中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

最佳創意獎

040418

三角形的旁切圓錐曲線

學校名稱：國立宜蘭高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳彥齊 高二 張家恒	戴武郎

關鍵詞：　旁切拋物線、旁切橢圓與雙曲線、正焦弦長

摘要

在一次邂逅裡，我們碰到了一個三角形旁切拋物線的題目，我們經過代數、向量、幾何作圖方法，得到了一個完美的結果：$\triangle ABC$ 旁切拋物線的正焦弦長$=\dfrac{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}{R^2}$（其中$F$是焦點，$R$是$\triangle ABC$的外接圓半徑），以這個結果爲基礎，我們推導出：當其對稱軸爲$\triangle ABC$中的角平分線時，三個旁切拋物線的正焦弦長與三角形間的關係式，更對這三個正焦弦長做了關係的討論。

令人意想不到的是，這個對稱點的作圖（Simson 定理推廣），亦適用於三角形旁切橢圓及旁切雙曲線，並進一步得到$\triangle ABC$旁切橢圓（雙曲線）的長軸長（貫軸長）$=\dfrac{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}{\left|d^2-R^2\right|}$，短軸長（共軛軸長）的平方$=\dfrac{8R\cdot\overline{FF_1}\cdot\overline{FF_2}\cdot\overline{FF_3}}{\left|d^2-R^2\right|}$，（其中$d$是焦點$F$到$\triangle ABC$外接圓圓心的距離，$F_1,F_2,F_3$分別爲$F$到$\triangle ABC$三邊的垂足），因而其正焦弦長$=8R\times\dfrac{\overline{FF_1}\cdot\overline{FF_2}\cdot\overline{FF_3}}{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}$。

壹、研究動機

在數學專題研究課中，老師拋出了一個 94 學年度大學入學指考數學甲試題，原題如下：

> 9. 有一條拋物線位於坐標平面之上半面（即其y坐標≥ 0），並與$x-$軸、直線$y=x-1$、直線$y=-x-1$相切。下列敘述何者正確：
>
> (1) 此拋物線的對稱軸必爲$y-$軸。
>
> (2) 若此拋物線對稱軸爲$y-$軸，則其焦距爲1。
>
> (3) 此拋物線的頂點必在$x-$軸上。
>
> (4) 有不只一條拋物線滿足此條件。

經過深入討論這個題目發現，此題即爲三角形的「旁切拋物線」，其中關於第四個選項「有不只一條拋物線滿足此條件」，對此，我們想對其作圖方法做進一步的研究，並且對所作出的圖形的一些性質做討論，另外，我們也想進一步去探索這些旁切拋物線是否與三角形的旁切圓類似，擁有一些美妙的性質，這引發了我們的好奇心靈，因此展開我們一系列的研究。

貳、研究目的

一、將 94 年數學甲的問題，從等腰直角三角形推廣到一般三角形，並研究其作圖方法。

二、從作出的旁切拋物線中，計算其正焦弦長，並研究其性質。

三、找出與三角形旁切圓類似的旁切拋物線的性質。

四、從旁切拋物線推廣到旁切圓錐曲線，計算此旁切圓錐曲線的長軸長(或貫軸長)、短軸長(或共軛軸長)和正焦弦長，並研究其性質。

參、研究設備與器材

一、GSP(The Geometer's Sketchpad)

二、Microsoft Word

三、Math Type 5

四、電腦

五、筆、紙

肆、研究過程與方法

第一部份、基本定理

我們的研究需要用到以下的一些性質：

【性質一】

若Γ為$\triangle ABC$的旁切拋物線，F是其焦點，則A、B、C、F共圓。

【性質二】

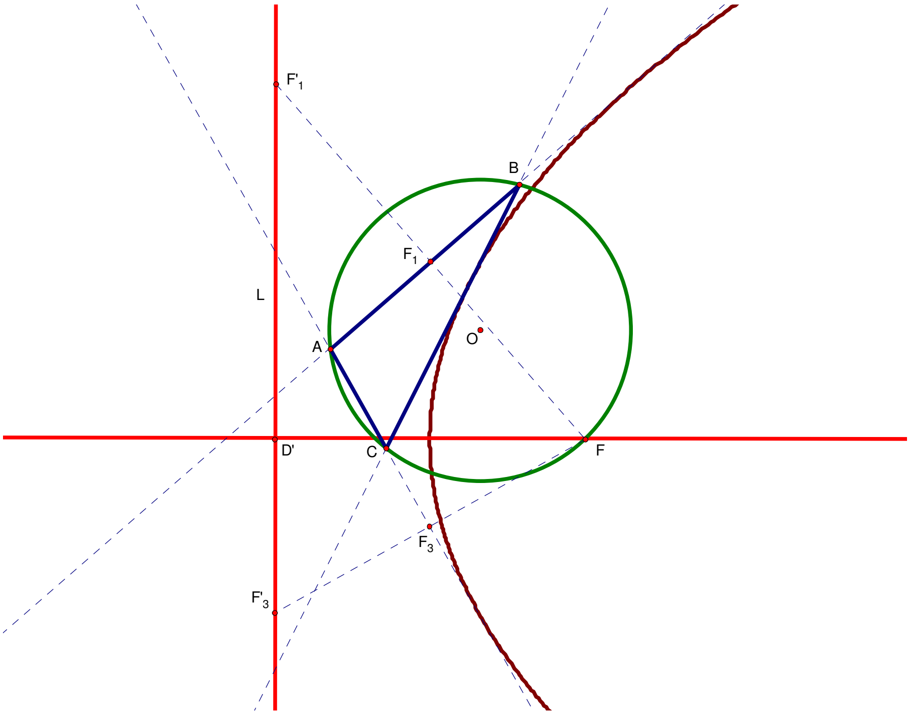
設F為拋物線Γ的焦點，則直線L為Γ的切線$\Leftrightarrow$ F關於L的對稱點F'位於準線上。

