中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040417

平分秋色

學校名稱：國立鳳山高級中學

作者：	指導老師：
高二 周聖傑 高二 鄂彥齊 高二 許憲文	楊朝祺 林建伯

關鍵詞：　卡特蘭數、捷徑

摘要

在“漫談卡特蘭數”這篇文章中，提到一個關於卡特蘭數的問題：「考慮在 n×n 的格子上從(0,0)點走到(n,n)點，不經過直線 y=x 之下的點有多少種方法？」而本篇研究除了將其規律找出、導出公式之外，並用一套有系統的鏡射方法將其推廣到直線 x-y=n 時的規律。此外，還可利用圖形切割、重疊的方式進而討論雙邊振盪。

壹、研究動機

偶然在高雄大學的資優生演講講義中發現一些關於卡特蘭數的資料，我們對其中捷徑的部分產生了興趣，並進而研究高中數學第四冊的排列組合來瞭解卡特蘭數的定義。此外，我們又加上一些新的限制加以探討，並嘗試求出其一般項。

貳、研究目的

本研究主要是探討甲、乙兩位選手比賽，場次 2n 場，結果甲乙平手，而且過程中甲一路領先或平手，而且甲最多領先乙 a 場之情形數。

參、名詞介紹

2n：甲、乙比賽總場數

a：甲、乙比賽過程中甲最多領先 a 場

b：甲、乙比賽過程中乙最多領先 b 場

$N(2n\ ，a\ ，0)$＝符合上述情況之總情形

肆、研究設備及器材

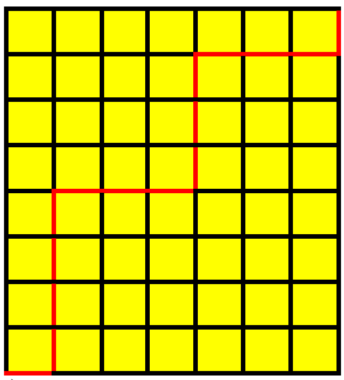
數學軟體 Mathematica

伍、研究過程或方法

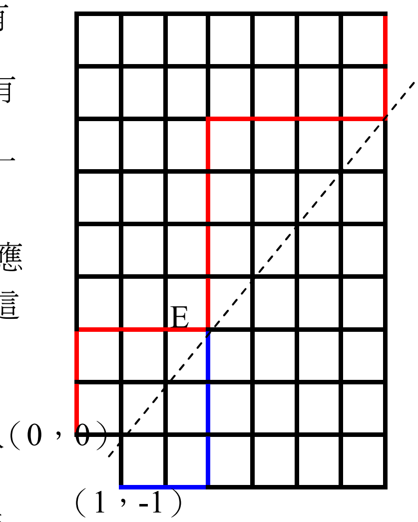
一、定理 1：卡特蘭數的組合證明

甲、乙兩位選手比賽，場次2n場，結果甲乙平手，而且過程中甲一路領先或平手的情形數（即 $N(2n\ ，n\ ，0)$）

我們將甲乙的比賽情形畫成路徑問題，如右圖，甲領先則向上一格，乙領先則向右一格，但過程中不能穿越直線 $y=x$ 有多少種方法？



我們知道從（0，0）點走到（n，n）點的方法共有 C_n^{2n} 種。對於任意一種不符條件的走法P，總會有一個向右步在直線$y=x$之下。令E表示路徑P第一個穿越直線$y=x$ 的向右步，將路徑P從原點到E這一段沿著直線$y=x-1$ 翻轉，這樣就把路徑P 對應到一條從（1，-1）點走到（n，n）點的路徑，而這種對應關係是對射的（一對一且映成），因此從（0，0）點走到（n，n）點不符條件的走法與從（1，-1）點走到（n，n）點的走法個數相同都等於 C_{n-1}^{2n}。所以從（0，0）點走到（n，n）點符合條件的走法有$C_n^{2n}-C_{n-1}^{2n}$種，故$N(2n$ ，n ，$0)=C_n^{2n}-C_{n-1}^{2n}$ 。



