中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040411

平分拋物線

學校名稱：國立臺中女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 張璨云 高二 楊士潔	賴信志

關鍵詞：　平方拋物線、(avb)拋物線

摘要

研究起源於平分圓的問題：平面上$2n+1$個點($n \in \mathbb{N}$)，其中任三點不共線，任四點不共圓，任取三點可決定唯一的圓，若$2n+1$個點，三個點在圓上，圓內、外都各爲$n-1$個點，則此圓爲平分圓，在 Federico Ardila 教授的論文中[4]，得平分圓個數爲n^2個。我們將圓改成拋物線，則平分拋物線的個數是幾個？(平面上$2n+1$個在一般位置上的點，其中任三點不共線，任四點不共拋物線，將對稱軸方向固定後，任兩點連線不與對稱軸平行，則任取三點可決定唯一的拋物線，若$2n+1$個點，三個點在拋物線上，拋物線內、外都各爲$n-1$個點，則此拋物線爲平分拋物線)

研究結果與平分圓相同：平面上$2n+1$個在一般位置上的點，平分拋物線個數爲n^2個，接著推廣至$(a \vee b)$拋物線(若$2n+1$個點，三個點在拋物線上，拋物線內、外分別爲a個點和b個點或b個點和a個點，其中$a+b=2n-2$，且$a \neq b$，則此拋物線爲$(a \vee b)$拋物線)，$(a \vee b)$拋物線個數爲$2(ab+a+b+1)$個。

研究是建立在平分圓的論文上，但在將圓改成拋物線的過程中，架構便於計算平分拋物線個數的排法時，平分圓的排法不適用，因此需採取較複雜的排法加以討論。

壹、研究動機

在課堂上，學習到圓與球這個單元時，老師提出了下面這個問題：在平面上有 $2n+1$ 個點 $(n \in \mathbb{N})$，其中任三點不共線，任四點不共圓，過任三點可決定出唯一的圓，若 $2n+1$ 個點，三個點在圓上，$n-1$ 個點在圓內部、$n-1$ 個點在圓外部，我們稱這種圓爲平分圓，要證明平分圓個數的奇偶性與 n 相同 $(n \in \mathbb{N})$（源自於 APMO1999 的第 5 題[1]），接著在 America Mathematical Monthly 111[4] 中 Federico Ardila 教授的論文對於平分圓的個數有更進一步的研究，也精確算出其個數，在閱讀完此論文及學完圓錐曲線這個單元後我們便嘗試將圓的條件改成拋物線，原本在圓中只需任三點不共線，任四點不共圓，即可畫出唯一的圓，但在拋物線中必須固定對稱軸方向(即每個拋物線的對稱軸都互相平行)，且任兩點連線不與對稱軸方向平行，如此過任三點才可決定唯一的拋物線，若所畫出的拋物線將剩餘的 $2n-2$ 個點 $(2n+1-3=2n-2)$ 平分成 $n-1$ 個點在拋物線內部、$n-1$ 個點在外部，我們稱之爲平分拋物線，並計算“平分拋物線”的個數。

貳、研究目的

一、 探討 $2n+1$ 個點 $(n \in \mathbb{N})$，其中任三點不共線，任四點不共拋物線，現在我們將對稱軸方向固定後，任兩點連線也不與對稱軸平行，稱爲在一般位置上的點，此 $2n+1$ 個點中，過任三點所能構成的平分拋物線個數是否爲一定值？

二、 找出 $2n+1$ 個 $(n \in \mathbb{N})$ 在一般位置上的點，此 $2n+1$ 個點中，過任三點所能構成的平分拋物線個數爲何？

三、 探討 $2n+1$ 個 $(n \in \mathbb{N})$ 在一般位置上的點，此 $2n+1$ 個點中，過任三點所能構成的拋物線內部有 a 個點且外部有 b 個點，或內部有 b 個點且外部有 a 個點，其中 $a \neq b$，此種拋物線的個數是否爲一定值？

四、 找出 $2n+1$ 個 $(n \in \mathbb{N})$ 在一般位置上的點，此 $2n+1$ 個點中，過任三點所能構成的拋物線內部有 a 個點且外部有 b 個點，或內部有 b 個點且外部有 a 個點，其中 $a \neq b$，此種拋物線的個數爲何？

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Word 軟體、Opera Widgets Functions 2d。

肆、研究過程及方法

一、定義

(一) 文章中所提及之拋物線皆以給定的直線 $\boldsymbol{L}$ 為其對稱軸方向，不失一般性，本文我們將 L 皆取為鉛直線。

(二) 一般位置上的點：若平面上的點皆滿足任三點不共線、任四點不共拋物線、任兩點連線不與 $\boldsymbol{L}$ 平行。

(三) $P_iP_jP_k\ (a,b)$：過平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點中 P_i、P_j、P_k 三點的拋物線，且拋物線內部有 a 個點、外部有 b 個點。

二、平分拋物線

說明：平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點，在固定對稱軸方向的情況下任取三個點可以決定出唯一的拋物線，若此 $2n+1$ 個點，三個點在拋物線上，$n-1$ 個點在拋物線內部、$n-1$ 個點在拋物線外部，則此拋物線稱為平分拋物線。