這些性質都可以在參考資料[1]或[2]中找到。

第二部份、三角形旁切拋物線的作圖方法

在參考資料[1]中給出了一個三角形旁切拋物線的作圖方法：

1. 在$\triangle ABC$的外接圓上取異於A,B,C的點F。
2. 作點F對於三邊$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$的對稱點，由 Simson 定理知此三點共線，令此直線為L。
3. 以F為焦點、L為準線，作拋物線Γ。則Γ會與$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$三直線相切（由性質二），即Γ為$\triangle ABC$的旁切拋物線。



圖一

第三部份、三角形旁切拋物線的正焦弦長及相關性質

我們利用上面所做的旁切拋物線，計算其正焦弦長，運用F到$\triangle ABC$的三邊垂足F_1,F_2,F_3連線與拋物線的準線平行，得到一個令我們很驚奇的結果，這個結果是經過一段漫長又辛苦的計算後發現的，經過代數幾何和幾何作圖等方法，我們最後得到以下的精簡證明：

【定理一】若$\triangle ABC$的外接圓半徑爲R，Γ爲$\triangle ABC$的旁切拋物線，

則Γ的正焦弦長$=\dfrac{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}{R^2}$。

證明：

設焦點F在三邊$\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$上的垂足分別爲

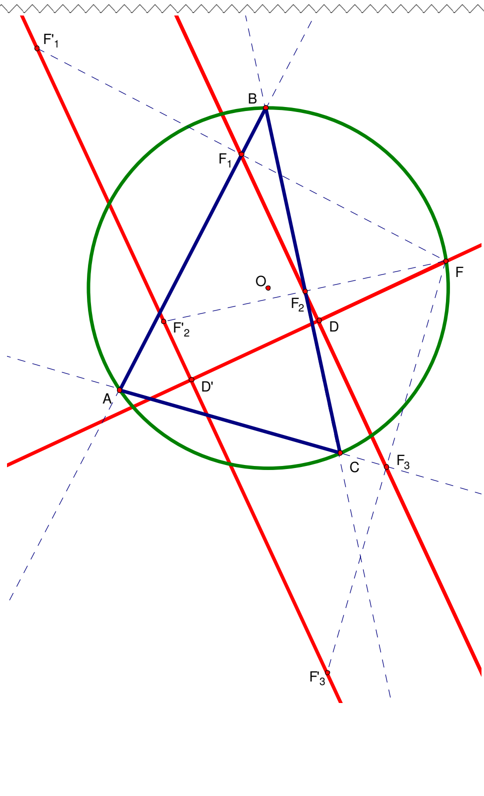
F_1,F_2,F_3，其對稱點分別爲F_1',F_2',F_3'。(如圖二)

考慮三角形$\triangle FF_1'F_3'$與$\triangle FF_1F_3$。

$\because \overline{FF_1}=\dfrac{1}{2}\overline{FF_1'}$、$\overline{FF_3}=\dfrac{1}{2}\overline{FF_3'}$，$\therefore \triangle FF_1'F_3' \sim \triangle FF_1F_3$

，故焦點F到準線$\overleftrightarrow{F_1'F_3'}$的距離$\overline{FD'}=2\overline{FD}$，

即正焦弦長$=2\overline{FD'}=4\overline{FD}$。



圖二

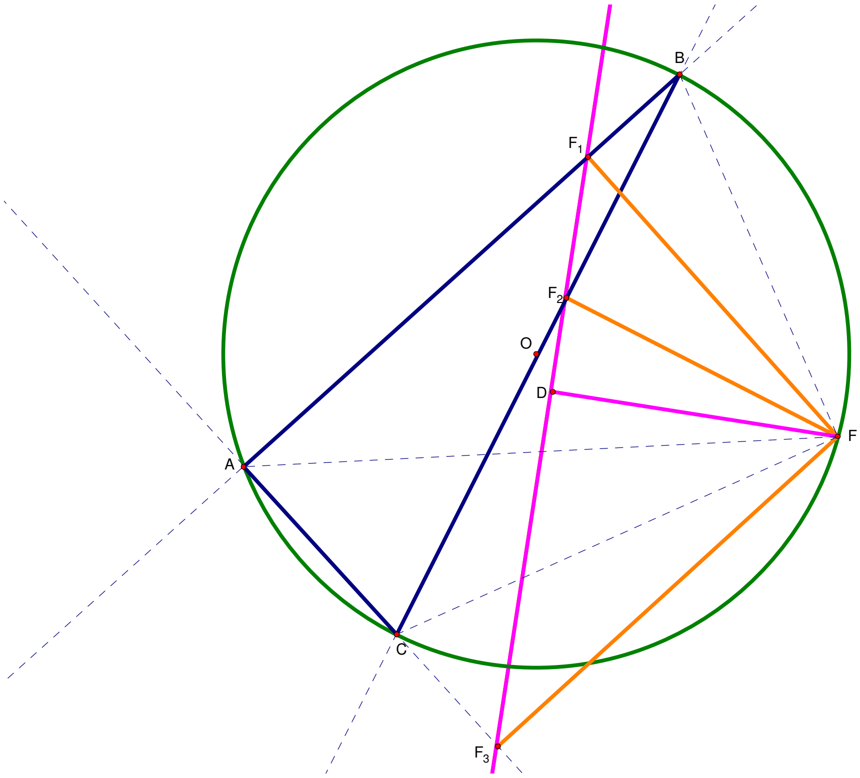
而 $\overline{FD} = \overline{FF_3} \times \sin\angle FF_3D$