二、定理 2：斜方塊的捷徑數

如右圖我們將求出平行四邊形四邊形 ABCD 內（含邊界）的捷徑數，我們知道從 A 到 C 的捷徑數有C_6^{18}種，

所以平行四邊形四邊形 ABCD 內（含邊界）的捷徑數

＝A 到 C 的捷徑數

$-$經過L_1的捷徑數$-$經過L_2的捷徑數

+同時經過L_1和L_2的捷徑數

又由定理一的方法

A 到 C 且經過L_1的捷徑數＝A'到 C 的捷徑數（圖一）

$=C_5^{18}$

A 到 C 且經過L_1的捷徑數＝A''到 C 的捷徑數(圖二）

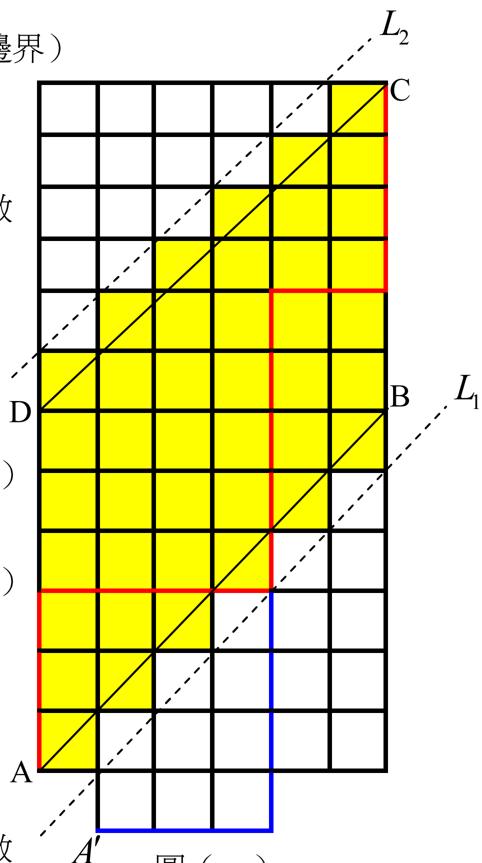
$=C_5^{18}$

A 到 C 且同時經過L_1和L_2的捷徑數

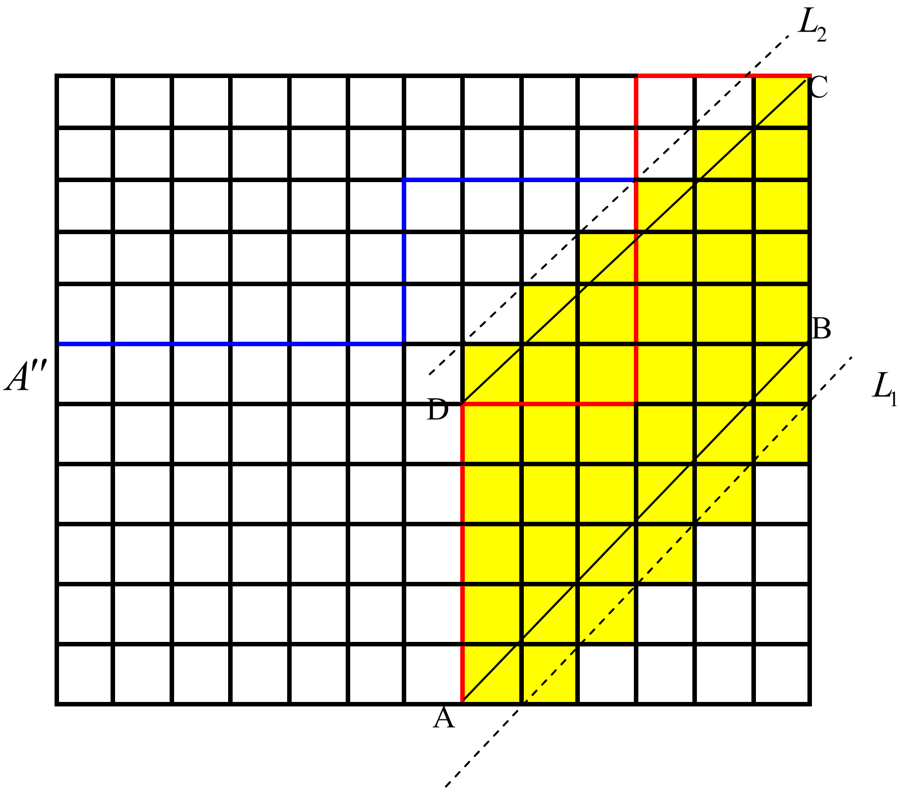
$=A'$到C'的捷徑數（圖三）$=C_4^{18}$

所以平行四邊形四邊形 ABCD 內（含邊界）的捷徑數

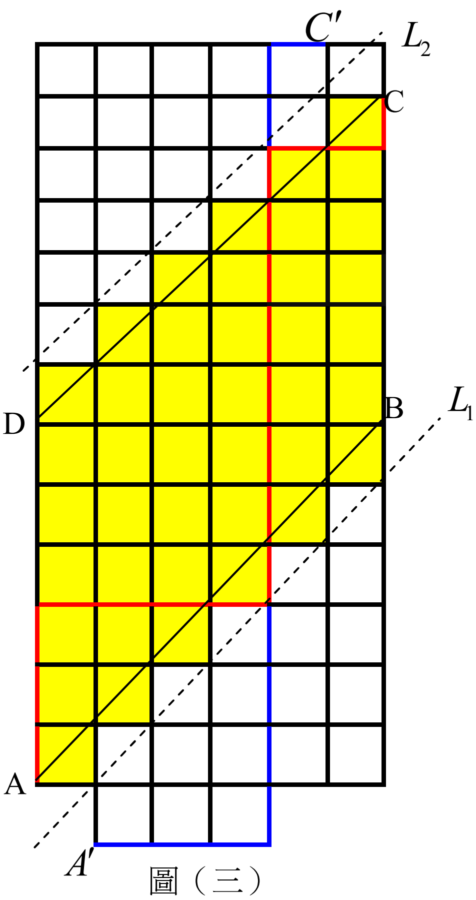
$=C_6^{18}-2C_5^{18}+C_4^{18}$



圖（一）



圖（二）



圖（三）

接下來我們將平行四邊形四邊形 ABCD 內（含邊界）的捷徑數一般化（圖四）

情形一、當 $a \ge 2b-1$

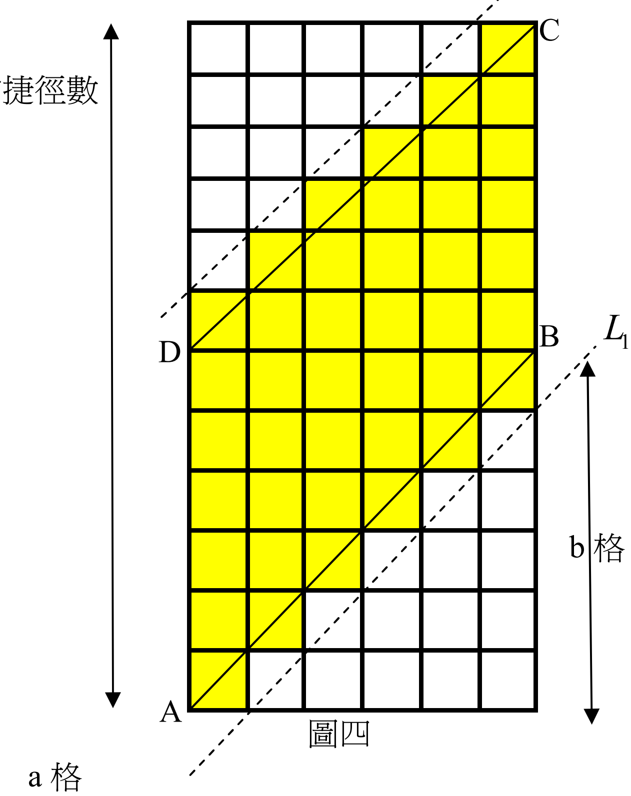
平行四邊形四邊形 ABCD 內（含邊界）的捷徑數

＝A 到 C 的捷徑數

$-$經過 L_1 的捷徑數$-$經過 L_2 的捷徑數

+同時經過 L_1 和 L_2 的捷徑數

$= C_b^{a+b} - 2C_{b-1}^{a+b} + C_{b-2}^{a+b}$ (當 $a \ge 2b-1$)



