中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040409

寄生蟲數

學校名稱：臺中縣立大里高級中學

作者：	指導老師：
高二 廖峰澤 高二 蔡亦哲	許懷文 陳鑫達

關鍵詞： 移位、餘數

摘要

此篇報告的研究重點是「寄生蟲數」，定義如下：

定義
若自然數xd是k-(假)寄生蟲數，指的是「xd × k的乘積會等於xd的個位數字d，移到首位所得的數字dx」(其中x為n位數，d、k是 1 到 9 的自然數)。也就是xd會滿足「xd × k = dx」的式子。

得到下列的結果：

一、得出「k-(假)寄生蟲數的公式」為xd＝$\dfrac{d(10^{n+1}-1)}{10k-1}$ 。

二、若$\dfrac{d}{10k-1}$的小數表示法在小數點後第 1 位的數字至少是 1，則只要計算$\dfrac{d}{10k-1}$的值，再取該數值循環節的數字(可不只取 1 節)，就是 k-(假)寄生蟲數。

三、k-(假)寄生蟲數恰好有 10－k 種。

四、5-寄生蟲數：102040816326530612244897959183673469387755，可以看成 1(02)(04)(08)(16)……，其中數值有倍增現象。

五、得出「移m位的k-(假)寄生蟲數的公式」為xd＝$\dfrac{d(10^{n+m}-1)}{10^{m}k-1}$ 。

六、若$\dfrac{d}{10^{m}k-1}$的小數表示法在小數點後第 1 位的數字至少是 1，則只要計算$\dfrac{d}{10^{m}k-1}$的值，再取該數值循環節的數字(可不只取 1 節)，就是移 m 位 k-(假)寄生蟲數。

七、移 m 位的 k-(假)寄生蟲數恰好有(10－k)×10^{m-1}種。

八、得出「超寄生蟲數的公式」如下：

1.當 l ＝m 時，

(1)若k =1，超寄生蟲數cxd必是「cxc」的形式；也就c = d時才有解。

(2)若k≧2，則cxd＝$\dfrac{(d-c)(10^{n+m}-1)}{k-1}$是超寄生蟲數。

2.當 l < m時，超寄生蟲數cxd＝$\dfrac{(d-c)10^{n+m}+(c\times 10^{m-l}-d)}{10^{m-l}\times k-1}$ 。

3.當 l > m時，超寄生蟲數cxd＝$\dfrac{(c-d)10^{n+l}+(d\times 10^{l-m}-c)}{10^{l-m}-k}$ 。

九、若n＋2 位數cxd 是一個「超寄生蟲數」，。除k =1 有解之外，其餘情形，超寄生蟲數均無解。

壹、研究動機

我們在「數字的異想世界」這本書[1]發現下面的有趣問題：

第 80 章　寄生蟲數　(節錄)

(第 247-248 頁)

…102564 是個很特別的數字，有天深夜，古戈爾博士使用電腦鑽研探索時發現了這個數字，他稱之為寄生蟲數，我們很快就會了解其中原因。若要把 102564 乘以 4，只需把被乘數最右側的數字 4 移到最左邊，就會和乘積的答案完全相同：

$$10256\underline{4} \times 4 = \underline{4}10256$$

這個數字是不是很奇妙？數字森林裡還有多少個具有這種特性的數字，靜靜在數學沼澤裡優遊而不為人知？這類數字讓古戈爾博士想起生物體內的寄生蟲(數字)，在宿主(有寄生蟲數寄居的多位數)體內四處漫遊，必須靠宿主進食(乘法運算)來獲得能量。古戈爾博士寫了幾個程式來搜尋像 102564 這樣的寄生蟲數(含有寄生蟲的數字)。如果你拿不同的一位數來當作乘數，搜尋所有可能的寄生蟲數，就會發現這種數相當稀少。小於一百萬的寄生蟲數似乎只有一個，就是 4-寄生蟲數 102564。(「4-寄生蟲數」以 4 為乘數的寄生蟲數。)