$= \overline{FA} \times \sin\angle FAF_3 \times \sin\angle FAB$ （$\because$ FF_3AF_1 共圓）

$= \overline{FA} \times \sin\angle FAC \times \sin\angle FAB$

$= \dfrac{\overline{FA} \times \overline{FB} \times \overline{FC}}{4R^2}$

故正焦弦長 $= 4\overline{FD} = \dfrac{\overline{FA} \times \overline{FB} \times \overline{FC}}{R^2}$ 。(參考下圖三)



圖三

我們知道三角形的三個旁切圓有非常多美妙的性質，那麼旁切拋物線是否也有類似的結果呢？針對這個問題，我們有以下的發現：

【定理二】設 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ 分別是 $\triangle ABC$ 中以 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的角平分線爲對稱軸之三個旁切拋物線，其正焦弦長分別爲 ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C ，則

$\ell_A = 2(b+c)\sin\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{A}{2}$ 、

$\ell_B = 2(a+c)\sin\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{B}{2}$ 、

$\ell_C = 2(a+b)\sin\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ 。

證明：

如圖四，$\overline{AF}$ 為$\angle BAC$的平分線，

故$\overline{FB}=\overline{FC}=2R\sin\dfrac{A}{2}$。

由托勒密定理：

$$\overline{FA}\cdot a=\overline{FC}\cdot c+\overline{FB}\cdot b=2R(b+c)\sin\frac{A}{2}$$

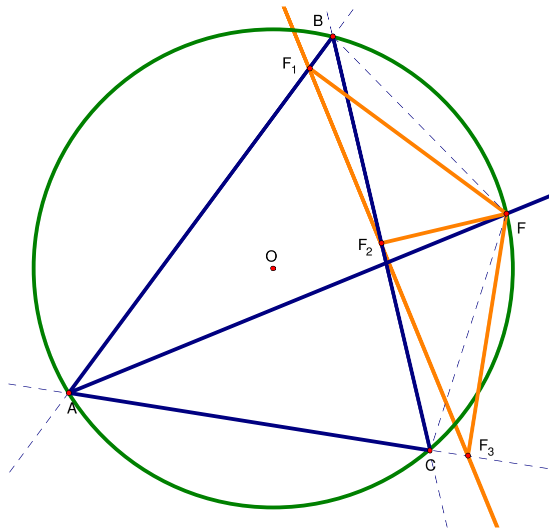
$$\therefore \overline{FA}=\frac{2R(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a}$$

$$\ell_A=\frac{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}{R^2}$$

$$=\frac{2R(b+c)\sin\frac{A}{2}\cdot 2R\sin\frac{A}{2}\cdot 2R\sin\frac{A}{2}}{a\cdot R^2}$$

$$=\frac{8(b+c)R\sin^3\frac{A}{2}}{2R\sin A}=2(b+c)\cdot\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=2(b+c)\sin\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}\text{。}$$



圖四

同理有$\ell_B=2(a+c)\sin\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{B}{2}$、$\ell_C=2(a+b)\sin\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{C}{2}$。

利用【定理二】的結果，我們可以得到以下類似於旁切圓的一些性質：

推論一：設$\Gamma_A,\Gamma_B,\Gamma_C$分別是$\triangle ABC$中以$\angle A,\angle B,\angle C$的角平分線為對稱軸之三個旁切拋物線，其正焦弦長分別為ℓ_A,ℓ_B,ℓ_C，則

(1) $\ell_A\ell_B\ell_C=\dfrac{4r^2}{R}\times\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c}$。

(2) $\ell_A^2+\ell_B^2+\ell_C^2=\dfrac{r^3}{R}\left[\dfrac{a(b+c)^2}{(s-a)^3}+\dfrac{b(a+c)^2}{(s-b)^2}+\dfrac{c(a+b)^2}{(s-c)^3}\right]$。

(其中$r=$三角形內切圓半徑，$R=$三角形外接圓半徑，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$)

證明：

$$(1)\because \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}},\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\therefore \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}=\frac{\triangle^2}{sabc}=\frac{\triangle}{4Rs}=\frac{r}{4R}\text{ 。}$$

$$\because \tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a},\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b},\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}$$

$\therefore \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r^2}{\triangle}=\frac{r}{s}$，其中$\triangle=$三角形面積。