圖四

情形二、當 $a < 2b\text{-}1$

以下我們以 a=12，b=10 爲例，再將其一般化。

平行四邊形四邊形 ABCD 內（含邊界）的捷徑數

＝A 到 C 的捷徑數

　$-$A 到 C 經過 L_1 的捷徑數（的圖一）$-$A 到 C 經過 L_2 的捷徑數（的圖二）

　+A 到 C 先經過 L_2 再經過 L_1 的捷徑數（的圖三）

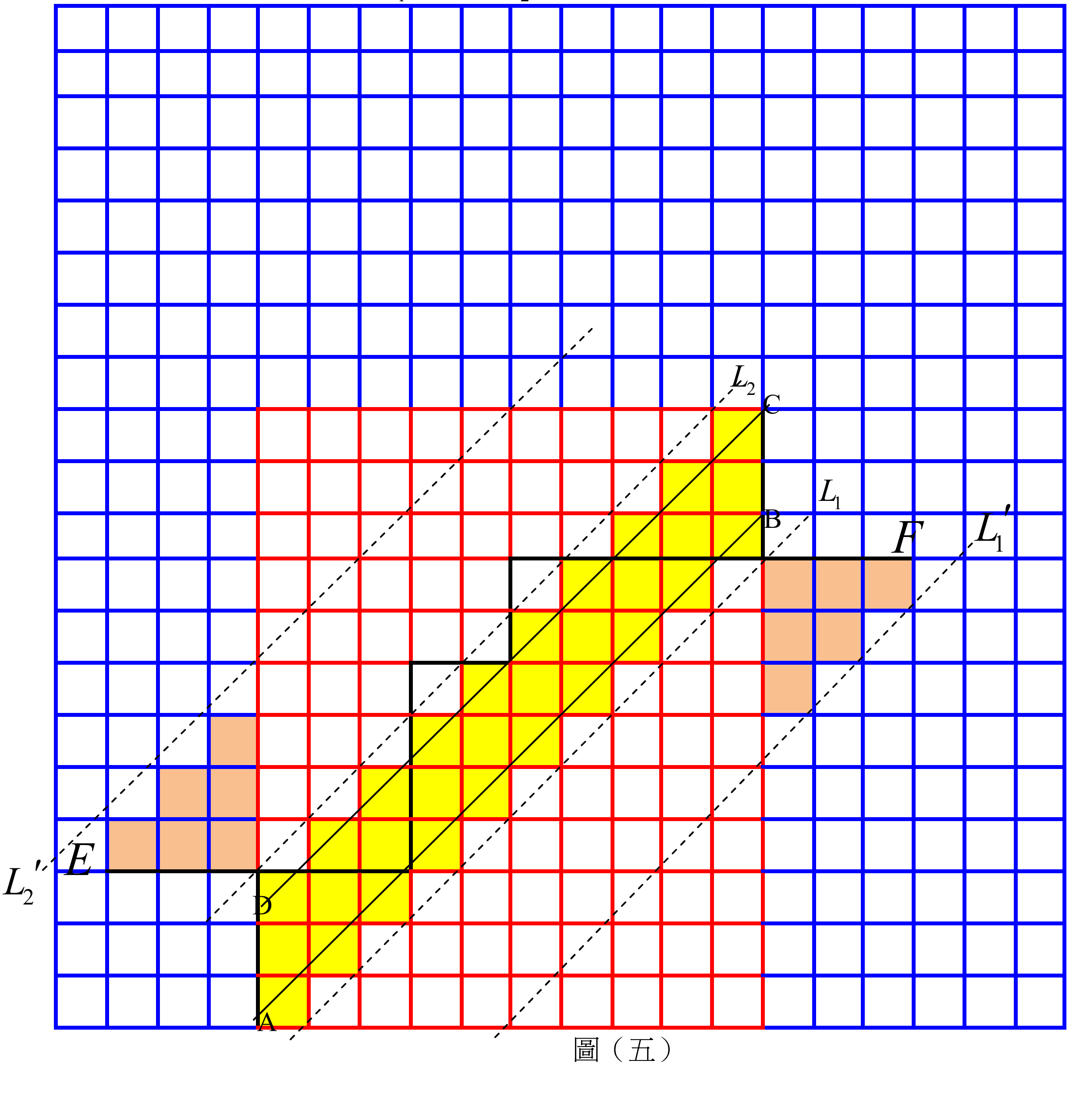
　+A 到 C 先經過 L_1 再經過 L_2 的捷徑數(無法對應到的圖三）

$= C_{10}^{22} - 2C_9^{22} + C_8^{22}$ +A 到 C 先經過 L_1 再經過 L_2 的捷徑數

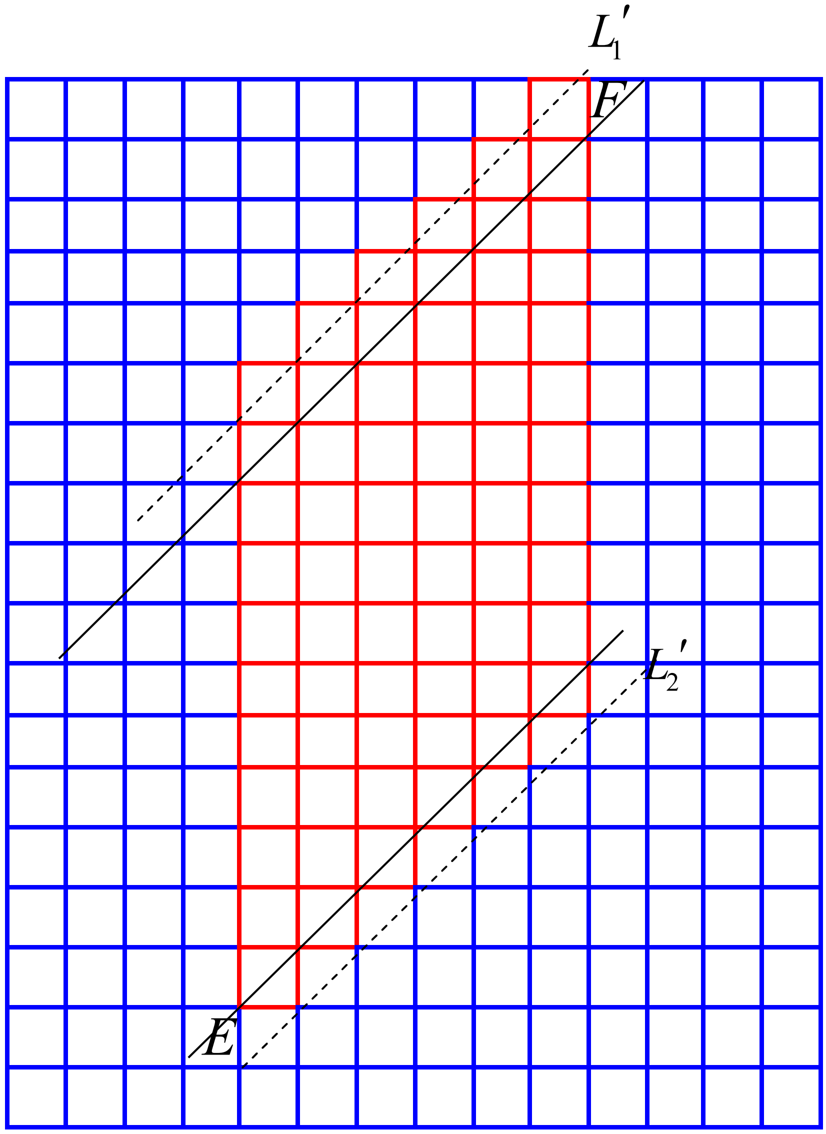
$= C_{10}^{22} - 2C_9^{22} + C_8^{22}$ $+\,E$ 到 F 的斜方塊捷徑數（圖五）

　+經過 L_2' 再經 L_1 的捷徑數（穿越 E 到 F 的斜方塊捷徑數）

　$+\,E$ 到 F 的捷徑經過 L_1' 再經過 L_2 的捷徑數（0）



圖（五）



圖（六）

平行四邊形四邊形 ABCD 內（含邊界）的捷徑數

$= C_{10}^{22} - 2C_{9}^{22} + C_{8}^{22}$

