中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040407

兩同心圓系重疊形成曲線的研究

學校名稱：國立嘉義高級中學

作者：	指導老師：
高一 江宗翰	李文堂 吳博仁

關鍵詞：　圓、心臟線、腎臟線

兩同心圓系重疊形成曲線的研究

摘要

兩透明片A和B分別印著同心圓系，A的半徑依序為：$l_1,2l_1,3l_1...$ B為 $l_2,2l_2,3l_2...$。當兩透明片重疊時，會形成干涉圖樣，兩圓重疊處，形成加強性干涉，相當於水波槽實驗中波峰和波峰重疊形成腹點。此種干涉圖樣的最大特色為：移動其中的一片透明片，就會形成極大的圖樣變化。

本作品推導出一個四次極座標方程式，這個四次方程式滿足兩透明片重疊時所顯現的所有圖樣。我們證明：

1.**若 $l_1 = l_2$ 則干涉圖形為雙曲線或橢圓。**

2.**若 $l_1 \neq l_2$ 且A和B兩圓心的距離**=0 **時，形成新的同心圓。**

3.**若 $l_1 \neq l_2$ 且A和B兩圓心的距離** $\neq 0$ **時，形成類似心臟線或蚶線，我們證明在離圓心較遠處為蚶線或心臟線。**

兩同心圓系重疊形成曲線的研究

一、研究動機：

上物理課時，老師利用兩透明片演示波的重疊與干涉，讓我們看到不同波長的兩個波源，形成的干涉圖樣，引起我們對這些圖樣做數學式推導的興趣。

二、研究目的：

1.推導不同半徑(波長)的兩同心圓系，重疊形成干涉條紋的數學式。

2.討論上列推導出的數學式代表何種曲線。

3.利用個人電腦模擬繪圖。

三、文獻探討：

1.黃書健：第 29 屆全國科展：同心圓、平行直線重疊形成曲線的研究(註 1)。

2.李文堂：第 137 期科學教育月刊：同心圓、平行線波列干涉的研究(註 2)。

李老師將黃書健的作品，很詳細的加以描述。有關同心圓重疊的部份，依序做出(1)兩等間隔同心圓重疊形成雙曲線或橢圓。(2)兩圓系半徑不等，形成同心圓：心臟線、蚶線。但第(2)部分的數學式，採用太多近似值，不夠完整。

3.陳威任：2003 年台灣國際科學展覽會：一些 Moire pattern 的數學性質研究(註 3)。(1)證明推導出兩印有輻射線的透明片，重疊形成圓系。(2)探討高斯曲線和平行線重疊形成增大曲率的曲線。

4.本件作品：利用極座標寫出兩圓系半徑不等時，重疊形成曲線的方程式…四次方程式，由此方程式推論：不同的半徑及圓心距離，可形成(1)雙曲線(2)橢圓(3)同心圓(4)蚶線(5)心臟線。

四、理論推導：

兩同心圓系的圓心分別位於 A(C，0)，B(-C，0)各產生波長 λ、λ_2 的圓形波在 P 點重疊產生加強性干涉。

(一)

$$r_1 = m_1\lambda_1 (m_1 = 0,1,2\cdots)\cdots(1)$$

$$r_2 = m_2\lambda_2 (m_2 = 0,1,2\cdots)\cdots(2)$$

$$\frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} = m_1 - m_2 = n(n = 0,\pm1,\pm2\cdots)\cdots(3)$$

$$\left(\frac{r_1}{\lambda_1}\right)^2 - 2\frac{r_1 r_2}{\lambda_1\lambda_2} + \left(\frac{r_2}{\lambda_2}\right)^2 = n^2$$

$$\left(\frac{r_1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{\lambda_2}\right)^2 - n^2 = 2\frac{r_1 r_2}{\lambda_1\lambda_2}$$

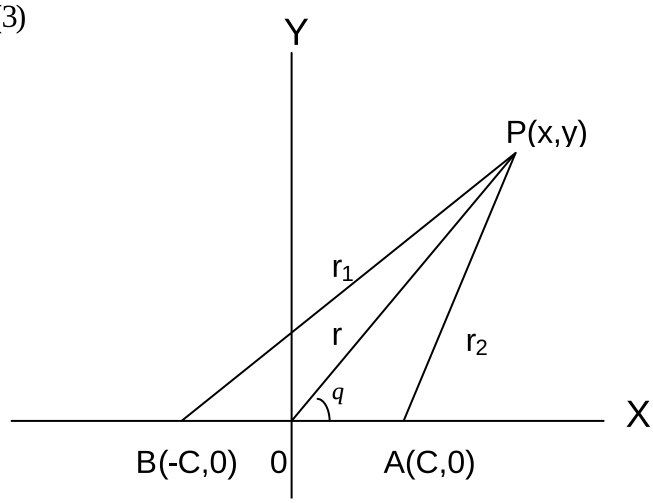
$$\left[\left(\frac{r_1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{\lambda_2}\right)^2 - n^2\right]^2 = 4\left(\frac{r_1 r_2}{\lambda_1\lambda_2}\right)^2\cdots(4)$$