故$\ell_A\ell_B\ell_C=8(a+b)(b+c)(c+a)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

$$=8(a+b)(b+c)(c+a)\times\frac{r}{4R}\times\frac{r}{s}=\frac{4r^2}{R}\times\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c}\text{ 。}$$

$$(2)\ \ell_A^2=4(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{A}{2}$$

$$=4(b+c)^2\frac{(s-c)(s-b)}{bc}\left(\frac{r}{s-a}\right)^2$$

$$=\frac{4r^2(b+c)^2(s-c)(s-b)}{bc(s-a)^2}$$

$$=\frac{4\frac{\triangle^2}{s^2}(b+c)^2\frac{\triangle^2}{s(s-a)}}{bc(s-a)^2}$$

$$=\frac{4(b+c)^2\triangle^4}{bc(s-a)^3s^3}$$

$$=\frac{4(b+c)^2\triangle^4}{\frac{2\triangle}{\sin A}(s-a)^3s^3}$$

$$=\frac{2(b+c)^2\triangle^3\sin A}{(s-a)^3s^3}$$

$$=\frac{2(b+c)^2r^3\sin A}{(s-a)^3}=\frac{a(b+c)^2r^3}{R(s-a)^3}\text{ 。}$$

同理$\ell_B^2=\frac{b(a+c)^2r^3}{R(s-b)^3}$、$\ell_C^2=\frac{c(a+b)^2r^3}{R(s-c)^3}$

$$\therefore \ell_A^2+\ell_B^2+\ell_C^2=\frac{r^3}{R}\left[\frac{a(b+c)^2}{(s-a)^3}+\frac{b(a+c)^2}{(s-b)^2}+\frac{c(a+b)^2}{(s-c)^3}\right]\text{ 。}$$

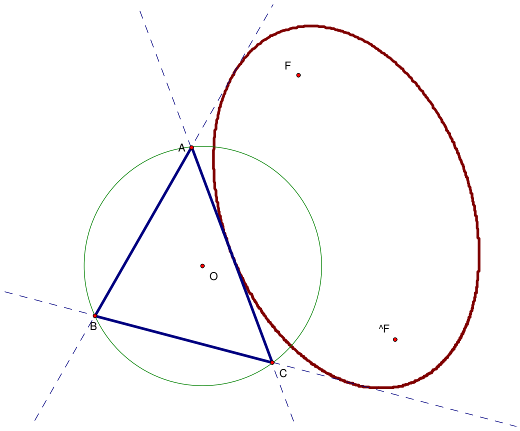
第四部份、三角形的旁切橢圓與旁切雙曲線的作圖及相關性質

在作三角形ABC的旁切拋物線時，其焦點F是在三角形的外接圓O上。如果焦點F不在外

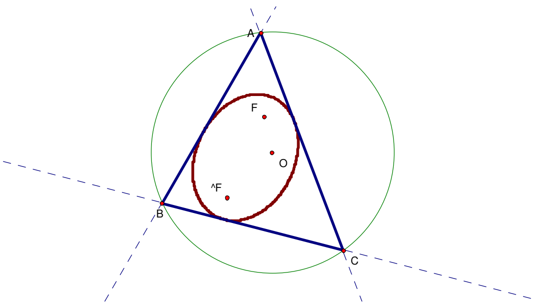
接圓O上時，結果會怎樣呢？此時F對於直線$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$的三對稱點F_1',F_2',F_3'並不共線，利用這個對稱點$\triangle F_1'F_2'F_3'$，我們有以下的結果：

設$\triangle F_1'F_2'F_3'$的外接圓圓心為$\widehat{F}$，半徑為R'，在$\angle A$所張的區域內（$\angle B,\angle C$同理）：