$+ E$ 到 F 的斜方塊捷徑數（a=16＞11=2b-1 斜方塊情形一）（圖五）

+經過 L_2' 再經 L_1 的捷徑數（穿越 E 到 F 的斜方塊捷徑數）

$+ E$ 到 F 的捷徑經過 L_1' 再經過 L_2 的捷徑數（0）

$= C_{10}^{22} - 2C_{9}^{22} + C_{8}^{22} + E$ 到 F 的斜方塊捷徑數

$- E$ 到 F 經過 L_1' 的捷徑數（圖六）$- E$ 到 F 經過 L_2' 的捷徑數（圖六）

$+ E$ 到 F 經過 L_2' 和 L_1' 的捷徑數（圖六）

+經過 L_2' 再經 L_1 的捷徑數（穿越 E 到 F 的斜方塊捷徑數）

+0

$= C_{10}^{22} - 2C_{9}^{22} + C_{8}^{22} + C_{6}^{22} - 2C_{5}^{22} + C_{4}^{22}$

+經過 L_1' 再經 L_1 的捷徑數（穿越 E 到 F 的斜方塊捷徑數）

+0

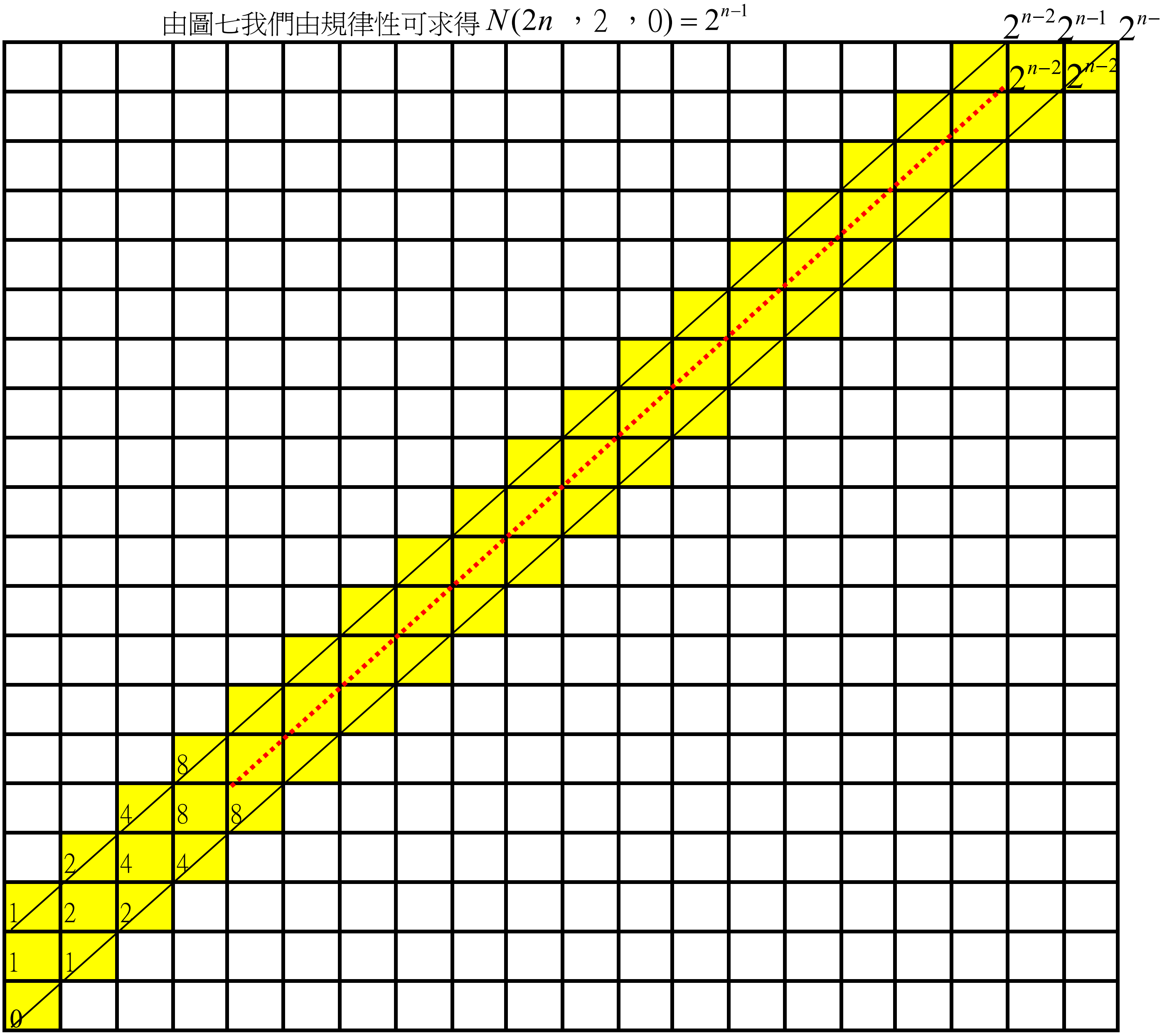
$= C_{10}^{22} - 2C_{9}^{22} + C_{8}^{22} + C_{6}^{22} - 2C_{5}^{22} + C_{4}^{22} + C_{2}^{22} - 2C_{1}^{22} + C_{0}^{22}$

