中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040416

任意三角形最小內接正三角形之尺規作圖

學校名稱：國立屏北高級中學

作者：	指導老師：
高二 趙慕文 高二 賴愉蒨 高二 林雨璇 高二 黃偉麟	張家境

關鍵詞：　尺規作圖、內接正三角形

摘要

在本研究中，我們發現可以利用簡易的尺規作圖做出任意三小形中最小內接正三角形，我們欲利用了一些較簡單的性質以求證，但結果不如我們預期的順利，最後我們引用了之前參閱第四十屆作品結果，以補足我們的証明。主要架構是層層推進，先證明做出來的會是正三角形，在慢慢推論，進而得到最後的結果。

壹、研究動機

高二上學期的課程，我們學到「圓與球面」，在課堂上老師提了一下圓的另一個定理—「阿波羅尼斯圓」，這個陌生的專有名詞，雖然只是短暫的提及，卻引起我們極大的興趣，下課便相約詢問老師，經過講解後，我們對阿波羅尼斯圓也有了更深入的了解。

此時，我腦海中便浮現出老師曾經說過的那句話「數學爲科學之母，運用極爲廣大」。於是我便提出了一個問題：「牛頓因式定理可以用來解決因式分解，那麼阿波羅尼斯圓呢？它可以套用來解決什麼樣問題？」老師看我們那麼有興趣，便提出了一個問題「如何在任意三角形內找出一個內接最小正三角形？」

貳、研究目的

利用尺規作圖，做出任意三角形之內接正三角形，並且說明它最小。

本研究的靈感源自於最基本的三角形內接－圓形，這是眾所皆知的，我們將這個想法推廣到任意三角形內接一個正三角形，進而推論出任意三角形之內接最小正三角形。之後我們利用尺規作圖爲主軸配合上阿波羅尼斯圓、內外分比、垂足定律以及餘弦定理，著手證明。

首先，因爲我們的靈感源自於最基本的三角形內接－圓形，我們便想以圓爲主軸進行推論，由於畫圓的條件需要一直徑，我們便採取內外角平分定理，我們從三角形的三頂點任取兩點並作其內外角平分線，再用其內外角平分點相連，作爲一直徑，並以之做圓，而兩圓便會出現兩交點，我們取其中一點，且此點位於三角形內，以此點向三角形三邊做垂線，將三個垂足點相連便可成到最小內接正三角形。

在分區科展中，教授對我們之前所提出用來說明最小內接正三角形的方法很沒有說服力，科展結束後，我們馬上上網尋找是否能夠解決此問題之方法，沒有想到在第四十屆科展中，我們得到想要的答案，利用 GSP 和複數平面相對應獲得相同結果，因而完成我們的証明。

參、研究設備、器材

紙、筆、電腦 Gsp 幾何繪圖軟體

肆、所使用之定理

1.阿波羅尼斯圓
2.內外角平分定理
3.餘弦定律
4.複數平面

伍、研究過程、方法

一、何謂阿波羅尼斯圓：

給定平面上兩定點 A、B，以及一個定値k，則所有到 A、B 兩點的距離比 $\overline{PB}:\overline{PA}=k$ 的

所有點集合爲一圓，此圓稱爲阿波羅尼斯圓

證明：

假設給定兩點 A(0,0)、B(b,0)，以及一定值k

$\because \overline{PB}:\overline{PA}=k$

$\therefore \dfrac{\sqrt{(x-b)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=k \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-b)^2+y^2}=k\sqrt{x^2+y^2}$