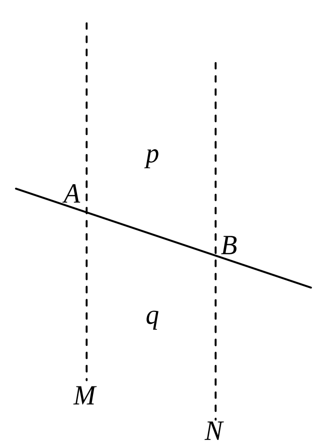
【引理 1.1】平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點，必可找到三點構成一平分拋物線。

(一) 取 $2n+1$ 個點中兩點 A、B，使得 $\overleftrightarrow{AB}$ 將平面分成兩半平面，且其餘 $2n-1$ 個點皆落在其中一半平面。

(二) 分別過 A、B 作兩條直線 M、N 與 L 平行，令在 M、N 之間且在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上半平面的所有點有 p 個；在 M、N 之間且在 $\overleftrightarrow{AB}$ 下半平面的所有點有 q 個，且 $q=0$。接著將過 A、B 兩點構成的拋物線分成兩種類型：

1. $\overleftrightarrow{AB}$ 不垂直 L：(圖一)

此時過 A、B 兩點之拋物線，其對稱軸 L' 可能在平面上平行 $\boldsymbol{L}$ 的任意位置，扣除過 $\overline{AB}$ 中點的情況，接著將 L' 由右側無窮遠處移動到左側無窮遠處，過 A、B 兩點之拋物線內包含的點逐一減少，其中當 L' 跨過 $\overline{AB}$ 中點前後瞬間，拋物線內點的個數都是 p 個。L' 移動時，拋物線內點的個數先由 $2n-1$ 個變成 p 個，接著拋物線的對稱軸跨過 $\overline{AB}$ 中點時，拋物線的開口方向由上變成下，最後拋物線內點各數再由 p 個變成 0 個。

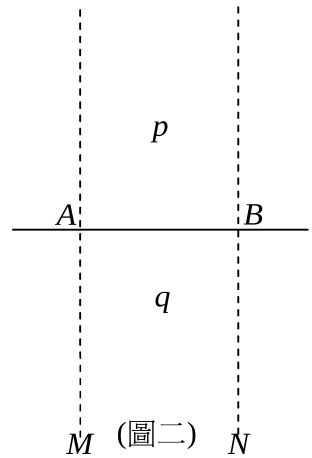


(圖一)

(1)若 $p \le n-1$，則拋物線內點個數由 $2n+1$ 變成 p 的過程中至少產生一個平分拋物線。

(2)若 $p \ge n$，則拋物線內點個數由 p 變成 0 的過程中至少產生一個平分拋物線。

2. $\overleftrightarrow{AB} \perp L$：(圖二)



(圖二)

此時，過 A、B 兩點之拋物線的對稱軸 L' 必為 $\overline{AB}$ 的中垂線，接著將拋物線的頂點由下方無窮遠處移動到上方無窮遠處時，拋物線內包含的點會是逐一增加，且拋物線內點的個數先由 p 個變成 $2n-1$ 個，接著拋物線的頂點通過 $\overline{AB}$ 時，拋物線的開口方向由上變成下，最後拋物線內點各數再由 0 個變成 p 個，在這兩個過程中，拋物線內包含的點會是逐一增加。

(1)若 $p \le n-1$，則拋物線內點個數由 p 變成 $2n+1$ 的過程中至少產生一平分拋物線。

(2)若 $p \ge n$，則拋物線內點個數由 0 變成 p 的過程中至少產生一平分拋物線。

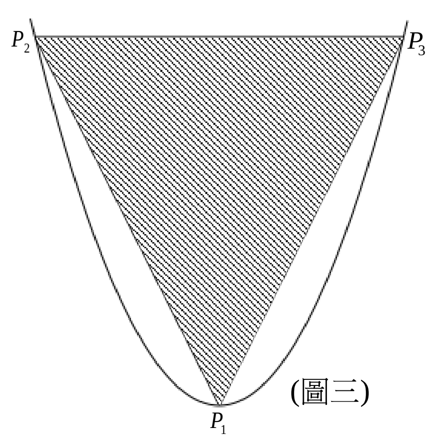
(三) 由上述 1.及 2.兩個情況得知，平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點，必可找到三點構成一平分拋物線。

⊠

【引理 1.2】試證能找到 $2n+1$ 個點 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}, P_{2n+1}$ ($n \ge 2$ 且 $n \in \mathbb{N}$)，使得 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n\text{-}1}$ 在同一拋物線上，且 $\overleftrightarrow{P_k P_{2n}}$ ($k = 1, \ldots, 2n\text{-}1$) 能平分其餘的 $2n\text{-}2$ 個點，P_{2n+1} 為一點不被 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ 中任三點構成的拋物線包在內的點。

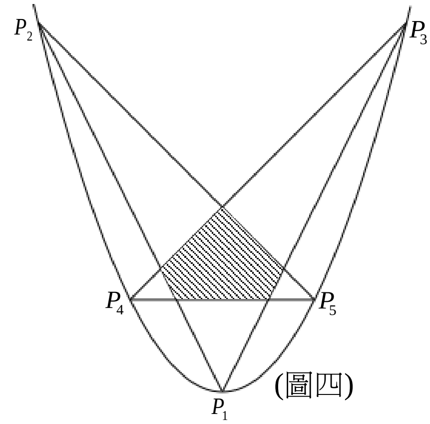
(一) 作一拋物線，頂點為 P_1，拋物線對稱軸為 L'。

(二) 當 $n = 2$ 時，拋物線頂點為 P_1，作直線 L_2 垂直 L'，設直線交拋物線於 P_2, P_3，P_4 可為落在 B_1 內部中的任一點，其中 B_1 為圖三斜線部份。