$$r_1^2 = r^2 + c^2 - 2cr\cos(180^\circ - \theta)$$

$$\Rightarrow r_1^2 = r^2 + c^2 + 2cr\cos\theta\cdots(5)$$

$$? \ ? \ r_2^2 = r^2 + c^2 - 2cr\cos\theta\cdots(6)$$

$$(5),(6)? \ ? \ (4)$$



圖一：兩點波源 A、B 各發出波長 λ_2, λ_1 的同心圓形波，P 為波峰和波峰交會的腹點。

$$\left[\left(\frac{r^2 + c^2 + 2cr\cos\theta}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{r^2 + c^2 - 2cr\cos\theta}{\lambda_2}\right)^2 - n^2\right]^2$$

$$= 4\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\right)^2 \left(r^2 + c^2 + 2cr\cos\theta\right)\left(r^2 + c^2 - 2cr\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1^4}\left(r^2 + c^2 + 2cr\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{\lambda_2^4}\left(r^2 + c^2 - 2cr\cos\theta\right)^2 + n^4 + \frac{2}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\left[\left(r^2 + c^2\right)^2 - 4c^2r^2\cos^2\theta\right]$$

$$-\frac{2}{\lambda_1^2}(r^2 + c^2 + 2cr\cos\theta)n^2 - \frac{2}{\lambda_2^2}\left(r^2 + c^2 - 2cr\cos\theta\right)n^2 = \frac{4}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\left[\left(r^2 + c^2\right)^2 - 4cr\cos^2\theta\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{l_1{}^4}\left(\mathrm{r}^4+\mathrm{c}^4+4\mathrm{r}^2\mathrm{c}^2\cos^2 q+2\mathrm{r}^2\mathrm{c}^2+4\mathrm{r}^3\mathrm{c}\cos q+4\mathrm{r}\mathrm{c}^3\cos q\right)\\
&+\frac{1}{l_2{}^4}\left(\mathrm{r}^4+\mathrm{c}^4+4\mathrm{r}^2\mathrm{c}^2\cos^2 q+2\mathrm{r}^2\mathrm{c}^2-4\mathrm{r}^3\mathrm{c}\cos q-4\mathrm{r}\mathrm{c}^3\cos q\right)+\mathrm{n}^4\\
&-\frac{2\mathrm{n}^2}{l_1{}^2}(\mathrm{r}^2+\mathrm{c}^2+2\mathrm{rc}\cos q)-\frac{2\mathrm{n}^2}{l_2{}^2}(\mathrm{r}^2+\mathrm{c}^2-2\mathrm{rc}\cos q)\\
&=\frac{2}{l_1{}^2 l_2{}^2}\left(\mathrm{r}^4+2\mathrm{r}^2\mathrm{c}^2+\mathrm{c}^4-4\mathrm{r}^2\mathrm{c}^2\cos^2 q\right)\\
&\Rightarrow \mathrm{r}^4\left(\frac{1}{l_1{}^4}+\frac{1}{l_2{}^4}-\frac{2}{l_1{}^2 l_2{}^2}\right)+\mathrm{r}^3\left(\frac{4\mathrm{c}}{l_1{}^4}\cos q-\frac{4\mathrm{c}}{l_2{}^4}\cos q\right)\\
&+\mathrm{r}^2\left(\frac{4\mathrm{c}^2}{l_1{}^4}\cos^2 q+\frac{4\mathrm{c}^2}{l_2{}^4}\cos^2 q-\frac{2\mathrm{n}^2}{l_1{}^2}-\frac{2\mathrm{n}^2}{l_2{}^2}+\frac{2\mathrm{c}^2}{l_1{}^4}+\frac{2\mathrm{c}^2}{l_2{}^4}-\frac{4\mathrm{c}^2}{l_1{}^2 l_2{}^2}+\frac{8\mathrm{c}^2}{l_1{}^2 l_2{}^2}\cos^2 q\right)\\
&+\mathrm{r}\left(\frac{4\mathrm{c}^3\cos q}{l_1{}^4}-\frac{4\mathrm{c}^3\cos q}{l_2{}^4}-\frac{4\mathrm{n}^2\mathrm{c}\cos q}{l_1{}^2}+\frac{4\mathrm{n}^2\mathrm{c}\cos q}{l_2{}^2}\right)\\
&+\left(\frac{\mathrm{c}^4}{l_1{}^4}+\frac{\mathrm{c}^4}{l_2{}^4}+\mathrm{n}^4-\frac{2\mathrm{n}^2\mathrm{c}^2}{l_1{}^2}-\frac{2\mathrm{n}^2\mathrm{c}^2}{l_2{}^2}-\frac{2\mathrm{c}^4}{l_1{}^2 l_2{}^2}\right)=0\\
&\Rightarrow \mathrm{r}^4\left(\frac{1}{l_1{}^2}-\frac{1}{l_2{}^2}\right)^2+\mathrm{r}^3\times 4\mathrm{c}\cos q\left(\frac{1}{l_1{}^4}-\frac{1}{l_2{}^4}\right)\\
&+\mathrm{r}^2\left[\left(\frac{1}{l_1{}^4}+\frac{1}{l_2{}^4}\right)\times 4\mathrm{c}^2\cos^2 q-\left(\frac{1}{l_1{}^2}+\frac{1}{l_2{}^2}\right)\times 2\mathrm{n}^2+\left(\frac{1}{l_1{}^4}+\frac{1}{l_2{}^4}\right)\times 2\mathrm{c}^2-\frac{4\mathrm{c}^2}{l_1{}^2 l_2{}^2}\right]\\
&+\mathrm{r}\left[\left(\frac{1}{l_1{}^4}-\frac{1}{l_2{}^4}\right)\times 4\mathrm{c}^3\cos q-\left(\frac{1}{l_1{}^2}-\frac{1}{l_2{}^2}\right)\times 4\mathrm{n}^2\mathrm{c}\cos q\right]\\
&+\left[\left(\frac{1}{l_1{}^4}+\frac{1}{l_2{}^4}\right)\times \mathrm{c}^4-\left(\frac{1}{l_1{}^2}+\frac{1}{l_2{}^2}\right)\times 2\mathrm{n}^2\mathrm{c}^2-\frac{2\mathrm{c}^4}{l_1{}^2 l_2{}^2}+\mathrm{n}^4\right]=0
\end{aligned}
$$