兩邊平方，$(x-b)^2+y^2=k^2(x^2+y^2)$

乘開化簡、整理，$(1-k^2)x^2-2bx+(1-k^2)y^2=-b^2$

對x配方，

$$(1-k^2)(x^2-\frac{2b}{1-k^2}x+(\frac{b}{1-k^2})^2)+(1-k^2)y^2=\frac{b^2}{1-k^2}-b^2$$

$$(x-\frac{b}{1-k^2})^2+y^2=(\frac{kb}{1-k^2})^2$$

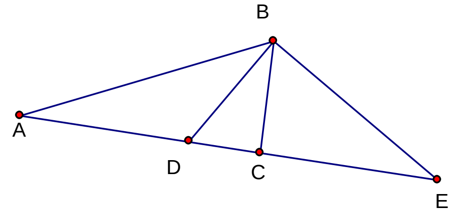
此即爲圓的標準式，所以，P 的軌跡爲一圓

二、任意三角形之最小內接正三角形尺規作圖法：

給任意三角形ABC，請找出三角形ABC之最小內接正三角形

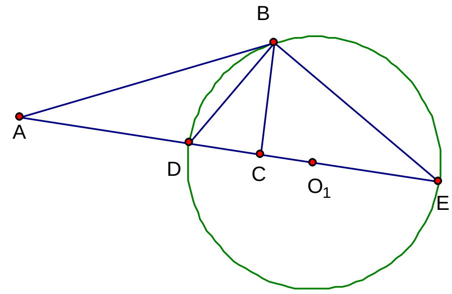
做法：

(一)先分別做ΔABC中$\angle ABC$的內、外角平分線，分別交$\overline{AC}$於D、E(如圖一所示)



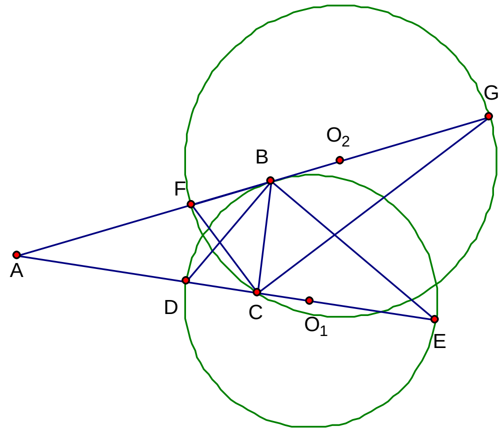
(圖一)

(二)以$\overline{DE}$爲直徑作圓O_1(如圖二所示)



(圖二)

(三)在對ΔABC中$\angle ACB$做上述兩動作，得圓O_2(如圖三所示)

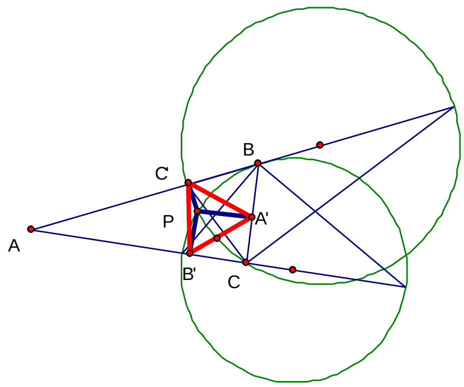


(圖
三)

(四)發現O_1、O_2在三角形內交點爲P(如圖四所示)

(五)由P做三角形三邊的垂足A'、B'、C'(如圖四所示)

(六)連接三點得三角形$A'B'C'$，即爲所求(如圖四所示)



(圖四)

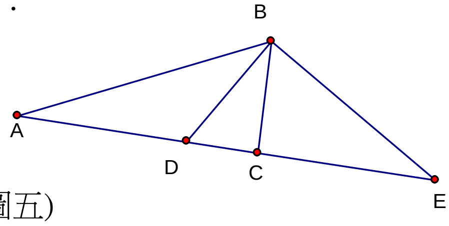
三、說明：

(一)首先要先說明如此接出來的三角形是正三角形：

1.第一步因爲做ΔABC中$\angle ABC$的內、外角平分線：

由內分比定理，$\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$

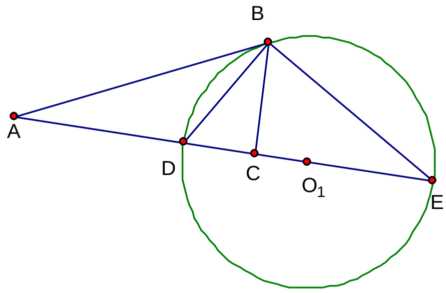
由外分比定理，$\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$