一、若F在外接圓O外時，則以$F,\widehat{F}$為兩焦點、R'為長軸長的橢圓為$\triangle ABC$的旁切橢圓。

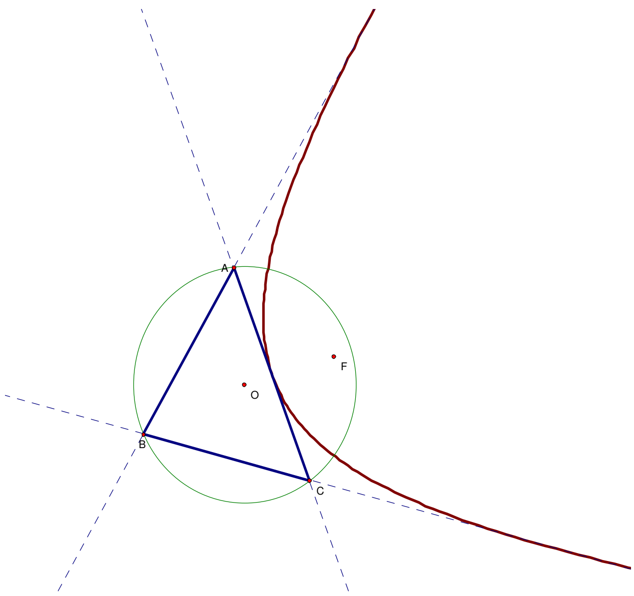


二、若F在$\triangle ABC$內，則以$F,\widehat{F}$為兩焦點、R'為長軸長的橢圓為$\triangle ABC$的內切橢圓。

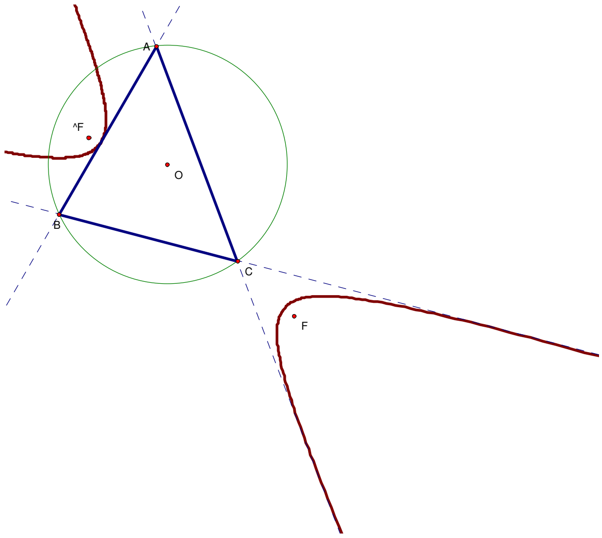


三、若F在外接圓O內、$\triangle ABC$外，則以$F,\widehat{F}$為兩焦點、R'為貫軸長的雙曲線有以下兩種結果：

(一)雙曲線皆與$\triangle ABC$的三邊延長線$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$切於同一支上，此雙曲線為$\triangle ABC$的旁切雙曲線。

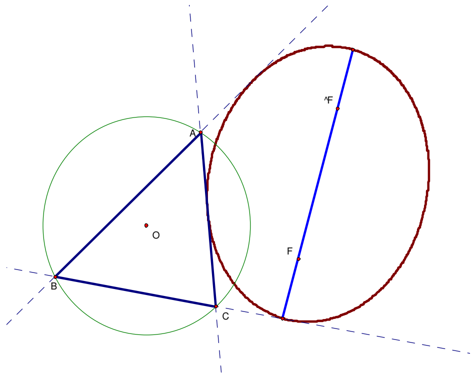


(二)雙曲線仍然與$\triangle ABC$的邊（或其延長線）相切，但切點並非都位於同一支上。



【定理三】若Γ為$\triangle ABC$的旁切橢圓（雙曲線），則長軸長（貫軸長）$=\dfrac{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}{\left|d^2-R^2\right|}$。

（其中F為旁切橢圓(雙曲線)的一焦點，O為三角形$\triangle ABC$外接圓圓心，$d=\overline{FO}$）



證明：

如右圖，令F_1,F_2,F_3分別為F到$\triangle ABC$三邊的垂足，F_1',F_2',F_3'分別為對稱點。

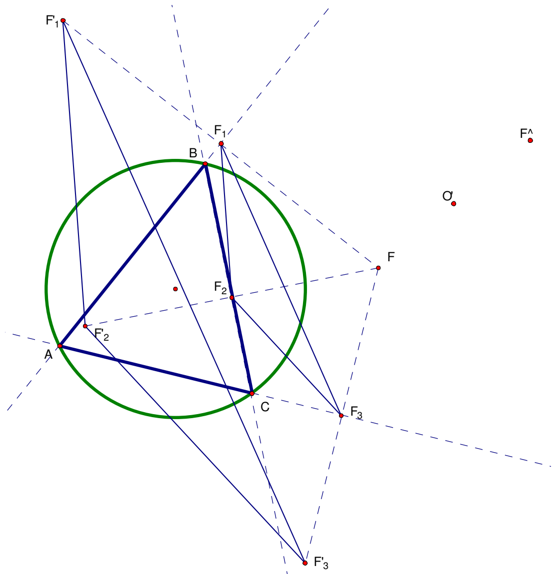
$\because \overline{FF_1}=\dfrac{1}{2}\overline{FF_1'}$、$\overline{FF_3}=\dfrac{1}{2}\overline{FF_3'}$，

$\therefore \overline{F_1F_3}=\dfrac{1}{2}\overline{F_1'F_3'}$，同理有$\overline{F_2F_3}=\dfrac{1}{2}\overline{F_2'F_3'}$、

$\overline{F_1F_2}=\dfrac{1}{2}\overline{F_1'F_2'}$，故$\therefore \triangle F_1F_2F_3 \sim \triangle F_1'F_2'F_3'$，

所以

(旁切橢圓長軸長)＝($\triangle F_1'F_2'F_3'$的外接圓半徑)＝($\triangle F_1F_2F_3$的外接圓直徑)。



如下圖五，連接$\overleftrightarrow{FA}$交圓O於Q點，

由圓冪性質，可得$\overline{FA}\times\overline{FQ}=\left|(d+R)(d-R)\right|=\left|d^2-R^2\right|$。

另一方面，在$\triangle FBQ$中，根據正弦定理，

$$\overline{FQ}=\frac{\overline{FB}\times\sin\angle FBQ}{\sin\angle BQF}=\frac{\overline{FB}\times\sin\angle FBQ}{\sin\angle BQA}$$

$$=\frac{\overline{FB}\times\sin(\angle FBF_2-\angle CBQ)}{\sin C}$$

$$=\frac{\overline{FB}\times\sin(\angle FBF_2-\angle F_3AF)}{\sin C}$$

$$=\frac{\overline{FB}\times\sin(\angle FF_1F_2-\angle F_3F_1F)}{\sin C}$$

（$\because$ FF_1BF_2、FF_3AF_1 共圓，$\therefore\angle FBF_2=\angle FF_1F_2$、$\angle F_3AF=\angle F_3F_1F$）