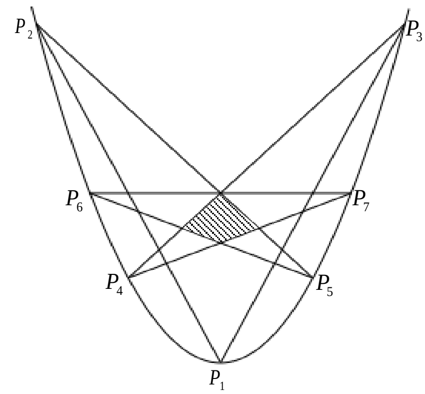
(圖三)

(三)　當 $n=3$ 時，承圖三，作直線 L_3 介於 $\overline{P_2P_3}$ 與 P_1 中且垂直 L'，設此直線交拋物線於 P_4,P_5，連 $\overline{P_2P_5}$、$\overline{P_3P_4}$、$\overline{P_4P_5}$ 點，P_6 可為落在 B_2 內部中的任一點，其中 B_2 為圖四斜線部份。



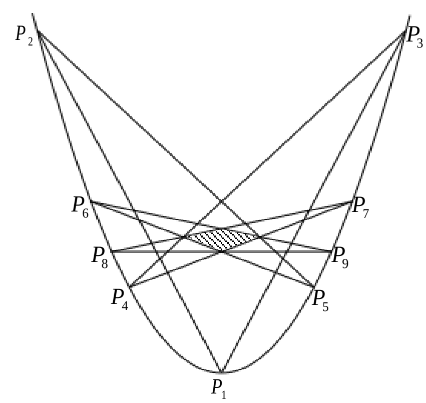
(圖四)

(四)　當 $n=4$ 時，承圖四，過 $\overline{P_2P_5}$ 與 $\overline{P_3P_4}$ 的交點作直線 L_4 垂直 L'，設此直線交拋物線於 P_6,P_7，連 $\overline{P_4P_7}$、$\overline{P_5P_6}$、$\overline{P_6P_7}$，P_8 可為落在 B_3 內部中的任一點，其中 B_3 為圖五斜線部份。



(圖五)

(五)　當 $n=5$ 時，承圖五，過 $\overline{P_4P_7}$ 與 $\overline{P_5P_6}$ 的交點作直線 L_5 垂直 L'，設此直線交拋物線於 P_8,P_9，連 $\overline{P_6P_9}$、$\overline{P_7P_8}$、$\overline{P_8P_9}$，P_{10} 可為落在 B_4 內部中的任一點，其中 B_4 為圖六斜線部份。

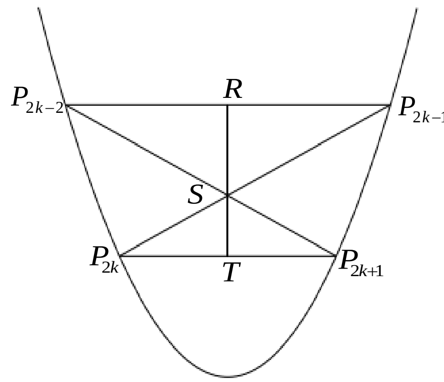


(圖六)

(六)　以此類推找出 $P_{11},\ldots,P_{2n-1}$ 的位置。

(七) 從圖可以發現 $B_1 \supset B_2$ ， $B_2 \supset B_3$ ， … ， $B_{n-2} \supset B_{n-1}$ ，為了確定 $B_k(1 \le k \le n-1, k \in □)$ 不為空集合，我們做以下的證明，不失一般性，我們假設拋物線 $\Gamma : y = \frac{1}{2}x^2$ ，直線 $L_i : y = y_i (2 \le i \le n, i \in □)$ ，顯然 Γ 與 L_i 的焦點分別為 P_{2i-2} 及 P_{2i-1} ，不妨令 P_1 的 y 值為 y_1 ，且 $y_1 = 0$ ，接著考慮 $\langle y_k \rangle$ $(k = 1, 2, ..., n)$ 。

顯然由計算可得， $y_1 = 0, y_2 = 8, y_3 = 2, y_4 = 4, \cdots$



(圖七)

(1) $\because$ P_{2k-2}, P_{2k-1} 的 y 值為 y_k $\therefore x = \mp\sqrt{2y_k}$ ；

$\because$ P_{2k}, P_{2k+1} 的 y 值為 y_{k+1} $\therefore$ $x = \mp\sqrt{2y_{k+1}}$ ；

S 的 y 值為 y_{k+2} ，又 $\Delta SP_{2k}P_{2k+1} \sim \Delta SP_{2k-1}P_{2k-2}$

所以 $\frac{\overline{P_{2k-2}P_{2k-1}}}{\overline{P_{2k}P_{2k+1}}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{ST}}$ ，

$$y_{k+2} = y_{k+1} + \overline{ST}$$

$$= y_{k+1} + \overline{RT}\left(\frac{\overline{P_{2k}P_{2k+1}}}{\overline{P_{2k-2}P_{2k-1}} + \overline{P_{2k}P_{2k+1}}}\right)$$

因此 $y_{k+2} = y_{k+1} + (y_k - y_{k+1})\frac{\sqrt{2y_{k+1}}}{\sqrt{2y_{k+1}} + \sqrt{2y_k}} = \sqrt{y_k y_{k+1}}$ $(k \ge 2, k \in □)$ 。(圖七)

