中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040408

決戰一瞬間~Romsey game 的推廣

學校名稱：國立高雄師範大學附屬高級中學

作者：	指導老師：
高一　林品豪	歐志昌
高一　沈明學	施羿如

關鍵詞：　Ramsey game

摘要

本研究在探討 Ramsey game 所蘊藏的數學原理。探究「一個 m 點之完全圖，若使用 n 種顏色將線條著色，則使其“必能”圍成同色三角形之最小 m 值爲何」。研究發現，隨著完全圖點數的增加，遊戲的玩法蘊含著特定規律與「數學歸納法」的精神。此外，若將使用的“顏色個數”所對應之“完全圖點數”之最小值以數列表示，研究發現數列各項間存在著“遞迴關係式”，並進一步推導出其「一般項」。

然而，若改變遊戲規則，探討「一個 m 個點之完全圖，若使用 n 種顏色，二人可輪流任意使用將線條著色，則使其能夠形成一個完全由異色 n 邊形所組成的 n 值爲何？」。而研究發現可進而發展成一種好玩的新遊戲。

透過此研究發現，遊戲不僅可以解釋生活問題，亦可應用於實際生活上。如：車線規劃、運輸…等，十分有趣。

壹、研究動機與遊戲簡介

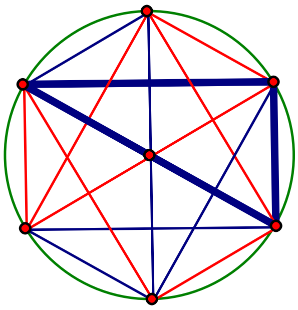
一、研究動機

前一陣子，翻閱了一本伊凡・莫斯科維奇所著的有關生活數學遊戲的書，其中有個「Ramsey game」深深吸引我們的注意。內容談到：假使你邀請你的五位朋友去參加宴會，有沒有辦法避免其中任三人的組合全都相互熟悉或是互不相識呢？令我們好奇的是為何「Ramsey game」會與此生活週遭的問題有密切關係呢？因此，使我們想對 Ramsey game 做更進一步的研究。

二、遊戲簡介

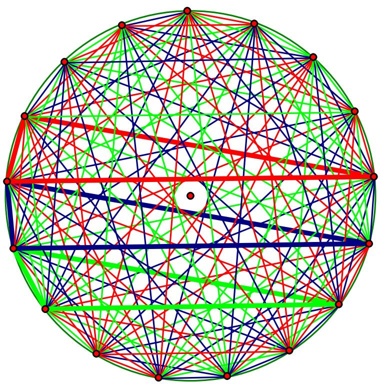
(一)原始 Ramsey game 規則：

1.在一個任意六邊形的 15 條兩點白色連線上，用兩種顏色－紅或藍－來著色。兩位參與者輪流用兩種顏色的其中一種為一條條白線著色。誰先不得不用同一種顏色建立一個三角形，也就是用一種顏色連接圖形的三點，那個人就算輸。



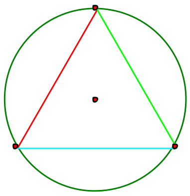
[說明]：六個點之間有二十個不同的三角形。在第十五條線不得不形成一個紅色或藍色三角形之前，最多有十四條線可以著色。不管如何替這個圖形著色，都一定會形成一個同一顏色的三角形，因此兩人不可能平手。

2.在一個任意十七邊形的 136 條兩點白色連線上，有三位參與者各使用三色中的任一色輪流替線條著色，直到其中一位參與者被迫完成一個三邊同色的三角形，就算輸了比賽。



(二)改變遊戲規則：

給定一個 m 個點（$m \in N, m \geq 3$）之完全圖，在一任意三角形的 3 條邊兩點白色連線上，使用三種顏色－藍或紅或綠－來著色。輪流使用“三種”顏色之一爲白線著色，是否將有可能著成一完全由“異色三角形”所組成之完全圖？



貳、研究目的

一、探討在平面上，給定一個 m 個點($m \in N$)之完全圖，若使用 n 種顏色($n \in N$)將它的線條著色，則使其“必能”形成一個同色三角形之最小 m 值爲何？

二、探討在平面上，給定一個 m 個點（$m \in N$）之完全圖，若使用 n 種顏色（$n \in N$），二人可輪流任意使用將它的線條著色，則使其能夠形成一個完全由異色 n 邊形所組成之完全圖的 n 值爲何？

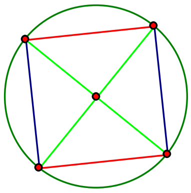
參、研究過程或方法

一、名詞解釋

(一)完全圖：

平面上 m 個點，任三點不共線，且其每一點都和其他點相連的圖形。

例如：下圖爲四個點的完全圖。



(二)同色三角形：

平面上不共線之三點，以同樣的顏色兩兩相連而成之三角形。

(三)異色三角形：

平面上不共線之三點，兩兩分別以不同顏色相連而成（共三色）之三邊皆不同色的三角形。

(四)異色 n 邊形：

平面上不共線之 n 個點，兩兩分別以不同顏色相連而成（共 n 色）之 n 邊皆不同色的 n 邊形。

(五)符號$\lceil \quad \rceil$：$\lceil x \rceil$表大於或等於 x 之最小整數。

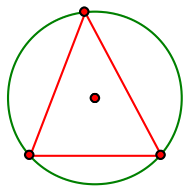
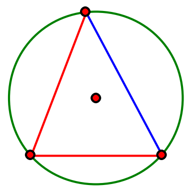
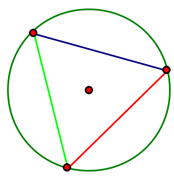
二、探討原始 Ramsey game

(一)原始遊戲規則之討論

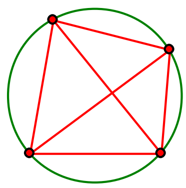
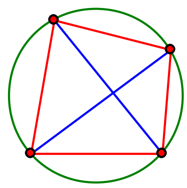
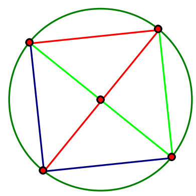
在一個 m 個點（$m \in N$）之完全圖上，有 n 位參與者（$n \in N$），分別使用共 n 種顏色中的任一色輪流替它的線條著色（每人限用同一種顏色），直到其中一位參與者被迫完成一個三邊同色的三角形，就算輸了比

將遊戲中，用 1 色、2 色、3 色替完全圖的線條著色，分別討論如下：

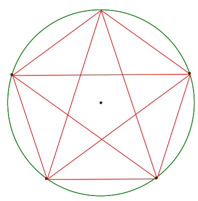
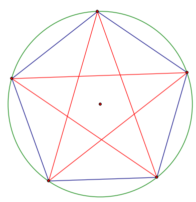
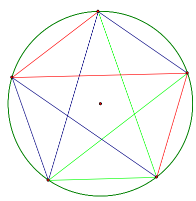
1. 探討 3 個點之完全圖