(圖五)

由上兩式 $\Rightarrow$ $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DC}}=\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$

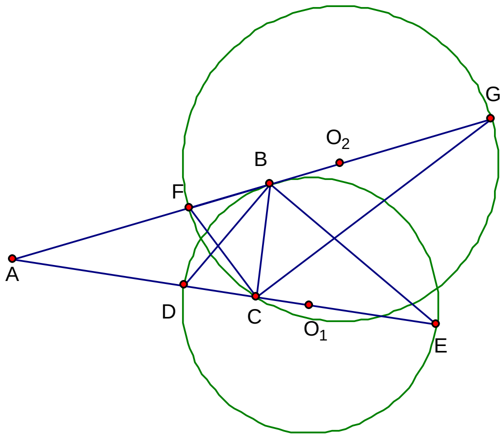
(如圖五所示)



2.我們發現，B、E、D三點分別和A、C的距離比相等，由阿波羅尼斯圓的定義，B、E、D三點一定共圓，但因爲是內、外角平分線，所以，$\angle DBE=90°$，所以，可以用$\overline{DE}$爲直徑畫圓，且B、E、D三點必定在圓上。(如圖六所示)

(圖六)

3.同理，圓O_2是以A、B爲定點的阿波羅尼斯圓，並且以$\overline{FG}$爲直徑(如圖七所示)

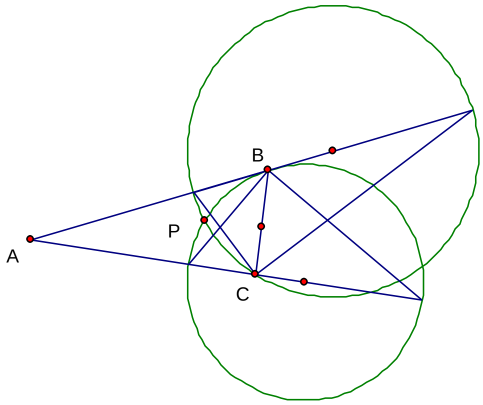


(圖七)

4.因此，O_1、O_2的交點P，因爲同時符合兩個阿波羅尼斯圓，因此：

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}\ \cdots①\qquad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\ \cdots②$$

$$①\div② \Rightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

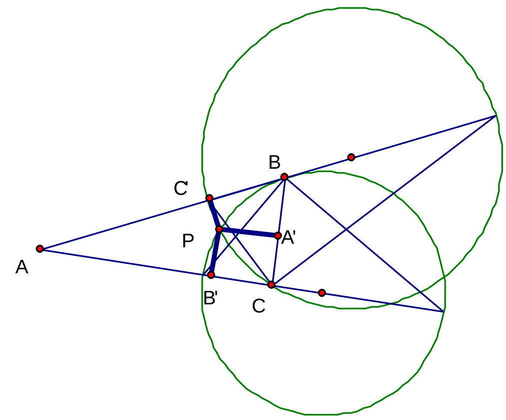


因此，我們得到一個重要關係

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}=\overline{PB}\cdot\overline{AC}=\overline{PC}\cdot\overline{AB}$$

(如圖八所示)　　　　　　　　　　(圖八)

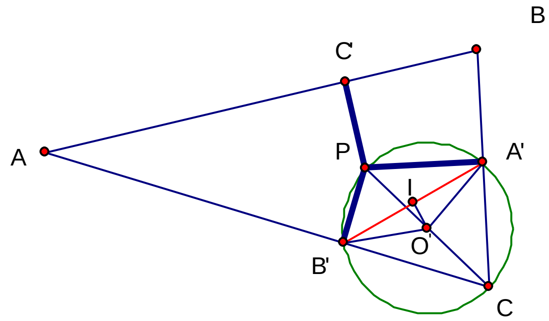
5.接下來是由P點向ΔABC三邊做垂線，分別交於A'、B'、C'，接下來再看回ΔABC，將其特別拿出來討論(如圖九所示)