(2) $y_2 = 8$

$$y_3 = 2$$
$$y_4 = \sqrt{y_3 y_2}$$
$$y_5 = \sqrt{y_4 y_3}$$
$$\vdots$$
$$y_{k+1} = \sqrt{y_k y_{k-1}}$$
$$\times)\, y_{k+2} = \sqrt{y_{k+1} y_k}$$

$$\sqrt{y_2} \cdot y_{k+1} \cdot y_{k+2} = 16\sqrt{y_{k+1}} \Rightarrow y_{k+2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{y_{k+1}}}$$

(3)接著把 $\langle y_k \rangle$ 分成 $\langle y_{2m} \rangle$ 與 $\langle y_{2m-1} \rangle$ $(m \in □)$ ，再利用數學歸納法證明 $\langle y_{2m} \rangle$ 為一遞減數列； $\langle y_{2m-1} \rangle$ 為一遞增數列 。

①當 $m=1,2$ 時，$\langle y_{2m-1}\rangle$ 中，$y_1=0$ 、$y_3=2$ ，$y_1<y_3$ ；

$\langle y_{2m}\rangle$ 中，$y_2=8$ 、$y_4=4$ ，$y_2>y_4$ 。

②當 $m=k-2,k-1$ 時，假設 $\langle y_{2m}\rangle$ 爲遞減數列；$\langle y_{2m-1}\rangle$ 爲遞增數列恆成立，

故 $\langle y_{2m-1}\rangle$ 中，$y_{2k-5}<y_{2k-3}$ ；$\langle y_{2m}\rangle$ 中，$y_{2k-4}>y_{2k-2}$ 。

③當 $m=k-1,k$ 時，$\langle y_{2m-1}\rangle$ 中，$y_{2(k-1)-1}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{y_{2k-4}}}$ ，$y_{2k-1}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{y_{2k-2}}}$ 。

因爲 $y_{2k-4}>y_{2k-2}>0$ ，所以 $y_{2k-3}<y_{2k-1}$ ；$\langle y_{2m}\rangle$ 中，$y_{2(k-1)}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{y_{2k-3}}}$ ，$y_{2k}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{y_{2k-1}}}$

因爲 $y_{2k-1}>y_{2k-3}>0$ ，所以 $y_{2k-2}>y_{2k}$ 。

由數學歸納法知 $\langle y_{2m}\rangle$ 爲一遞減數列；$\langle y_{2m-1}\rangle$ 爲一遞增數列

④因爲下標爲偶數時，皆取上一次 y 值範圍的最大值，而下標爲奇數時，則取上一次 y 值範圍的最小值，又最大值永遠會比最小值大，因此下標爲偶數的 y 皆會較下標爲奇數的 y 來的大。

由①、②、③、④的討論可得 B_k 永遠存在，因此以這種方法一定可以找到 $2n-1$ 個點 $P_1,P_2,\dots,P_{2n-1}$ ，使得 $P_1,P_2,\dots,P_{2n-1}$ 在同一拋物線且 $\overleftrightarrow{P_kP_{2n}}$ $(k=1,\dots,2n-1)$ 能平分其餘的 $2n-2$ 個點。P_{2n+1} 在 $\overleftrightarrow{P_{2n-2}P_{2n-1}}$ 左或右側無窮遠處，極靠近 $\overleftrightarrow{P_{2n-2}P_{2n-1}}$ 。這樣可以確定 P_{2n+1} 爲一點不被 $P_1,P_2,\dots,P_{2n}$ 任三點構成的拋物線包在內的點。

$\boxtimes$

【定理 1.1】平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點 $(n\in\mathbb{N})$ ，當 n 固定時，平分拋物線的個數 N_s $(s=2n+1)$ 爲一定值。

由引理 1.1 知平分拋物線一定存在，又平分拋物線個數最多爲 C_3^{2n+1} 個，故 N_s 有上下界，所以能分別找出一種排法使得 N_s 有最大值和最小值。

假設將 $2n+1$ 個點排成在 $P_1,P_2,\dots,P_{2n+1}$ 的位置時，N_s 有最小值；將 $2n+1$ 個點排成在 $Q_1,Q_2,\dots,Q_{2n+1}$ 的位置時，N_s 有最大值。接著我們要逐一將 P_1 移動到 Q_1 、P_2 移動到 Q_2、…、P_{2n+1} 移動到 Q_{2n+1} 來觀察點移動的過程中 N_s 是否會改變。

令 $P_1(t)$ 表示在時刻 t 時，P_1 所在位置的函數，$P_1(0)=P_1$ 且設 $P_1(t)=A$ 、$P_1(t+\Delta t)=B$ ，$\Delta t\to 0$ 。

(一) 點移動的過程中，有下面 3 種狀況可能會改變 N_s 的個數，因為受限於一般位置的條件，圖形無法連續。

1. 點移動時，通過 $2n+1$ 個點中任兩點 P_i 、 P_j 的連線：(圖八)

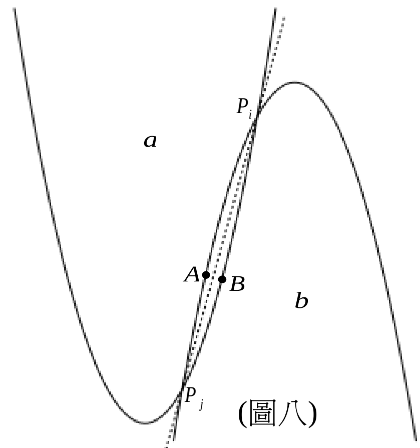
$P_iP_jA(b,a)$ 變成 $P_iP_jB(a,b)$ ，過程中拋物線開口方向改變。