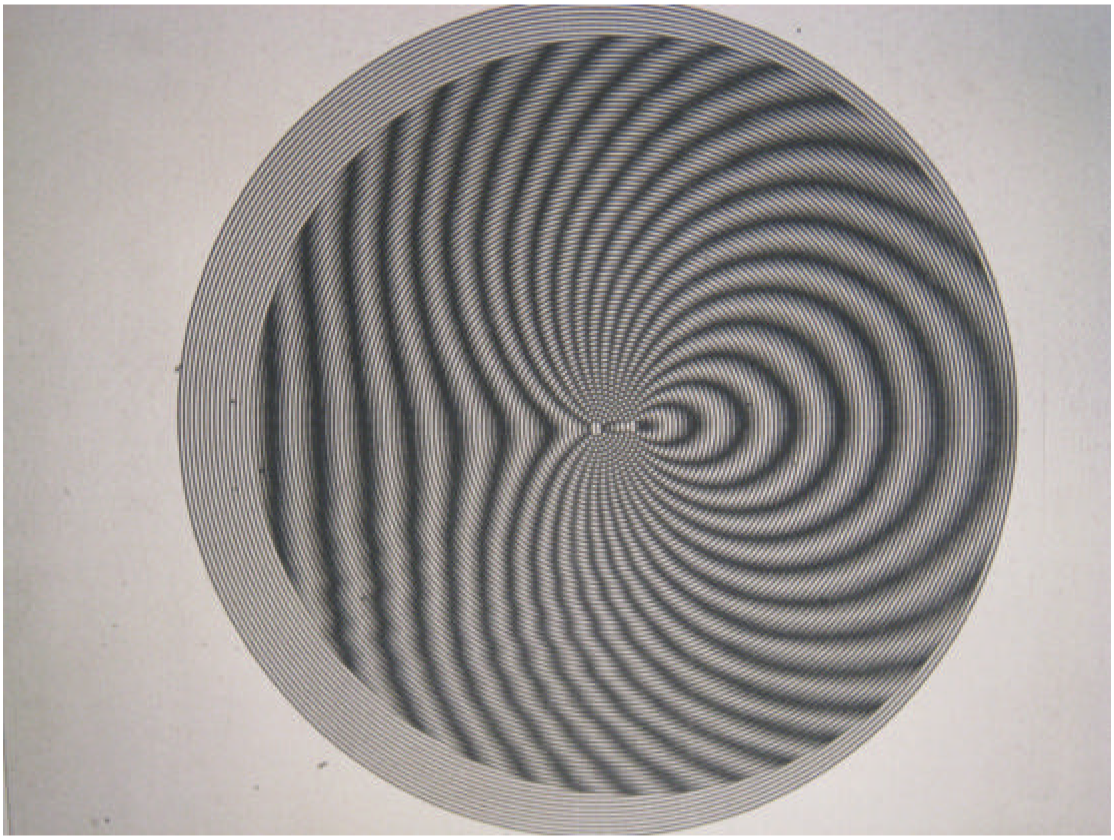
乘以$l_2^{\,4}$

$$\Rightarrow r^4\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}-1\right)^2+r^3\left[4c\cos q\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}-1\right)\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}+1\right)\right]$$

