中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040406

平行光反射後形成焦線的研究

學校名稱：國立嘉義高級中學

作者：	指導老師：
高一 吳冠逸	李文堂 吳博仁

關鍵詞： 焦線、旋輪線、腎臟線

作品摘要：

學校的教材中都只提到凹面鏡有焦點，但都沒有提到何種凹面鏡才會匯聚於焦點。但經過本研究後，我們發現其實光射入很多曲面後，除了拋物線外，並不會匯聚在一個焦點而是會匯聚成一條焦線。
本研究藉由數學計算來推導出平行光射入幾種中不同的二次曲線後，形成的焦線之參數式。之後再藉由電腦繪出焦線的圖形，並加以討論。
最後，將之前的推導出的二次曲線的焦線，加以推廣，討論若平行光射入由該二次曲線垂直堆疊所形成的曲柱面後，會匯聚成怎麼樣的曲面。

壹、 研究動機

在一堂物理課中，老師利用投影機照射一個圓柱曲面形的凹面鏡。光居然在鏡子下方匯聚成一個曲線，老師並解釋此曲線稱為「焦線」，我因而對焦線產生了興趣。在老師的一番推波助瀾之下，我開始了這個研究，希望能藉此了解光照射到不同的曲面會匯聚成什麼樣的曲線。

貳、 研究目的

一、了解平行光射入曲面所形成的焦線，算出其參數式。
二、電腦模擬作出其圖形。
三、研究曲線變化時，焦線如何隨之變化。

參、 研究設備與器材

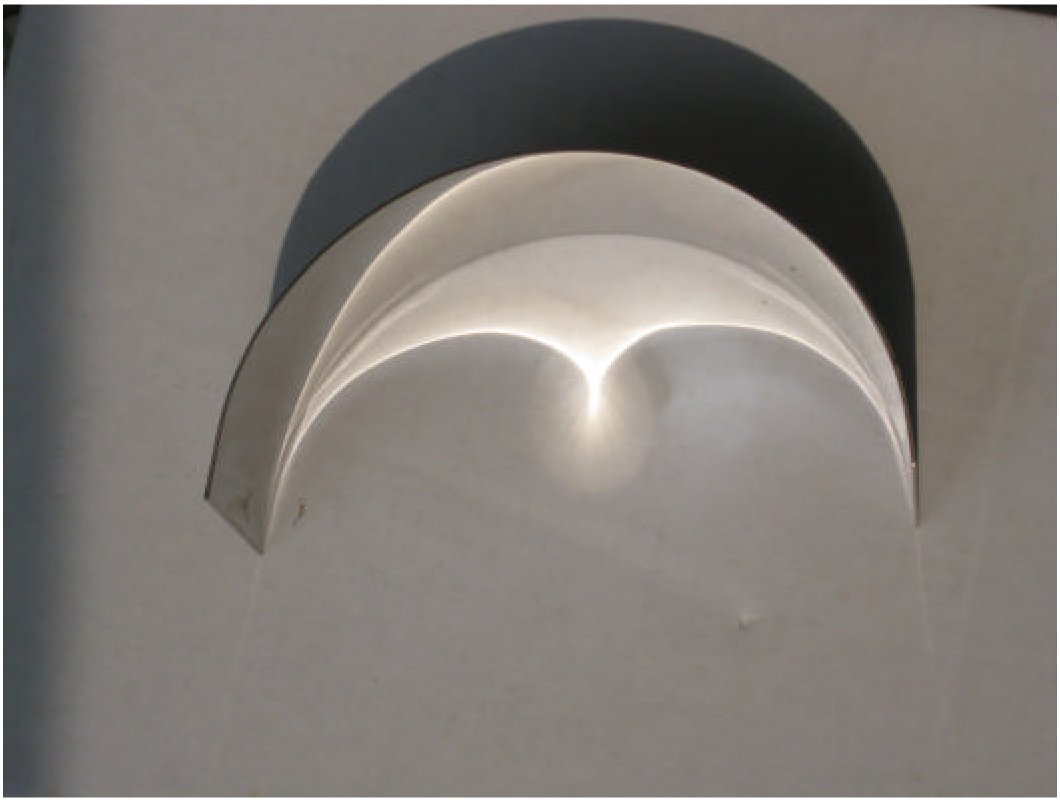
筆、筆記本、計算紙、電腦、MS word、Maple 6、PhotoImpact 12。

肆、 研究過程及方法

一、 焦線的定義：

如果有一個點 A 與一個曲線 L，而所有通過 A 而射向 L 的光線被 L 反射後形成的反射線，假設它們皆與一曲線 C 相切，也就是說它們皆為曲線 C 的切線，則這曲線 C 就是 L 對 A 的焦線。因此這次研究的平行光，即為 A 在無限遠處。

如下圖即為實際光線射入半圓柱面反射所形成的圖形，可發現在曲面下方的紙上有一區域較為明亮，而該區的邊界有一條曲線特別明亮，此線即為焦線。
另外曲面上也有一曲線特別明亮，該為焦線再次經由曲面反射所形成的虛像。


(圖0)

二、 平行光沿 x 軸方向射入形成的焦線

(一) 平行光在半圓上形成的焦線（L 為半圓形）

設圓的參數式為$\begin{cases} x = r\cos q \\ y = r\sin q \end{cases}$，其中參數$q$剛好是圓上該點與原點連線和 x 軸的夾角，因此先以半圓來研究。

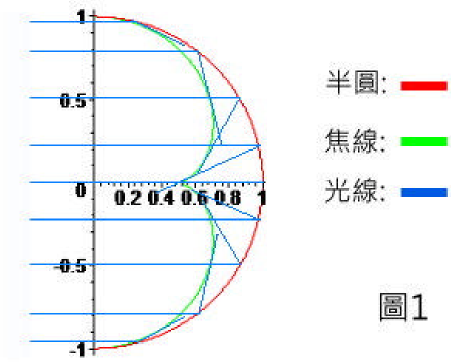


圖1

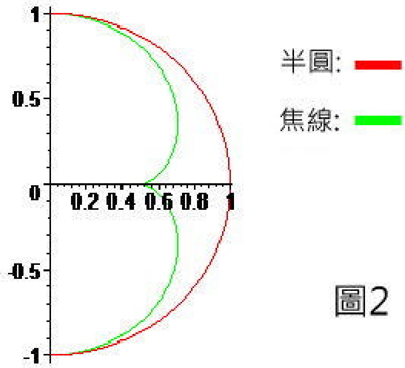


圖2

推導過程：

1. **假設平行光(平行於 x 軸，其單位向量 $\bar{W}$ 為(1,0))射入圓心在原點的單位圓之半圓(如圖 1)，則半圓的參數式為：$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$，$-\frac{p}{2} \le t \le \frac{p}{2}$，t 為該點與圓心的連線與 x 軸的夾角。接著可藉由微分其參數式而得出切線向量 $\bar{T}$ 為 $(-\sin t, \cos t)$。**

2. **由反射定律(入射角=反射角)可知：入射光單位向量 $\bar{W}$ 和反射光單位向量 $\bar{S}$ 皆與圓在入射點的切線向量 $\bar{T}$ 夾相同的角度。設反射光的單位向量 $\bar{S}$ 在 $0 \le t \le \frac{p}{2}$ 時為 $\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$，在 $-\frac{p}{2} \le t \le 0$ 時為 $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$。(請參考下圖 3)**

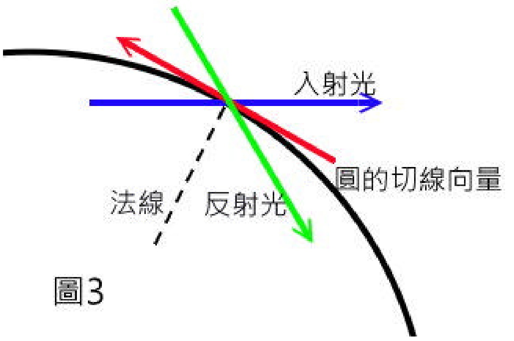


圖3

$\therefore \bar{W} \cdot \bar{T} = \bar{S} \cdot \bar{T}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1,0) \cdot (-\sin t, \cos t) = \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right) \cdot (-\sin t, \cos t)\ 0 \le t \le \frac{p}{2} \\ (1,0) \cdot (-\sin t, \cos t) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \cdot (-\sin t, \cos t)\ -\frac{p}{2} \le t \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sin t = -x \sin t - \sqrt{1-x^2} \cos t,\ 0 \le t \le \frac{p}{2} \\ -\sin t = -x \sin t + \sqrt{1-x^2} \cos t,\ -\frac{p}{2} \le t \le 0 \end{cases}$$

將$-x\sin t$ 移向$\Rightarrow\begin{cases}(x-1)\sin t=-\sqrt{1-x^2}\cos t,\ 0\le t\le\dfrac{p}{2}\\(x-1)\sin t=\sqrt{1-x^2}\cos t,\ -\dfrac{p}{2}\le t\le 0\end{cases}$

將等號兩邊平方$\Rightarrow$ $(x-1)^2\sin^2 t=(1-x^2)\cos^2 t$， $-\dfrac{p}{2}\le t\le\dfrac{p}{2}$

整理後得$(\sin^2 t+\cos^2 t)x^2+(-2\sin^2 t)x+(\sin^2 t-\cos^2 t)=0$

以一元二次方程式的公式解可知：

$$x=\frac{2\sin^2 t\pm\sqrt{4\sin^4 t-4(\sin^4 t-\cos^4 t)}}{2\sin^2 t+2\cos^2 t}$$

$\Rightarrow x=\dfrac{\sin^2 t\pm\cos^2 t}{\sin^2 t+\cos^2 t}$ ， 又$\because$ 反射向量$\neq$入射向量$\Rightarrow x\neq 1$

$\therefore x=\dfrac{\sin^2 t-\cos^2 t}{\sin^2 t+\cos^2 t}=-\cos 2t$ 。

$$\Rightarrow\begin{cases}0\le t\le\dfrac{p}{2}\text{時，}\ y=-\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{1-(-\cos 2t)^2}=-\sqrt{\sin^2 2t}=-\sin 2t\\-\dfrac{p}{2}\le t\le 0\text{時，}\ y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-(-\cos 2t)^2}=\sqrt{\sin^2 2t}=-\sin 2t\end{cases}$$

$\Rightarrow$反射線單位向量為$(-\cos 2t,-\sin 2t)$

3. 設焦線的參數式為：$\begin{cases}x=X(t)\\y=Y(t)\end{cases}$， $-\dfrac{p}{2}\le t\le\dfrac{p}{2}$。

則必滿足下列兩方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{X(t)-\cos t}{-\cos 2t}=\dfrac{Y(t)-\sin t}{-\sin 2t}\because\text{反射線向量必平行於反射線的單位向量}\ldots\ldots(1-1)\\\dfrac{X'(t)}{-\cos 2t}=\dfrac{Y'(t)}{-\sin 2t}\because\text{焦線的切向量平行於反射線向量}\ldots\ldots\ldots\ldots(1-2)\end{cases}$$