是否有其他數字能產生寄生蟲數？是否有某個乘數沒有寄生蟲數？用電腦解答這個問題要花多少時間？

偶爾也會有「假寄生蟲數」潛伏在小於一百萬的整數中。這類數字(例如 128205)乘以 4 時，也可以把最後一位數字移到最前面：

$$12820\underline{5} \times 4 = \underline{5}12820$$

古戈爾博士稱這類的數字為「假寄生蟲數」，因為最後一位移動的尾數並不等於乘數。以下列出其他幾個 4-假寄生蟲數：

$$15384\underline{6} \times 4 = \underline{6}15381$$

$$17948\underline{7} \times 4 = \underline{7}17918$$

$$20512\underline{8} \times 4 = \underline{8}20512$$

$$23076\underline{9} \times 4 = \underline{9}23076$$

這是 5-假寄生蟲數：$14285\underline{7} \times 5 = \underline{7}14285$。

寄生蟲數和假寄生蟲數就像鑽石一樣稀奇。當古戈爾博士在深夜搜尋寄生蟲數時，他也向你挑戰，請你用自己的電腦來搜尋，打敗它的紀錄。請就位，預備，開始！

(第 430-431 頁)

英屬哥倫比亞大學的拉姆賽(Keith Ramsay)想出了一種奇妙的公式，可以產生寄生蟲數。…假定我們從一個乘數 d 開始，希望找到一個 d-寄生蟲數。這時我們只須要求出此公式 d/(10d－1)的值，再取該數值開始循環之前的位數。…

假設他希望找到 2 的寄生蟲數，可以計算 2/19＝0.105263157894736842……。「105263157894736842」會一再重複出現，同時這正是 2-寄生蟲數。…

加州哈瑪德學院(Harvey Mudd College)的麥克．迪德里安(Mike Dederian)發現了一個特殊的 5-寄生蟲數：102040816326530612244897959183673469387755，可以看成 1(02)(04)(08)(16)……，其中數值有倍增現象。我們還不了解為什麼這個數字的前幾位數會出現這種模式。…

◎是否有「超寄生蟲數」，做乘法運算時可以把最左端和最右端兩位對調？

可以看出「寄生蟲數做乘法運算時，並不需要真的計算，只要把個位數字移到最左端即可」，這個神奇的性質吸引著我們去找出所有的寄生蟲數，而且後來發現「寄生蟲數是否存在？」居然跟數論中著名的尤拉定理有關，這一切真的太神奇了！很多人都會問「數學有什麼用？」可是常常在解決問題的過程中，「數學」就會像鬼魅一般，神奇地出現了！

貳、研究目的

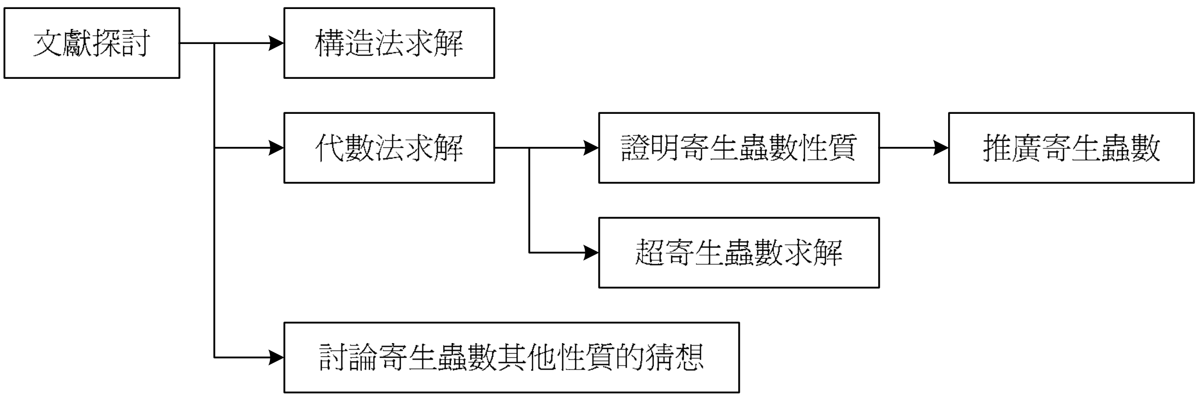
一、利用構造法找出寄生蟲數。
二、利用代數式解出寄生蟲數。
三、證明寄生蟲數的性質。
四、找出移 m 位的寄生蟲數。
五、超寄生蟲數的探討。

參、研究設備及器材

Excel 軟體、Mathematica 4 數學軟體、computer、紙和筆。

肆、研究過程

研究的流程如下圖所示：



先說明一個關於符號的規定：

定義 1 下面文章關於n位數的假設，都會把代表未知數的英文字母「加底線」，這是爲了和代數的「乘法縮寫」做區別，例如：二位數設爲$\underline{ab}$，而不是ab，因爲一般而言ab＝a×b。 另外，符號$\underline{ab}$也用來假設三位以上的數字，但是會說明a、b的位數，例如：設$\underline{ab}$爲五位數，其中a是 3 位數、b是 2 位數。