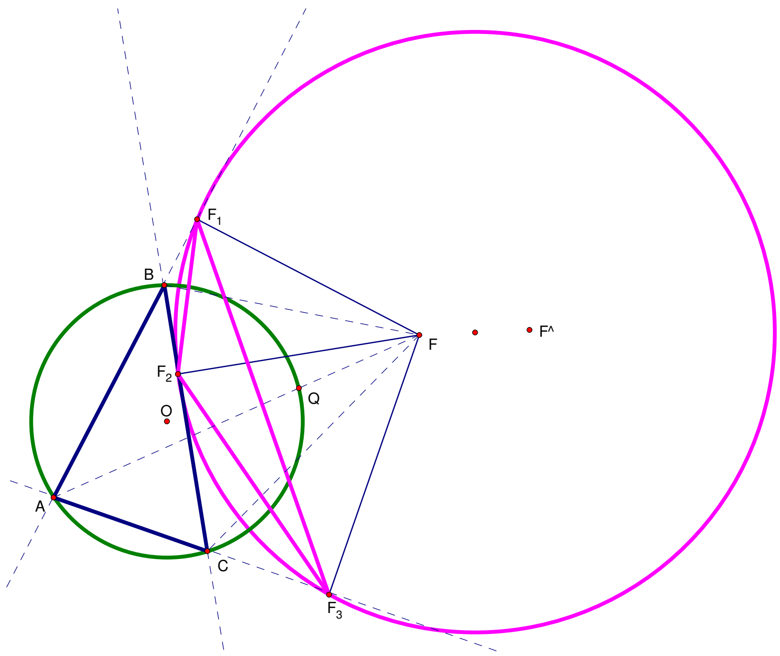
$$=\frac{\overline{FB}\times\sin\angle F_3F_1F_2}{\sin C}$$

$$=\frac{\overline{FB}\times\overline{FC}\times\sin\angle F_3F_1F_2}{\overline{F_2F_3}}$$ （$\because$ FF_2CF_3共圓， $\therefore\sin C=\sin\angle F_2CF_3=\dfrac{\overline{F_2F_3}}{\overline{FC}}$）

$$=\overline{FB}\times\overline{FC}\times\frac{1}{\triangle F_1F_2F_3\text{外接圓直徑}}$$ （於$\triangle F_1F_2F_3$中）

整理得$\left|d^2-R^2\right|=\overline{FA}\times\overline{FQ}=\overline{FA}\times\overline{FB}\times\overline{FC}\times\dfrac{1}{\text{長軸長}}$

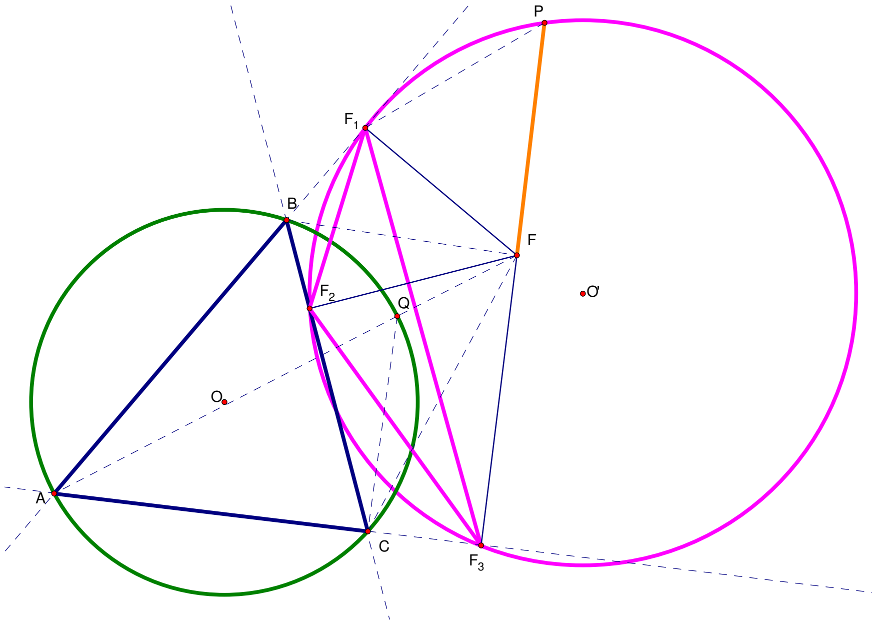
$\Rightarrow$長軸長$=\dfrac{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}{\left|d^2-R^2\right|}$。



圖五

【定理四】若Γ爲$\triangle ABC$的旁切橢圓（雙曲線），則

$$\text{短軸長（共軛軸長）的平方}=\frac{8R\cdot\overline{FF_1}\cdot\overline{FF_2}\cdot\overline{FF_3}}{\left|d^2-R^2\right|}\text{。}$$



證明：

我們先證明$\triangle F_1F_2F_3$的外心O'爲$\triangle F_1'F_2'F_3'$的外心$\widehat{F}$與F的中點：

如右圖，假設Q,P分別爲$\overline{F_1F_2},\overline{F_1'F_2'}$的中點，

連$\overline{P\widehat{F}}$，因爲$\widehat{F}$爲$\triangle F_1'F_2'F_3'$的外心，故$\overline{P\widehat{F}}$爲

$\overline{F_1'F_2'}$的中垂線。作$\overline{F_1F_2}$的中垂線$\overleftrightarrow{QM}$交$\overline{F\widehat{F}}$