$$+r^2\left[4c^2\cos^2 q\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}+1\right)^2+2c^2\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}-1\right)^2-2n^2 l_2^{\,2}\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}+1\right)\right]$$

$$+r\left[4c^3\cos q\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}+1\right)\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}-1\right)-4n^2 c\, l_2^{\,2}\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}-1\right)\cos q\right]$$

$$+\left[c^4\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}-1\right)^2-2n^2c^2 l_2^{\,2}\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}+1\right)+l_2^{\,4}n^4\right]=0\cdots(7)$$



圖二：公式(7)所代表的圖樣

五、討論

公式(7)此四次方程式為兩不同波長的圓形波，重疊干涉時，腹點(波峰和波峰重疊，即投影片黑紋和黑紋重疊)之圖樣。

(一)**如果** $l = l_1 = l_2$**，這就是高中物理課本，兩同相圓形水波的干涉。**

公式(7)變成

$$r^2\left(16c^2\ \cos^2 q - 4n^2 l^2\right) + \left(n^4 l^4 - 4n^2 c^2 l^2\right) = 0 \cdots (8)$$

(1)A，B **同時發波，同時抵達** Y **軸，因此** Y **軸為腹點線。在** X **軸上距** O **點** $\frac{nl}{2}$ **均為腹點線，**P **為雙曲線之頂點，** $a = \frac{nl}{2}$**，代入**(8)

$$r^2\left(16c^2\ \cos^2 q - 16a^2\right) + \left(16a^4 - 16a^2 c^2\right) = 0$$

? ? $16a^2$

$$\Rightarrow r^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2 q\right) + (c^2 - a^2) = 0 \cdots (9)$$

公式(7)變成公式(9)式中 $c^2 - a^2 = b^2$**，** (9)**式為雙曲線的極座標方程式。**

(9)**式中**

$$r^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2 q\right) + (c^2 - a^2) = 0$$

$$\Rightarrow r^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2 q\right) = a^2 - c^2 = -b^2 < 0$$

$$\therefore 1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2 q < 0 \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} < \cos^2 q < 1\ \therefore a < c \Rightarrow \frac{nl}{2} < c$$

? ? ? ? ? ? ?

(二)

? $l_1 = l_2$? $n > \frac{2c}{l}$? , ? ? ? ?

(8) ? $r^2\left(16c^2\ \cos^2 q - 4n^2 l^2\right) + \left(n^4 l^4 - 4n^2 c^2 l^2\right) = 0$

圖四所示，橢圓的半長軸 P(a,0) $a = \frac{nl}{2}$? ? (8)

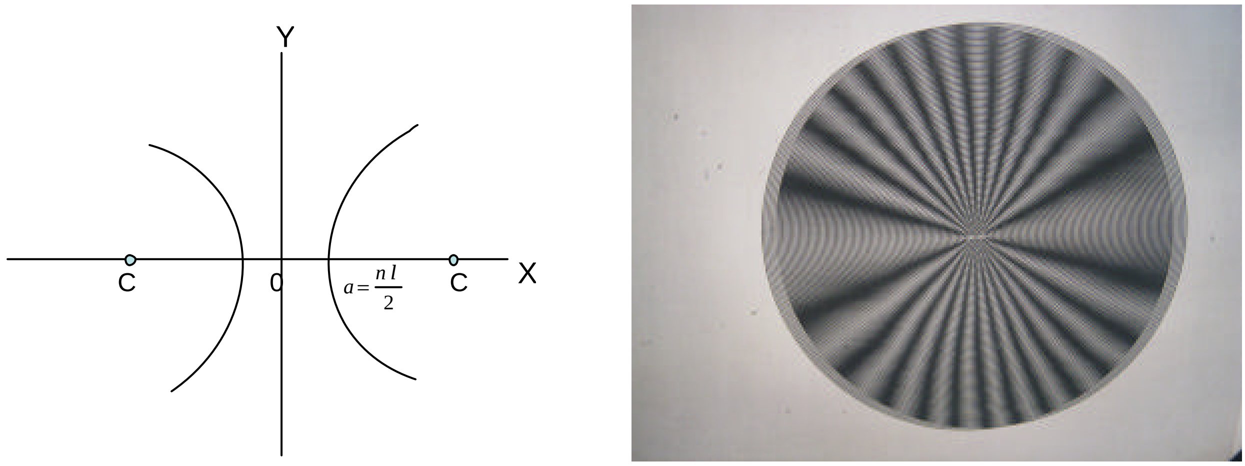
$$r^2\left(16c^2\ \cos^2 q - 16a^2\right) + \left(16a^4 - 16a^2c^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow r^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2 q\right) + (c^2 - a^2) = 0 \cdots (10)\ \ ?\ \ ?\ \ a^2 - c^2 = b^2$$