第一節　利用構造法找出寄生蟲數

首先，我們用「直接構造法」找出寄生蟲數。以 4-寄生蟲數來說，由於 4-寄生蟲數的尾

數是 4，因此要先觀察下面「尾數是 4 的二位數乘上 4」的運算式，會發現「乘積的個位數字都是 6，即當尾數是 4 的二位數乘上 4 之後，末位的 4 會拿到前面當首位數字，而乘積的個位數字就是原被乘數的十位數字。因此若一個數是 4-寄生蟲數，則此數的末兩位數字必須是 64。」

尾數是 4 的二位數

↓

$$
\begin{aligned}
\underline{4}\times 4 &= 1\underline{6}\\
1\underline{4}\times 4 &= 5\underline{6}\\
2\underline{4}\times 4 &= 9\underline{6}\\
3\underline{4}\times 4 &= 13\underline{6}
\end{aligned}
$$

↑

乘積的個位數字都是 6

仿照上面的方式，接著觀察下面「尾數是 64 的三位數乘上 4」的運算式，會發現「乘積的末兩位數字都是 56，即當尾數是 64 的二位數乘上 4 之後，末位的 4 會拿到前面當首位數字，而乘積的個位和十位數字就分別是原被乘數的十位和百位數字。因此若一個數是 4-寄生蟲數，則此數的末三位數字必須是 564。」

尾數是 64 的三位數

↓

$$
\begin{aligned}
\underline{64}\times 4 &= 2\underline{56}\\
1\underline{64}\times 4 &= 6\underline{56}\\
2\underline{64}\times 4 &= 10\underline{56}
\end{aligned}
$$

↑

乘積的末兩位數字都是 56

如果繼續往下做計算，會發現「102564 的循環是 4-寄生蟲數」，即「$\underline{102564}$ $\underline{102564}$、$\underline{102564}$ $\underline{102564}$ $\underline{102564}$、⋯都是 4-寄生蟲數」。

第二節　利用代數式解出寄生蟲數

後來，我們發現用構造法去找寄生蟲數，實在是很累的事。所以嘗試用代數方法解寄生蟲數。

定理 1

假設n＋1 位數$\underline{xd}$ 是k-(假)寄生蟲數，其中x爲n位數，d、k是 1 到 9 的自然數。

1.若(d，10k－1) =1，而且滿足 10k－1 | $10^{n+1}-1$和$\dfrac{d(10^{n+1}-1)}{10k-1}$是 n＋1 位數，

則$\underline{xd}$＝$\dfrac{d(10^{n+1}-1)}{10k-1}$是k-(假)寄生蟲數。

2.若(d，10k－1)≠1，設$\dfrac{d}{10k-1}$約成最簡分數爲$\dfrac{b}{a}$，

而且滿足 $a \mid 10^{n+1}-1$ 和 $\frac{b(10^{n+1}-1)}{a}$ 是n＋1 位數，則 $\underline{xd}=\frac{b(10^{n+1}-1)}{a}$ 是k-(假)寄生蟲數。 註：特別地，上面兩種情形中，若k＝d，則xd是d-寄生蟲數。若k≠d，則xd是k-假寄生蟲數。

證明：

假設 $\underline{xd}$ 是k-寄生蟲數，其中x為n位數，d、k是 1 到 9 的自然數。

根據寄生蟲數的定義，可得

$$\underline{xd} \times k = \underline{dx}$$

$$\Rightarrow (10x+d) \times k = d\times 10^n + x$$

$$\Rightarrow 10kx + dk = d\times 10^n + x$$

$$\Rightarrow (10k-1)x = d(10^n - k)$$

$$\Rightarrow x = \frac{d(10^n-k)}{10k-1}$$

$$\Rightarrow \underline{xd} = 10\times\frac{d(10^n-k)}{10k-1} + d = \frac{d\times 10^{n+1}-10dk+d(10k-1)}{10k-1}$$

$$\Rightarrow \underline{xd} = \frac{d(10^{n+1}-1)}{10k-1}\text{。}$$

1.若(d，10k－1) =1，而且滿足 $10k-1 \mid 10^{n+1}-1$，則 $\underline{xd}=\frac{d(10^{n+1}-1)}{10k-1}$ 是自然數。

又 $\underline{xd}$ 是n＋1 位數，所以 $\frac{d(10^{n+1}-1)}{10k-1}$ 若是n＋1 位數，則 $\underline{xd}=\frac{d(10^{n+1}-1)}{10k-1}$ 是k-(假)寄生蟲數。