使用顏色	1 色	2 色	3 色
完全圖			
遊戲結果	必能完成 同色三角形	未必能完成 同色三角形	未必能完成 同色三角形

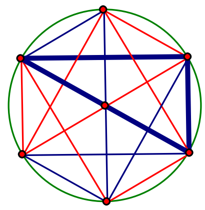
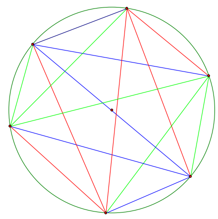
2. 探討 4 個點之完全圖

使用顏色	1 色	2 色	3 色
完全圖			
遊戲結果	必能完成 同色三角形	未必能完成 同色三角形	未必能完成 同色三角形

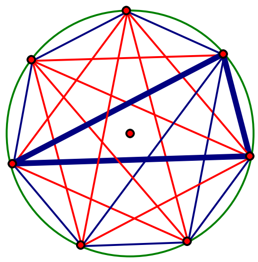
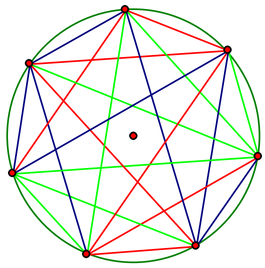
3. 探討 5 個點之完全圖

使用顏色	1 色	2 色	3 色
完全圖			
遊戲結果	必能完成 同色三角形	未必能完成 同色三角形	未必能完成 同色三角形

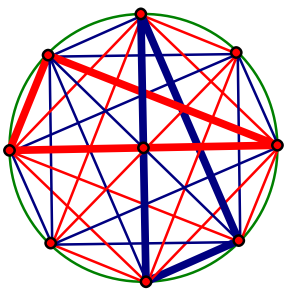
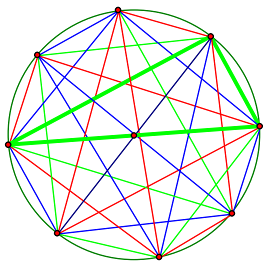
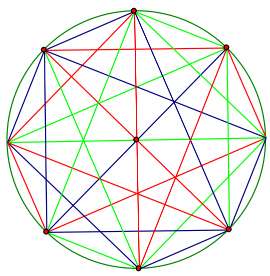
4. 探討 6 個點之完全圖：

使用顏色	2 色	3 色
完全圖		
遊戲結果	必能完成 同色三角形	未必能完成 同色三角形

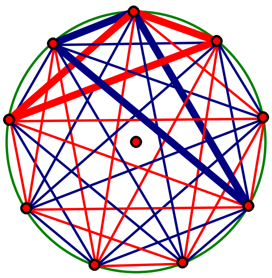
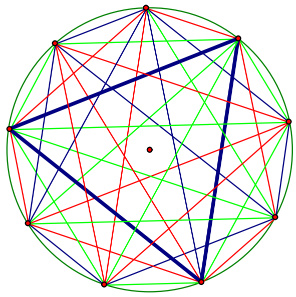
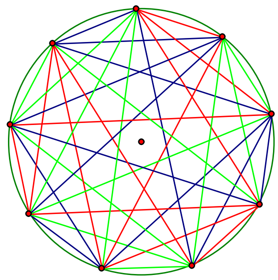
5. 探討 7 個點之完全圖：

使用顏色	2 色	3 色
完全圖		
遊戲結果	必能完成 同色三角形	未必能完成 同色三角形

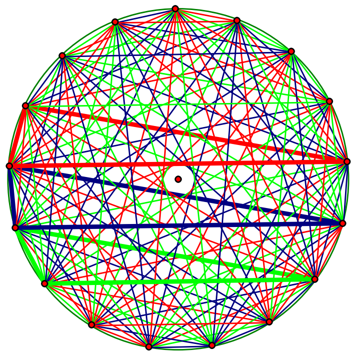
6. 探討 8 個點之完全圖：

<table>
<tr><td>使用
顏色</td><td>2 色</td><td colspan="2">3 色</td></tr>
<tr><td>完全圖</td><td></td><td>
綠色的玩家輸</td><td></td></tr>
<tr><td>遊戲
結果</td><td>必能完成
同色三角形</td><td colspan="2">未必能完成同色三角形</td></tr>
</table>

7. 探討 9 個點之完全圖：

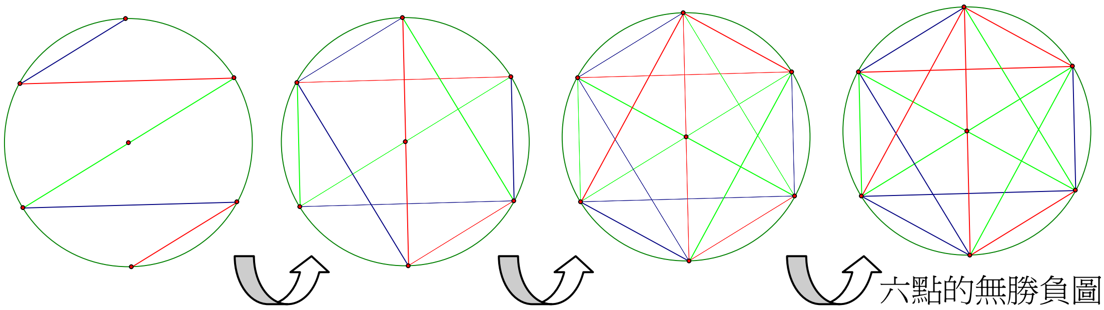
使用顏色	2 色	3 色	
完全圖		 藍色及紅色皆有同色三角形	
遊戲結果	必能完成同色三角形	未必能完成同色三角形	

8. 探討 17 個點之完全圖

使用顏色	3 色
完全圖	
遊戲結果	必能完成同色三角形

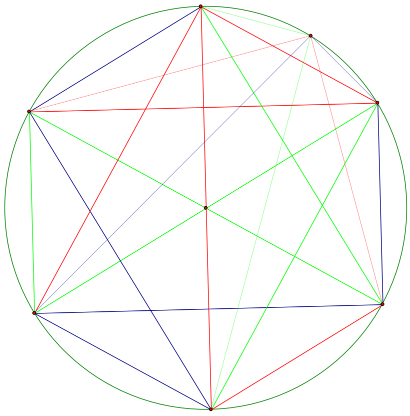
(二) Ramsey game 的玩法

在研究過程中，發現隨著完全圖點數的增加，遊戲的過程欲達到無勝負的情況便越困難。經由多方面嘗試發現，完全圖的著色方式可以利用「Z 字形」的畫法來完成，以避免失敗。例如：下圖是利用 Z 字形，畫出「六點完全圖」無勝負的畫法。