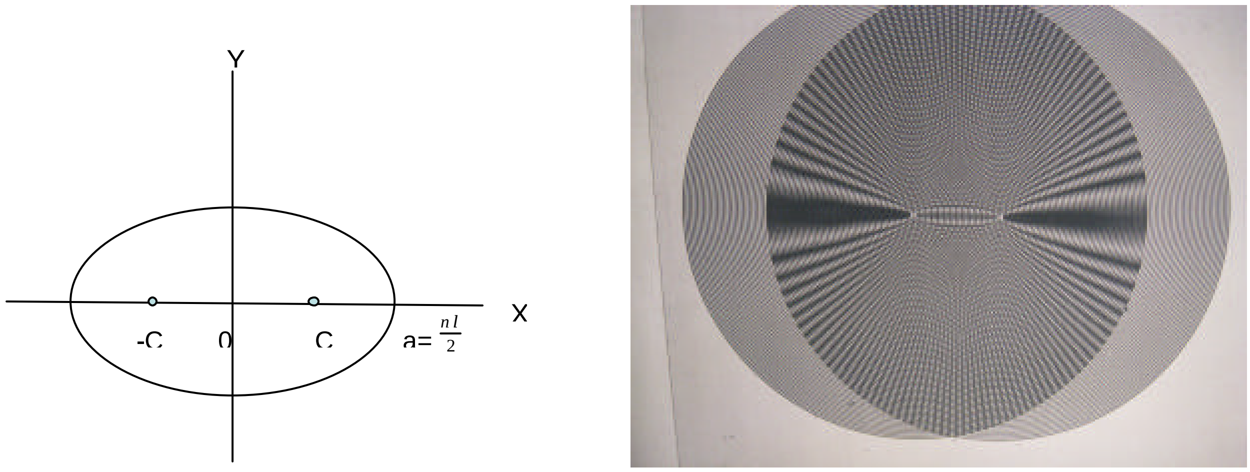
(10) ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?

$$r^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2 q\right) = b^2 > 0$$

$$\therefore 1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2 q > 0 \Rightarrow a^2 > c^2\ \cos^2 q \Rightarrow \frac{n l}{2} > c$$



圖三：雙曲線的干涉圖樣



圖四：橢圓的干涉圖樣

(三)當

$l_1 \neq l_2$, ? $c = 0$, ? ? ? ?

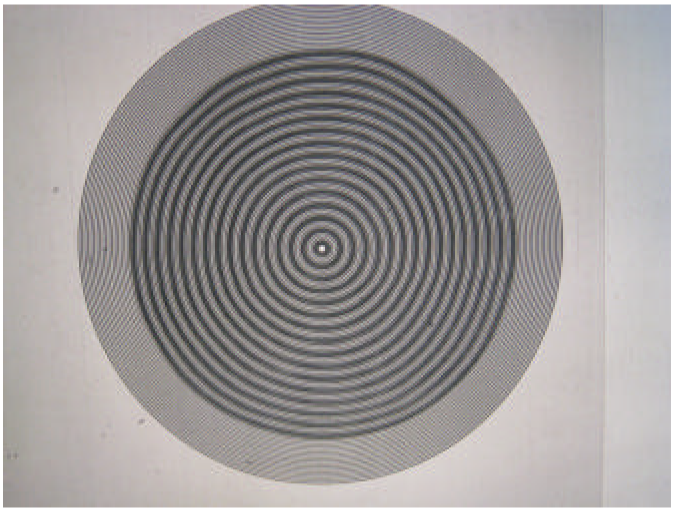
? ? ? ? ? ? ,

(9)? ? ?

$$r^4\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}-1\right)^2 - r^2 \times 2n^2 l^2\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}+1\right) + n^4 l^4 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{n^2 l_2^{\,2}}{\left(\frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}} \pm 1\right)^2} \cdots (11)$$

$$\Rightarrow r = \frac{n l_1 l_2}{l_2 \pm l_1} \cdots (12)$$



圖五：同心圓

此為同心圓之極座標方程式

(四)蚶線的極座標方程式為 $r = 2a\cos\theta + k \cdots (13)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ **，a 為基圓半徑，k 為常數(1)k>2a，蚶線都在基圓外部，(2)k<2a 蚶線通過基點 A，亦通過基圓內部，(3)k=2a，蚶線變成以 A 為歧點之心臟線。**

1.由(13)