2.若(d，10k－1)≠1，設 $\frac{d}{10k-1}$ 約成最簡分數為 $\frac{b}{a}$，

可得(a，b) =1 且 $\underline{xd}=\frac{b(10^{n+1}-1)}{a}$，再由第 1 種情形可知

只要滿足 $a \mid 10^{n+1}-1$ 和 $\frac{b(10^{n+1}-1)}{a}$ 是n＋1 位數，則 $\underline{xd}=\frac{b(10^{n+1}-1)}{a}$ 是k-(假)寄生蟲數。 □

經過計算所有寄生蟲數的種類數(如表 1)，會發現「k-(假)寄生蟲數恰好有 10－k 種」。這實在是很有趣的現象，再想想這現象似乎是很「合理」的。

表 1

k-(假)寄生蟲數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
寄生蟲數種類數	9	8	7	6	5	4	3	2	1

第三節　證明寄生蟲數的性質

根據定理 1 可知「寄生蟲數如果存在，必須找到滿足 $10k-1 \mid 10^{n+1}-1$ 的 n 值」，也就是找滿足「$10^{n+1} \equiv 1 \pmod{10k-1}$」的 n 值，可是「為什麼寄生蟲數的位數(即 n＋1 位)會有循環性呢？」為了解釋這個性質，必須列出兩個引理：

引理 1(尤拉定理)參考[5]

若(a，r) = 1，則 $a^{\phi(r)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$，其中$\phi(r)$是小於$r$且和$r$互質的正整數個數的函數。

註 1：$\phi(r)$就是有名尤拉(Euler)ϕ函數；計算公式如下

若r的標準分解式爲 $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$，則$\phi(r) = r(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\ldots(1-\frac{1}{p_s})$。

註 2：當r是質數p時，因$\phi(p) = p-1$，可得 $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$，這就是費馬(Fermat)小定理。

引理 2

設(a，r) = 1，若 $a^t \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$且$s$是使 $a^s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$成立的最小自然數，則$s|t$。

證明：

因爲$s \leqq t$，設t被s除的商爲u、餘數爲v，其中 $0 \leqq v < s$，則可假設$t = su + v$。已知 $a^t \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$，可得 $a^{su+v} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$，又 $a^s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$，所以 $a^v \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$，但$v < s$，這和「$s$是使 $a^s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$成立的最小自然數」的條件矛盾，故$v = 0$；即$t = su$，因此$s|t$。 □

根據引理 1 及引理 2 可知$s|\phi(r)$。因此，若設s是使$10^{n+1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 10k-1)$成立的最小自然數 n＋1，則有「n＋1＝st」(其中s是$\phi(10k-1)$的因數，t 是自然數)。這就表示寄生蟲數的位數具有「循環性」，而「循環節長度」就是s，實際的s值根據計算如下表 2。

表 2

k	1	2	3	4	5(d≠7)
$\phi(10k-1)$	$\phi(9)$＝6	$\phi(19)$＝18	$\phi(29)$＝28	$\phi(39)$＝24	$\phi(49)$＝42
s(循環節長度)	1	18	28	6	42

k	5(d＝7)	6	7	8	9
$\phi(10k-1)$	$\phi(7)$＝6	$\phi(59)$＝58	$\phi(69)$＝44	$\phi(79)$＝78	$\phi(89)$＝88
s(循環節長度)	6	58	22	13	44

至於，「爲什麼 d-寄生蟲數只要求出$\frac{d}{10d-1}$的值，再取該數值開始循環之前的位數，就是 d-寄生蟲數呢？」我們先從[6]找到一些關於循環小數的性質(即引理 3)，但是沒有證明，在試著給出證明(篇幅不夠未列出)的過程中，我們發現了答案，連假寄生蟲數也可以說明。

引理 3

設 x＝$\frac{a}{b}$，其中 a、b 是「互質」的自然數且 b≠1，則 x 有下列性質

1.若 b 只有 2 或 5 的質因數，則 x 是有限小數。

2.若 b 完全不含 2 和 5 的質因數，則 x 爲純循環小數(即每一位數字都在循環節內)。

3.若 x 是一純循環小數，則 x 循環節的長度是$\phi(b)$的因數；但與 a 無關。

定理 2

設 d、k 是 1 到 9 的自然數且 $\frac{d}{10k-1}$ 的小數表示法在小數點後第 1 位的數字至少是 1，則只要計算 $\frac{d}{10k-1}$ 的值，再取該數值循環節的數字(可不只取 1 節)，就是 k-(假)寄生蟲數。