$X'(t)$與$Y'(t)$分別為$X(t)$和$Y(t)$對t的導函數

設$g(t)=\dfrac{X(t)-\cos t}{\cos 2t}=\dfrac{Y(t)-\sin t}{\sin 2t}$

則

$$\begin{cases}X(t)=\cos 2t\cdot g(t)+\cos t\\Y(t)=\sin 2t\cdot g(t)+\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X'(t)=-2\sin 2t\cdot g(t)+\cos 2t\cdot g'(t)-\sin t\\Y'(t)=2\cos 2t\cdot g(t)+\sin 2t\cdot g'(t)+\cos t\end{cases}$$

代入(1-2)得：

$$\frac{-2\sin 2t\cdot g(t)+\cos 2t\cdot g'(t)-\sin t}{-\cos 2t}=\frac{2\cos 2t\cdot g(t)+\sin 2t\cdot g'(t)+\cos t}{-\sin 2t}$$

$$\Rightarrow\frac{-2\sin 2t\cdot g(t)+\cos 2t\cdot g'(t)-\sin t}{\cos 2t}=\frac{2\cos 2t\cdot g(t)+\sin 2t\cdot g'(t)+\cos t}{\sin 2t}$$

等號兩邊皆有 1 倍的 $g'(t)$，對消後 $\Rightarrow \dfrac{-2\sin 2t\cdot g(t)-\sin t}{\cos 2t}=\dfrac{2\cos 2t\cdot g(t)+\cos t}{\sin 2t}$

同乘以 $\sin 2t\cos 2t$ 並整理得 $\Rightarrow 2\left(\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)g(t)=-\left(\sin t\sin 2t+\cos t\cos 2t\right)$

$$\Rightarrow g(t)=-\frac{\sin t\sin 2t+\cos t\cos 2t}{2}=-\frac{\cos t}{2}$$

單位圓的焦線參數式為

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\cos t\cos 2t}{2}+\cos t=\cos t\left(-\cos^2 t+\dfrac{3}{2}\right) \\ y=-\dfrac{\cos t\sin 2t}{2}+\sin t=-\sin t\cos^2 t+\sin t=\sin^3 t \end{cases},\ -\frac{p}{2}\le t\le\frac{p}{2}$$

其圖形可參考之前的圖 2。

4. 因為若有個半徑為 r 的圓，則其圖形即為單位圓放大 r 倍，所以其焦線也是放大 r 倍，故其參數式為 $\begin{cases} x=r\left(-\dfrac{\cos t\cos 2t}{2}+\cos t\right)=r\cos t\left(-\cos^2 t+\dfrac{3}{2}\right) \\ y=r\sin^3 t \end{cases}$，$-\dfrac{p}{2}\le t\le\dfrac{p}{2}$。而此線即為腎臟線。

註：腎臟線：假設有一個定圓，若有另一個半徑是該圓的 $\dfrac{1}{n-1}$ 倍的圓在該圓上滾動，則第二個圓的圓周上的一定點在滾動時畫出的軌跡就是一條外擺線。而腎臟線為 n=3 的外擺線。

(二) 平行光在拋物線上形成的焦線（L 為拋物線）

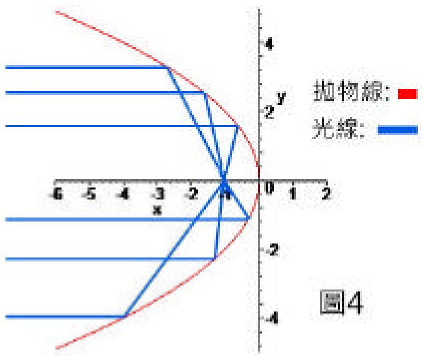


圖4

推導過程：

1. 假設平行光(平行於 x 軸，其單位向量 $\vec{w}$ 為(1,0))射入頂點在原點、開口朝向 x 軸反向的拋物線(如圖 4)，則拋物線的參數式為：$\begin{cases} x=-kt^2 \\ y=t \end{cases}$，其中 $k>0$。接著

可藉由微分其參數式而得出切線向量$\vec{T}$為$(-2kt,1)$。

2. 由反射定律(入射角=反射角)可知：入射光單位向量$\vec{W}$和反射光單位向量$\vec{S}$皆與拋物線在入射點的切線向量$\vec{T}$夾相同的角度。設反射光的單位向量$\vec{S}$在$t \ge 0$時為$\left(x,-\sqrt{1-x^2}\right)$，在$t \le 0$時為$\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$。

$$\therefore \vec{W}\cdot\vec{T}=\vec{S}\cdot\vec{T} \quad \Rightarrow \begin{cases}(1,0)\cdot(-2kt,1)=\left(x,-\sqrt{1-x^2}\right)\cdot(-2kt,1) & t\ge 0\\ (1,0)\cdot(-2kt,1)=\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)\cdot(-2kt,1) & \mathrm{t}\le 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2kt=-2ktx-\sqrt{1-x^2}; & t\ge 0\\ -2kt=-2ktx+\sqrt{1-x^2}; & t\le 0\end{cases}$$

將$-x\sin t$移向$\Rightarrow \begin{cases}(x-1)2kt=-\sqrt{1-x^2}; & t\ge 0\\ (x-1)2kt=\sqrt{1-x^2}; & t\le 0\end{cases}$

將等號兩邊平方$\Rightarrow 4(x-1)^2k^2t^2=\left(1-x^2\right)$(任意 t 皆符合)

整理後得$\Rightarrow \left(4k^2t^2+1\right)x^2+\left(-8k^2t^2\right)x+\left(4k^2t^2-1\right)=0$

以一元二次方程式的公式解可知：

$$x=\frac{8k^2t^2\pm\sqrt{64k^4t^4-4\left(16k^4t^4-1\right)}}{2\left(4k^2t^2+1\right)}$$

$$\Rightarrow x=\frac{4k^2t^2\pm 1}{4k^2t^2+1}$$

又$\because$反射向量$\ne$入射向量$\Rightarrow x\ne 1$

$$\therefore x=\frac{4k^2t^2-1}{4k^2t^2+1}$$ 。

$$\Rightarrow \begin{cases}t\ge 0\text{時，}\ y=-\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{1-\left(\frac{4k^2t^2-1}{4k^2t^2+1}\right)^2}=-\sqrt{\frac{16k^2t^2}{\left(4k^2t^2+1\right)^2}}=-\frac{4kt}{4k^2t^2+1}\\ t\le 0\text{時，}\ y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\left(\frac{4k^2t^2-1}{4k^2t^2+1}\right)^2}=\sqrt{\frac{16k^2t^2}{\left(4k^2t^2+1\right)^2}}=-\frac{4kt}{4k^2t^2+1}\end{cases}$$

$\Rightarrow$反射線單位向量為$\left(\frac{4k^2t^2-1}{4k^2t^2+1},-\frac{4kt}{4k^2t^2+1}\right)$

3. 設焦線的參數式為：$\begin{cases}x=X(t)\\ y=Y(t)\end{cases}$。

則必滿足下列兩方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{X(t)+kt^2}{\dfrac{4k^2t^2-1}{4k^2t^2+1}} = \dfrac{Y(t)-t}{-\dfrac{4kt}{4k^2t^2+1}} \because \textbf{反射線向量必平行於反射線的單位向量}........(2-1) \\ \dfrac{X'(t)}{\dfrac{4k^2t^2-1}{4k^2t^2+1}} = \dfrac{Y'(t)}{-\dfrac{4kt}{4k^2t^2+1}} \because \textbf{焦線的切向量平行於反射線向量}.....................(2-2) \end{cases}$$

$X'(t)$**與**$Y'(t)$**分別為**$X(t)$**和**$Y(t)$**對** t **的導函數**

先化簡第 1 式： $\dfrac{X(t)+kt^2}{\dfrac{4k^2t^2-1}{4k^2t^2+1}} = \dfrac{Y(t)-t}{-\dfrac{4kt}{4k^2t^2+1}} \Rightarrow \dfrac{X(t)+kt^2}{4k^2t^2-1} = \dfrac{Y(t)-t}{-4kt}$

設 $g(t) = \dfrac{X(t)+kt^2}{4k^2t^2-1} = \dfrac{Y(t)-t}{-4kt}$

則 $\begin{cases} X(t) = (4k^2t^2-1)g(t)-kt^2 \\ Y(t) = -4kt\cdot g(t)+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X'(t) = 8k^2t\cdot g(t)+(4k^2t^2-1)\cdot g'(t)-2kt \\ Y'(t) = -4k\cdot g(t)-4kt\cdot g'(t)+1 \end{cases}$

代入(2-2)**得：**

$$\frac{8k^2t\cdot g(t)+(4k^2t^2-1)\cdot g'(t)-2kt}{4k^2t^2-1} = \frac{-4k\cdot g(t)-4kt\cdot g'(t)+1}{-4kt}$$

等號兩邊皆有 1 倍的 $g'(t)$**，對消後** $\Rightarrow \dfrac{8k^2t\cdot g(t)-2kt}{4k^2t^2-1} = \dfrac{-4k\cdot g(t)+1}{-4kt}$

同乘以 $-4kt(4k^2t^2-1)$ **並整理得** $\Rightarrow (-32k^3t^2+16k^3t^2-4k)g(t) = 4k^2t^2-1-8k^2t^2$

$\Rightarrow (-16k^3t^2-4k)g(t) = -1-4k^2t^2$

$\Rightarrow g(t) = \dfrac{-1-4k^2t^2}{-4k-16k^3t^2} = \dfrac{1}{4k}$

拋物線的焦線參數式為 $\begin{cases} x = \dfrac{4k^2t^2-1}{4k}-kt^2 = -\dfrac{1}{4k} \\ y = -t+t = 0 \end{cases}$**，** $k>0$

4. **因此所有反射線皆聚於一點** $\left(-\dfrac{1}{4k},0\right)$**，此即為拋物線的焦點。所以，對拋物線而言，其反射線不會形成焦線而是形成焦點。**

(三) 平行光在半個橢圓上形成的焦線（L 為半個橢圓）

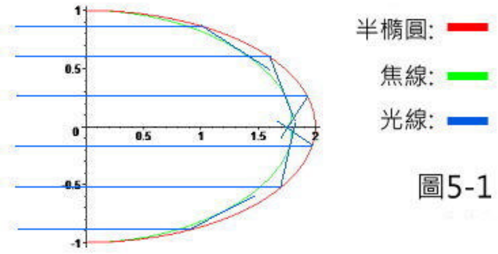


圖5-1

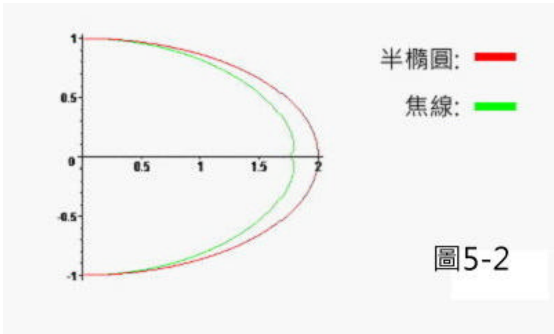


圖5-2

推導過程：

1. **假設平行光(平行於 x 軸)射入半個橢圓(如圖 5-1)，而橢圓的中心為原點且平行於 x 軸的軸長為** 2k (k>0)**，另一軸長為** 2**。則半個橢圓的參數式為：**$\begin{cases} x = k\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$，$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$。**接著可藉由微分其參數式而得出切線向量** $\vec{T}$ **為** $(-k\sin t, \cos t)$，**而入射光的單位向量** $\vec{W}$ **為**(1,0)。