所以情形二（當 $a < 2b$ -1）就是一直對應到情形一，直到 $a \geq 2b$ -1 爲止。

如上例就是連續對應兩次。

三、定理 3：$N(2n，2，0)=2^{n-1}$（直接計數法）

由圖七我們由規律性可求得 $N(2n，2，0)=2^{n-1}$



圖七

我們將由 $N(2n，2，0)=2^{n-1}$ 的數據推導出另一種計數方法。

四、斜方塊扣除法：用斜方塊（定理二）解 $N(20，2，0)=2^9=512$

甲領先則向右一格，

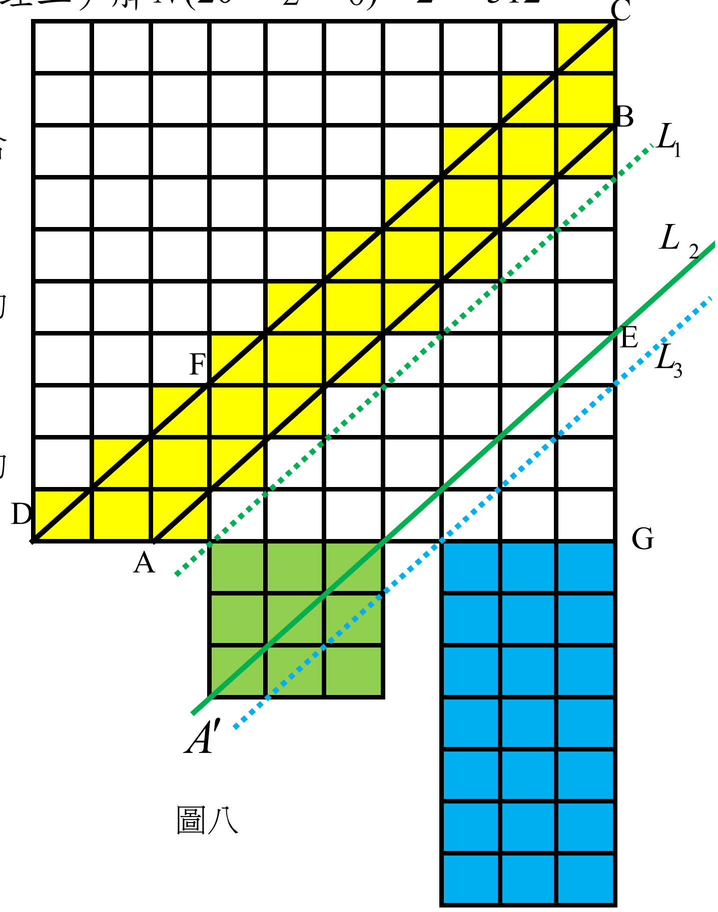
乙領先則向上一格

所以平行四邊形四邊形 ABCD 內（含邊界）的捷徑數

＝三角形 DGC 內（含邊界）的捷徑數

－三角形 DGC 內（含邊界）經過 L_1 的捷徑數但不超過 L_2 的捷徑數

－三角形 DGC 內（含邊界）經過 L_3 的捷徑數

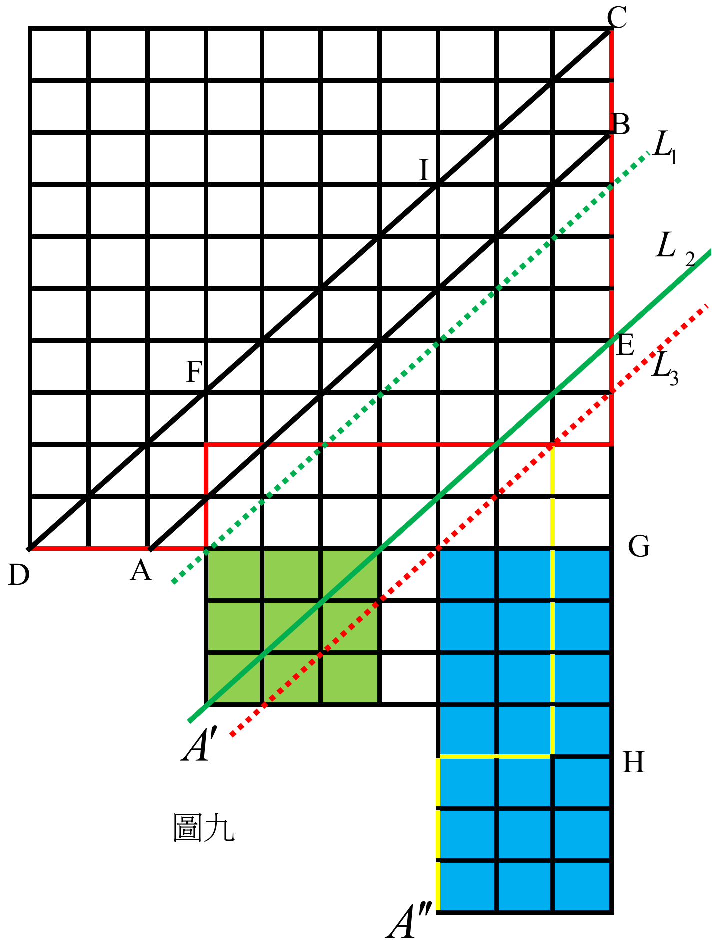


