kc}{6}$時考慮三垂線共點其產生的特殊性質(如下圖)，研究顯示，當

$k=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3$時，其大致上都滿足相間隔截線段長度之和相等，若間隔的長度乘積相同時，截線段長度之立方和與四次方和都會相等，有些情況下，這些線段具有輪換性質；透過我們的觀點，能將外心、內心、擬似耐吉爾點及三等分周長點結合為一。垂心是一個特別的定點，其間隔線段之平方和相等，但間隔線段之和卻不相等，無法與先前的定點作出有效的連結。



陸、展望

研究過程夾雜著發現的興奮與未能獲良果的失落。例如我們曾經想要以平行作圖做出三等分周長點的位置（如圖$\overline{DA}+\overline{AQ}=\overline{QC}+\overline{CF}=\overline{FB}+\overline{BD}$）但未能成功。雖然我們成功以平行截線的方式做出重心、內心、傍心與垂心位置，並想要以同樣作圖方式做出外心的企圖，尚未實現。然而我們相信對於這兩個問題，往後一定都可以有長足的突破。



另外一方面，在垂直作圖的討論中，推廣了內心、外心及三等分周長點的結果，發現：連同三個頂點與三邊垂線的垂足，可將原三角形分成六條線段，每個邊長都可以以$\dfrac{3a+kb-kc}{6}$、$\dfrac{3b+kc-ka}{6}$或$\dfrac{3c+ka-kb}{6}$的形式表現，我們對於$k=0,\pm 1,\pm 3$的情況，均發現很好的成果，但對於$k=\pm 2$時，則尚未發現有趣的幾何性質，是我們正在努力研究的議題。

柒、參考資料

1.趙文敏(1992)。幾何學概論 (2 版)。台北：出版社。

2.高中數學第一冊。台北：南一出版社。

3.高中數學第二冊。台北：南一出版社。

4.數學銜接教材。台北：翰林出版社。

【評語】040419

1)本作品以"作圖"爲名，然其作圖之想法卻多以代數運算概念來切入幾何作圖，此類思維似已失去幾何作圖之本質。

2)作品中所討論的主題過於繁雜，但也相對失焦，建議宜針對其中主要的主題，做更深入的探討。