2. **由反射定律(入射角=反射角)可知：入射光單位向量** $\vec{W}$ **和反射光單位向量** $\vec{S}$ **皆與圓在入射點的切線向量** $\vec{T}$ **夾相同的角度。設反射光的單位向量** $\vec{S}$ **在** $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ **時為** $\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$，**在** $-\frac{\pi}{2} \le t \le 0$ **時為** $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$。

$$\therefore \vec{W}\cdot\vec{T} = \vec{S}\cdot\vec{T} \quad \Rightarrow \begin{cases} (1,0)\cdot(-k\sin t, \cos t) = \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)\cdot(-k\sin t, \cos t)\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ (1,0)\cdot(-k\sin t, \cos t) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right)\cdot(-k\sin t, \cos t)\ -\frac{\pi}{2} \le t \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k\sin t = -xk\sin t - \sqrt{1-x^2}\cos t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ -k\sin t = -xk\sin t + \sqrt{1-x^2}\cos t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le 0 \end{cases}$$

將 $-xk\sin t$ **移向** $\Rightarrow \begin{cases} (x-1)k\sin t = -\sqrt{1-x^2}\cos t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ (x-1)k\sin t = \sqrt{1-x^2}\cos t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le 0 \end{cases}$

將等號兩邊平方 $\Rightarrow (x-1)^2 k^2 \sin^2 t = (1-x^2)\cos^2 t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

整理後得 $\Rightarrow \left(k^2\sin^2 t + \cos^2 t\right)x^2 + \left(-2k^2\sin^2 t\right)x + \left(k^2\sin^2 t - \cos^2 t\right) = 0$

以一元二次方程式的公式解可知： $x = \dfrac{2k^2\sin^2 t \pm \sqrt{4k^4\sin^4 t - 4\left(k^4\sin^4 t - \cos^4 t\right)}}{2k^2\sin^2 t + 2\cos^2 t}$

$$\Rightarrow x=\frac{k^2\sin^2 t\pm\cos^2 t}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}\ ,$$

又 $\because$ 反射向量 $\neq$ 入射向量 $\Rightarrow x\neq 1$

$$\therefore x=\frac{k^2\sin^2 t-\cos^2 t}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}\ 。$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0\le t\le\dfrac{p}{2}\text{時，}\ y=-\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{k^2\sin^2 t-\cos^2 t}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}\right)^2}=-\sqrt{\dfrac{4k^2\sin^2 t\cos^2 t}{\left(k^2\sin^2 t+\cos^2 t\right)^2}}=-\dfrac{2k\sin t\cos t}{k^2\sin^2 t+\cos}\\ -\dfrac{p}{2}\le t\le 0\text{時，}\ y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{k^2\sin^2 t-\cos^2 t}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{4k^2\sin^2 t\cos^2 t}{\left(k^2\sin^2 t+\cos^2 t\right)^2}}=-\dfrac{2k\sin t\cos t}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{2k\sin t\cos t}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}=-\frac{k\sin 2t}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}$$

$\Rightarrow$ 反射線單位向量為 $\left(\dfrac{k^2\sin^2 t-\cos^2 t}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t},-\dfrac{k\sin 2t}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}\right)$

$\Rightarrow$ 反射線有一方向向量為 $\left(k^2\sin^2 t-\cos^2 t,-k\sin 2t\right)$

3. 設焦線的參數式為：$\begin{cases}x=X(t)\\ y=Y(t)\end{cases}$，$-\dfrac{p}{2}\le t\le\dfrac{p}{2}$。

則必滿足下列兩方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{X(t)-k\cos t}{k^2\sin^2 t-\cos^2 t}=\dfrac{Y(t)-\sin t}{-k\sin 2t}\ \because\ \text{反射線向量必平行於反射線的單位向量}\ldots(3-1)\\ \dfrac{X'(t)}{k^2\sin^2 t-\cos^2 t}=\dfrac{Y'(t)}{-k\sin 2t}\ \because\ \text{焦線的切向量平行於反射線向量}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3-2)\end{cases}$$

$X'(t)$ 與 $Y'(t)$ 分別為 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 對 t 的導函數

設 $g(t)=\dfrac{X(t)-k\cos t}{k^2\sin^2 t-\cos^2 t}=\dfrac{Y(t)-\sin t}{-k\sin 2t}$

則

$$\begin{cases}X(t)=\left(k^2\sin^2 t-\cos^2 t\right)g(t)+k\cos t\\ Y(t)=-k\sin 2t\cdot g(t)+\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X'(t)=\left(k^2+1\right)\sin 2t\cdot g(t)+\left(k^2\sin^2 t-\cos^2 t\right)g'(t)-k\sin t\\ Y'(t)=-2k\cos 2t\cdot g(t)-k\sin 2t\cdot g'(t)+\cos t\end{cases}$$

代入(3-2)得：

$$\frac{\left(k^2+1\right)\sin 2t\cdot g(t)+\left(k^2\sin^2 t-\cos^2 t\right)g'(t)-k\sin t}{k^2\sin^2 t-\cos^2 t}=\frac{-2k\cos 2t\cdot g(t)-k\sin 2t\cdot g'(t)+\cos t}{-k\sin 2t}$$

等號兩邊皆有 1 倍的 $g'(t)$，對消後 $\dfrac{\left(k^2+1\right)\sin 2t\cdot g(t)-k\sin t}{k^2\sin^2 t-\cos^2 t}=\dfrac{-2k\cos 2t\cdot g(t)+\cos t}{-k\sin 2t}$

同乘以兩邊的分母並整理得 $\Rightarrow 2k\left(k^2\sin^2 t+\cos^2 t\right)g(t)=\cos t\left(k^2\sin^2 t+\cos^2 t\right)$

$$\Rightarrow g(t)=\frac{\cos t}{2k}$$

此橢圓的焦線參數式為

$$\begin{cases} x=\left(k^2\sin^2 t-\cos^2 t\right)\cdot\dfrac{\cos t}{2k}+k\cos t=\cos t\left(\dfrac{k^2\sin^2 t-\cos^2 t}{2k}+k\right) \\ y=-k\sin 2t\cdot\dfrac{\cos t}{2k}+\sin t=-\sin t\cos^2 t+\sin t=\sin^3 t \end{cases},\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$$

其圖形可參考之前的圖 6，圖 6 為 k=2 時。

4. **若要求焦線的橢圓與 x 軸平行之軸長為 2a、與 x 軸平行之軸長為 2b（即方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$）。令 $k=\frac{a}{b}$，則此為之前所求的放大 b 倍，同理焦線也為 b 倍。**

故其參數式為 $\begin{cases} x=b\cos t\left(\dfrac{k^2\sin^2 t-\cos^2 t}{2k}+k\right) \\ y=b\sin^3 t \end{cases},\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\left(\dfrac{a^2}{b}\sin^2 t-b\cos^2 t\right)\cdot\dfrac{b\cos t}{2a}+a\cos t \\ y=b\sin^3 t \end{cases},\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$$

(四) 平行光在雙曲線的左支上形成的焦線（L 為雙曲線的其中左邊那一條）

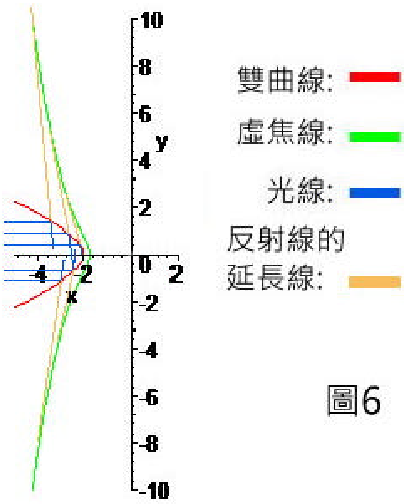


圖6

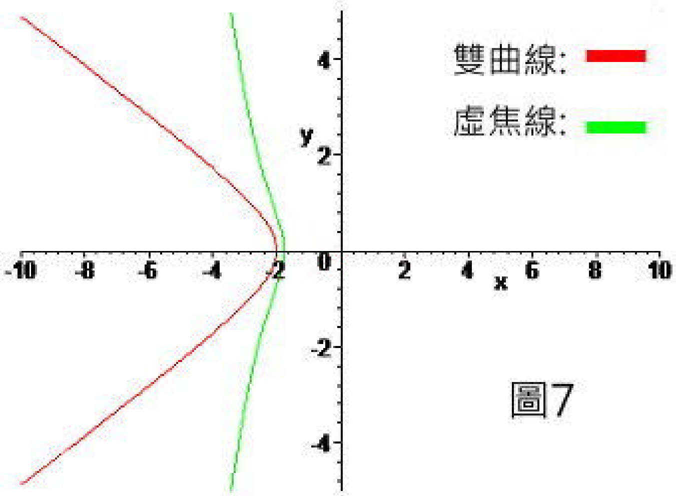


圖7

推導過程：

1. **假設平行光(平行於 x 軸)射入雙曲線的左支(如圖 6), 而雙曲線的中心為原點且平行於 x 軸的軸長為** 2k (k>0)，**另一軸長為** 2。**則雙曲線的左支的參數式為：**$\begin{cases} x = k\sec t \\ y = \tan t \end{cases}$，$\frac{p}{2} < t < \frac{3p}{2}$。**接著可藉由微分其參數式而得出切線向量** $\vec{Q}$ **為** $\left(\frac{k\sin t}{\cos^2 t}, \frac{1}{\cos^2 t}\right)$，**取其同方向向量** $\vec{T} = (k\sin t, 1)$，**而入射光的單位向量** $\vec{W}$ **為** (1,0)。

2. **由反射定律(入射角=反射角)可知：入射光單位向量** $\vec{W}$ **和反射光單位向量** $\vec{S}$

皆與圓在入　射點的切線向量 $\vec{T}$ **夾相同的角度。設反射光的單位向量** $\vec{S}$ **在**

$\frac{p}{2} < t \le p$ **時為** $\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$，　　**在** $p \le t < \frac{3p}{2}$ **時為** $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$。

$$\therefore \vec{W}\cdot\vec{T} = \vec{S}\cdot\vec{T} \quad \Rightarrow \begin{cases} (1,0)\cdot(k\sin t,1) = \left(x,-\sqrt{1-x^2}\right)\cdot(k\sin t,1) & \frac{p}{2} < t \le p \\ (1,0)\cdot(k\sin t,1) = \left(x,\sqrt{1-x^2}\right)\cdot(k\sin t,1) & p \le t < \frac{3p}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k\sin t = k\sin t\cdot x - \sqrt{1-x^2}; & \frac{p}{2} < t \le p \\ k\sin t = k\sin t\cdot x + \sqrt{1-x^2}; & p \le t < \frac{3p}{2} \end{cases}$$

將 $k\sin t\cdot x$ **移向** $\Rightarrow \begin{cases} (x-1)k\sin t = \sqrt{1-x^2}, & \frac{p}{2} < t \le p \\ (x-1)k\sin t = -\sqrt{1-x^2}, & p \le t < \frac{3p}{2} \end{cases}$

將等號兩邊平方 $\Rightarrow (x-1)^2 k^2 \sin^2 t = 1 - x^2$，$\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$