$r = 2a\cos\theta + k \Rightarrow r - 2a\cos\theta - k = 0$ **兩邊平方**

$$\Rightarrow r^2 - 2r(2a\cos\theta) + (2a\cos\theta + k)^2 = 0? \ ? \ ?$$

$$\Rightarrow r^4 + 4r^2(2a\cos\theta + k)^2 + (2a\cos\theta + k)^4 - 4r^3(2a\cos\theta + k)$$
$$+ 2r^2(2a\cos\theta + k)^2 - 4r(2a\cos\theta + k)^3 = 0$$

整理得

$$r^4 - 4r^3(2a\cos\theta + k) + 6r^2(2a\cos\theta + k)^2 - 4r(2a\cos\theta + k)^3 + (2a\cos\theta + k)^4 = 0 \cdots (14)$$

2. (7) 式化成

$$r^4(l_2^{\,2} - l_1^{\,2})^2 + r^3\left[4c\cos\theta(l_2^{\,2} - l_1^{\,2})(l_2^{\,2} + l_1^{\,2})\right]$$
$$+ r^2\left[4c^2\cos^2\theta(l_2^{\,2} + l_1^{\,2})^2 + 2c^2(l_2^{\,2} - l_1^{\,2})^2 - 2n^2 l_1^{\,2} l_2^{\,2}(l_2^{\,2} + l_1^{\,2})\right]$$
$$+ r\left[4c^3\cos\theta(l_2^{\,2} + l_1^{\,2})(l_2^{\,2} - l_1^{\,2}) - 4n^2 c\, l_1^{\,2} l_2^{\,2}(l_2^{\,2} - l_1^{\,2})\right]$$
$$+ \left[c^4(l_2^{\,2} - l_1^{\,2})^2 - 2n^2c^2 l_1^{\,2} l_2^{\,2}(l_2^{\,2} + l_1^{\,2}) + n^4 l_1^{\,4} l_2^{\,4}\right] = 0$$

$l_1 \neq l_2$ **再除以** $(l_2^{\,2} - l_1^{\,2})^2$

$$\Rightarrow r^4 + r^3\left(4c\cos\theta\,\frac{\lambda_2{}^2+\lambda_1{}^2}{\lambda_2{}^2-\lambda_1{}^2}\right) + r^2\left[4c^2\cos^2\theta\,\frac{(\lambda_2{}^2+\lambda_1{}^2)^2}{(\lambda_2{}^2-\lambda_1{}^2)^2} + 2c^2 - \frac{2n^2\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2(\lambda_2{}^2+\lambda_1{}^2)}{(\lambda_2{}^2-\lambda_1{}^2)^2}\right]$$

$$+ r\left[4c^3\cos\theta\,\frac{(\lambda_2{}^2+\lambda_1{}^2)}{(\lambda_2{}^2-\lambda_1{}^2)} - \frac{4n^2c\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2}{(\lambda_2{}^2-\lambda_1{}^2)}\cos\theta\right]$$

$$+\left[c^4 - \frac{2n^2c^2\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2(\lambda_2{}^2+\lambda_1{}^2)}{(\lambda_2{}^2-\lambda_1{}^2)^2} + \frac{n^4\lambda_1{}^4\lambda_2{}^4}{(\lambda_2{}^2-\lambda_1{}^2)^2}\right] = 0\cdots(7)'$$

3.(7)'式和(14)式比較係數：

(1)r^3項：

$$-4(2a\cos\theta + k) = 4c\cos\theta\,\frac{(\lambda_2{}^2+\lambda_1{}^2)}{(\lambda_2{}^2-\lambda_1{}^2)}$$

$$\Rightarrow 2a\cos\theta = c\cos\theta\,\frac{(\lambda_2{}^2+\lambda_1{}^2)}{(\lambda_2{}^2-\lambda_1{}^2)} \quad ,\ k = 0$$

$$\Rightarrow ?\ ?\ ?\ ?\ ?\ ?\ ?\ \ 2a = c\,\frac{(\lambda_2{}^2+\lambda_1{}^2)}{(\lambda_2{}^2-\lambda_1{}^2)}$$

(2)其他項則不符

(3)再將心臟線的方程式$r = 2a(1-\cos\theta)$**四次方**$[r-2a(1-\cos\theta)]^4 = 0$

$$r^4 - 8a(1-\cos\theta)r^3 + r^2\times 24a^2(1-\cos\theta)^2 + r\times 32a^3r(1-\cos\theta)^3 + 16a^4(1-\cos\theta)^4 = 0$$

比較 r^3 項：

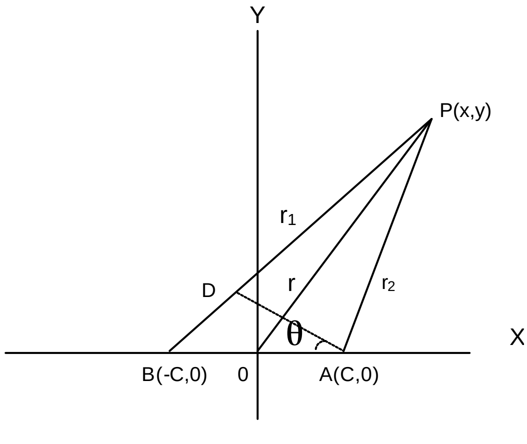
$$8a(1-\cos\theta) = 4c\cos\theta\,\frac{(\lambda_2{}^2+\lambda_1{}^2)}{(\lambda_2{}^2-\lambda_1{}^2)}$$ **顯不合理**