此狀況可分為以下兩種情形：

(1) P_iP_jA 及 P_iP_jB 都為平分拋物線。

(2) P_iP_jA 及 P_iP_jB 都不為平分拋物線。

因此點移動時，通過 $2n+1$ 個點中任兩點 P_i 、 P_j 的連線， N_s 個數不變。



(圖八)

2. 點移動時，通過經 $2n+1$ 個點中任一點 P_i 且與對稱軸方向平行的直線：(圖九)

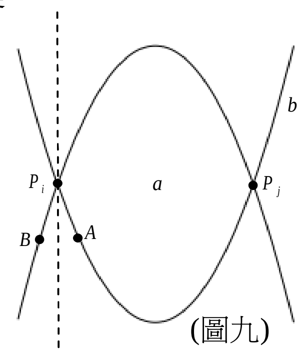
$P_iP_jA(a,b)$ 變成 $P_iP_jB(a,b)$ ，過程中拋物線開口方向改變。

此狀況可分為以下兩種情形：

(1) P_iP_jA 及 P_iP_jB 都為平分拋物線。

(2) P_iP_jA 及 P_iP_jB 都不為平分拋物線。

因此點移動時，通過經 $2n+1$ 個點中任一點 P_i 且與對稱軸方向平行的直線， N_s 個數不變。



(圖九)

3. 點移動時，通過通過 $2n+1$ 個點中任三點 P_i 、 P_j 、 P_k 所構成的拋物線：

令移動前拋物線 $P_iP_jP_k$ 內部的點為 a 個，拋物線 $P_iP_jP_k$ 外部的點為 b 個($a+b=2n-2$)。

此狀況可分為以下三種情形：

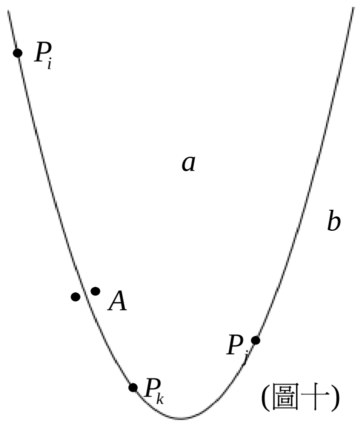
(1) ①④原為平分拋物線變成非平分拋物線，此時②③會從非平分拋物線變成平分拋物線。

(2) ①④原為非平分拋物線變成平分拋物線，此時②③會從平分拋物線變成非平分拋物線。

(3) $a \neq b$ 且 $a-1 \neq b+1$，則在①、②、③、④移動前、後都不為平分拋物線。

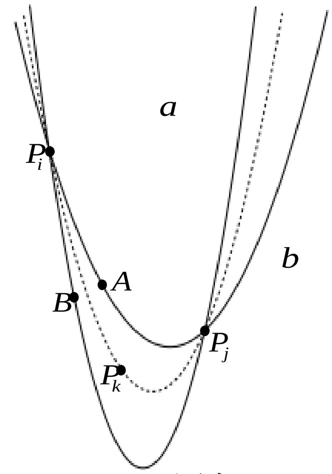
因此通過拋物線 $P_iP_jP_k$ 時， N_s 個數不變。

① $P_iP_jP_k(a,b)$ 變成 $P_iP_jP_k(a-1,b+1)$



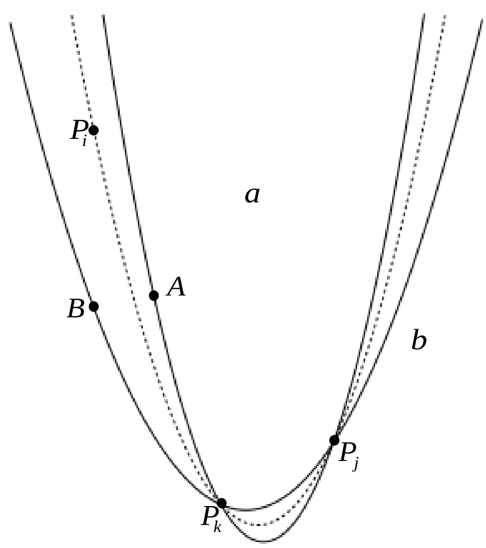
(圖十)

② $P_iP_jA(a-1,b+1)$ 變成 $P_iP_jB(a,b)$



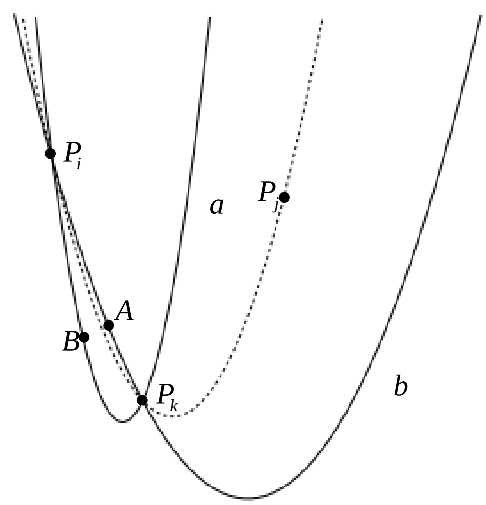
(圖十一)