整理後得 $\Rightarrow \left(k^2 \sin^2 t + 1\right)x^2 + \left(-2k^2 \sin^2 t\right)x + \left(k^2 \sin^2 t - 1\right) = 0$

以一元二次方程式的公式解可知：$x = \dfrac{2k^2 \sin^2 t \pm \sqrt{4k^4 \sin^4 t - 4\left(k^4 \sin^4 t - 1\right)}}{2k^2 \sin^2 t + 2}$

$\Rightarrow x = \dfrac{k^2 \sin^2 t \pm 1}{k^2 \sin^2 t + 1}$ ，　又 $\because$ 反射向量 $\neq$ 入射向量 $\Rightarrow x \neq 1$

$\therefore x = \dfrac{k^2 \sin^2 t - 1}{k^2 \sin^2 t + 1}$ 。

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} < t \le \pi \text{時，} y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{k^2 \sin^2 t - 1}{k^2 \sin^2 t + 1}\right)^2} = \sqrt{\frac{4k^2 \sin^2 t}{\left(k^2 \sin^2 t + 1\right)^2}} = \frac{2k \sin t}{k^2 \sin^2 t + 1} \\ \pi < t \le \frac{3\pi}{2} \text{時，} y = -\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1 - \left(\frac{k^2 \sin^2 t - 1}{k^2 \sin^2 t + 1}\right)^2} = -\sqrt{\frac{4k^2 \sin^2 t}{\left(k^2 \sin^2 t + 1\right)^2}} = \frac{2k \sin t}{k^2 \sin^2 t + 1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 反射線單位向量為 $\left(\dfrac{k^2 \sin^2 t - 1}{k^2 \sin^2 t + 1}, \dfrac{2k \sin t}{k^2 \sin^2 t + 1}\right)$

$\Rightarrow$ 反射線有一方向向量為 $\left(k^2 \sin^2 t - 1, 2k \sin t\right)$

3. 設焦線的參數式為：$\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$，$\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$。

則必滿足下列兩方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{X(t) - k\sec t}{k^2 \sin^2 t - 1} = \dfrac{Y(t) - \tan t}{2k \sin t} \because \text{反射線向量必平行於反射線的單位向量.....}(4-1) \\ \dfrac{X'(t)}{k^2 \sin^2 t - 1} = \dfrac{Y'(t)}{2k \sin t} \because \text{焦線的切向量平行於反射線向量..........................}(4-2) \end{cases}$$

$X'(t)$ 與 $Y'(t)$ 分別為 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 對 t 的導函數

設 $g(t) = \dfrac{X(t) - k\sec t}{k^2 \sin^2 t - 1} = \dfrac{Y(t) - \tan t}{2k \sin t}$

則

$$\begin{cases} X(t) = \left(k^2 \sin^2 t - 1\right) g(t) + k\sec t \\ Y(t) = 2k \sin t \cdot g(t) + \tan t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X'(t) = k^2 \sin 2t \cdot g(t) + \left(k^2 \sin^2 t - 1\right) g'(t) + \dfrac{k \sin t}{\cos^2 t} \\ Y'(t) = 2k \cos t \cdot g(t) + 2k \sin t \cdot g'(t) + \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$$

代入(4-2)得：

$$\frac{k^2\sin 2t\cdot g(t)+\left(k^2\sin^2 t-1\right)g'(t)+\dfrac{k\sin t}{\cos^2 t}}{k^2\sin^2 t-1}=\frac{2k\cos t\cdot g(t)+2k\sin t\cdot g'(t)+\dfrac{1}{\cos^2 t}}{2k\sin t}$$

等號兩邊皆有 1 倍的 $g'(t)$，對消後得到

$$\frac{k^2\sin 2t\cdot g(t)+\dfrac{k\sin t}{\cos^2 t}}{k^2\sin^2 t-1}=\frac{2k\cos t\cdot g(t)+\dfrac{1}{\cos^2 t}}{2k\sin t}$$

同乘以兩邊的分母並整理得

$$\Rightarrow k^3\sin t\sin 2t\cdot g(t)+\frac{k^2\sin^2 t}{\cos^2 t}=-2k\cos t\cdot g(t)-\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\Rightarrow 2k\cos t\left(k^2\sin^2 t+1\right)\cdot g(t)=-\frac{k^2\sin^2 t+1}{\cos^2 t}$$

$$\Rightarrow g(t)=\frac{1}{2k\cos^3 t}$$

此雙曲線的左支的焦線參數式為 $\begin{cases}x=\dfrac{k^2\sin^2 t-1}{2k\cos^3 t}+k\sec t\\[2mm] y=\dfrac{\sin t}{\cos^3 t}+\tan t\end{cases}$，$\dfrac{p}{2}<t<\dfrac{3p}{2}$

4. 若要求焦線的雙曲線與 x 軸平行之軸長為 2a、與 x 軸平行之軸長為 2b (即方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$)。令 $k=\dfrac{a}{b}$，則此為之前所求的放大 b 倍，同理焦線也為 b 倍。

故其參數式為 $\begin{cases}x=b\left(\dfrac{k^2\sin^2 t-1}{2k\cos^3 t}+k\sec t\right)\\[2mm] y=b\left(\dfrac{\sin t}{\cos^3 t}+\tan t\right)\end{cases}$，$\dfrac{p}{2}<t<\dfrac{3p}{2}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a^2\sin^2 t-b^2}{2a\cos^3 t}+a\sec t\\[2mm] y=\dfrac{b\sin t}{\cos^3 t}+b\tan t\end{cases},\ \frac{p}{2}<t<\frac{3p}{2}$$

5. 由於形成的焦線並非實際反射光匯聚而成的，而是由反射光的延長線於雙曲線後面形成的，所以此稱為虛焦線。

(五)平形光沿 x 軸向設入旋輪線(又名擺線)而形成的焦線

旋輪線:又名擺線。若一個半徑為 r 的圓在 x 軸上滾動，則圓周上的一定點在滾動時畫出的軌跡就是一條旋輪線。$\begin{cases}x=r(1+\cos t)\\ y=r(t+\sin t)\end{cases}$

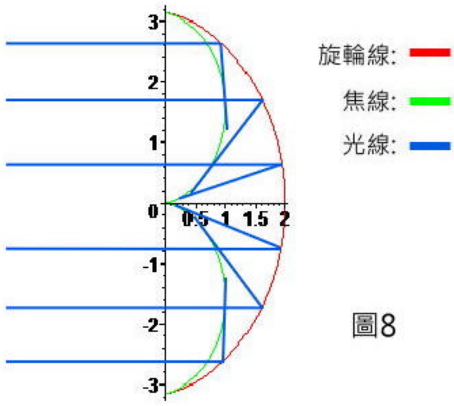


圖8

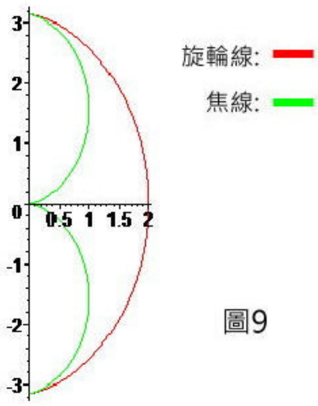


圖9

推導過程：

1. **假設平行光(平行於 x 軸)射入由半徑為 1 的圓所畫出且開口朝向 x 軸反向的旋輪線(如圖 8)，則參數式為：**$\begin{cases} x = 1+\cos t \\ y = t+\sin t \end{cases}$，$-p \le t \le p$。**接著可藉由微分其參數式而得出切線向量**$\vec{T}$ **為**$(-\sin t, 1+\cos t)$。

2. **由反射定律(入射角=反射角)可知：入射光單位向量**$\vec{W}$ **和反射光單位向量**$\vec{S}$ **皆與圓在入射點的切線向量**$\vec{T}$ **夾相同的角度。設反射光的單位向量**$\vec{S}$ **在**$0 \le t \le p$ **時為**$\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$，**在**$-p \le t \le 0$**時為**$\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$。

$$\therefore \vec{W}\cdot\vec{T} = \vec{S}\cdot\vec{T}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1,0)\cdot(-\sin t, 1+\cos t) = \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)\cdot(-\sin t, 1+\cos t), 0 \le t \le p \\ (1,0)\cdot(-\sin t, 1+\cos t) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right)\cdot(-\sin t, 1+\cos t), -p \le t \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sin t = -x\sin t - \sqrt{1-x^2}(1+\cos t), 0 \le t \le p \\ -\sin t = -x\sin t + \sqrt{1-x^2}(1+\cos t), -p \le t \le 0 \end{cases}$$

將$-x\sin t$ **移向**$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)\sin t = -\sqrt{1-x^2}(1+\cos t), 0 \le t \le p \\ (x-1)\sin t = \sqrt{1-x^2}(1+\cos t), -p \le t \le 0 \end{cases}$

將等號兩邊平方$\Rightarrow (x-1)^2\sin^2 t = (1-x^2)(1+\cos t)^2$, $-p \le t \le p$

整理後得

$$\Rightarrow (\sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos t + 1)x^2 + (-2\sin^2 t)x + (\sin^2 t - \cos^2 t - 2\cos t - 1) = 0$$

以一元二次方程式的公式解可知：

$$x = \frac{\sin^2 t \pm \sqrt{4\sin^4 t - 4\left[\sin^4 t - (\cos^2 t + 2\cos t + 1)^2\right]}}{\sin^2 t + (\cos^2 t + 2\cos t + 1)}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\sin^2 t\pm\left(\cos^2 t+2\cos t+1\right)}{\sin^2 t+\left(\cos^2 t+2\cos t+1\right)}$$

又 $\because$ **反射向量** $\neq$ **入射向量** $\Rightarrow x\neq 1$

$$\therefore x=\frac{\sin^2 t-\left(\cos^2 t+2\cos t+1\right)}{\sin^2 t+\left(\cos^2 t+2\cos t+1\right)}=\frac{-2\cos^2 t-2\cos t}{2\cos t+2}=-\cos t \text{ 。}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0\le t\le p\text{時，}\ y=-\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{1-(-\cos t)^2}=-\sqrt{\sin^2 t}=-\sin t\\ -p\le t\le 0\text{時，}\ y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-(-\cos t)^2}=\sqrt{\sin^2 t}=-\sin t\end{cases}$$

$\Rightarrow$ **反射線單位向量為** $(-\cos t,-\sin t)$

3. **設焦線的參數式為：** $\begin{cases}x=X(t)\\ y=Y(t)\end{cases}$**，** $-p\le t\le p$ 。

   則必滿足下列兩方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{X(t)-(1+\cos t)}{-\cos t}=\dfrac{Y(t)-(t+\sin t)}{-\sin t}\because\text{反射線向量必平行於反射線的單位向量}\ldots\ldots(5-1)\\ \dfrac{X'(t)}{-\cos t}=\dfrac{Y'(t)}{-\sin t}\because\text{焦線的切向量平行於反射線向量}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5-2)\end{cases}$$