(圖九)

6.(1)因為做的是垂線，所以四邊$PA'CB'$因為對角互補，必定四點共圓，找出圓心O'，做圓心到$\overline{A'B'}$的垂線，垂足I(如圖十所示)

(2)因為$\Delta OA'B'$是等腰三角形，因此$\angle B'OI=\angle A'OI$，又因為圓周角與圓心角的關係，因此：
$\angle B'OI=\angle A'OI=\angle A'CB'$



(圖十)

(3)由正弦定律可知，$\dfrac{\overline{A'B'}}{\sin\angle C}=\overline{PC}\Rightarrow\overline{A'B'}=\overline{PC}\cdot\sin\angle C$

(4)同理，我們可推得以下式子：
$\overline{A'C'}=\overline{PB}\cdot\sin\angle B$; $\overline{B'C'}=\overline{PA}\cdot\sin\angle A$

7.在ΔABC中，由正弦定律$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\angle A}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\angle B}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle C}=2r$，$r$為外接圓半徑，

因此，之前的三個式子就可以調整為：

$$\begin{cases}\overline{A'B'}=\overline{PC}\cdot\sin\angle C\\ \overline{A'C'}=\overline{PB}\cdot\sin\angle B\\ \overline{B'C'}=\overline{PA}\cdot\sin\angle A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{A'B'}=\dfrac{\overline{PC}\cdot\overline{AB}}{2r}\\ \overline{A'C'}=\dfrac{\overline{PB}\cdot\overline{AC}}{2r}\\ \overline{B'C'}=\dfrac{\overline{PA}\cdot\overline{BC}}{2r}\end{cases}$$

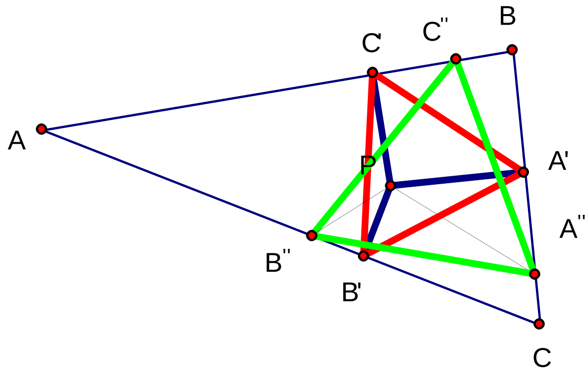
但是我們在說明的第 4 步驟時又得到 $\overline{PA}\cdot\overline{BC}=\overline{PB}\cdot\overline{AC}=\overline{PC}\cdot\overline{AB}$

因此，我們就證明了 $\overline{A'B'}=\overline{A'C'}=\overline{B'C'}$，也就是我們用這樣的方法所做出

來的三角形是一個正三角形!

(二)接下來要說明這個三角形爲最小(請參考圖十一、十二、十三)

如果我們在 $\overline{BC}$ 邊上另取一點 A''，並且以 A'' 做內接正三角形 $A''B''C''$(註)，<u>而 $A''B''C''$ 可以視爲 $A'B'C'$ 以 P 爲中心</u> **<u>旋轉</u>** **<u>而得</u>**。



(圖十一)

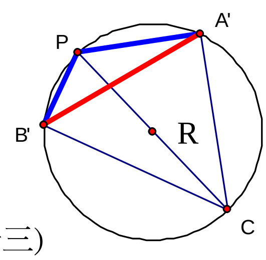
我們注意四邊形 $PA''CB''$：

在前面提到，因爲四邊形 $PA'CB'$ 是圓內接四邊形是圓內接四邊形，

$\therefore \angle B'PA'$ 和 $\angle C$ 互補，

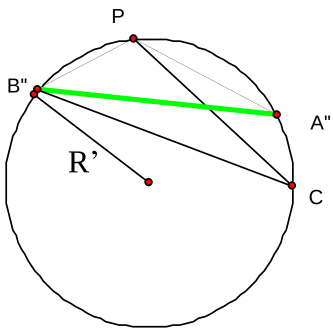
所以不管 A'' 在哪哩，只要能做出正三角形，則一定 $\angle B''PA''=\angle B'PA'$(因爲旋轉)，