(五)圖六中 P 距 O 點甚遠處 r_1,r_2,r 幾乎平行,

取$\overline{PD}=\overline{PB}$**則**

$$\overline{AD} = r_1 - r_2 \approx \overline{AB}\sin\theta = 2c\sin\theta\cdots(17)$$

由(3)式



圖六：P 點距離圓心甚遠，r_1,r_2,r 幾乎平行

$$\frac{r_1}{l_1}-\frac{r_2}{l_2}=n\quad(n=0,\pm1,\pm2\ldots)$$

$$\Rightarrow r_1=\frac{r_2}{l_2}l_1+nl_1\cdots(18)$$

? (17) ? $r_1=r_2+2c\sin q$? ? (18) ?

$$? \quad r_2+2c\sin q=\frac{r_2}{l_2}l_1+nl_1\Rightarrow r_2=\frac{l_2}{l_{21}-l_2}(2c\sin q-nl_1)\cdots(19)$$

$$????\quad r_1=\frac{l_1}{l_1-l_2}(2c\sin q-nl_1)+nl_1\cdots(20)$$

$$(20)^2-(19)^2\Rightarrow r_1^2-r_2^2=\frac{l_1+l_2}{l_1-l_2}4c^2\sin^2 q-\frac{4cnl_1l_2}{l_1-l_2}\sin q\cdots(21)$$

$$(4)-(3)\Rightarrow r_2^2-r_1^2=4cr\sin q\cdots(22)$$

$$(21),(22)???\ r=\frac{l_1+l_2}{l_1-l_2}c\sin q-\frac{nl_1l_2}{l_1-l_2}\ldots(23)$$

心臟線的極座標方程是為 $r=2a(1-\sin q),\ 0\le q\le 2p$

$\therefore\frac{nl_1l_2}{l_1-l_2}=\frac{l_2+l_1}{l_1-l_2}c$? $\Rightarrow nl_1l_2=c(l_2+l_1)$? , ? ? ? O? ? ? ? ? ? ? ? ?

(六)蚶線的極座標方程是為 $r=2a\sin q-k,\ 0\le q\le 2p$

$$(23)\,r=\frac{l_1+l_2}{l_1-l_2}c\sin q-\frac{nl_1l_2}{l_1-l_2}$$

$\frac{l_1+l_2}{l_1-l_2}c=2a=$**基圓之直徑** $k=\frac{nl_1l_2}{l_1-l_2}$

(i) $k>2a\ \Rightarrow nl_1l_2>(l_1+l_2)c$ **蚶線全部在基圓的外部，如圖七之一所示**

(ii) $k<2a\ \Rightarrow nl_1l_2<(l_1+l_2)c$ **蚶線，如圖七之二所示**

(七)改用 A 點為座標原點, $P'(x,y)$ **為圖樣中的一點，且** $l_1\ne l_2$

$$\overline{AP'}=m_1l_1=r$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=(m_1l)^2\cdots(24)(m_1=1,2,3\cdots)\overline{BP'}=(m_1+n_1)l_2$$

$$\Rightarrow(x-2c)^2+y^2=[(m_1+n_1)l_2]^2\cdots(25)(n_1=1,2,3\cdots)$$

$$?\ (24)m_1=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l_1}\ ?\ ?\ (25)$$

$$x^2 - 4cx + 4c^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l_1} + n_1\right)^2 l_2{}^2 \cdots (26)$$

$$x = r\cos q, \; y = r\sin q ? \;\; ? \;\; (26)$$

$$r^2 - 4cr\cos q + 4c^2 = \left(\frac{r^2}{l_1{}^2} + 2n_1\frac{r}{l_1} + n_1{}^2\right) l_2{}^2$$

$$\Rightarrow r^2\left(1 - \frac{l_2{}^2}{l_1{}^2}\right) - r\left(4c\cos q + \frac{2n_1}{l_1} l_2{}^2\right) + (4c^2 - n_1{}^2 l_2{}^2) = 0 \cdots (27)$$

$$? \;\; 4c^2 - n_1{}^2 l_2{}^2 = 0 \Rightarrow c = \frac{n_1 l_2}{2} (n_1 = 1,2,3\cdots) ?$$

$$r\left(1 - \frac{l_2{}^2}{l_1{}^2}\right) - \left(4c\cos q + \frac{2n_1}{l_1} l_2{}^2\right) = 0$$