$X'(t)$**與**$Y'(t)$**分別為**$X(t)$**和**$Y(t)$**對** t **的導函數**

設 $g(t)=\dfrac{X(t)-(1+\cos t)}{\cos t}=\dfrac{Y(t)-(t+\sin t)}{\sin t}$

則 $\begin{cases}X(t)=\cos t\cdot g(t)+\cos t+1\\ Y(t)=\sin t\cdot g(t)+\sin t+t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X'(t)=-\sin t\cdot g(t)+\cos t\cdot g'(t)-\sin t\\ Y'(t)=\cos t\cdot g(t)+\sin t\cdot g'(t)+\cos t+1\end{cases}$

代入(5-2)**：**

$$\frac{-\sin t\cdot g(t)+\cos t\cdot g'(t)-\sin t}{-\cos t}=\frac{\cos t\cdot g(t)+\sin t\cdot g'(t)+\cos t+1}{-\sin t}$$

等號兩邊皆有-1 **倍的**$g'(t)$**，化簡得** $\Rightarrow\dfrac{-\sin t\cdot g(t)-\sin t}{\cos t}=\dfrac{\cos t\cdot g(t)+\cos t+1}{\sin t}$

同乘以$\sin t\cos t$ **並整理得** $\Rightarrow\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)g(t)=-\left(\sin^2 t+\cos^2 t+\cos t\right)$

$$\Rightarrow g(t)=-\frac{\sin^2 t+\cos^2 t+\cos t}{\sin^2 t+\cos^2 t}=-1-\cos t$$

此旋輪線的焦線參數式為

$$\begin{cases}x=(-1-\cos t)\cos t+\cos t+1=\sin^2 t\\ y=(-1-\cos t)\sin t+\sin t+t=t-\sin t\cos t\end{cases}\text{，}-p\le t\le p$$

4. **因為若有個半徑為** r **的圓畫出的旋輪線，則其圖形即為此半徑為** 1 **的圓畫出的旋輪線放大** r **倍，所以其焦線也是放大** r **倍，故其參數式為**

$$\begin{cases} x = r\sin^2 t \\ y = r(t - \sin t\cos t) \end{cases}, \quad -p \le t \le p$$

三、 平行光沿由不同方向射入形成的焦線

(一) 平行光由不同方向射入半圓而形成的焦線（L 為半圓形）

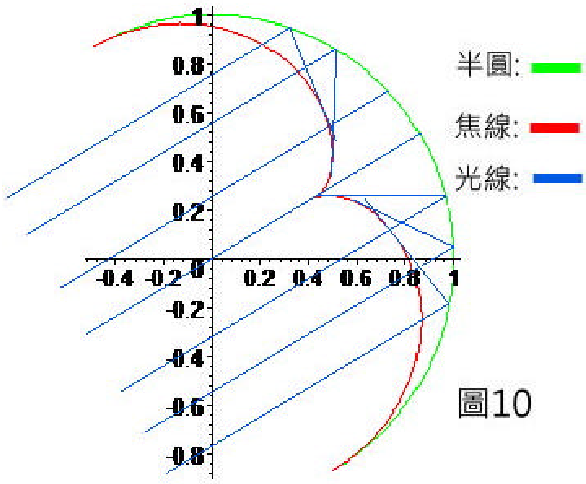


圖10

推導過程：

註：此情況其實只要將之前所做出的半圓焦線進行座標軸變換即可輕鬆完成，但因考慮到接下來要做的「平行光由不同方向射入半圓而形成的焦線」不能直接以進行座標軸變換來達成，所以這裡嘗試以不同方式推導。

1. **假設平行光由左方以與 x 軸夾角 j 射入(單位向量 $\vec{W} = (\cos j, \sin j)$ $-\frac{p}{2} \le j \le \frac{p}{2}$) 圓心在原點的單位圓之半圓(如上圖，半圓的開口朝向入射光)，則半圓的參數式為：$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$，$j - \frac{p}{2} \le t \le j + \frac{p}{2}$，t 為該點與圓心的連線與 x 軸的夾角，若 t 不只限於 $j - \frac{p}{2} \le t \le j + \frac{p}{2}$ 範圍內，則光線會被圓的另一面遮住，而無法呈現焦線的全貌。接著可藉由微分其參數式而得出切線向量 $\vec{T}$ 為 $(-\sin t, \cos t)$。**

2. **由反射定律(入射角=反射角)可知：入射光單位向量 $\vec{W}$ 和反射光單位向量 $\vec{S}$ 皆與圓在入射點的切線向量 $\vec{T}$ 夾相同的角度。設反射光的單位向量 $\vec{S}$ 在 $t \ge \frac{j}{2}$ 時為 $\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$，在 $t \le \frac{j}{2}$ 時為 $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$。**

$$\therefore \vec{W} \cdot \vec{T} = \vec{S} \cdot \vec{T} \quad \Rightarrow \begin{cases} (\cos j, \sin j) \cdot (-\sin t, \cos t) = \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right) \cdot (-\sin t, \cos t) & t \ge \frac{j}{2} \\ (\cos j, \sin j) \cdot (-\sin t, \cos t) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \cdot (-\sin t, \cos t) & t \le \frac{j}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin j\cos t - \sin t\cos j = -x\sin t - \sqrt{1-x^2}\cos t, & t \geq \dfrac{j}{2} \\ \sin j\cos t - \sin t\cos j = -x\sin t + \sqrt{1-x^2}\cos t, & t \leq \dfrac{j}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(j-t) = -x\sin t - \sqrt{1-x^2}\cos t, & t \geq \dfrac{j}{2} \\ \sin(j-t) = -x\sin t + \sqrt{1-x^2}\cos t, & t \leq \dfrac{j}{2} \end{cases}$$

將$-x\sin t$ **移向**$\Rightarrow \begin{cases} \sin t\cdot x + \sin(j-t) = -\sqrt{1-x^2}\cos t, & t \geq \dfrac{j}{2} \\ \sin t\cdot x + \sin(j-t) = \sqrt{1-x^2}\cos t, & t \leq \dfrac{j}{2} \end{cases}$

將等號兩邊平方

$\Rightarrow \sin^2 t\cdot x^2 + 2\sin t\sin(j-t)\cdot x + \sin^2(j-t) = \left(1-x^2\right)\cos^2 t$ (**任意** $j-\dfrac{p}{2} \leq t \leq j+\dfrac{p}{2}$ **皆符合**)

整理後得$\Rightarrow \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)x^2 + 2\sin t\sin(j-t)\cdot x + \left(\sin^2(j-t) - \cos^2\right) = 0$

以一元二次方程式的公式解可知：

$$x = \frac{-2\sin t\sin(j-t) \pm \sqrt{4\sin^2 t\sin^2(j-t) - 4\left(\sin^2 t\sin^2(j-t) - \sin^2 t\cos^2 t + \cos^2\sin^2(j-t) - \cos^4 t\right)}}{2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}$$

$$\Rightarrow x = -\sin t\sin(j-t) \pm \cos t\sqrt{1-\sin^2(j-t)}$$

$$\Rightarrow x = -\sin t\sin(j-t) \pm \cos t\sqrt{\cos^2(j-t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\sin t\sin(j-t) \pm \cos t\cos(j-t), & \text{在}\cos(j-t) \geq 0\text{時} \\ x = -\sin t\sin(j-t) \mp \cos t\cos(j-t), & \text{在}\cos(j-t) < 0\text{時} \end{cases}$$

$\Rightarrow x = \cos j$ **或** $x = -\cos(2t-j)$

又 $\because$ **反射向量** $\neq$ **入射向量** $\Rightarrow x \neq \cos j$ 。

$\therefore x = -\cos(2t-j)$

$$\Rightarrow \begin{cases} t \geq \dfrac{j}{2}\text{時}, & y = -\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-\left[-\cos(2t-j)\right]^2} = -\sqrt{\sin^2(2t-j)} = -\sin(2t-j) \\ t \leq \dfrac{j}{2}\text{時}, & y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\left[-\cos(2t-j)\right]^2} = \sqrt{\sin^2(2t-j)} = -\sin(2t-j) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **反射線單位向量為**$\left(-\cos(2t-j), -\sin(2t-j)\right)$

3. **設焦線的參數式為：**$\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$，　$j - \dfrac{p}{2} \le t \le j + \dfrac{p}{2}$。

則必滿足下列兩方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{X(t) - \cos t}{-\cos(2t - j)} = \dfrac{Y(t) - \sin t}{-\sin(2t - j)} \because \text{反射線向量必平行於反射線的單位向量}\ldots(6-1) \\ \dfrac{X'(t)}{-\cos(2t - j)} = \dfrac{Y'(t)}{-\sin(2t - j)} \because \text{焦線的切向量平行於反射線向量}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6-2) \end{cases}$$

$X'(t)$**與**$Y'(t)$**分別為**$X(t)$**和**$Y(t)$**對** t **的導函數**

設 $g(t) = \dfrac{X(t) - \cos t}{\cos(2t - j)} = \dfrac{Y(t) - \sin t}{\sin(2t - j)}$

則

$$\begin{cases} X(t) = \cos(2t - j) \cdot g(t) + \cos t \\ Y(t) = \sin(2t - j) \cdot g(t) + \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X'(t) = -2\sin(2t - j) \cdot g(t) + \cos(2t - j) \cdot g'(t) - \sin t \\ Y'(t) = 2\cos(2t - j) \cdot g(t) + \sin(2t - j) \cdot g'(t) + \cos t \end{cases}$$

代入(6-2)**得：**

$$\frac{-2\sin(2t - j) \cdot g(t) + \cos(2t - j) \cdot g'(t) - \sin t}{-\cos(2t - j)} = \frac{2\cos(2t - j) \cdot g(t) + \sin(2t - j) \cdot g'(t) + \cos t}{-\sin(2t - j)}$$

$$\Rightarrow \frac{-2\sin(2t - j) \cdot g(t) + \cos(2t - j) \cdot g'(t) - \sin t}{\cos(2t - j)} = \frac{2\cos(2t - j) \cdot g(t) + \sin(2t - j) \cdot g'(t) + \cos t}{\sin(2t - j)}$$

等號兩邊皆有 1 **倍的** $g'(t)$**，對消後**

$$\Rightarrow \frac{-2\sin(2t - j) \cdot g(t) - \sin t}{\cos(2t - j)} = \frac{2\cos(2t - j) \cdot g(t) + \cos t}{\sin(2t - j)}$$

同乘以$\sin(2t - j)\cos(2t - j)$

並整理得$\Rightarrow 2\left[\sin^2(2t - j) + \cos^2(2t - j)\right]g(t) = -\left[\sin t \sin(2t - j) + \cos t \cos(2t - j)\right]$

$$\Rightarrow g(t) = -\frac{\sin t \sin(2t - j) + \cos t \cos(2t - j)}{2} = -\frac{\cos(t - j)}{2}$$

單位圓的焦線參數式為$\begin{cases} x = -\dfrac{\cos(t - j)\cos(2t - j)}{2} + \cos t = \dfrac{3\cos t - \cos(3t - 2j)}{4} \\ y = -\dfrac{\cos(t - j)\sin(2t - j)}{2} + \sin t = \dfrac{3\sin t - \sin(3t - 2j)}{4} \end{cases}$