所以一定都有四點共圓的性質，而這些四點共圓之中，**又以 $\overline{PC}$ 爲直徑的圓半徑最小，**



(圖十三)

(圖十二)



又，前面提到：

$$\frac{\overline{A'B'}}{\sin C}=2R \qquad \frac{\overline{A''B''}}{\sin C}=2R'$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{A'B'} = 2R\cdot\sin C \qquad\qquad \overline{A''B''} = 2R'\cdot\sin C$$

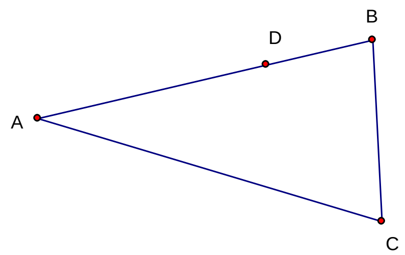
又 $R' > R$，$\therefore \overline{A'B'} > \overline{A''B''}$

因此，只要不是在垂直的所做出來的正三角形，所對應到的外接圓半徑必定都比之前的

大，所以邊長也都比之前的大，所以 $\Delta A'B'C'$ 爲最小正三角形!

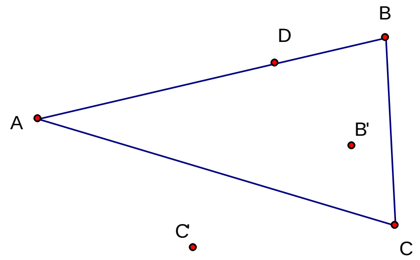
註：任意三角形中，給定任一邊上一點，做內接正三角形的尺規作圖法：

給定一三角形 ΔABC ，$\overline{AB}$ 邊上一點 D ，
求過 D 點的正三角形(如圖十四所示)



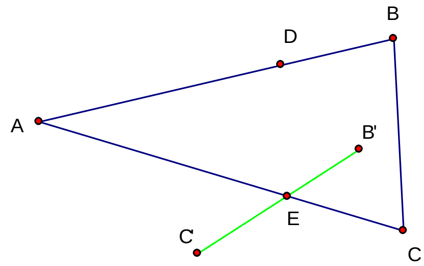
(圖十四)

(1)過 D 點，同向旋轉 B 、C $60°$ ，
得 B' 、C'
($60°$ 可由尺規作圖獲得) (如圖十五所示)



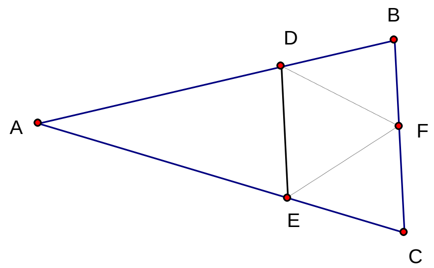
(圖十五)

(2)連 $\overline{B'C'}$ ，交 $\overline{AC}$ 於 E 點(如圖十六所示)



(圖十六)

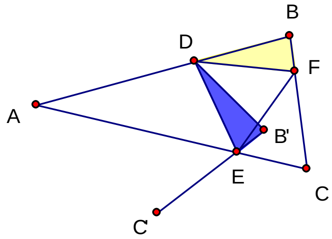
(3)連 $\overline{DE}$ ，並以 E 爲圓心，旋轉 D ，
在 $\overline{BC}$ 上得到 F 點，連接 D 、E
F ，即爲內接正三角形(如圖十七所示)



(圖十七)

我們依然要証明這樣的作法確實是正三角形：(參至圖十八)

看ΔDBF 、$\Delta DB'E$ ：



$\because$ B'是B旋轉而來，$\therefore \overline{BD} = \overline{B'D}$……①

又C'是C旋轉而來

$\therefore \angle DBC = \overline{DB'C'}$……②　　　　(圖十八)