於M點。

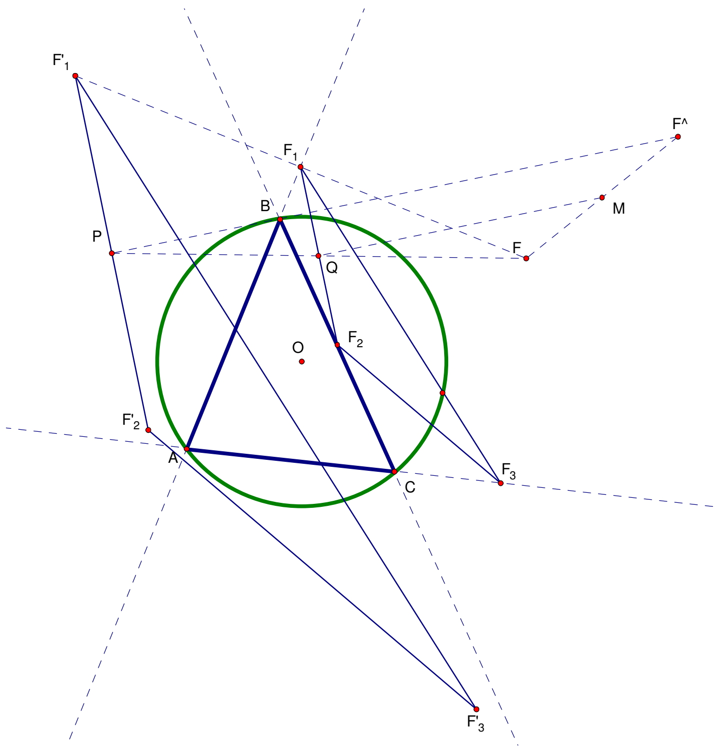
因$\triangle F_1F_2F_3\sim\triangle F_1'F_2'F_3'$，故$Q$爲$\overline{FP}$的中點。

另一方面，$\overline{P\widehat{F}}\,//\,\overline{QM}$，

從而有M爲$\overline{F\widehat{F}}$的中點。

同理，$\overline{F_2F_3},\overline{F_3F_1}$的中垂線亦通過$M$點，

故$M=O'$。



令P點爲$\overleftrightarrow{FF_3}$與圓$O'$的交點、連接$\overleftrightarrow{FA}$交圓$O$於$Q$點，則

$$(\frac{1}{2}\text{短軸長})^2=(\frac{1}{2}\text{長軸長})^2-(\frac{1}{2}\text{焦距})^2=(\text{圓}O'\text{的半徑})^2-\overline{O'F}^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{FF_3} \times \overline{FP} && （圓冪性質）\\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\sin\angle FF_1P}{\sin\angle F_1PF} \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\sin(\angle F_2F_1P - \angle F_2F_1F)}{\sin(\pi - \angle F_1F_2F_3)} \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\sin(\pi - \angle F_2F_3P - \angle F_2F_1F)}{\sin\angle F_1F_2F_3} \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\sin(\angle F_2F_3F + \angle F_2BF)}{\sin\angle F_1F_2F_3} && （\because FF_1BF_2 \text{ 共圓，} \therefore \angle F_2F_1F = F_2BF）\\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\sin(\angle F_2CF + \angle F_2BF)}{\sin\angle F_1F_2F_3} && （\because FF_2CF_3 \text{ 共圓，} \therefore \angle F_2F_3F = \angle F_2CF）\\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\sin\angle F_2CF\cos\angle F_2BF + \sin\angle F_2BF\cos\angle F_2CF}{\sin\angle F_1F_2F_3} \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\dfrac{\overline{FF_2}\times\overline{BF_2}}{\overline{FC}\times\overline{FB}} + \dfrac{\overline{FF_2}\times\overline{CF_2}}{\overline{FB}\times\overline{FC}}}{\sin\angle F_1F_2F_3} \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \overline{FF_2} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{FB}\times\overline{FC}\times\sin\angle F_1F_2F_3} \text{ 。}
\end{aligned}
$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
\left|d^2 - R^2\right| &= \overline{FA} \times \overline{FQ} && （圓冪性質）\\
&= \frac{\overline{FA}\times\overline{FC}\times\sin\angle QCF}{\sin\angle FQC} && （由正弦定理）\\
&= \frac{\overline{FA}\times\overline{FC}\times\sin\angle F_2F_3F_1}{\sin B} \\
&= \overline{FA}\times\overline{FC}\times\frac{2R}{\overline{AC}}\times\frac{\overline{F_1F_2}\times\sin\angle F_1F_2F_3}{\overline{F_1F_3}} \text{ 。}
\end{aligned}
$$