4. **因為若有個半徑為** r **的圓，則其圖形即為單位圓放大** r **倍，所以其焦線也是放大** r **倍，故其參數式為**

$$\begin{cases} x = r\left[-\dfrac{\cos(t - j)\cos(2t - j)}{2} + \cos t\right] = r\left(\dfrac{3\cos t - \cos(3t - 2j)}{4}\right) \\ y = r\left[-\dfrac{\cos(t - j)\sin(2t - j)}{2} + \sin t\right] = r\left(\dfrac{3\sin t - \sin(3t - 2j)}{4}\right) \end{cases}$$

5. **若光線由右方射入，令入射角為 f 且 $f = j + p$，則其圖形恰好與「由左方射入且夾角為 j 之圖形」左右相反、前後顛倒。**

因此其參數式為 $\begin{cases} x = -r\left[-\dfrac{\cos(t-j)\cos(2t-j)}{2} + \cos t\right] = -r\left(\dfrac{3\cos t - \cos(3t-2j)}{4}\right) \\ y = -r\left[-\dfrac{\cos(t-j)\sin(2t-j)}{2} + \sin t\right] = -r\left(\dfrac{3\sin t - \sin(3t-2j)}{4}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -r\left[-\dfrac{\cos(t-f+p)\cos(2t-f+p)}{2} + \cos t\right] = -r\left(\dfrac{3\cos t - \cos(3t-2f+2p)}{4}\right) \\ y = -r\left[-\dfrac{\cos(t-f+p)\sin(2t-f+p)}{2} + \sin t\right] = -r\left(\dfrac{3\sin t - \sin(3t-2f+2p)}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r\left[\dfrac{\cos(t-f)\cos(2t-f)}{2} - \cos t\right] = r\left(\dfrac{\cos(3t-2f) - 3\cos t)}{4}\right) \\ y = r\left[\dfrac{\cos(t-f)\sin(2t-f)}{2} - \sin t\right] = r\left(\dfrac{\sin(3t-2f) - 3\sin t}{4}\right) \end{cases}$$

(二) 平行光由不同方向射入半個橢圓而形成的焦線（L 為半個橢圓）

推導過程：

1. **假設平行光由左方(單位向量** $\vec{W} = (\cos j, \sin j)$, $-\dfrac{p}{2} \le j \le \dfrac{p}{2}$ **)射入半個橢圓(如上圖)，而橢圓的中心為原點且平行於 x 軸的軸長為 2k (k>0)，另一軸長為 2。則橢圓的參數式為：** $\begin{cases} x = k\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$，$\begin{cases} \text{當}j > 0\text{時，} \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) \le t \le \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) + p \\ \text{當}j = 0\text{時，} -\dfrac{p}{2} \le t \le \dfrac{p}{2} \\ \text{當}j < 0\text{時，} \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) - p \le t \le \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) \end{cases}$ **，若** t **不只限於此範圍內，則光線會被橢圓的另一面遮住，而無法呈現焦線的全貌。**
接著可藉由微分其參數式而得出切線向量 $\vec{T}$ **為** $(-k\sin t, \cos t)$。

2. **由反射定律(入射角=反射角)可知：入射光單位向量** $\vec{W}$ **和反射光單位向量** $\vec{S}$ **皆與圓在入射點的切線向量** $\vec{T}$ **夾相同的角度。設反射光的單位向量** $\vec{S}$ **為** (a, b)，$a^2 + b^2 = 1$。

$\therefore \vec{W}\cdot\vec{T} = \vec{S}\cdot\vec{T} \quad \Rightarrow (\cos j, \sin j)\cdot(-k\sin t, \cos t) = (a, b)\cdot(-k\sin t, \cos t)$

$\Rightarrow \sin j\cos t - k\sin t\cos j = -ak\sin t + b\cos t$

將 $-a\sin t$ **移向** $\Rightarrow ak\sin t + \sin j\cos t - k\sin t\cos j = b\cos t$

將等號兩邊平方並以 $b^2 = 1 - a^2$ **代入**

$\Rightarrow k^2\sin^2 t\cdot a^2 + 2k\sin t(\sin j\cos t - k\sin t\cos j)\cdot a + (\sin j\cos t - k\sin t\cos j)^2 = (1 - a^2)\cos^2 t$

整理後得

$$\Rightarrow (k^2\sin^2 t+\cos^2 t)a^2+2k\sin t(\sin j\cos t-k\sin t\cos j)a+\left[(\sin j\cos t-k\sin t\cos j)^2-\cos^2 t\right]=0$$

以一元二次方程式的公式解可知：

$$a=\frac{-2k\sin t(\sin j\cos t-k\sin t\cos j)}{2\left(k^2\sin^2 t+\cos^2 t\right)}$$

$$\pm\frac{\sqrt{4k^2\sin^2 t(\sin j\cos t-k\sin t\cos j)^2-4(k^2\sin^2 t+\cos^2 t)\left[(\sin j\cos t-k\sin t\cos j)^2-\cos^2 t\right]}}{2\left(k^2\sin^2 t+\cos^2 t\right)}$$

$$\Rightarrow a=\frac{-k\sin t(\sin j\cos t-k\sin t\cos j)\pm\cos t\sqrt{-(\sin j\cos t-k\sin t\cos j)^2+(k^2\sin^2 t+\cos^2 t)}}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}$$

$$\Rightarrow a=\frac{k^2\sin^2 t\cos j-k\sin t\cos t\sin j\pm\cos t\sqrt{k^2\sin^2 t\sin^2 j+2k\sin t\sin j\cos t\cos j+\cos^2 t\cos^2 j}}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}$$

$$\Rightarrow a=\frac{k^2\sin^2 t\cos j-k\sin t\cos t\sin j\pm\cos t\sqrt{(k\sin t\sin j+\cos t\cos j)^2}}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{k^2\sin^2 t\cos j-k\sin t\cos t\sin j\pm\cos t\left(k\sin t\sin j+\cos t\cos j\right)}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}, & \text{在}k\sin t\sin j+\cos t\cos j\geq 0\text{時} \\ a=\dfrac{k^2\sin^2 t\cos j-k\sin t\cos t\sin j\mp\cos t\left(k\sin t\sin j+\cos t\cos j\right)}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}, & \text{在}k\sin t\sin j+\cos t\cos j<0\text{時} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\left(k^2\sin^2 t\cos j-k\sin t\cos t\sin j\right)\pm\left(k\sin t\cos t\sin j+\cos^2 t\cos j\right)}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}$$

$$\Rightarrow a=\cos j$$

或 $a=\dfrac{\cos j\left(k^2\sin^2 t-\cos^2 t\right)-2k\sin t\cos t\sin j}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}$

又 $\because$ **反射向量** $\neq$ **入射向量** $\Rightarrow a\neq\cos j$

$\therefore a=\dfrac{\cos j\left(k^2\sin^2 t-\cos^2 t\right)-2k\sin t\cos t\sin j}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t}$ 。

由圖形可知：

若$(a,b)=(-1,0)$**，則反射線平行於x軸，令此時**$t=t_0$

$$\left(\cos j,\sin j\right)\cdot\left(-k\sin t_0,\cos t_0\right)=\left(-1,0\right)\cdot\left(-k\sin t_0,\cos t_0\right)$$

$$\Rightarrow -k\cos j\sin t_0+\sin j\cos t_0=k\sin t_0$$

$$\Rightarrow \sin j\cos t_0=k\sin t_0\left(1+\cos j\right)$$

平方後得 $\Rightarrow \sin^2 j \cos^2 t_0 = k^2 \sin^2 t_0 (1+\cos j)^2$

將 $\cos^2 t_0$ **以** $(1-\sin^2 t_0)$ **代入**

$\Rightarrow \sin^2 j(1-\sin^2 t_0) = k^2 \sin^2 t_0 (1+\cos j)^2$

$\Rightarrow \sin^2 t_0(\sin^2 j + k^2 + 2k^2\cos j + k^2\cos^2 j) = \sin^2 j$

$$\Rightarrow \sin t_0 = \pm\sqrt{\frac{\sin^2 j}{\sin^2 j + k^2 + 2k^2\cos j + k^2\cos^2 j}}$$

$$\text{且須滿足}\begin{cases} \text{當}j>0\text{時，}\tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) \le t \le \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k})+p \\ \text{當}j=0\text{時，}-\dfrac{p}{2}\le t \le \dfrac{p}{2} \\ \text{當}j<0\text{時，}\tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k})-p \le t \le \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) \end{cases}$$

由圖形可知只有在 $j=\pm p$ **時會有兩組解，不過此時** b **的正負由圖即可判斷，故不影響本研究**

$$\text{因此}\begin{cases} \text{當}j=p\text{時，}\ b=-\sqrt{1-a^2} \\ \text{當}j=-p\text{時，}\ b=\sqrt{1-a^2} \\ \text{當}-p<j<p\text{時}\begin{cases}\text{若}t\ge t_0\text{，}\ b=-\sqrt{1-a^2} \\ \text{若}t<t_0\text{，}\ b=\sqrt{1-a^2}\end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{反射線單位向量為}(a,b)\text{，其中}\begin{cases} a=\dfrac{\cos j(k^2\sin^2 t-\cos^2 t)-2k\sin t\cos t\sin j}{k^2\sin^2 t+\cos^2 t} \\ \begin{cases} \text{當}j=p\text{時，}\ b=-\sqrt{1-a^2} \\ \text{當}j=-p\text{時，}\ b=\sqrt{1-a^2} \\ \text{當}-p<j<p\text{時}\begin{cases}\text{若}t\ge t_0\text{，}\ b=-\sqrt{1-a^2} \\ \text{若}t<t_0\text{，}\ b=\sqrt{1-a^2}\end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

3. **設焦線的參數式為：** $\begin{cases} x=X(t) \\ y=Y(t) \end{cases}$，$\tan^{-1}(-\dfrac{\tan j}{k}) \le t \le \tan^{-1}(-\dfrac{\tan j}{k})+p$。

則必滿足下列兩方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{X(t)-k\cos t}{a}=\dfrac{Y(t)-\sin t}{b} \because \text{反射線向量必平行於反射線的單位向量}\ldots\ldots(7-1) \\ \dfrac{X'(t)}{a}=\dfrac{Y'(t)}{b} \because \text{焦線的切向量平行於反射線向量}\ldots\ldots(7-2) \end{cases}$$

$X'(t)$與$Y'(t)$分別為$X(t)$和$Y(t)$對t的導函數

設$g(t)=\dfrac{X(t)-k\cos t}{a}=\dfrac{Y(t)-\sin t}{b}$

則$\begin{cases} X(t)=a\cdot g(t)+k\cos t \\ Y(t)=b\cdot g(t)+\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X'(t)=\dfrac{da}{dt}\cdot g(t)+a\cdot g'(t)-k\sin t \\ Y'(t)=\dfrac{db}{dt}\cdot g(t)+b\cdot g'(t)+\cos t \end{cases}$

代入(7-2)：

$$\frac{\frac{da}{dt}\cdot g(t)+a\cdot g'(t)-k\sin t}{a}=\frac{\frac{db}{dt}\cdot g(t)+b\cdot g'(t)+\cos t}{b}$$

等號兩邊皆有 1 倍的$g'(t)$，對消後$\Rightarrow \dfrac{\frac{da}{dt}\cdot g(t)-k\sin t}{a}=\dfrac{\frac{db}{dt}\cdot g(t)+\cos t}{b}$