註：特別地，若 k＝d，因 $\frac{d}{10k-1}=\frac{d}{10d-1}>\frac{d}{10d}=0.1$，所以 $\frac{d}{10d-1}$ 的小數表示法在小數點後第 1 位的數字至少是 1，因此只要直接取循環節，就是 d-寄生蟲數。

證明：

由定理 1 可知k-(假)寄生蟲數xd＝ $\frac{d(10^{n+1}-1)}{10k-1}=\frac{d}{10k-1}\times 10^{n+1}-\frac{d}{10k-1}$ ，

1.因為 2 和 5 均無法整除 10k－1，所以 10k－1 不含 2 和 5 的質因數，由引理 3 可知 $\frac{d}{10k-1}$ 是一個純循環小數，設 $\frac{d}{10k-1}$ ＝$0.\underline{y_1y_2..y_l}\ \underline{y_1y_2..y_l}\ \ldots$。

而且循環節的長度 l 就是滿足「$10^r\equiv 1 \pmod{10k-1}$ 的最小 r 值」。

2.分數 $\frac{d}{10k-1}\times 10^{n+1}$ 其實就是將 $\frac{d}{10k-1}$ 的小數值「往前移 n＋1 位」，

而n值要符合「$10^{n+1}\equiv 1 \pmod{10k-1}$ 」，而n＋1 恰好就是k-(假)寄生蟲數xd的位數，若設r = n＋1，則xd的位數r就是要滿足「$10^r\equiv 1 \pmod{10k-1}$ 」，這個式子恰好就是「 $\frac{d}{10k-1}$ 循環節的長度滿足的式子」相同。所以， $\frac{d}{10k-1}\times 10^{n+1}$＝ $\underline{y_1y_2..y_l}\ldots\underline{y_1y_2..y_l}.\underline{y_1y_2..y_l}\ldots\underline{y_1y_2..y_l}\ldots$。

由上可知 $\frac{d}{10k-1}\times 10^{n+1}-\frac{d}{10k-1}=\underline{y_1y_2..y_l}\ldots\underline{y_1y_2..y_l}$ 是一個「循環節的長度為 l 」的正整數，但如果「 $\frac{d}{10k-1}$ 的小數表示法在小數點後第 1 位的數字 y_1 是 0」，則 $\frac{d}{10k-1}\times 10^{n+1}$ 的整數部份就會少於n＋1 位，這樣xd(＝ $\frac{d}{10k-1}\times 10^{n+1}-\frac{d}{10k-1}$)就不符合k-(假)寄生蟲數的假設，因此只要「 $\frac{d}{10k-1}$ 的小數表示法在小數點後第 1 位的數字至少是 1」，xd就會是k-(假)寄生蟲數，而且循環節的數字(可不只取 1 節)，都是k-(假)寄生蟲數。 □

註：這同時也說明，k-(假)寄生蟲數為什麼就是「某些數字的循環」。

利用定理 2，可以很快找出寄生蟲數，舉例如下：

例 1：

(1)取k＝4，d＝4， $\frac{d}{10k-1}=\frac{4}{39}$ ＝$0.\underline{102564}\ \underline{102564}\ \underline{102564}\ldots=0.\overline{102564}$ ，所以 $\overline{102564}$ 是 4-寄生蟲數。

(2)取k＝4，d＝2， $\frac{d}{10k-1}=\frac{2}{39}$ ＝$0.\underline{051282}\ \underline{051282}\ \underline{051282}\ldots=0.\overline{051282}$ ，因為 $\frac{2}{39}$ 小數點後第 1 位的數字是 0，所以 $\overline{051282}$ 不是 4-假寄生蟲數。

有了定理 2 就可以證明「表 1 的寄生蟲數個數爲什麼有那樣的規律？」:

定理 3 (寄生蟲數個數的規律) k-(假)寄生蟲數恰好有 10－k 種。

證明：

由定理 2 可知「$\frac{d}{10k-1}$的小數表示法在小數點後第 1 位的數字至少是 1，就可找到 k-(假)寄生蟲數」，也就是說「$\frac{d}{10k-1}\geqq 0.1$，就有 k-(假)寄生蟲數」，化簡得「$d\geqq k-0.1$」，又 9≧d≧1，因此有「9≧d≧k」，所以 k-(假)寄生蟲數有 10－k 種。 □

定理 4 5-寄生蟲數：102040816326530612244897959183673469387755，可以看成 1(02)(04)(08)(16)……，其中數值有倍增現象。