（$\because \angle FQC = \pi - \angle B$ ，且
$\angle QCF = \angle F_2CF - \angle BCQ = \angle F_2F_3F - \angle BAQ = \angle F_2F_3F - \angle F_1F_3F = \angle F_2F_3F_1$ ）

$$
\begin{aligned}
\therefore \frac{2R}{\left|d^2 - R^2\right|} &= \frac{\overline{AC}\times\overline{F_1F_3}}{\overline{FA}\times\overline{FC}\times\overline{F_1F_2}\times\sin\angle F_1F_2F_3} \\
&= \frac{\overline{AC}\times\sin A}{\overline{FC}\times\overline{F_1F_2}\times\sin\angle F_1F_2F_3} && （\because FF_3AF_1 \text{ 共圓，且 } \overline{FA} \text{ 為直徑，} \therefore \sin A = \frac{\overline{F_1F_3}}{\overline{FA}}）\\
&= \frac{1}{\sin\angle F_1F_2F_3\times\overline{FC}}\times\frac{\overline{AC}\times\sin A}{\overline{FB}\times\sin B} && （\because FF_1BF_2 \text{ 共圓，} \therefore \sin B = \sin(\pi - B) = \frac{\overline{F_1F_2}}{\overline{FB}}）\\
&= \frac{1}{\sin\angle F_1F_2F_3\times\overline{FC}}\times\frac{2R\times\sin B\times\dfrac{\overline{BC}}{2R}}{\overline{FB}\times\sin B} && （由正弦定理）\\
&= \frac{1}{\sin\angle F_1F_2F_3\times\overline{FC}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{FB}}
\end{aligned}
$$

於是$(\frac{1}{2}$短軸長$)^2=\overline{FF_3}\times\overline{FF_1}\times\overline{FF_2}\times\dfrac{\overline{BC}}{\overline{FB}\times\overline{FC}\times\sin\angle F_1F_2F_3}=\dfrac{2R\cdot\overline{FF_1}\cdot\overline{FF_2}\cdot\overline{FF_3}}{\left|d^2-R^2\right|}$

即(短軸長)$^2=\dfrac{8R\cdot\overline{FF_1}\cdot\overline{FF_2}\cdot\overline{FF_3}}{\left|d^2-R^2\right|}$。

根據【定理三】和【定理四】的結果，我們可以得到以下的推論：

推論二：若Γ為$\triangle ABC$的旁切橢圓（雙曲線），則其正焦弦長$=8R\times\dfrac{\overline{FF_1}\cdot\overline{FF_2}\cdot\overline{FF_3}}{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}$。

證明：

$$
\begin{aligned}
\text{正焦弦長} &= \frac{(\text{短軸長})^2}{\text{長軸長}} \\
&= \frac{\dfrac{8R\cdot\overline{FF_1}\cdot\overline{FF_2}\cdot\overline{FF_3}}{\left|d^2-R^2\right|}}{\dfrac{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}{\left|d^2-R^2\right|}} \\
&= 8R\times\frac{\overline{FF_1}\cdot\overline{FF_2}\cdot\overline{FF_3}}{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}
\end{aligned}
$$
。

伍、研究結果

一、若$\triangle ABC$的外接圓半徑為R，Γ為$\triangle ABC$的旁切拋物線，

則Γ的正焦弦長$=\dfrac{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}{R^2}$。

二、設$\Gamma_A,\Gamma_B,\Gamma_C$分別是$\triangle ABC$中以$\angle A,\angle B,\angle C$的角平分線為對稱軸之三個旁切拋物線，其正焦弦長分別為ℓ_A,ℓ_B,ℓ_C，則

$\ell_A=2(b+c)\sin\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{A}{2}$、$\ell_B=2(a+c)\sin\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{B}{2}$、$\ell_C=2(a+b)\sin\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{C}{2}$，且

(一) $\ell_A\ell_B\ell_C=\dfrac{4r^2}{R}\times\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c}$

(二) $\ell_A^2+\ell_B^2+\ell_C^2=\dfrac{r^3}{R}\left[\dfrac{a(b+c)^2}{(s-a)^3}+\dfrac{b(a+c)^2}{(s-b)^2}+\dfrac{c(a+b)^2}{(s-c)^3}\right]$

三、若Γ為$\triangle ABC$的旁切橢圓（雙曲線），則長軸長（貫軸長）$=\dfrac{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}{\left|d^2-R^2\right|}$。(其中$F$為旁切橢圓(雙曲線)的一焦點，$O$為三角形$\triangle ABC$外接圓圓心，$d=\overline{FO}$)

四、若Γ爲$\triangle ABC$的旁切橢圓（雙曲線），則短軸長（共軛軸長）的平方$=\dfrac{8R\cdot\overline{FF_1}\cdot\overline{FF_2}\cdot\overline{FF_3}}{\left|d^2-R^2\right|}$。

五、若Γ爲$\triangle ABC$的旁切橢圓（雙曲線），則其正焦弦長$=8R\times\dfrac{\overline{FF_1}\cdot\overline{FF_2}\cdot\overline{FF_3}}{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}$。

陸、討論與展望

一、研究正焦弦長最大時的旁切拋物線Γ與$\triangle ABC$的關係。

二、利用所作出的旁切拋物線Γ，我們想進一步研究切點三角形、原三角形與旁切拋物線之關係。

三、繼續研究特定的旁切橢圓或特定的旁切雙曲線的相關性質。

柒、參考資料

1. 趙文敏, 三切線可決定多少拋物線, 科學教育月刊, 第 283 期(2005), p.51-61.
2. 單墫, 數學名題詞典, 江蘇教育出版社, 2002.
3. Ross Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA, September 5, 1996
4. 94 年大學入學指考數學甲試題
5. http://poncelet.math.nthu.edu.tw/disk3/gc-01/9/7.html
6. http://mathworld.wolfram.com/PedalTriangle.html
7. 龍騰高中數學課本第四冊

【評語】040418

旁切曲線蘊含豐富的動態幾何展示性，可惜本作品未能從這個角度來進行探討。