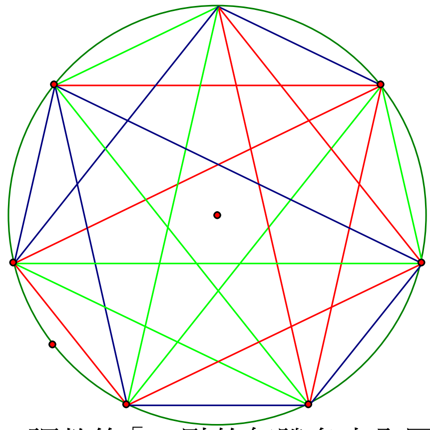


六點的無勝負圖

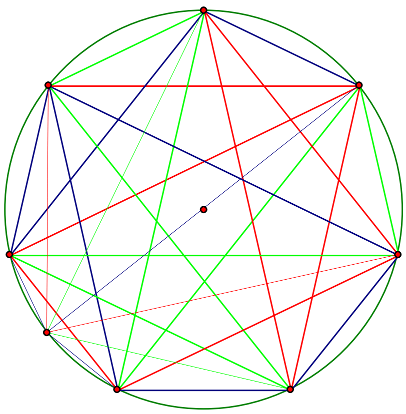
隨著完全圖點數的增加，Z 字形畫法難度亦增加且十分辛苦。因此，我們嘗試著利用「加一點的方式」續畫，似乎容易多了。例如：下圖為將以「六點的無勝負完全圖」為基礎，繼續加一點後，以完成「七點的無勝負完全圖」畫法示範。依此類推，繼續加一點後，逐漸完成「八點、九點、十點的無勝負完全圖」。



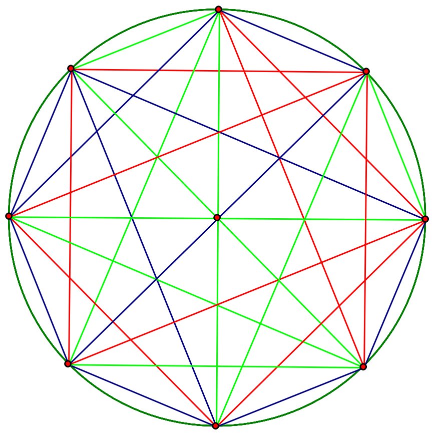
「六點的無勝負完全圖」加一點



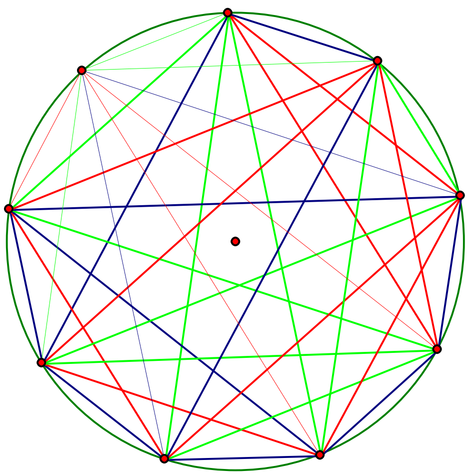
調整後「七點的無勝負完全圖」



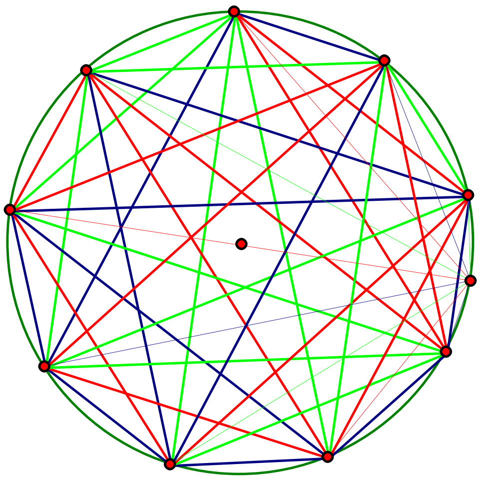
「七點的無勝負完全圖」加一點



調整後「八點的無勝負完全圖」



虛線為八點變九點所加的線



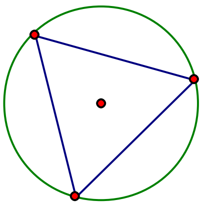
虛線為九點變十點所加的線

依此類推，高點數的完全圖亦可利用此方式完成無勝負的情況。由於高點數完全圖的線條數越多，導致牽制愈多。所以基本上我們還是偶爾會掉換一下顏色，但掉換顏色也是有規律的，例如：直接跳下一條、換另一邊。不過若遇到十分難解時，我們會選擇先找出哪條線可以著什麼色或不能著什麼色，一律先審慎評估，再著色。其中，這著色過程也蘊含著「數學歸納法」的精神。

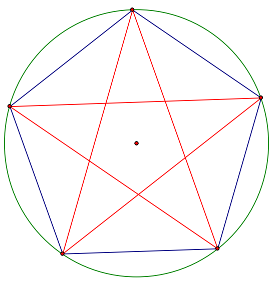
(三)探討 m 點完全圖必能圍成同色三角形之最小 m 值

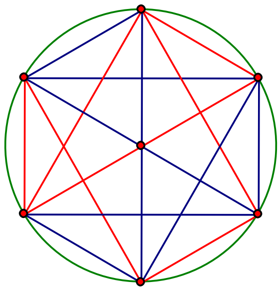
在上述討論中發現：若使用 1 種顏色將完全圖的線條著色，則至少需要 3 個點之完全圖，方必能形成一個同色三角形。若使用 2 種不同顏色將完全圖的線條著色，則至少需要 6 個點之完全圖，方必能形成一個同色三角形。若使用 3 種不同顏色將完全圖的線條著色，則至少需要 17 個點之完全圖，方必能形成一個同色三角形。至於若使用 4 種以上不同顏色，欲將完全圖的線條著色，使其必能形成一個同色三角形，至少需要之完全圖點數 m 爲多少？由於圖形過於複雜，因此進一步探討隱藏於背後的規則性。

1.若使用 1 **種顏色**將完全圖的線條著色，十分明顯地，至少需要 3 **個點之完全圖**，方必能形成一個同色三角形。



2.若使用 2 **種不同顏色**將完全圖的線條著色，使其必能形成一個同色三角形。由於 5 個點之完全圖未必能形成同色三角形（如下圖）因此，至少需要 6 **個點之完全圖**。以下將藉由「鴿籠原理」來證明之。





[定理一] 鴿籠原理

設有 n 隻鴿子棲息在 m 個鴿籠裡，其中 n＞m，則必有一個鴿籠至少棲息$\left\lceil \dfrac{n}{m} \right\rceil$ 隻鴿子（其中$\lceil x \rceil$表大於或等於 x 之最小整數）。

[證明] 反證法

設每一個鴿籠至多住（$\left\lceil \dfrac{n}{m} \right\rceil-1$）隻鴿子，

則 m 個鴿籠最多住（$\left\lceil \dfrac{n}{m} \right\rceil-1$）×m 隻鴿子。

①若 $m|n$ ，則設 $n=mk,k\in Z$

$$\therefore \left(\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil-1\right)m=(k-1)m=mk-n=n-m<n \text{隻鴿子} \rightarrow\leftarrow$$

②若 $m\nmid n$ ，則設 $n=mk+r,k\in Z,0<r<m$

$$\therefore \left(\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil-1\right)m=\left[(k+1)-1\right]m=km=n-r<n \text{ 隻鴿子} \rightarrow\leftarrow$$

由①②知，假設錯誤，故必有一個鴿籠至少棲息$\left\lceil \dfrac{n}{m} \right\rceil$隻鴿子。

[定理二]