證明：

由定理 1，取 k = 5、d = 5 可得<u>x5</u>$=\frac{5(10^{n+1}-1)}{49}=\frac{5}{49}\times 10^{n+1}-\frac{5}{49}$ 。

則$\frac{5}{49}=\frac{0.1}{1-0.02}=\sum_{k=0}^{\infty}0.1\times(0.02)^k=\sum_{k=0}^{\infty}2^k\times(0.1)^{2k+1}=(0.1)+2\times(0.1)^3+\cdots+2^k\times(0.1)^{2k+1}+\cdots$

= 0.1 ×2, 再退2位
+ 0.002 ×2, 再退2位
+ 0.00004 ×2, 再退2位
+ 0.0000008 ×2, 再退2位
+ 0.000000016 依此類推
+ 0.00000000032
+ 0.0000000000064
+ 0.000000000000128
+ 0.00000000000000256
+ 0.0000000000000000512
+ 0.000000000000000001024
+ 0.00000000000000000002048
+ 0.0000000000000000000004096
+ 0.000000000000000000000008192
+ 0.00000000000000000000000016384
+ 0.0000000000000000000000000032768
+ 0.000000000000000000000000000065536
+ 0.00000000000000000000000000000131072
+ 0.0000000000000000000000000000000262144
+ 0.000000000000000000000000000000000524288
+ 0.00000000000000000000000000000000001048576
+ 0.0000000000000000000000000000000000002097152
+ 0.000000000000000000000000000000000000004194304
+ 0.00000000000000000000000000000000000000008388608
+ 0.0000000000000000000000000000000000000000016777216
+ 0.000000000000000000000000000000000000000000033554432
+ 0.00000000000000000000000000000000000000000000067108864
+ 0.0000000000000000000000000000000000000000000000134217728
+ 0.000000000000000000000000000000000000000000000000268435456
+…
= 0.$\underline{102040816326530612244897959183673469387755}$102040816…

又由計算可知 $n+1$ 是 42 倍數。因此，

$\underline{x5}=\overline{102040816326530612244897959183673469387755}$ ，其中數值有倍增現象。 □

第四節　找出移 m 位的寄生蟲數

原來的寄生蟲數定義是「將一自然數的最後 1 位，向左移至第 1 位，產生的新數就是乘積」，因此可以稱爲「移 1 位的寄生蟲數」。這一節裡我們要推廣此定義，找出「移 m 位的寄生蟲數」。

定理 5

假設n＋m位數$\underline{xd}$ 是「移m位的k-(假)寄生蟲數」，其中x爲n位數，d爲m位數，k是 1 到 9 的自然數。

1.若(d，10^mk－1) =1，而且滿足 $10^m k-1 \mid 10^{n+m}-1$和$\dfrac{d(10^{n+m}-1)}{10^m k-1}$是 n＋m 位數，

則$\underline{xd}=\dfrac{d(10^{n+m}-1)}{10^m k-1}$是移m位的k-(假)寄生蟲數。

2.若(d，10^{m}k－1)≠1，設$\dfrac{d}{10^{m}k-1}$約成最簡分數爲$\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$，

而且滿足a | $10^{n+m}-1$和$\dfrac{\mathrm{b}(10^{n+m}-1)}{\mathrm{a}}$是n＋m位數，則xd＝$\dfrac{\mathrm{b}(10^{n+m}-1)}{\mathrm{a}}$是移m位的k-(假)寄生蟲數。

註：若m≧2，可知d是 2 位以上的數，而k是 1 位數，必有k≠d，因此若xd是移 2 位以上的k-(假)寄生蟲數必是「假寄生蟲數」，不可能有「寄生蟲數」。

證明：參考定理 1，可得證。 □

定理 6

設 d 是 m 位數、k 是 1 到 9 的自然數且$\dfrac{d}{10^{m}k-1}$的小數表示法在小數點後第 1 位的數字至少是 1，則只要計算$\dfrac{d}{10^{m}k-1}$的值，再取該數值循環節的數字(可不只取 1 節)，就是移 m 位 k-(假)寄生蟲數。

證明：參考定理 2，可得證。 □

雖然「移 2 位以上的寄生蟲數」很多，但是利用定理 5，我們可以得出「移 m 位 k-(假)寄生蟲數的個數公式」：

定理 7 (移 m 位 k-(假)寄生蟲數的個數公式)