圖八

說明：

三角形 DGC 內（含邊界）經過 L_1 的捷徑數但不超過 L_2 的捷徑數（由定理一）可以對射到 $A'ECF$ 的斜方塊（如 圖八）

但超過 L_2（經過 L_3）則無法對射到 $A'ECF$ 的斜方塊，我們必須必須重新對射到 $A''HCI$ 的斜方塊（如圖九）



圖九

所以平行四邊形四邊形 ABCD 內（含邊界）的捷徑數

＝三角形 DGC 內（含邊界）的捷徑數

－三角形 DGC 內（含邊界）經過 L_1 的

捷徑數但不超過 L_2 的捷徑數

－三角形 DGC 內（含邊界）經過 L_3 的

捷徑數

＝三角形 DGC 內（含邊界）的捷徑數

－ $A'ECF$ 斜方塊的捷徑數

－ $A''HCI$ 斜方塊的捷徑數

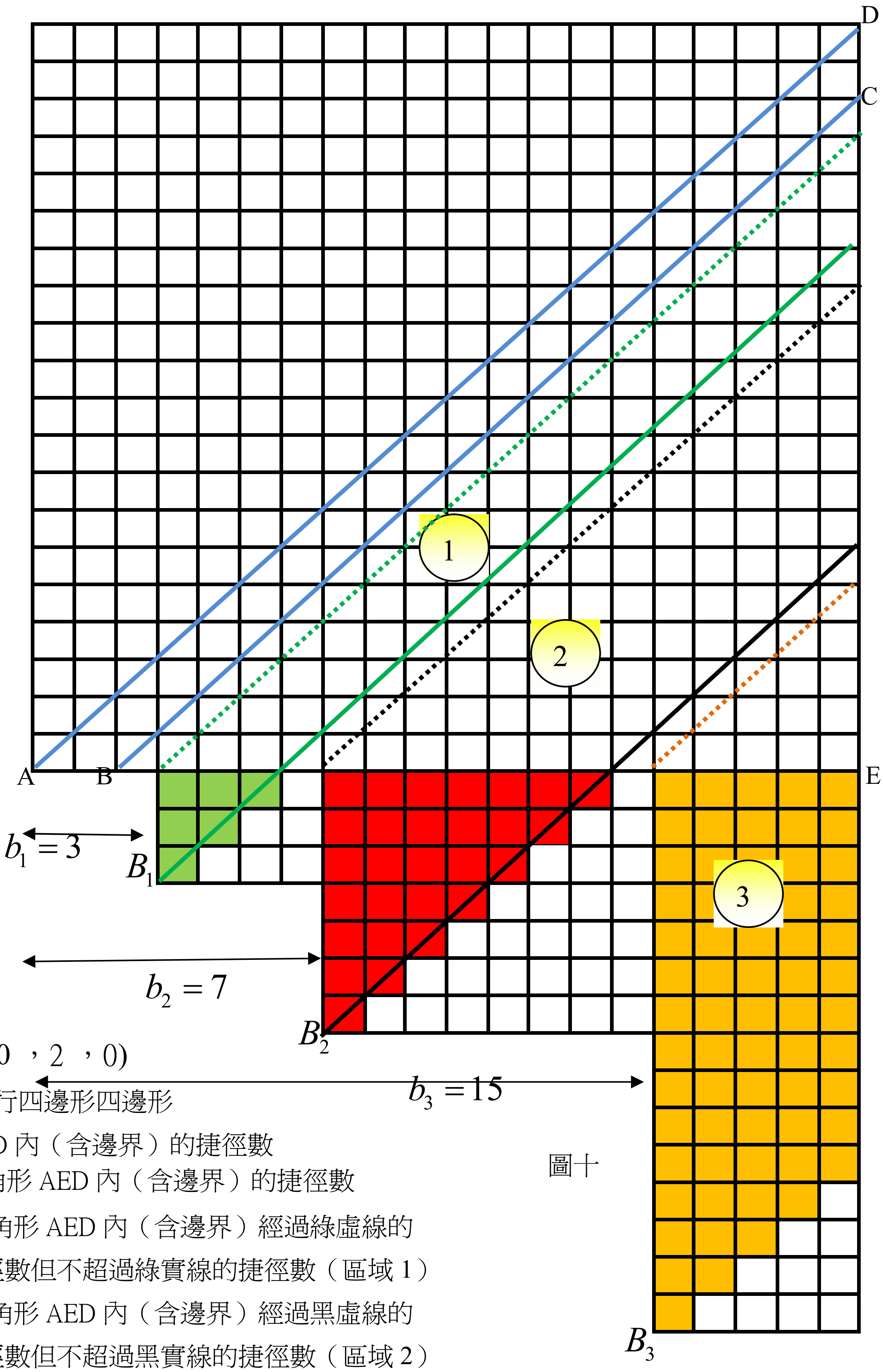
＝**Binomial[20,10]-Binomial[20,9]** （定理**1**）