平面上，給定一個 m 個點$(m\geq 6)$之完全圖，若只用兩種顏色將它之線條著色，則必能形成一個同色三角形。

[證明]

在 m 個相異點中$(m\geq 6)$，任取一定點 A_1，

則剩餘 $m-1$ 個點且 $m-1\geq 5$，

在$\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\ldots,\overline{A_1A_{m-1}}$線段上著兩色 C_1,C_2 中的任一色，

$\because m-1\geq 5$，取$\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\ldots,\overline{A_1A_6}$ 5 個線段，

由鴿籠原理知，必至少有 3 條線段著同一色，（$\because \left\lceil \dfrac{5}{2} \right\rceil=3$）

不失其一般性，設$\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}$ 著同一色 C_1，

①若 A_2,A_3,A_4 三點中，有某兩點所連線段亦著此色 C_1，

設$\overline{A_2A_3}$ ，則 $\Delta A_1A_2A_3$ 成一同色三角形。

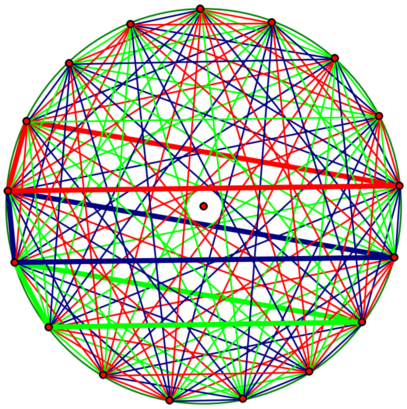
②若A_2,A_3,A_4三點中，任兩點所連線段均非C_1此色，

則$\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_4},\overline{A_2A_4}$必同時著另一色$C_2$，

則$\Delta A_2A_3A_4$成一同色三角形。

由①②知，若用兩種顏色將 m 個點$(m\geq 6)$完全圖之線條著色，必能形成一個同色三角形。

3.若使用 3 **種不同顏色**將完全圖的線條著色，使其必能形成一個同色三角形，至少需要 17 **個點之完全圖**，方必能形成一個同色三角形。。



[定理三]

平面上，給定一個 m 個點$(m\geq 17)$之完全圖，若使用三種顏色將它之線條著色，則必能形成一個同色三角形。

[證明]

在 m 個相異點中$(m\geq 17)$，任取一定點A_1，

則剩餘$m-1$個點且$m-1\geq 16$，

在$\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},...,\overline{A_1A_{16}},\overline{A_1A_{17}}$共 16 個線段上，

使用C_1,C_2,C_3三種顏色之一著色，

由鴿籠原理知，必至少有 6 個線段著上同一色，（$\because \left\lceil \frac{16}{3} \right\rceil = 6$）

不失其一般性，設$\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},...,\overline{A_1A_7}$此 6 線段著上同色$C_1$，

①若 $A_2, A_3, ..., A_7$ 六點中，存在某兩點所連線段亦著此色 C_1，

設為 $\overline{A_2A_3}$，則 $\Delta A_1A_2A_3$ 成一同色三角形。

②反之，若 $A_2, A_3, ..., A_7$ 此六點中，任兩點所連線段皆不為此色 C_1，則必為剩餘兩色 C_2 或 C_3，由定理二知，此六點 $A_2, A_3, ..., A_7$ 之完全圖，使用 C_2、C_3 兩色在線段上著色，必能存在一個同色三角形。

由①②知，若用三種顏色將 m 個點 $(m \geq 17)$ 完全圖之線條著色，必能形成一個同色三角形。

(四)討論 Ramsey game 最小 m 值之規則性：

1.若使用 4 種以上不同顏色，欲將完全圖的線條著色，使其必能形成一個同色三角形，至少需要之完全圖點數 m 為多少？

使用 1 色時，至少需 3 個點之完全圖，設 $a_1 = 3$；
使用 2 色時，至少需 6 個點之完全圖，設 $a_2 = 6$；
使用 3 色時，至少需 17 個點之完全圖，設 $a_3 = 17$；
由定理二與定理三的証明過程發現隱藏其中的規律性，

定理二中，$6-1=5$，$\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$（鴿籠原理）；

因此，$6-1=5$，$5 = 2\times2+1 = (3-1)\times2+1$；$\Rightarrow 6-1=5=(3-1)\times2+1$

故 $a_2 = 6 = (3-1)\times2+2$，即 $a_2 = (a_1-1)\times2+2$。

定理三中，$17-1=16$，$\left\lceil \frac{16}{3} \right\rceil = 6$（鴿籠原理）；

因此，$17-1=16$，$16 = 3\times5+1 = 3\times(6-1)+1$；$\Rightarrow 17-1=16=3\times(6-1)+1$

故 $a_3 = 17 = (6-1)\times3+2$，即 $a_3 = (a_2-1)\times3+2$。

推測 $a_n = (a_{n-1}-1)\times n+2, \forall n \geq 2, a_1 = 3$。所以 $a_4 = (17-1)\times4+2 = 66$。

因此，使用四色時，需至少 66 個點之完全圖。
以下定理四將證明此遞迴關係式成立。

[定理四]

在 Ramsey game 中，若使用 n 種顏色($n\in\mathrm{N}$)將完全圖線條著色，
使其必能形成一個同色三角形之完全圖點數的最小值，設為a_n。
欲證明：$a_1=3$，$a_n=(a_{n-1}-1)\times n+2,\forall n\ge 2$

[證明]

1. 當 n=1 時，因為使用 1 色，至少需 3 點的完全圖，$\therefore a_1=3$。
   當 n=2 時，由定理二知，使用 2 種不同顏色時，至少需 6 點的完全圖，
   $\therefore a_2=6$，又$a_2=6=(3-1)\times 2+2=(a_1-1)\times 2+2$，
   $\therefore n=2$成立。
2. 設 n=k 時成立，即若使用 k 種顏色將完全圖線條著色時，
   至少需a_k點之完全圖，才必能形成一同色三角形；
   則 n=k+1 時，設若使用 k+1 種顏色將完全圖線條著色時，
   至少需a_{k+1}點之完全圖，才必能形成一同色三角形。
   在a_{k+1}個相異點中任取一定點A_1，則剩餘$a_{k+1}-1$個點。
   由A_1連取其他$a_{k+1}-1$個點，$\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\ldots,\overline{A_1A_{a_{k+1}-1}},\overline{A_1A_{a_{k+1}}}$，
   共$a_{k+1}-1$個線段，使用 k+1 種顏色$C_1,C_2,\ldots,C_{k+1}$之任一色將其著色。
   由鴿籠原理知，必至少有$\left\lceil\dfrac{a_{k+1}-1}{k+1}\right\rceil$個線段上著上同一色。
   設$\left\lceil\dfrac{a_{k+1}-1}{k+1}\right\rceil=a_k$，$\because a_{k+1}-1\in\mathrm{N}$，且$a_k\in\mathrm{N}$
   $\therefore$取$\dfrac{a_{k+1}-1}{k+1}$之最小值 $=(a_k-1)+\dfrac{1}{k+1}$
   ($\because\dfrac{1}{k+1}>0\ \therefore\left\lceil(a_k-1+\dfrac{1}{k+1})\right\rceil=a_k$，其中$\lceil\ \rceil$表示無條件進位)
   兩邊同乘 (k+1) $\Rightarrow$ $a_{k+1}-1=(a_k-1)(k+1)+1$
   $\therefore a_{k+1}=(a_k-1)(k+1)+1$
   不失一般性，設$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2},\overline{A_1A_3},\ldots,\overline{A_1A_{a_k}},\overline{A_1A_{a_k+1}}$此$a_k$線段著上同一色$C_1$；