同乘以ab

並整理得$\Rightarrow \left(\dfrac{da}{dt}\cdot b-\dfrac{db}{dt}\cdot a\right)g(t)=bk\sin t+a\cos t$

$$\Rightarrow g(t)=\frac{bk\sin t+a\cos t}{\frac{da}{dt}\cdot b-\frac{db}{dt}\cdot a}$$

此橢圓的焦線參數式為

$$\begin{cases} x=a\cdot\dfrac{bk\sin t+a\cos t}{\frac{da}{dt}\cdot b-\frac{db}{dt}\cdot a}+k\cos t \\ y=b\cdot\dfrac{bk\sin t+a\cos t}{\frac{da}{dt}\cdot b-\frac{db}{dt}\cdot a}+\sin t \end{cases},\ \tan^{-1}\left(-\frac{\tan j}{k}\right)\le t\le\tan^{-1}\left(-\frac{\tan j}{k}\right)+p$$

4. 若要求焦線的橢圓與 x 軸平行之軸長為 2a、與 x 軸平行之軸長為 2b (即方程式為$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$)。令$k=\dfrac{a}{b}$，則此為之前所求的放大 b 倍，同理焦線也為 b 倍。故其參數式為

$$\begin{cases} x = b\left(a\cdot\dfrac{bk\sin t + a\cos t}{\dfrac{da}{dt}\cdot b - \dfrac{db}{dt}\cdot a} + k\cos t\right) \\ y = b\left(b\cdot\dfrac{bk\sin t + a\cos t}{\dfrac{da}{dt}\cdot b - \dfrac{db}{dt}\cdot a} + \sin t\right) \end{cases}, \begin{cases} \text{當} j > 0 \text{時，} \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) \le t \le \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) + p \\ \text{當} j = 0 \text{時，} -\dfrac{p}{2} \le t \le \dfrac{p}{2} \\ \text{當} j < 0 \text{時，} \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) - p \le t \le \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) \end{cases}$$

$$\text{其中} \begin{cases} a = \dfrac{\cos j\left(k^2\sin^2 t - \cos^2 t\right) - 2k\sin t\cos t\sin j}{k^2\sin^2 t + \cos^2 t} \\ \begin{cases} \text{當} t \ge t_0 \text{時，} b = -\sqrt{1-a^2} \\ \text{當} t < t_0 \text{時，} b = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \end{cases}$$

5. **若光線由右方射入，令入射角為 f 且 $f = j + p$，則其圖形恰好與「由左方射入且夾角為 j 之圖形」左右相反、前後顛倒。**

因此其參數式為

$$\begin{cases} x = -b\left(a\cdot\dfrac{bk\sin t + a\cos t}{\dfrac{da}{dt}\cdot b - \dfrac{db}{dt}\cdot a} + k\cos t\right) \\ y = -b\left(b\cdot\dfrac{bk\sin t + a\cos t}{\dfrac{da}{dt}\cdot b - \dfrac{db}{dt}\cdot a} + \sin t\right) \end{cases}, \begin{cases} \text{當} j > 0 \text{時，} \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) - p \le t \le \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) \\ \text{當} j = 0 \text{時，} -\dfrac{p}{2} \le t \le \dfrac{p}{2} \\ \text{當} j < 0 \text{時，} \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) \le t \le \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) + p \end{cases}$$

$$\text{其中} \begin{cases} a = \dfrac{\cos j\left(k^2\sin^2 t - \cos^2 t\right) - 2k\sin t\cos t\sin j}{k^2\sin^2 t + \cos^2 t} \\ \begin{cases} \text{當} j = p \text{時，} b = -\sqrt{1-a^2} \\ \text{當} j = -p \text{時，} b = \sqrt{1-a^2} \\ \text{當} -p < j < p \text{時} \begin{cases} \text{若} t \ge t_0, \ b = -\sqrt{1-a^2} \\ \text{若} t < t_0, \ b = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\sin t_0 = \pm\sqrt{\frac{\sin^2 j}{\sin^2 j + k^2 + 2k^2\cos j + k^2\cos^2 j}}$$

$$\textbf{且須滿足}\begin{cases} \textbf{當}j>0\textbf{時，}\ \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) \le t \le \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k})+p \\ \textbf{當}j=0\textbf{時，}\ -\dfrac{p}{2} \le t \le \dfrac{p}{2} \\ \textbf{當}j<0\textbf{時，}\ \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k})-p \le t \le \tan^{-1}(-\dfrac{\cot j}{k}) \end{cases}$$

伍、討論

討論一：當橢圓 $\begin{cases} x = k\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ **的 k 改變時(離心率** $\begin{cases} k \ge 1\text{時，等於}\dfrac{\sqrt{k^2-1}}{k} \\ k<1\text{時，等於}\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{1} \end{cases}$ **改變)時，焦線會如何變化。**

1. **首先先假設平行光(平行於 x 軸)射入半個橢圓，而橢圓的中心為原點且平行於 x 軸的軸長為 2k (k>0)，另一軸長為 2。則半個橢圓的參數式為：** $\begin{cases} x = k\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$，$-\dfrac{p}{2} \le t \le \dfrac{p}{2}$。

2. **其焦線參數式為** $\begin{cases} x = \cos t\left(\dfrac{k^2\sin^2 t - \cos^2 t}{2k} + k\right) \\ y = \sin^3 t \end{cases}$，$-\dfrac{p}{2} \le t \le \dfrac{p}{2}$

3. **經由 maple 程式繪出焦線圖形藉此觀察其變化。**

   下圖 11 中由左至右分別為：$k=\dfrac{1}{4}$、$k=\dfrac{1}{3}$、$k=\dfrac{1}{2}$、$k=1$、$k=2$、$k=3$、$k=4$**之橢圓的焦線圖形。**

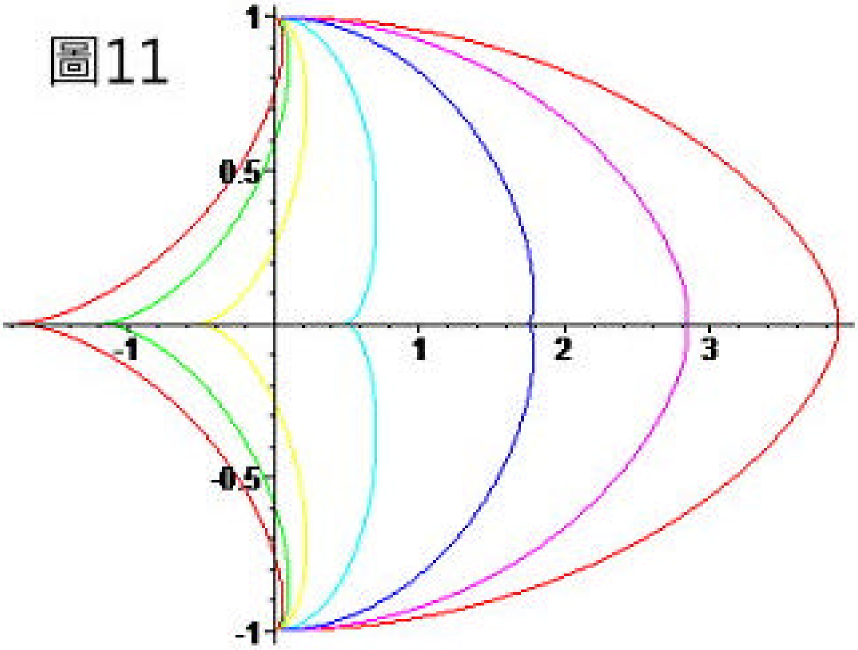


圖11

4. **由圖中不難看出：隨著** k **值變大，在** y=0 **時，**x **的值也將隨著變大。而且隨著** k **值變大，曲線中在** x **最大值時，**y **將由**±1 **逐漸趨近** 0。
5. **由以上觀察使我產生了下面兩個問題。**
   (1) **當** k **等於多少時，在** y=0 **時，**x **的值會剛好等於** 0**？**
   (2) **當** k **變化時，**x **的最大值會如何變化，而其** y **值又將如何變化？**

問題一：當 k 等於多少時，在 y=0 時，x 的值會剛好等於 0？

A. **首先在** y=0 **時：** $y=\sin^3 t=0$，**又因為** $-\frac{p}{2}\le t\le\frac{p}{2}$，**所以** $t=0$。

B. **接著將** $t=0$ **帶入** $x=\cos t\left(\frac{k^2\sin^2 t-\cos^2 t}{2k}+k\right)$。**得到** $x=k-\frac{1}{2k}$

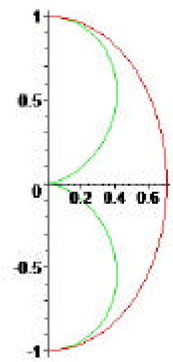
C. **要使得** x=0，**則** $k-\frac{1}{2k}=0$

$\Rightarrow 2k^2=1 \quad \Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

又因 k>0，**所以** $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. **繪出的圖形如右圖** 12。

圖12



問題二：當 k 變化時，x 最大值會如何變化，而其 y 值又將如何變化？

A. **首先，由圖形我們可以發現：在** x **的最大值時，焦線的切線向量必會與** y **軸平行，因此我們由此著手。因為切線向量在最大值時會與** y **軸平行，所以** x **分量會等於零。**

B. **此藉由將焦線的參數式的** x **微分(因為焦線圖形在** x=0 **時，不一定可微分，**

因此先考慮$t \neq 0\ (\sin t \neq 0)$**時)：**

$$x = \cos t\left(\frac{k^2 \sin^2 t - \cos^2 t}{2k} + k\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t\left(\frac{k^2 \sin^2 t - \cos^2 t}{2k} + k\right) + \cos t\left(\frac{2k^2 \sin t \cos t + 2\sin t \cos t}{2k}\right)$$

$$= \sin t\left(\frac{-k^2 \sin^2 t + \cos^2 t - 2k^2 + 2k^2 \cos^2 t + 2\cos^2 t}{2k}\right)$$

$$= \sin t\left(\frac{-3k^2 \sin^2 t + 3\cos^2 t}{2k}\right)$$

$$= 3\sin t\left(\frac{\cos^2 t - k^2 \sin^2 t}{2k}\right)$$

C. **因為切線向量在最大值時會與 y 軸平行，所以 x 分量** $3\sin t\left(\frac{\cos^2 t - k^2 \sin^2 t}{2k}\right) = 0$。

但因為這裡先討論$\sin t \neq 0$ **所以**$\frac{\cos^2 t - k^2 \sin^2 t}{2k} = 0$

$\Rightarrow \cos^2 t - k^2 \sin^2 t = 0$

$\Rightarrow \cos^2 t = k^2 - k^2 \cos^2 t$

$\Rightarrow \cos^2 t = \frac{k^2}{k^2+1}$

$\because -\frac{p}{2} \leq t \leq \frac{p}{2}$

$\therefore \cos t = \frac{\mathrm{k}}{\sqrt{k^2+1}},\ \sin t = \pm\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

D. **將**$\cos t = \frac{\mathrm{k}}{\sqrt{k^2+1}},\ \sin t = \pm\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$**代入焦線參數式，可得由可能為最大值的點：**$\left(\frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}, \frac{1}{(k^2+1)\sqrt{k^2+1}}\right)$ **或** $\left(\frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}, -\frac{1}{(k^2+1)\sqrt{k^2+1}}\right) \Rightarrow x$**的最大值可能為**$\frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}$。