③ $P_jP_kA(a-1,b+1)$ 變成 $P_jP_kB(a,b)$



(圖十二)

④ $P_iP_kA(a,b)$ 變成 $P_iP_kB(a-1,b+1)$



(圖十三)

4. 經由 1.、2.、3.的討論發現，當由 P_1 移動到 Q_1 時 N_s 並不會改變，同理可知由 P_2 移動到 Q_2 ，…， P_{2n+1} 移動到 Q_{2n+1} ， N_s 也不會改變，因此 N_s 爲一定值。

⊠

【定理 1.2】平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點 $(n\in\mathbb{N})$，平分拋物線的個數 N_s 爲 n^2 個。

由定理 1.1，平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點，當 n 固定時，平分拋物線的個數 N_s 爲一個定值，接著以引理 1.2 的方式架構出 $2n+1$ 個點 $P_1,P_2,\dots,P_{2n-1},P_{2n},P_{2n+1}$，其中 $P_1,P_2,\dots,P_{2n-1}$ 在同一拋物線上，P_{2n} 在此令爲 O，O 爲拋物線內的點，P_{2n+1} 在此令爲 Q，Q 爲拋物線外的點，我們再將 $P_1,P_2,\dots,P_{2n-1}$ 做些許的微調，使得任四點不共拋物線、任三點不共線、任兩點連線不與對稱軸平行。

接下來我們要討論 N_s 的個數會是多少，並從上列敘述可知此 $2n+1$ 個點任三點所決定的拋物線可分成下列 4 種情況討論：

(1) $P_1,P_2,\dots,P_{2n-1}$ 中過任三點 P_i,P_j,P_k 所構成的平分拋物線有 N_{2n-1} 個。

因爲 O 和 Q 必定分別在拋物線的內部與外部，因此扣掉 O 和 Q，P_i,P_j,P_k 所構成的平分拋物線有 N_{2n-1} 個。

(2) $P_1,P_2,\dots,P_{2n-1}$ 中過任兩點 P_i,P_j 與 O 所構成的平分拋物線有 0 個。

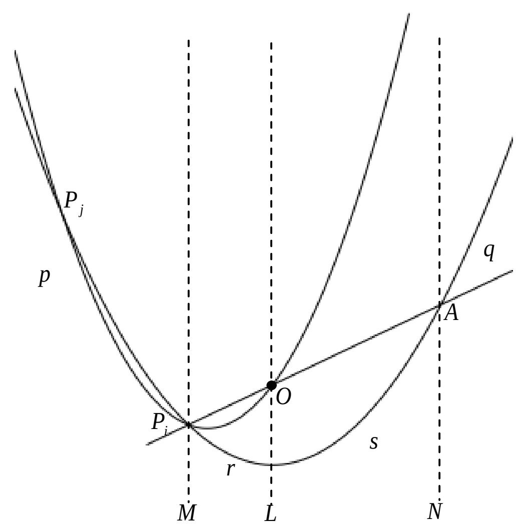
在引理 1.2 建構出的圖形上選一點 P_i，作 $\overleftrightarrow{P_iO}$，交 $P_1,P_2,\dots,P_{2n-1}$ 所構成的拋物線的另一邊於 A，P_j 可爲此拋物線上除了 P_i 外的其餘點，我們觀察拋物線 $P_i\,P_j\,O$ 內包含的點個數。

如圖分別過 P_i、A 作兩條與 L 平行的直線 M、N，令在 M 左側且在 $\overleftrightarrow{P_iO}$ 上方的所有點爲 p 個，在 N 右側且在 $\overleftrightarrow{P_iO}$ 上方的所有點爲 q 個，在 M、L 之間有 r 個，在 L、N 之間有 s 個。

因爲 $\overleftrightarrow{P_iO}$ 將拋物線上其餘的 $2n-2$ 個點平分，所以 $p+q=r+s=n-1$。

①若 P_j 落在 $\overleftrightarrow{P_iO}$ 上方，M 左側。(圖十四)

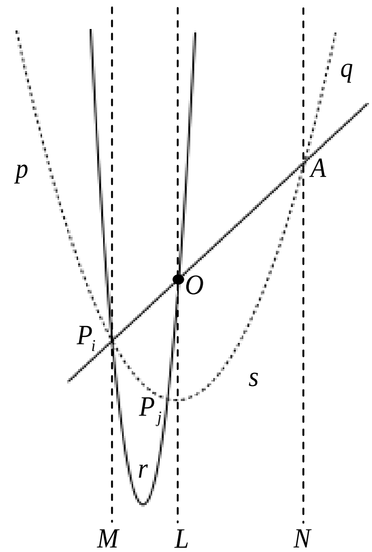
則拋物線 $P_i\,P_j\,O$ 內包含的點個數必小於 p 個，因此拋物線 $P_i\,P_j\,O$ 內包含的點個數小於 $n-1$ 個。



(圖十四)

②若 P_j 落在 M 、 L 之間。(圖十五)

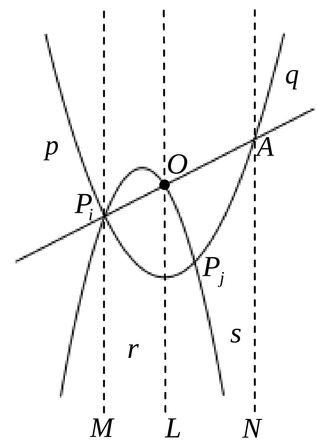
則拋物線 $P_i\ P_j\ O$ 內包含的點個數必小於 r 個，因此拋物線 $P_i\ P_j\ O$ 內包含的點個數小於 $n-1$ 個。