又$\angle BDF = \overline{B'DE} = 60° - \angle FDB'$……③

由①、②、③

$\therefore \Delta DBF \cong \Delta DB'E(ASA)$，因此$\overline{DE} = \overline{DF}$ ，又$\angle DEF = 60°$

$\therefore \Delta DEF$爲正三角形，得証

本以爲我們找到了證明這個三角形是最小的方法，然而在分區科展的時候教授們告訴我

們我們上面的說明有些是用”感覺”的，教授們希望本組能夠有更明確的說明方法，爲

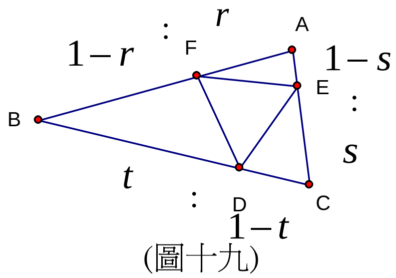
此，本組用了許多方法，但一直沒有比較好的突破，爲此苦思許久，後來，上網搜尋，

沒有想到竟然在第 40 屆全國科展中竟然也有有關三角形內接三角形的相關問題，(如

證明)，真是讓我們如獲至寶，在那份內容上有提到：

若三角形ABC中的內接正三角形DEF ，D在$\overline{BC}$上、E在$\overline{AC}$上、F在$\overline{AB}$上、且設

$\overline{BD}:\overline{DC} = t:1-t$ 、$\overline{CE}:\overline{EA} = s:1-s$ 、$\overline{AF}:\overline{FB} = r:1-r$ ，如圖十九：



(圖十九)

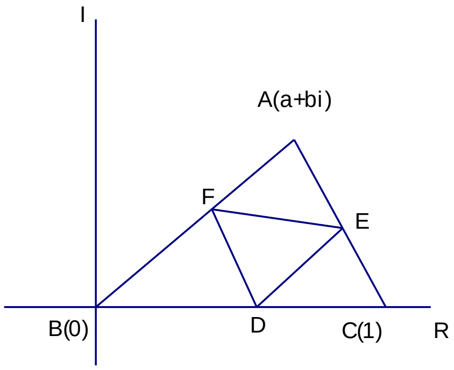
則在該作品中指出，當$t+s+r=\dfrac{3}{2}$時，這時的內接正三角形邊長最小(詳見證

明)，因爲正三角面積是$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(邊長)^2$ ，所以面積也會最小!

證明如下：

因爲ΔABC爲任意給的三角形，爲了接下來說明的完整性，我們將ΔABC放在複數平面上，

而且令爲$B\,0$， C爲1，A爲$a+bi$：



$$\because \quad \overline{BD}:\overline{DC}=t:1-t \quad \Rightarrow \quad D\text{點座標爲 } t$$

$$\overline{CE}:\overline{EA}=s:1-s \quad \Rightarrow \quad E\text{點座標爲 } (as-s+1)+(bs)i$$

$$\overline{AF}:\overline{FB}=r:1-r \quad \Rightarrow \quad F\text{點座標爲 } (a-ar)+(b-br)i$$

$$\therefore \overrightarrow{DE}=(as-s+1-t)+(bs)i \quad ; \quad \overrightarrow{DF}=(a-ar-t)+(b-br)i$$

又由複數的隸美弗定理：

$$\therefore \overrightarrow{DE}\times(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=\overrightarrow{DF} \quad (\because \angle FDE=60^\circ)$$

$$\therefore [(as-s+1-t)+(bs)i]\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=(a-ar-t)+(b-br)i$$

乘開之後，實部=實部；虛部=虛部，所以會得到以下的等式：

$$(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{1}{2})s-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}=a-ar-t \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})s-\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}=b-br \quad \cdots\cdots \text{②}$$

接下來要逐步的把t、s、r等未知數的關係用a、b表示：

先把上兩式改寫成：

$$-ar=(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{1}{2})s+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}-a \quad \cdots\cdots \text{③}$$

$$-br=(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})s-\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}-b \quad \cdots\cdots④$$