①若$A_2,A_3,\ldots,A_{a_k+1}$在此a_k點中，存在某兩點所連線段亦著此色C_1，

設為$\overline{A_2A_3}$，則$\Delta\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$呈一同色三角形。

②反之，若$A_2,A_3,\ldots,A_{a_k+1}$此a_k點中，任兩點所連線段皆不為C_1此色，

則必剩餘 k 色；此a_k點$A_2,A_3,\ldots,A_{a_k+1}$所形成之完全圖，使用 k 色，

在線段上著色，由 n=k 知，必能存在一個三邊同色之三角形。

由①②知，若使用 k+1 種顏色，至少需a_{k+1}點之完全圖，才必能形成一同色三角形，其中$a_{k+1}=(a_k-1)(k+1)+2$。

3.由數學歸納法知，$a_1=3$, $a_n=(a_{n-1}-1)\times n+2, \forall n\ge 2$恆成立。

(五)找出 Ramsey game 完全圖點數之最小值的“一般項”

遊戲中，若使用n種顏色（$n\in N$）將完全圖的線條著色，使其必能形成一個同色三角形之完全圖點數的最小值，設爲a_n，則

$a_1=3$，$a_n=\left(a_{n-1}-1\right)\times n+2$，$\forall n\ge 2$，欲進一步找出$a_n$的一般項。

$$由\begin{cases} a_1=3 \\ a_n=n\left(a_{n-1}-1\right)+2=na_{n-1}-\left(n-2\right), \forall n\ge 2 \end{cases}$$

$$a_1=3,$$

$$a_2=2a_1-\left(2-2\right)=6$$

$$a_3=3a_2-1=3\left(2a_1-0\right)-1=3!a_1-1=3!a_1-\frac{3!1!}{3!0!}=17$$

$$a_4=4a_3-2=4\left[3!a_1-1\right]-2=4!a_1-4\times 1-2=4!a_1-\frac{4!1!}{3!0!}-2=66$$

$$a_5=5a_4-3=5\left[4!a_1-\frac{4!1!}{3!0!}-2\right]-3=5!a_1-\frac{5!1!}{3!0!}-5\times 2-3=5!a_1-\frac{5!1!}{3!0!}-\frac{5!2!}{4!1!}-\frac{5!3!}{5!2!}$$

$$a_6=6a_5-4=6\left[5!a_1-\frac{5!1!}{3!0!}-\frac{5!2!}{4!1!}-3\right]-4=6!a_1-\frac{6!1!}{3!0!}-\frac{6!2!}{4!1!}-\frac{6}{5}$$

$$a_7=7a_6-5=7!a_1-\frac{7!1!}{3!0!}-\frac{7!2!}{4!1!}-\frac{7!3!}{5!2!}-\frac{7!4!}{6!3!}-\frac{7!5!}{7!4!}$$

$$a_8=8a_7-6=8!a_1-\frac{8!1!}{3!0!}-\frac{8!2!}{4!1!}-\frac{8!3!}{5!2!}-\frac{8!4!}{6!3!}-\frac{8!5!}{7!4!}-\frac{8!6!}{8!5!}$$

推出

$a_1=3, a_2=6$ 且 $a_n=n!a_1-\sum_{t=1}^{n-2}\frac{n!t!}{\left(t+2\right)!\left(t-1\right)!}, \forall n\ge 3$。

以下將利用「數學歸納法」證明之。

[定理五]

已知$a_1=3,a_2=6$，$a_n=na_{n-1}-(n-2)$，

試証：$\forall n\in N$ 且 $n\geq 3$，$a_n=n!a_1-\sum_{t=1}^{n-2}\frac{n!t!}{(t+2)!(t-1)!}$

[證明]

1.當 n=3 時，$a_3=3a_2-(3-2)=3\times 6-1=17$，

而$a_3=3!a_1-\frac{3!1!}{3!0!}=3!\times 3-\frac{3!1!}{3!0!}=17$ $\quad\therefore n=3$成立

2.設$n=k$時，即$a_k=3\times k!-\sum_{t=1}^{k-2}\frac{k!t!}{(t+2)!(t-1)!}$成立。

則$n=k+1$時，$a_{k+1}=(k+1)a_k-[(k+1)-2]$

$$=(k+1)\left[3(k!)-\sum_{t=1}^{k-2}\frac{k!t!}{(t+2)!(t-1)!}\right]-(k-1)\text{（由}n=k\text{代入）}$$

$$=3(k+1)!-\sum_{t=1}^{k-2}\frac{(k+1)!t!}{(t+2)!(t-1)!}-\frac{(k+1)!(k-1)!}{(k+1)!(k-2)!}$$

$$=3(k+1)!-\sum_{t=1}^{k-2}\frac{(k+1)!t!}{(t+2)!(t-1)!}-\frac{(k+1)!(k-1)!}{[(k-1)+2]![(k-1)-1]!}(\text{當}t=k-1)$$

$$=3(k+1)!-\sum_{t=1}^{(k+1)-2}\frac{(k+1)!t!}{(t+2)!(t-1)!}$$

$\therefore n=k+1$亦成立。

3.由數學歸納法知，$\forall n\in N$ 且 $n\geq 3$，原式均成立。

三、改變遊戲規則

(一)改變遊戲規則之討論

探討在平面上，給定一個 m 個點（$m \in N$）之完全圖，若使用 n 種顏色（$n \in N$），二人可輪流任意使用將它的線條著色，則使其能夠形成一個“完全”由“異色 n 邊形”所組成之完全圖的 n 值爲何？

將遊戲規則中，用 3 色、4 色、5 色、…，替完全圖的線條著色，
分別討論如下：

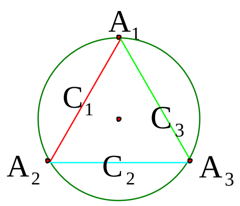
1. 用 3 色替 m 個點之完全圖的線條著色：

給定一個 m 個點（$m \in N, m \geq 3$）之完全圖，在一任意三角形的 3 條邊兩點白色連線上，使用三種顏色－藍或紅或綠－來著色。輪流使用「三種」顏色之一爲白線著色，是否將有可能著成一完全由”異色三角形”所組成之完全圖？

討論如下：

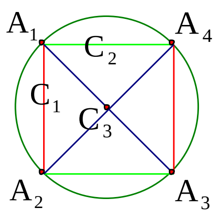
給定一個 m 個點（$m \in N, m \geq 3$）之完全圖，設此 m 個相異點 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ 。

(1)當 m=3 時，$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_1A_3}$ 可各由 C_1, C_2, C_3 組成異色三角形之完全圖。