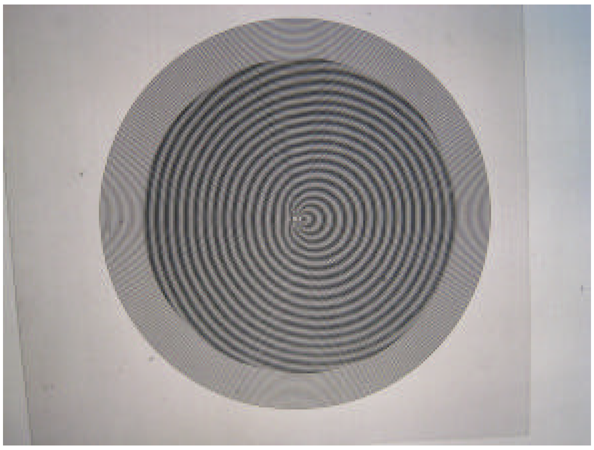
$$\Rightarrow r = \left(\frac{4c\, l_1{}^2}{l_1{}^2 - l_2{}^2}\right)\cos q + \frac{2n_1 l_1 l_2{}^2}{l_1{}^2 - l_2{}^2}$$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{2n_1 l_1{}^2 l_2}{l_1{}^2 - l_2{}^2}\right)\cos q + \frac{2n_1 l_1 l_2{}^2}{l_1{}^2 - l_2{}^2} \cdots (28) \leftarrow ? \; ? \; ? \; ? \; ? \; ? \; ? \; ? \; ? \; ?$$

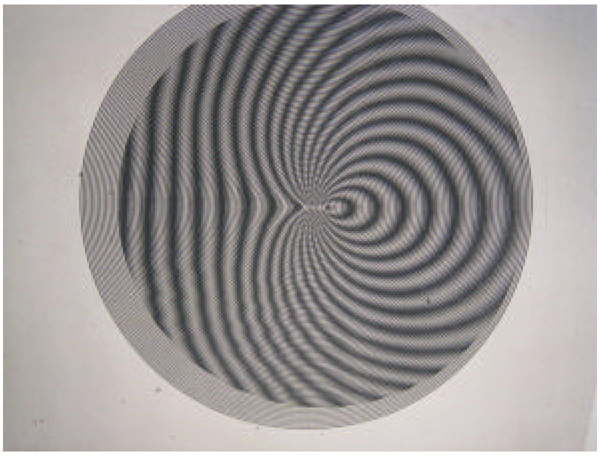
$$r = 2a\cos q + k \qquad r = \frac{2n_1 l_1 l_2}{l_1{}^2 - l_2{}^2}(l_1\cos q + l_2)$$

當兩同心圓系的距離 $c = \frac{n_1 l_1}{2}$ **時，形成以 A 為基點**

基圓半徑 $a = \frac{2n_1 l_1{}^3 l_2}{l_1{}^2 - l_2{}^2}, k = \frac{2n_1 l_1 l_2{}^2}{l_1{}^2 - l_2{}^2}$ **的蚶線。**



圖七之一：蚶線全部在基圓外部



圖七之二：蚶線部份在基圓內部

六、結論：

兩不等波長的同心圓系重疊後形成四次方程式的圖樣，此四次方程式(1)在 $l_1 = l_2$時，會形成雙曲線及橢圓(2) $l_1 \neq l_2$時，但圓心重疊，形成同心圓。(3)在距一波源甚遠處，才會形成蚶線及心臟線。(4)以一圓心為基點，兩圓系的圓心相距半波長，則形成蚶線。

七、參考資料：

1.黃書健，李志宏：同心圓、平行線重疊成曲線的研究。中華民國第二十九屆中小學科學展覽優勝作品專輯(高中組) p.155~p.158 (民國 78 年)。

2.李文堂：同心圓平行線波列干涉的研究，科學教育月刊第 137 期 p.41~p.152 (民國 80 年)

3.陳威任：一些 Moire pattern 的數學性質研究。2003 年國際科學展覽會得獎專輯。(國立台灣科學教育館網站 www.ntsec.gov.tw)

4.趙文敏：心臟線，科學月刊第 21 卷第 5 期。P.373-p.377(民國 79 年)

5.趙文敏：蚶線，科學月刊第 21 卷第 7 期。P.557-p.560(民國 79 年)

6.T.S Stein and L.G. Dishman , " Demonstration of beats as moving interference patterns. " Am. J .phys. Vol. 50 p.136~p.145(1982 Feb.)

【評語】040407

1) 科展是學術研究的一種形式，因此就必須尊重學術研究的倫理：每當科展引用前人科展作品時，有必要列表說明比較兩者有何差異，有哪些新發現等事宜等，不可馬虎！

2) 雙曲線的干涉圖(圖三，作品說明書 p.6)忽略了漸近性質，明顯是錯誤的作圖！