移 m 位的 k-(假)寄生蟲數恰好有(10－k)×10^{m-1}種。

證明：參考定理 3，可得證。 □

第五節　超寄生蟲數的探討

在這一節我們考慮「自然數左右兩端各有若干位數字互換」的「超寄生蟲數」，得到下面般性的結果：

定理 8

假設l＋n＋m位數cxd 是一個「超寄生蟲數」，其中c爲l位數，x爲n位數，d爲m位數，k是 1 到 9 的自然數。則

1.當l＝m 時，

(1)若k =1，超寄生蟲數cxd必是「cxc」的形式；也就c = d時才有解。

(2)若 k≧2，

①若(d－c，k－1)＝1 且滿足 d＞c、k－1 |$10^{n+m}-1$和$\dfrac{(d-c)(10^{n+m}-1)}{k-1}$是 n＋2m 位數，

則cxd＝$\dfrac{(d-c)(10^{n+m}-1)}{k-1}$是超寄生蟲數。

②若(d－c，k－1)≠1，設$\dfrac{d-c}{k-1}$約成最簡分數爲$\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$，

而且滿足 d＞c、$a\,|\,10^{n+m}-1$和$\dfrac{b(10^{n+m}-1)}{a}$是 n＋2m 位數，

則<u>cxd</u>＝$\dfrac{b(10^{n+m}-1)}{a}$是超寄生蟲數。

2.當$l<$ m時，超寄生蟲數<u>cxd</u>＝$\dfrac{(d-c)10^{n+m}+(c\times10^{m-l}-d)}{10^{m-l}\times k-1}$。

3.當$l>$ m時，超寄生蟲數<u>cxd</u>＝$\dfrac{(c-d)10^{n+l}+(d\times10^{l-m}-c)}{10^{l-m}-k}$。

證明：參考定理 5，可得證。 □

有了定理 8，就可回答書上關於「是否有「超寄生蟲數」，做乘法運算時可以把最左端和最右端兩位對調？」的問題。但是要先說明一個引理：

引理 4

設$t(10^{n+1}-1)$的首位數字為c、末位數字為d，其中t是 1 位數，n是自然數，若要求d－c > 0 且$t(10^{n+1}-1)$是n+2 位數，則有下表的關係：

t	1	2	3	4	5	6 ~ 9
d-c	不合	7	5	3	1	不合

證明：

當t = 1 時，$t(10^{n+1}-1)$ = 99…..9 (有n+1 個 9)，但要求$t(10^{n+1}-1)$是n+2 位數，不合。

當t =2 時，$t(10^{n+1}-1) = 2\times10^{n+1}-2$ = 199....98 (有n個 9)，可得d－c = 8－1 = 7。

同理，可得到 t = 3 ~ 9 的 d－c 值如上表。 □

定理 9

若n＋2 位數<u>cxd</u> 是一個「超寄生蟲數」，即滿足「<u>cxd</u>×k＝<u>dxc</u>」，其中c、d為 1 位數，x為n位數，k是 1 到 9 的自然數。除k =1 有解之外，其餘情形，超寄生蟲數均無解。

證明：

由定理 8，可知：當l＝m 時，

(1)若k =1，超寄生蟲數<u>cxd</u>明顯有「<u>cxc</u>」形式的解。

(2)若k≧2，可得<u>cxd</u>＝$\dfrac{(d-c)(10^{n+1}-1)}{k-1}$，

因<u>cxd</u>＞0、$10^{n+1}-1>0$、k－1＞0，可得d－c＞0。

又 d、c = 1 ~ 9，所以 d－c = 1 ~ 8。

①若k = 2，<u>cxd</u>＝$(d-c)(10^{n+1}-1)$。再由引理 4 可得下表：

d－c	1	2	3	4	5	6 ~ 8
引理 4 的 d－c	不合	7	5	3	1	不合

由上表可知兩個 d－c 值均矛盾，故無解。

②仿上，k = 3 ~ 8 的情形也是無解。 □

伍、研究結果(請參考摘要)

陸、討論與應用

此問題在之前的科展曾經有 2 件作品研究過，我們做了異同之處的比較如下：

一、第 44 屆中小學科展高中組數學科作品「自然數中移位、加倍、循環對之探討」[2]的內容摘要如下：

1.假設「寄生蟲數爲n位自然數 $\underline{x_{n-1}x_{n-2}...x_2x_1}$ 」，和我們的假設「$\underline{xd}$(其中x爲n位數)」不同。這造成在討論時，代數式看起來會很複雜(參考定理 1)。