(圖十五)

③若 P_j 落在 L 、 N 之間。(圖十六)

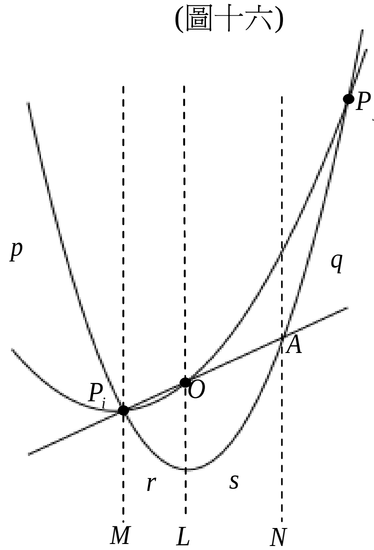
則拋物線 $P_i\ P_j\ O$ 內包含的點個數必小於 $r+s$ 個，因此拋物線 $P_i\ P_j\ O$ 內包含的　點個數小於 $n-1$ 個。



(圖十六)

④若 P_j 落在 $\overleftrightarrow{P_iO}$ 上方， N 右側。(圖十七)

則拋物線 $P_i\ P_j\ O$ 內包含的點個數必小於 $p+q$ 個，因此拋物線 $P_i\ P_j\ O$ 內包含的點個數小於 $n-1$ 個。

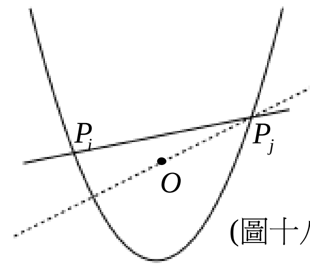


(圖十七)

經由①、②、③、④的討論發現拋物線 $P_i\ P_j\ O$ 皆不可能爲平分拋物線。

(3) $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-1}$ 中過任兩點 P_i, P_j 與 Q 所構成的平分拋物線有 0 個。(圖十八)

因為 Q 在無窮遠處，所以拋物線 P_iP_jQ 近乎一條直線，故只需看 $\overleftrightarrow{P_iP_j}$ 是否平分其餘的 $2n-2$ 個點。



(圖十八)

① O 和 Q 在同側：

則拋物線 $P_i\ P_j\ Q$ 不為平分拋物線。

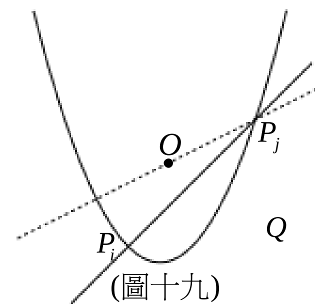
② O 和 Q 在異側：

則拋物線 $P_i\ P_j\ Q$ 不為平分拋物線。

③經由①、②的討論發現拋物線 $P_i\ P_j\ Q$ 皆不可能為平分拋物線。

(4) $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-1}$ 中過任點 P_i 與 O, Q 所構成的平分拋物線有 $2n-1$ 個。(圖十九)

因為 Q 在無窮遠處，因此拋物線 P_iOQ 近乎一條直線，又 $\overleftrightarrow{P_iO}$ 可以平分其餘的 $2n-2$ 個點，所以拋物線 P_iOQ 皆為平分拋物線，故共產生 $2n-1$ 個平分拋物線。



(圖十九)

由上面 4 種情況得知 $N_{2n+1} = N_{2n-1} + 2n - 1$，且因構成一個唯一的拋物線最少要 3 個點，因此 $N_3 = 1$。

$$
\begin{array}{l}
N_3 = 1 \\
N_5 = N_3 + 2\times 2 - 1 \\
N_7 = N_5 + 2\times 3 - 1 \\
\ldots \\
\ldots \\
\underline{+)\, N_{2n+1} = N_{2n-1} + 2n - 1} \\
N_{2n+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = \dfrac{n(2n-1+1)}{2} = n^2
\end{array}
$$

⊠

三、$(a \vee b)$ 拋物線

說明：平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點，在固定對稱軸方向的情況下任取三個點可以決定出唯一的拋物線，若此 $2n+1$ 個點，三個點在拋物線上，a 個點在拋物線內部，b 個在拋物線外部，或 b 個點在拋物線內部，a 個點在拋物線外部 $(a+b=2n-2)$，其中 $a \neq b$，則稱此拋物線為 $(a \vee b)$ 拋物線。

【引理 2.1】平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點，必可找到三個點構成一 $(a \vee b)$ 拋物線。

同引理 1.1 的方式證明，並討論點與 a 、 b 的關係。

⊠

【引理 2.2】試證能找到 $2n+1$ 個點 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}, P_{2n+1}$ $(n \geq 2 \text{且} n \in \mathbb{N})$ ，使得 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-1}$ 在同一拋物線上，且 $\overleftrightarrow{P_k P_{2n}}$ $(k = 1, \ldots, 2n-1)$ 能平分其餘的 $2n-2$ 個點， P_{2n+1} 爲一點不被 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ 任三點構成的拋物線包在內的點 。

同引理 1.2 之證明。

⊠

【定理 2.1】平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點($n \in \mathbb{N}$)，當 n 固定時，$(a \vee b)$ 拋物線個數 N_s 爲一定值。