-(Binomial[20,7]-2*Binomial[20,6]+Binomial[20,5]) （定理**2**）

-(Binomial[20,3]-2*Binomial[20,2]+Binomial[20,1]) （定理**2**）

＝512

接下來我們用斜方塊扣除法解 $N(40, 2, 0) = 2^{19}$（如下圖十）



圖十

$N(40，2，0)$

＝平行四邊形四邊形 ABCD 內（含邊界）的捷徑數

=三角形 AED 內（含邊界）的捷徑數

－三角形 AED 內（含邊界）經過綠虛線的捷徑數但不超過綠實線的捷徑數（區域 1）

－三角形 AED 內（含邊界）經過黑虛線的捷徑數但不超過黑實線的捷徑數（區域 2）

－三角形 AED 內（含邊界）經過黃虛線的捷徑數（區域 3）

$N(40\ ，2\ ，0)$

＝平行四邊形四邊形 ABCD 內（含邊界）的捷徑數

＝三角形 AED 內（含邊界）的捷徑數－（區域 1+區域 2+區域 3）

Mathematica 運算（使用定理 1 和定理 2）

```
 Binomial[40,20]-Binomial[40,19] 三角形AED內（含邊界）的捷徑數
-(Binomial[40,17]-2*Binomial[40,16]+Binomial[40,15])（1） 區域1
-(Binomial[40,13]-2*Binomial[40,12]+Binomial[40,11]) （2） 區域2
-(Binomial[40,9]-2*Binomial[40,8]+Binomial[40,7]) （3）    區域1
-(Binomial[40,5]-2*Binomial[40,4]+Binomial[40,3])（4）     區域3
-(Binomial[40,1]-2*Binomial[40,0])（5）                    區域1
```

= 524288＝1024*512＝2^{19}

定理 2 第二情形

接下來我們將 $N(40\ ，2\ ，0)$ 和上述的區域做結合

我們將第（1）列對應到一個數字17

我們將第（2）列對應到一個數字13

我們將第（3）列對應到一個數字9

我們將第（4）列對應到一個數字5

我們將第（5）列對應到一個數字1

由圖形（圖十）的鏡射性得到斜方塊的 b_1 、 b_2 、 b_3

$b_1 = 2+1 = 3$ ，

$b_2 = 2\times3+1 = 7$ ，

$b_3 = 2\times7+1 = 15$ 。

又由定理二之情形二可知，圖十 B_1 的斜方塊每扣一次少8

B_2 的斜方塊每扣一次少16

B_3 的斜方塊每扣一次少32

接下來我們將上述數字對應到 b_1 、 b_2 、 b_3

17＝20－b_1--------區域1

13＝20－b_2--------區域2

9＝20－b_1－8--------區域1

5＝20－b_3--------區域3

1＝20－b_1-8-8--------區域1

我們由上述規律結合數學軟體Mathematica驗證 $N(100\ ，2\ ，0) = 2^{49}$

五、驗證 $N(100，2，0)=2^{49}$

由上述 $N(40，2，0)$ 的方法我們可得到

$N(100，2，0)$

$b_1=2+1=3$，

$b_2=2\times3+1=7$，

$b_3=2\times7+1=15$，

$b_4=2\times15+1=31$。

＝Binomial[100,50]-Binomial[100,49]

-(Binomial[100,47]-2*Binomial[100,46]+Binomial[100,45]) 區域 1（47＝50－b_1）

-(Binomial[100,43]-2*Binomial[100,42]+Binomial[100,41]) 區域 2（43＝50－b_2）

-(Binomial[100,39]-2*Binomial[100,38]+Binomial[100,37]) 區域 1（39＝50－b_1-8*1）

-(Binomial[100,35]-2*Binomial[100,34]+Binomial[100,33]) 區域 3（35＝50－b_3）

-(Binomial[100,31]-2*Binomial[100,30]+Binomial[100,29]) 區域 1（31＝50－b_1-8*2）

-(Binomial[100,27]-2*Binomial[100,26]+Binomial[100,25]) 區域 2（27＝50－b_2-16*1）

-(Binomial[100,23]-2*Binomial[100,22]+Binomial[100,21]) 區域 1（23＝50－b_1-8*3）

-(Binomial[100,19]-2*Binomial[100,18]+Binomial[100,17]) 區域 4（19＝50－b_4）

-(Binomial[100,15]-2*Binomial[100,14]+Binomial[100,13]) 區域 1（15＝50－b_1-8*4）

-(Binomial[100,11]-2*Binomial[100,10]+Binomial[100,9]) 區域 2（11＝50－b_2-16*2）

-(Binomial[100,7]-2*Binomial[100,6]+Binomial[100,5]) 區域 1（7＝50－b_1-8*5）

-(Binomial[100,3]-2*Binomial[100,2]+Binomial[100,1]) 區域 3（3＝50－b_3-32*1）

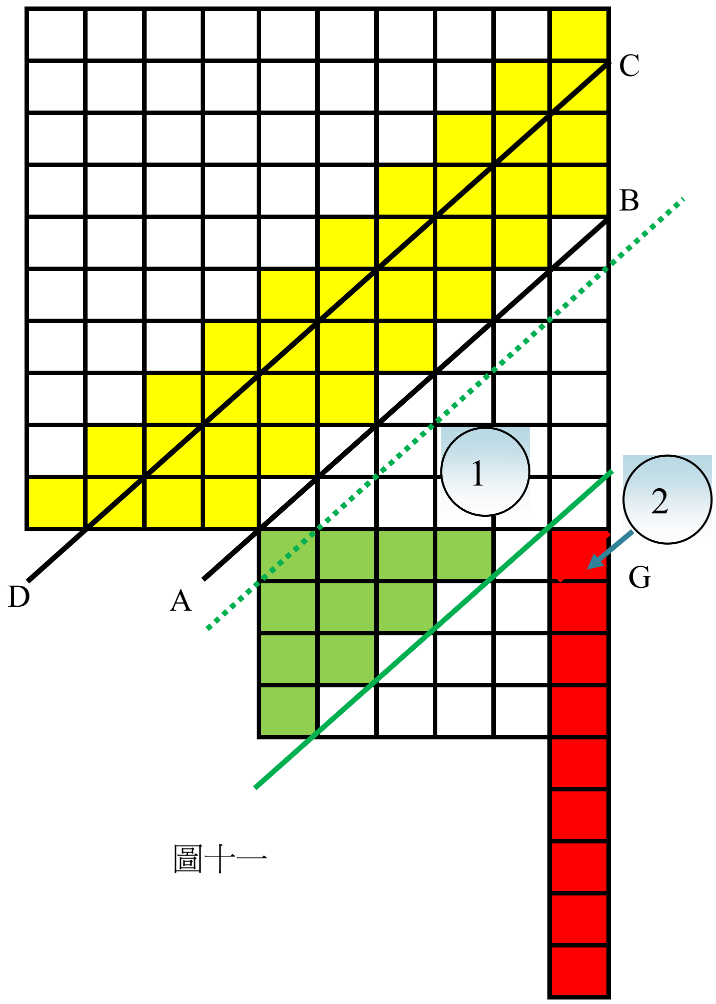
＝562949953421312＝1024*1024*1024*1024*512＝ 2^{49}