2.討論 k-(假)寄生蟲數是分別針對「不同的 k 值」計算，並不簡潔。而我們的假設可以得到「所有 k-(假)寄生蟲數的公式」(參考定理 1)。

3.推廣出「前移(或後移)a 位的 k-(假)寄生蟲數會是 $\frac{\text{移的數}}{10^a \cdot k-1}$ 循環小數的循環部份」的結果，但是並未說明如何發現此性質的過程。而我們可以由「移 m 位 k-(假)寄生蟲數的公式」(參考定理 5)直接導出相同的結果(參考定理 6)。

4.報告的附表有列出「所有移 1 位 k-(假)寄生蟲數的表」，但作者似乎沒發現本報告中定理 3 的結果。

二、第 45 屆中小學科展高中組數學科作品「頭尾變變變」[3]的內容摘要如下：

1.假設「寄生蟲數爲 $\underline{tm}$ (其中 t 爲 k 位數)」，和我們的假設類似。可是作者並沒有直接導出「所有寄生蟲數的公式」，居然還是按「不同的 k 值」逐一列表計算(參考定理 1)。

2.推廣討論「移 2 位寄生蟲數的解及個數」，移 3 位以上的情形覺得太複雜未列出。

3.推廣討論「將首位數字向左移至最後一位的寄生蟲數」。

4.在報告第 16 頁提到「寄生蟲數會跟循環節有關的性質」，但未證明(參考第三節)。

5.未列出「所有移 1 位寄生蟲數的表」。

三、寄生蟲數有一個應用是「可以當作一種快速乘法」，因爲寄生蟲數符合「$\underline{xd} \times k = \underline{dx}$」的式子，就表示寄生蟲數的乘法「$\underline{xd} \times k$」，可以用「左移m位」的方式，直接得出乘積爲「$\underline{dx}$」，並不需要直接計算乘法。

四、在[2]的摘要中，有一個圖表示出到下面的猜想，但是不知爲何作者沒有寫出敘述：

猜想 1 [2] (第 1 頁)

已知 2-寄生蟲數：10526315 $\underline{7894736842}$，會滿足下列式子：

$$10526315\ \underline{789473684\boxed{2}} \xrightarrow{\text{變2倍}} \boxed{2}1052631\ \underline{5789473684}$$

移最後1位

就是「若把 2-寄生蟲數的最後 1 位移至首位，所得的數會變成 2-寄生蟲數的 2 倍」。但更神奇的是：

「若把 2-寄生蟲數的最後 2 位移至首位，所得的數會變成 2-寄生蟲數的 4 倍嗎？」答

案是對的，如下所示：

$$10526315\ \underline{78947368\boxed{42}} \xrightarrow{\text{變4倍}} \boxed{42}105263\ \underline{1578947368}$$

移最後2位

還不僅止於此，「若把 2-寄生蟲數的最後 3 位移至首位，所得的數會變成 2-寄生蟲數的 8 倍。」，如下所示：

$$10526315\ \underline{7894736\boxed{842}} \xrightarrow{\text{變8倍}} \boxed{842}10526\ \underline{3157894736}$$

移最後3位

爲什麼這是對的呢？

這個猜想到目前爲止，還未被證明。

柒、參考資料及其他

1.柯利弗德・皮寇弗(Clifford A. Pickover)著；蔡承志、楊台勇譯(民 92)，數字的異想世界，第 80 章寄生蟲數(第 247-248、430-431 頁)；台北市；商周出版社。

2.邱敬愃、陳延誌、劉璁翰、黃中珉(民 93)，「自然數中移位、加倍、循環對之探討」，中華民國第 44 屆中小學科學展覽會—高中組數學科作品說明書。

3.樂智銘、李泓逸、高翊桓、許閔淙(民 94)，「頭尾變變變」，中華民國第 45 屆中小學科學展覽會—高中組數學科作品說明書。

4.余文卿(民 95)，「整數」、「有理數與實數」(第 6-43 頁)，翰林版高中數學教科書。

5.余文卿(民 95)，翰林版高中數學教師手冊(第 72-73 頁)。

6.余文卿(民 95)，翰林版高中數學教學備課用書(第 159 頁)。

7. John Mason, Leone Burton, Kaye Stacey 原著；台北市建國高級中學 49 屆 314 班全體同學合譯(民 87)，數學思考，循環的數字(第 186 頁)；台北市；九章出版社。

【評語】040409

作品說明書 p.22 參考資料中列舉多項前人科展作品。科展是學術研究的一種形式，因此就必須尊重學術研究的倫理：每當科展引用前人科展作品時，有必要列表說明比較兩者有何差異，有哪些新發現等事宜等，不可馬虎！