同定理 1.1 之證明。

⊠

【定理 2.2】平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點($n \in \mathbb{N}$)，$(a \vee b)$ 拋物線個數 N_s 爲 $2(ab+a+b+1)$ 個。

同定理 1.2 的方式，先對引理 2.2 架構之排法做些微調整後，再將 $2n+1$ 個點任三點所決定的拋物線分成下列 4 種情況討論：

1. P_i, P_j, P_k 所構成的 $(a \vee b)$ 拋物線有 $N_{(a-1 \vee b-1)}$ 個。
2. P_i, P_j, O 所構成的 $(a \vee b)$ 拋物線有 $2n-1$ 個。
3. P_i, P_j, Q 所構成的 $(a \vee b)$ 拋物線有 $2n-1$ 個。
4. P_i, O, Q 所構成的 $(a \vee b)$ 拋物線有 0 個。

由上面 4 種情況得知 $N_{(a \vee b)} = N_{(a-1 \vee b-1)} + 4n - 2 = N_{(a-1 \vee b-1)} + 2a + 2b + 2$

$N_{(0 \vee b-a)} = 2b - 2a + 2$

$N_{(1 \vee b-a+1)} = N_{(0 \vee b-a)} + 2 + 2b - 2a + 2 + 2$

...

...

$$\begin{array}{l} +\big) N_{(a \vee b)} = N_{(a-1 \vee b-1)} + 2a + 2b + 2 \\ \hline N_{(a \vee b)} = 2(ab + a + b + 1) \end{array}$$

⊠

伍、研究結果

一、平分拋物線

(一) 平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點，必可找到三點構成一平分拋物線。

(二) 試證能找到 $2n+1$ 個點 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}, P_{2n+1}$ $(n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N})$，使得 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-1}$ 在同一拋物線上，且 $\overleftrightarrow{P_k P_{2n}}$ $(k = 1, \ldots, 2n-1)$ 能平分其餘的 $2n-2$ 個點，P_{2n+1} 爲一點不被 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ 中任三點構成的拋物線包在內的點。

(三) 平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點 $(n \in \mathbb{N})$，當 n 固定時，平分拋物線的個數 N_s $(s = 2n+1)$ 爲一定值。

(四) 平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點 $(n \in \mathbb{N})$，平分拋物線的個數 N_s 爲 n^2 個。

二、$(a \vee b)$ 拋物線。

(一) 平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點，必可找到三點構成一 $(a \vee b)$ 拋物線。

(二) 試證能找到 $2n+1$ 個點 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}, P_{2n+1}$ $(n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N})$，使得 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-1}$ 在同一拋物線上，且 $\overleftrightarrow{P_k P_{2n}}$ $(k = 1, \ldots, 2n-1)$ 能平分其餘的 $2n-2$ 個點，P_{2n+1} 爲一點不被 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ 任三點構成的拋物線包在內的點。

(三) 平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點 $(n \in \mathbb{N})$，當 n 固定時，$(a \vee b)$ 拋物線個數 N_s 爲一定值。

(四) 平面上 $2n+1$ 個在一般位置上的點 $(n \in \mathbb{N})$，$(a \vee b)$ 拋物線個數 N_s 爲 $2(ab+a+b+1)$ 個。

陸、討論

我們的研究及討論方式主要是建立在 Federico Ardila 教授討論平分圓個數的論文上，但將圓改爲拋物線時，主要有下面幾點不同：

一、 定義上拋物線需先固定其對稱軸方向且增加了任兩點連線不與對稱軸方向平行之條件。

二、 證明任兩點必可畫出一平分圓時，只需討論一種情況；拋物線中則需討論兩點連線是否與對稱軸垂直的兩種情況。

三、 在構造便於計算平分拋物線個數的排法時，需更進一步的討論，且 $2n+1$ 個點的關聯性比圓更強，排法也較複雜。

柒、結論

一、 $2n+1$ 個 $(n \in \mathbb{N})$ 在一般位置上的點，過任三點所能構成的平分拋物線個數為一定值，且為 n^2 個。

二、 $2n+1$ 個 $(n \in \mathbb{N})$ 在一般位置上的點，過任三點所能構成的 $(a \vee b)$ 拋物線個數為一定值，且為 $2(ab+a+b+1)$ 個。

捌、參考資料

1. 陳昭地、張幼賢、朱亮儒 (民 88)。1999 年第 11 屆亞太數學奧林匹亞競賽試題及參考解答。科學教育月刊，219，55~61。
2. 楊維哲等 (民 97)。普通高級中學數學(四)。1-2 拋物線(5-23 頁)。台北市：三民。
3. 楊維哲等 (民 97)。普通高級中學數學(四)。第二章排列組合(75-144 頁)。台北市：三民。
4. Federico Ardila, (2004). The Number of Halving Circles, America Mathematical Monthly ,111, 586~591。

【評語】040411

1) 拋物線並非封閉曲線，因此稱呼「拋物線內部」、「拋物線外部」是不存在的。恰當的敘述爲：拋物線的餘集是由兩個彼此不相交的連通集合構成。這兩個連通集合若各包含 n-1 點，該拋物線則稱爲平分拋物線。

2) 作品說明書 p.14 研究結果(二)當中出現「試證能找到…」的敘述。連嘗試證明也當作研究結果？科展應該表現作者對於研究成果的高度信心，該語氣反映出預備得不夠心有成竹。