因此，3 個點之完全圖可以由異色三角形所組成。

(2)當 m=4 時，在 $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}, \ldots\ldots, \overline{A_3A_4}$ 上著三色 C_1, C_2, C_3 。



設 $\overline{A_1A_2}$ 著 C_1 色，$\overline{A_1A_4}$ 著 C_2 色 ，則 $\overline{A_2A_4}$ 著 C_3 色 。

∵要使其完全由異色三角形組成。

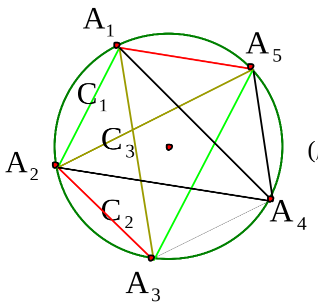
∴ $\overline{A_2A_3}$ 因 $\Delta A_1A_2A_3$ 的關係，不能著 C_1 色；

又因 $\Delta A_2A_3A_4$ 的關係，不能著 C_3 色。

∴ $\overline{A_2A_3}$ 著 C_2 色，故 $\overline{A_3A_4}$ 著 C_1 色。

因此，4 個點之完全圖可以由異色三角形所組成。

(3)當 m=5 時，在 $\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4},...,\overline{A_4A_5}$ 著三色 C_1,C_2,C_3 ，



(虛線爲矛盾的地方)

①承(2)之作法，著出 $A_1A_2A_3A_5$ 此四邊形由異色三角形組成。

而 $\overline{A_3A_4}$ 因爲 $\Delta A_2A_3A_4$ 的關係，不能著 C_2 色；

又因 $\Delta A_3A_4A_5$ 的關係，不能　著 C_1 色。

但又因 $\overline{A_1A_3}$ 著 C_3 色，使 $\overline{A_3A_4}$ 不能著 C_3 色。∴ →←

②同理，$\overline{A_4A_5}$ 因 $\Delta A_1A_4A_5$ 不能著 C_2 色，

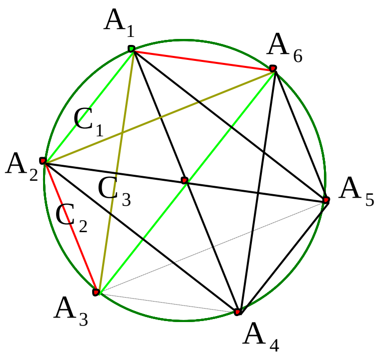
且因 $\Delta A_2A_4A_5$ 不能著 C_3 色，

但因 $A_3A_4A_5$ 的關係，不能著 C_1 色。∴ →←

由①②知，5 個點之完全圖無法由異色三角形所組成。

(4)當 m=6 時，在 $\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}.....\overline{A_5A_6}$ 著三色 C_1,C_2,C_3 ，

同前之作法，發現 6 個點之完全圖無法由異色三角形所組成。



(虛線爲矛盾的地方)

因此，當 m=k 時(k＞4)，m 個點之完全圖無法由異色三角形組成。
然而，完全由異色三角形所組成之完全圖至少需 3 個點，故「3 個點或 4 個點之完全圖可以完全由異色三角形所組成」。

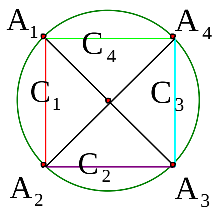
2. 用 4 色替 m 個點之完全圖的線條著色

給定一個 m 個點（$m\in N, m\geq 4$）之完全圖，在一任意四邊形的 4 條邊兩點白色連線上，使用 4 種顏色著色。輪流使用“4 種”顏色之一為白線著色，是否將有可能著成一完全由“異色四邊形”所組成之完全圖？

討論如下：

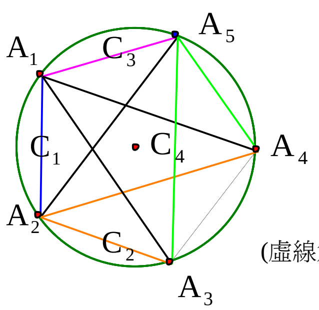
給定一個 m 個點（$m\in N, m\geq 4$）之完全圖，設此 m 個相異點為 $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_m$ 。

(1)當 m=4 時，$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_4},\overline{A_4A_1}$ 可由 C_1,C_2,C_3,C_4 組成異色四邊形之完全圖。



因此，4 個點之完全圖可以由異色四邊形所組成。

(2)當 m=5 時，在 $\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4},\ldots,\overline{A_4A_5}$ 著四色 C_1,C_2,C_3,C_4



(虛線為矛盾的地方)

①設 $\overline{A_1A_2}$ 著 C_1 色，$\overline{A_2A_4}$ 著 C_2 色，$\overline{A_4A_5}$ 著 C_4 色，$\overline{A_1A_5}$ 著 C_3 色，則四邊形 $A_1A_2A_4A_5$ 為一由異色所組成的四邊形。

②討論 $A_1A_2A_3A_5$ 此四邊形，

$\overline{A_2A_3}$ 因四邊形 $A_1A_2A_3A_5$ 的關係，只能著 C_2 、C_4 兩色，

又因 $\overline{A_4A_5}$ 著 C_4 色，

所以 $\overline{A_2A_3}$ 只能著 C_2 色，而 $\overline{A_3A_5}$ 只能著 C_4 色。

至此時，其皆為異色四邊形之完全圖。

③但是，在四邊形 $A_1A_3A_4A_5$ 時，

其中 $\overline{A_3A_4}$ 因四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的關係，只能著 C_3、C_4 色，

又因四邊形 $A_1A_3A_4A_5$，不能著 C_3 色，所以只能著 C_4 色。

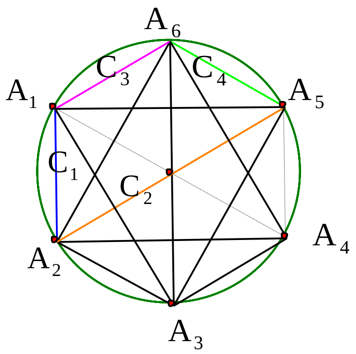
④因此，四邊形 $A_1A_3A_4A_5$ 中的 $\overline{A_3A_4}$ 、 $\overline{A_4A_5}$ 皆著 C_4 色。

$\therefore \rightarrow\leftarrow$

因此，5 個點之完全圖”無法”由異色四邊形所組成。

(3)當 m=6 時，在 $\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}.....\overline{A_5A_6}$ 著四色 C_1,C_2,C_3,C_4，

同上之作法，發現 6 個點之完全圖”無法”由異色四邊形所組成。



(虛線爲矛盾的地方)

因此，當 m=k 時($k>4$)，m 個點之完全圖無法由異色四邊形組成。然而，完全由異色四邊形所組成之完全圖至少需 4 個點，故「4 個點之完全圖可以完全由異色四邊形所組成」。

3.用 5 色替 m 個點之完全圖的線條著色

給定一個 m 個點（ $m \in N, m \geq 5$ ）之完全圖，在一任意五邊形的 5 條邊兩點白色連線上，使用 5 種顏色著色。輪流使用”5 種”顏色之一爲白線著色，是否將有可能著成一完全由”異色五邊形”所組成之完全圖？