六、歸納 $N(2n，2，0)$ 的公式

$$\begin{aligned} N(2n，2，0) = C_n^{2n} - C_{n-1}^{2n} &-(C_{n-3}^{2n} - 2C_{n-4}^{2n} + C_{n-5}^{2n}) \rightarrow B_1 > 0 \\ &-(C_{n-7}^{2n} - 2C_{n-8}^{2n} + C_{n-9}^{2n}) \rightarrow B_2 > 0 \\ &-(C_{n-11}^{2n} - 2C_{n-12}^{2n} + C_{n-13}^{2n}) \rightarrow B_3 > 0 \\ &\quad \vdots \\ &-(\qquad\qquad) \rightarrow B_k = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{令 C_a^{2n}=0，當 a<0}$

七、驗證 $N(20，3，0)=4181$（直接計數法求出）



圖十一

所以平行四邊形四邊形 ABCD

內（含邊界）的捷徑數

＝三角形 DGC 內（含邊界）的捷徑數

－三角形 DGC 內（含邊界）經過綠虛線的

捷徑數但不超過綠實線的捷徑數（區域 1）

－三角形 DGC 內（含邊界）經過紅虛線的捷徑數（區域 2）

＝Binomial[20,10]-Binomial[20,9]　（定理1）

-(Binomial[20,6]-2*Binomial[20,5]+Binomial[20,4])　（定理2）

-(Binomial[20,1]-2*Binomial[20,0])　（定理2）

＝4181

八、$N(100$ ，3 ，$0)$ 的對應

由上述 $N(100$ ，2 ，$0)$ 方法的規律

$N(100$ ，3 ，$0)$

$b_1=3+1=4$，

$b_2=2\times4+1=9$，

$b_3=2\times9+1=19$，

$b_4=2\times19+1=39$。

＝Binomial[100,50]-Binomial[100,49]	
-(Binomial[100,46]-2*Binomial[100,45]+Binomial[100,44])	區域 1（46＝50－b_1）
-(Binomial[100,41]-2*Binomial[100,40]+Binomial[100,39])	區域 2（41＝50－b_2）
-(Binomial[100,36]-2*Binomial[100,35]+Binomial[100,34])	區域 1（36＝50－b_1-10*1）
-(Binomial[100,31]-2*Binomial[100,30]+Binomial[100,29])	區域 3（31＝50－b_3）
-(Binomial[100,26]-2*Binomial[100,25]+Binomial[100,24])	區域 1（26＝50－b_1-10*2）
-(Binomial[100,21]-2*Binomial[100,20]+Binomial[100,19])	區域 2（21＝50－b_2-20*1）
-(Binomial[100,16]-2*Binomial[100,15]+Binomial[100,14])	區域 1（16＝50－b_1-10*3）
-(Binomial[100,11]-2*Binomial[100,10]+Binomial[100,9])	區域 4（11＝50－b_4）
-(Binomial[100,6]-2*Binomial[100,5]+Binomial[100,4])	區域 1（ 6＝50－b_1-10*3）
-(Binomial[100,1]-2*Binomial[100,0]	區域 2（ 1＝50－b_2-20*2）

由上力可知從 $N(100$ ，2 ，$0)$ 改成 $N(100$ ，3 ，$0)$ 每一個下降列所對應的區域是一模一樣的，我們可由此歸納 $N(2n$ ，a ，$0)$。

九、歸納 $N(2n$ ，a ，$0)$

$$
\begin{aligned}
N(2n\text{ ，a ，}0)=C_n^{2n}-C_{n-1}^{2n}&-(C_{n-a-1}^{2n}-2C_{n-a-2}^{2n}+C_{n-a-3}^{2n}) &&>0\\
&-(C_{n-2a-3}^{2n}-2C_{n-2a-4}^{2n}+C_{n-2a-5}^{2n}) &&>0\\
&-(C_{n-3a-5}^{2n}-2C_{n-3a-6}^{2n}+C_{n-3a-7}^{2n}) &&>0\\
&\qquad\vdots\\
&-(\qquad\qquad\qquad) &&=0
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{令}C_a^{2n}=0\text{ ，當a<0}}$

陸、研究結果

$$
\begin{aligned}
N(2n，a，0) = C_n^{2n} - C_{n-1}^{2n} & -(C_{n-a-1}^{2n} - 2C_{n-a-2}^{2n} + C_{n-a-3}^{2n}) \quad > 0 \\
& -(C_{n-2a-3}^{2n} - 2C_{n-2a-4}^{2n} + C_{n-2a-5}^{2n}) \quad > 0 \\
& -(C_{n-3a-5}^{2n} - 2C_{n-3a-6}^{2n} + C_{n-3a-7}^{2n}) \quad > 0 \\
& \qquad \vdots \\
& -(\qquad\qquad\qquad) \quad = 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{令C_a^{2n}=0\text{，當}a<0}$

柒、未來研究方向

一、研究出$N(2n，a，b)$的一般解。

二、如果有三人一起比賽甲一路領先的情形數。

三、推廣至立體捷徑問題。

捌、參考資料及其他

一、高中數學第四冊，南一書局、翰林書局

二、許介彥：Catalan Numbers 簡介

三、邱博文：用 Mathematica 學中學數學（費因曼出版有限公司）

四、傅東山：漫談卡特蘭數(Catalan Numbers)

【評語】040417

Catalan 數是個著名的組合數列，著名到人們圍繞該題材一次又一次去發表那些「前人早已發現並早已推廣」的論文的地步！或許「重複發表」一事在訊息傳遞落後的時空背景下是情有可原的，但是在網路搜索發達的今日，重複發表前人研究結果早已被視爲無價值研究。建議作者拜訪葉永南教授並請教他對於本研究題材的看法。