兩式相除，消去r，同時分子分母同乘 2，會得到：

$$\frac{a}{b}=\frac{(a-\sqrt{3}b-1)s+t+1-2a}{(\sqrt{3}a+b-\sqrt{3})s-\sqrt{3}t+\sqrt{3}-2b}$$

交叉相乘：

$$(\sqrt{3}a^2+ab-\sqrt{3}a)s-\sqrt{3}at+\sqrt{3}a-2ab=(ab-\sqrt{3}b^2-b)s+bt+b-2ab$$

移項整理，左邊把有s的整理起來，右邊把t和沒有t分開，所以會得以下式子：

$$(\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b)s=(\sqrt{3}a+b)t+(b-\sqrt{3}a)$$

把s前係數移項：

$$s=\frac{\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}t+\frac{b-\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b} \quad \cdots\cdots \quad ⑤$$

就成功得到s和t的關係!!

同理，如果我們在一開始的①、②改寫成：

$$(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{1}{2})s=a-ar-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$$

$$(\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})s=b-br+\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

同樣的兩式相除，這次就會消去s，再經由和上面一模一樣的相乘整理，最後得到：

r和t的關係：

$$r=\frac{(\sqrt{3}+b-\sqrt{3}a)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}t+\frac{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a-b}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b} \quad \cdots\cdots \quad ⑥$$

讓我們再次回到原先假設的那個三角形，之前說到

E點座標爲 $(as-s+1)+(bs)i$ ； F點座標爲 $(a-ar)+(b-br)i$

把⑤、⑥代入，則E、F點在直角座標可變成：

$$E:[\frac{(\sqrt{3}a^2+ab-\sqrt{3}a-b)t+(ab+\sqrt{3}b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b},\frac{(\sqrt{3}ab+b^2)t+(-\sqrt{3}ab+b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}]$$

$$F:[\frac{(\sqrt{3}a^2-ab-\sqrt{3}a)t+2ab}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b},\frac{(\sqrt{3}ab-b^2-\sqrt{3}b)t+2b^2}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}]$$

利用兩點距離公式，則$\overline{EF}$就可寫成：

$$\overline{EF}=\sqrt{(\frac{(2ab-b)t+(-ab+\sqrt{3}b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b})^2+(\frac{(2b^2+\sqrt{3}b)t+(-\sqrt{3}ab-b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b})^2}$$