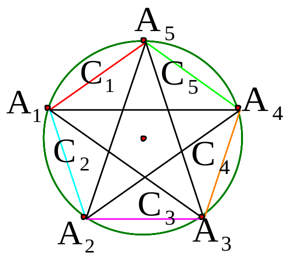
討論如下：

給定一個 m 個點（ $m \in N, m \geq 5$ ）之完全圖，

設此 m 個相異點 $A_1,A_2,A_3,...,A_m$ 。

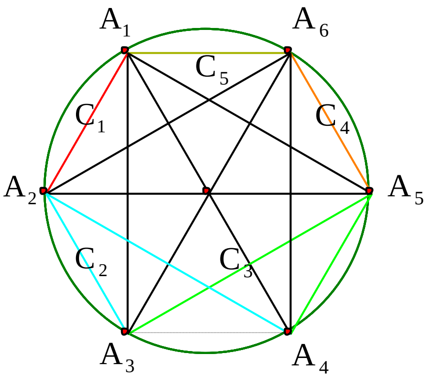
(1)當 m=5 時， $\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_4},\overline{A_4A_5},\overline{A_5A_1}$ 可由 C_1,C_2,C_3,C_4,C_5

組成異色五邊形之完全圖。



因此，5 個點之完全圖可以由異色五邊形所組成。

(2)當m=6時，在 $\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4},\overline{A_5A_6}$ 上著五色 C_1,C_2,C_3,C_4,C_5。



(虛線為矛盾的地方)

①設 $\overline{A_1A_2}$ 著 C_1 色，$\overline{A_2A_3}$ 著 C_2 色，$\overline{A_3A_5}$ 著 C_3 色，$\overline{A_5A_6}$ 著 C_4 色，$\overline{A_6A_1}$ 著 C_5 色，則五邊形 $A_1A_2A_3A_5A_6$ 為一由異色所組成的五邊形。

②討論五邊形 $A_1A_2A_4A_5A_6$，其中 $\overline{A_4A_5}$ 只能著 C_2、C_3 兩色，但因 $\overline{A_1A_3}$ 著 C_2 色，所以只能著 C_3 色，而 $\overline{A_1A_4}$ 也別無選擇的只能著 C_2 色。

③接著討論五邊形 $A_1A_3A_4A_5A_6$，其中的 $\overline{A_3A_4}$ 只能著 C_1、C_2 兩色，但我們發現，不論其著 C_1 或 C_2，皆因 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$ 各著 C_1、C_2 兩色，而使其不成立。

因此，6 個點之完全圖無法完全由異色五邊形所組成。

(3)當 n=7 時，在 $\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}.....\overline{A_6A_7}$ 上著五色 C_1,C_2,C_3,C_4,C_5 時，同上之作法，發現亦無法完全由異色五邊形所組成。

因此，當 m=k 時($k>5$)，m 個點之完全圖無法完全由異色五邊形組成，然而，完全由異色五邊形所組成之完全圖至少需 5 個點，故「5 個點之完全圖可以完全由異色五邊形所組成」。

(二)找出遊戲 B 的規律性

由上述討論得知：

3 個點或 4 個點之完全圖可以完全由異色三角形所組成；

4 個點之完全圖可以完全由異色四邊形所組成；

5 個點之完全圖可以完全由異色五邊形所組成；

….

發現除了多了「4 個點之完全圖完全由異色三角形所組成」外，其餘皆符合「m 個點之完全圖可以完全由異色 m 邊形所組成，$\forall m \in N, m \geq 3$」之規律性。

[定理六]

m 個點之完全圖可以完全由異色 m 邊形所組成，$\forall m \in N, m \geq 3$。

[證明]

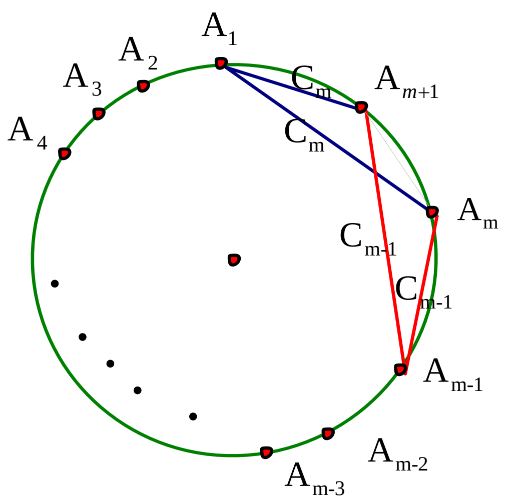
設 m+1 個點之完全圖，能以異色 m 邊形所組成，

1.將 $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$ 色分別著於 $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{m-1}A_m}, \overline{A_mA_1}$ (排除 A_{m+1})，

則討論 m 邊形 $A_1A_2 \ldots\ldots A_{m-1}A_m$ (排除 A_{m+1})和 m 邊形 $A_1A_2 \ldots\ldots A_{m-1}A_{m+1}$ (排除 A_m)這兩個異色 m 邊形，得知 $\overline{A_{m-1}A_{m+1}}, \overline{A_{m+1}A_1}$ 只可使用 C_{m-1}, C_m 兩色。

2.將 C_{m-1}, C_m 兩色分別著於 $\overline{A_{m-1}A_{m+1}}, \overline{A_{m+1}A_1}$，

則形成一個異色 m 邊形 $A_1A_2 \ldots\ldots A_{m-1}A_{m+1}$ (排除 A_m)。



3.但此時，發現 $\overline{A_mA_{m+1}}$ 尚未著色，

若 $\overline{A_mA_{m+1}}$ 著 C_1 色，則 m 邊形 $A_1A_2 \ldots A_mA_{m+1}$ (排除 A_{m-1})之 $\overline{A_1A_2}$ 亦著 C_1 色，故不能組成異色 m 邊形，

若 $\overline{\mathrm{A_m A_{m+1}}}$ 著 C_2 色，則 m 邊形 $\mathrm{A_2A_3 \ldots A_m A_{m+1}}$ (排除 $\mathrm{A_1}$)之 $\overline{\mathrm{A_2A_3}}$ 亦著 C_2 色，故不能組成異色 m 邊形，

……

若 $\overline{\mathrm{A_m A_{m+1}}}$ 著 C_k 色，則 m 邊形 $\mathrm{A_2A_3 \ldots A_m A_{m+1}}$ (排除 $\mathrm{A_1}$)之 $\overline{\mathrm{A_k A_{k+1}}}$ 亦著 C_k 色，故不能組成異色 m 邊形，

……

若 $\overline{\mathrm{A_m A_{m+1}}}$ 著 C_{m-1} 色，則 m 邊形 $\mathrm{A_2A_3 \ldots A_m A_{m+1}}$ (排除 $\mathrm{A_1}$)之 $\overline{\mathrm{A_{m-1}A_m}}$ 亦著 C_{m-1} 色，故不能組成異色 m 邊形，

若 $\overline{\mathrm{A_m A_{m+1}}}$ 著 C_m 色，則 m 邊形 $\mathrm{A_2A_3 \ldots A_m A_{m+1}}$ (排除 $\mathrm{A_{m-1}}$)之 $\overline{\mathrm{A_{m+1}A_1}}$ 亦著 C_m 色，故不能組成異色 m 邊形。

因此，不論 $\overline{\mathrm{A_m A_{m+1}}}$ 著任一 $C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots C_m$ 色皆出現矛盾。

$\therefore$ m+1 個點之完全圖必不能以異色 m 邊形組成。

肆、研究結果與討論

一、 在研究 Ramsey game 過程中，發現隨著完全圖點數的增加，遊戲的過程欲達到無勝負的情況便越困難。經由多方面嘗試發現，完全圖的著色方式可以利用「Z 字形」的畫法，並搭配「加一點的方式」來完成，以避免失敗。然而，這著色過程也蘊含著「數學歸納法」的精神。

二、 在平面上，給定一個 m 個點（ $m \in N$ ）之完全圖，若使用 n 種顏色（ $n \in N$ ）將它的線條著色，使其必能形成一個同色三角形之最小 m 值設為 a_n ，則

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = n\left(a_{n-1} - 1\right) + 2 = na_{n-1} - \left(n-2\right), \forall n \geq 2 \end{cases}$$

，並進一步找出 a_n 的一般項為

$a_1 = 3, a_2 = 6$ 且 $a_n = n!a_1 - \sum_{t=1}^{n-2} \frac{n!t!}{(t+2)!(t-1)!}, \forall n \geq 3$ 。

三、 在平面上，給定一個 m 個點（ $m \in N$ ）之完全圖，若使用 n 種顏色（ $n \in N$ ），二人可輪流任意使用將它的線條著色，則使其能夠形成一個完全由異色 n 邊形所組成之完全圖之研究結論：「m 個點之完全圖可以由異色 m 邊形所組成， $\forall m \in N, m \geq 3$ 」。

伍、結論與應用

一、 結論

(一) 研究發現，Ramsey game 隨著完全圖點數的增加，遊戲的玩法蘊含著特定規律與「數學歸納法」的精神，著色方式可以利用「Z 字形」的畫法，並搭配「加一點的方式」來完成，以避免失敗。此外，若將使用的”顏色個數”所對應之”完全圖點數”以數列表示，研究發現數列各項間存在著”遞迴關係式”爲 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = n\left(a_{n-1}-1\right)+2 = na_{n-1}-\left(n-2\right), \forall n \geq 2 \end{cases}$，並進一步推導出其一般項爲 $a_n = n!a_1 - \sum_{t=1}^{n-2}\frac{n!t!}{\left(t+2\right)!\left(t-1\right)!}, \forall n \geq 3$ 。

(二) 在平面上，給定一個 m 個點（ $m \in N$ ）之完全圖，若使用 n 種顏色（ $n \in N$ ），使其能夠形成一個完全由異色 n 邊形所組成之完全圖之研究結論：「m 個點之完全圖可以由異色 m 邊形所組成， $\forall m \in N, m \geq 3$ 」。

二、應用

(一)同色三角形

1. 議題討論

若有若干人互相通信，每一個人必須和其他人都互相寫 E-mail，在他們信上討論的有三種不同的話題，每一對筆友只寫一種話題。則至少需要十七個人，方能必有三個人他們所筆談的內容是同一話題。

2. 路線規劃—接駁公車或輕軌的環繞路線設計

由於高雄捷運站都位於較熱鬧的市區，但郊區還是需要公車或輕軌進行外圍地區的短程運輸。假設在市區外圍的環繞路線設置多個站點，民眾可能選擇搭乘接駁公車或輕軌到達他站，但是任兩站間只有固定一種公車或輕軌的交通方式。則當站點總數至少 6 個時，則必會有三個站相互利用同一種交通工具連結運輸。

3. 物資運輸—各城市之間互通有無的運輸

若將各城市比喻成完全圖點數，而有 3 種物資視爲不同顏色在各城市間彼此運輸，並且任兩城市間只運輸一種物資。如果至少有 17 個城市組成商業聯盟，則至少會有三個城市彼此之間所運輸的貨物是相同的。這麼一來，相互連結的作用下，城市間的物流將互通有無，有助於經濟發展。

(二)異色 n 邊形

設計一個新遊戲，如下。

遊戲規則：「在六點的完全圖線條上著色，兩人一起比賽，只有紅、藍、綠三種顏色可以任意選取使用。著色方式為兩人輪流任意選取一色使用。只要有一方無法圍成異色三角形，即是輸家。」

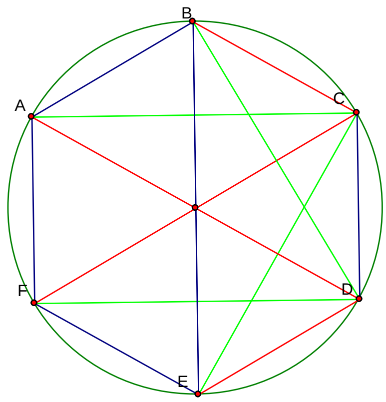
[舉例說明]

現在甲、乙兩人玩遊戲，有紅、藍、綠三種顏色可以任意選取使用。

假設甲、乙輪流著色，依次選色的方式如下：

甲 AB 藍 → 乙 BC 紅 → 甲 AC 綠 → 乙 CD 藍 → 甲 DE 紅 →
乙 BD 綠 → 甲 FE 藍 → 乙 FC 紅 → 甲 CE 綠 → 乙 AF 藍 →
甲 AD 紅 → 乙 FD 綠 → 甲 BE 藍。

此時，乙不論在剩下的幾條線中任一條著上藍色，皆不能產生一異色三角形，所以乙為輸家。



陸、展望

未來可將 Ramsey game 規則中，”著成同色三角形者輸”的條件改成”著成同色四邊形者輸”來進一步研究與討論其所蘊藏的規則性。甚至，再推廣討論至”著成同色 n 邊形者輸”的情況。

柒、參考資料

一、伊凡・莫斯科維奇 原著 李琳 譯生命的遊戲－出人意料的幾何趣題-網格城市 一版 中國 新星出版社 第 12~23 頁及第 99~104 頁 2006/1

二、伊凡・莫斯科維奇 原著 謬靜芬、黃柏瑄 譯 計程車怎麼走比較快？玩具發明家的生活數學遊戲 一版 台灣 究竟出版社 第 24~36 頁 2007/9/26

三、翰林版高一數學第 2-3 章 數學歸納法

四、張鎮華 幸福結局問題——鴿籠原理與拉姆西定理

【評語】040408

1) 本作品的文字、思路及語氣都非常的成熟，超越普通中學生的數學能力。

2) 研究題材屬於組合學，其方法經常應用於解決數學競試中的難題。然而這類難題往往被人們分析為先有答案後有問題的「怪題」，原因在設計是這類問題時是先存在解決方案然後才去尋找問題。此外，此類方法所解決的都是有限集合的「存在性」的問題，而無法提供有效尋找確切答案的計算法則。