我們可以發現，根號裡面是t的 2 次式，所以擁有最小值，所以我們對根號裡進行配方，又因爲分母是一樣的，所以對以下的式子配方即可：

$$[(2ab-b)t+(-ab+\sqrt{3}b^2)]^2+[(2b^2+\sqrt{3}b)t+(-\sqrt{3}ab-b^2)]^2$$

發現了當：

$$t=\frac{1}{2}+\frac{2a-1}{2a^2+2b^2-2a+2\sqrt{3}b+2}$$

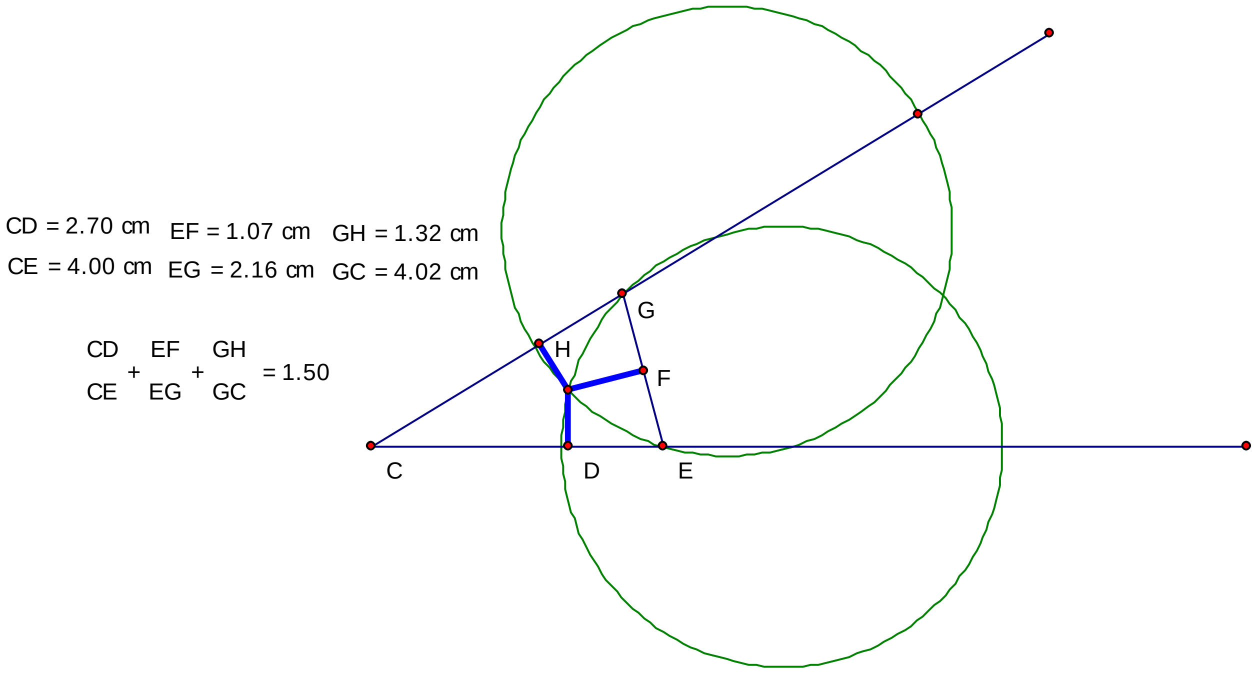
時，$\overline{EF}$會最小，再把這時候的t代回⑤、⑥兩式，就得到$t+s+r=\frac{3}{2}$，也就得証之前的那個敘述了！

在發現並了解了證明的方法之後，本組想到，上述的方法是用代數的方法來直接計算出結論，

在我們用尺規作圖的三角形中，所截出的線段比會不會也符合這結論呢？如果可以的話，那

我們就可以更有信心的說明我們的尺規作圖法是正確的，因此，本組立刻用這個方法來加強

驗證尺規作圖方法所找出來的三角形和原來三角形截線和邊長的關係：結果如下：



果然是正確的!因此，我們更加有信心我們的方法是無誤的了!

至此，由前(I)(II)的內容以及說明，我們就能得到任意三角形最小內接正三角形的尺規作圖法!!

陸、討論

除了以上我們所討論的尺規作圖之外，我們在任意移動內接正三角形的三個頂點時，發現我們所找的 P 點是不動的，即為不動點。

柒、結論

當初看完第四十屆科展作品時，我們便有念頭，想以不同的方式證明相同的結果，所以，我們利用阿波羅尼斯圓及尺規作圖求之。

經過這次的研究經驗使我們接觸到一般高中生較不易得知的數學軟體-GSP，在操作過程中，我們不僅熟悉到它的基本操作方法，同時也了解到數學在幾何圖形及代數方程式的結合，然而有些以代數表達的方程式我不容易清楚得知他所表達的意思，但若轉換成幾何圖形我們較能迅速掌握。

另外，藉由這次的經驗，我們也了解到了如何使用網路來蒐集一些和數學相關的資料，以供我們使用，也讓我們深刻了解到了數學深入淺出、多方面向的一面，在我們之前就有人用另外一種的觀點來探討過此問題。

捌、參考資料以及其他

1、高級中學 數學 翰林版 第四冊

2、第 40 屆全國科展　「最小三角形之最小內接正三角形」 作者：劉瑋

【評語】040416

1) 本活動挑選恰當，爲優良的數學實驗題材。

2) 本作品與第 40 屆全國科展某作品題目看來十分雷同，還將其作品名稱誤抄成「最小三角形之最小內接正三角形」！本作品說明書應該要將兩者相異之處、改進之處作詳細的比較及說明。