E. **再來討論 t=0 時，將 t=0 代入焦線參數式，得點**$\left(k-\dfrac{1}{2k},0\right)$。

接著來比較$\dfrac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}$**與**$k-\dfrac{1}{2k}$**的大小。**

假設$k-\dfrac{1}{2k}\geq\dfrac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}$

$$\Rightarrow k^2-1+\frac{1}{4k^2}\geq\frac{k^4}{k^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{4k^4-4k^2+1}{4k^2}\geq\frac{k^4}{k^2+1}$$

$$\Rightarrow \left(4k^4-4k^2+1\right)\left(k^2+1\right)\geq 4k^6$$

$$\Rightarrow 4k^6-3k^2+1\geq 4k^6$$

$$\Rightarrow 1\geq 3k^2$$

$$\Rightarrow k^2\leq\frac{1}{3}$$

因為$\dfrac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}\geq 0$，**所以同時**$k-\dfrac{1}{2k}\geq 0$**也要成立。**

但$k-\dfrac{1}{2k}\geq 0\Rightarrow k^2\geq\dfrac{1}{2}$**與**$k^2\leq\dfrac{1}{3}$**矛盾。**

因此$k-\dfrac{1}{2k}$**不會大於或等於**$\dfrac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}$。

所以x**的最大值為**$\dfrac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}$。

所以 x 的最大值發生在$\left(\dfrac{k^2}{\sqrt{k^2+1}},\dfrac{1}{\left(k^2+1\right)\sqrt{k^2+1}}\right)$**與**

$\left(\dfrac{k^2}{\sqrt{k^2+1}},-\dfrac{1}{\left(k^2+1\right)\sqrt{k^2+1}}\right)$**兩點。**

F. **因為 x 在最大值時，** $y=\pm\dfrac{1}{\left(k^2+1\right)\sqrt{k^2+1}}$**，所以印證前面所推測的：曲線中在 x 最大值時，y 將由**± 1**逐漸趨近 0。**

討論二：由已知的二維焦線圖形，來推論平行光在三維曲柱面上會匯聚成怎樣的圖形。

1. **首先我們要先釐清我們要討論的曲柱面：**

   (1) **我們所說的曲柱面是指由先前所討論的二次曲線，沿著 z 軸的方向推疊所形成的。**

(2) **假設其柱高為** h。

(3) **因此假設原本的二次曲線的參數式為：** $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

則曲柱面的參數式為： $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ 0 \le z \le h \end{cases}$

2. **再來我們假設入射光以平行於** xz **平面並與** xy **平面的夾角為** $j \left(-\frac{p}{2} \le j \le \frac{p}{2} \right)$。

3. **為了方便討論我們將曲柱面分成一層一層來看，並假設我們討論的該層** z **值為** s。

   所以我們討論的曲線的參數式可訂為： $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = s \end{cases}$

4. **我們先將入射光分成為平行於 xy 平面的分量與平行於 z 軸的分量。**
   而其平行於 xy 平面的分量反射後即會等於之前討論的二維圖形反射光向量 (反射光的 z **軸分量為** 0)。

5. **再因為入射光等於反射光，可以發現平行於 z 軸的分量等於平行於 xy 平面的分量乘以** $\tan j$ **。所以我們可以獲得，若原二次曲線的焦線方程式的焦線為** $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \end{cases}$ **，則高度在** s **時，焦線參數式為**

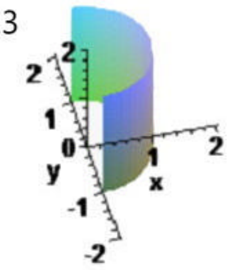
$$\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \\ z = s + \sqrt{[p(t) - f(t)]^2 + [q(t) - g(t)]^2} \tan j \end{cases}$$

6. **所以平行光照射到整個曲柱面所匯聚形成的曲面，本人將之稱為焦線面，其參數式為**

$$\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \\ z = s + \sqrt{[p(t) - f(t)]^2 + [q(t) - g(t)]^2} \tan j \end{cases} , \quad 0 \le s \le h 。$$

7. **所以我們帶入之前所算出的式子可以獲得下列的參數式。**

圖13



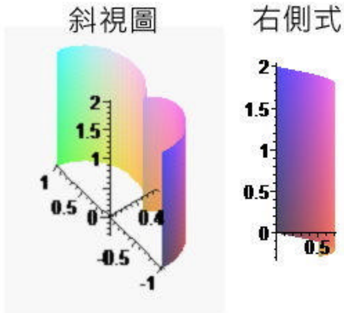
半圓柱面

半圓柱面的焦線面

斜視圖

右側式圖

圖14



A. **圓柱面的焦線面：** $\begin{cases} x = r\cos t\left(-\cos^2 t + \dfrac{3}{2}\right) \\ y = r\sin^3 t \\ z = s + \dfrac{r\cos t}{2}\tan j \end{cases}$，$0 \le s \le h$ 。

B. **拋物線柱面的焦線面：** $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4k} \\ y = 0 \\ z = s + \left(kt^2 + \dfrac{1}{4k}\right)\tan j \end{cases}$，$0 \le s \le h$ 。

C. **橢圓柱面的焦線面：**

$\begin{cases} x = \left(\dfrac{a^2}{b}\sin^2 t - b\cos^2 t\right)\cdot\dfrac{b\cos t}{2a} + a\cos t \\ y = b\sin^3 t \\ z = s + \left(\dfrac{a^2}{b}\sin^2 t + b\cos^2 t\right)\dfrac{\cos t}{2}\tan j \end{cases}$，$0 \le s \le h$ 。

D. **雙曲線柱面的焦線面：** $\begin{cases} x = \dfrac{a^2\sin^2 t - b^2}{2a\cos^3 t} + a\sec t \\ y = \dfrac{b\sin t}{\cos^3 t} + b\tan t \\ z = s + \left(\dfrac{a^2\sin^2 t + b^2}{2a\cos^3 t}\right)\dfrac{\cos t}{2}\tan j \end{cases}$，$0 \le s \le h$ 。

E. **旋輪線柱面的焦線面：** $\begin{cases} x = r\sin^2 t \\ y = r(t - \sin t\cos t) \\ z = s + r(-1 - \cos t)\tan j \end{cases}$，$0 \le s \le h$ 。

討論三：討論為何不用積分方式來求焦線，其缺點為何？

1. **首先討論要如何用積分來求焦線，我們先以半圓的焦線來嘗試。假設已經**

算出半圓的反射線單位向量為$(-\cos 2t,-\sin 2t)$。**先假設焦線的參數式為**
$\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$，$-\dfrac{p}{2} \le t \le \dfrac{p}{2}$。

2. **因為反射線皆會與焦線相切，所以焦線的切線向量會與**$(-\cos 2t,-\sin 2t)$**平行，因此可假設焦線的切線向量** $\bar{f}$ **為** $g(t)\cdot(-\cos 2t,-\sin 2t)=(-g(t)\cos 2t,-g(t)\sin 2t)$。

3. **接著將** $\bar{f}$ **積分可獲得焦線參數式為**$\begin{cases} x = \int -g(t)\cos 2t \\ y = \int -g(t)\sin 2t \end{cases}$，$-\dfrac{p}{2} \le t \le \dfrac{p}{2}$。**由於此情形過於難積分，這就是為何此研究不以來處理而是以微分來處理。**

討論四：一個半徑為 r 的圓所畫出的旋輪線的焦線是否為兩個半徑為 $\dfrac{r}{2}$ **的圓所畫出的旋輪線？**

1. **假設原本的旋輪線為**$\begin{cases} x = r(1+\cos t) \\ y = r(t+\sin t) \end{cases}$，$-p \le t \le p$

   ，則其焦線為$\begin{cases} x = r\sin^2 t \\ y = r(t-\sin t\cos t) \end{cases}$，$-p \le t \le p$ 。

2. **首先若是兩個** $\dfrac{r}{2}$ **的旋輪線的話，因為這兩個旋輪線並非在** y=0 **時有最大值，**

   而是有最小值。所以這定其參數式為$\begin{cases} x = \dfrac{r}{2}(1-\cos q) \\ y = \dfrac{r}{2}(q-\sin q) \end{cases}$，$-2p \le q \le 2p$ 。

3. **在** $y=r$ **時，可獲得此等式：**$1 = t-\sin t\cos t = \dfrac{q+\sin q}{2}$

   $\Rightarrow \dfrac{2t+\sin 2t}{2} = \dfrac{q+\sin q}{2}$

   $\Rightarrow q = 2t$

4. **接著將** $q = 2t$ **代入兩個半徑為** $\dfrac{r}{2}$ **旋輪線的參數式得**

   $\begin{cases} x = \dfrac{r}{2}(1-\cos 2t) \\ y = \dfrac{r}{2}(2t-\sin 2t) \end{cases}$，$-2p \le 2t \le 2p$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r\left(\dfrac{1-\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)}{2}\right) \\ y = r\left(\dfrac{2t - 2\sin t \cos t}{2}\right) \end{cases},\ -p \le t \le p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r + \sin^2 t \\ y = r\left(t - \sin t \cos t\right) \end{cases},\ -p \le t \le p$$

此參數式與半徑為 r 的旋輪線的焦線參數式相等。因此得證：一個半徑為 r 的圓所畫出的旋輪線的焦線為兩個半徑為 $\frac{r}{2}$ 的圓所畫出的旋輪線。

討論五：焦線的推廣與應用。

1. **在太陽能發電方面，由於太陽能板的造價較鏡子昂貴許多，因此可先製作出一個拋物面鏡，再將太陽能板放置於該拋物面鏡之焦點，藉此來降低造價。**
2. **由於各種波皆符合反射定律，所以聲波當然不例外。因此可將焦線應用在演奏廳等建築上，將聲音匯聚在觀眾席的區域。由於觀察第 4 頁的圖 0 可發現依光線的密集度可分為三區：焦線處(最亮)、焦線與曲面所夾區域(次之)、其他區域(較暗)。因此基於相同的原因，可用於分別演奏廳中不同等級的座位區。**
3. **可用於設計雷達、電波接收器的設計上，即可加強信號強度。**

討論六：假設已知焦線且平行光沿 x 軸設入，那要如何求出原本反射的曲線。

1. **假設已知的焦線為參數式為** $\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$
2. **接著我們可以假設欲求的曲線其參數式為：** $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \end{cases}$ **。而反射線之單位向量為** $\left(a(t), b(t)\right)$
3. **接著我們可以依照求焦線時的想法列出下列幾個方程式：**

$$\begin{cases} (1,0)\cdot\left(p'(t), q'(t)\right) = \left(a(t), b(t)\right)\cdot\left(p'(t), q'(t)\right) \because \text{入射角等於反射角} \\ \dfrac{X(t)-p(t)}{a(t)} = \dfrac{Y(t)-q(t)}{b(t)} \because \text{反射線向量必平行於反射線的單位向量} \\ \dfrac{X'(t)}{a(t)} = \dfrac{Y'(t)}{b(t)} \because \text{焦線的切向量平行於反射線向量} \\ \left(a(t)\right)^2 + \left(b(t)\right)^2 = 1 \because \left(a(t), b(t)\right)\text{為單位向量} \end{cases}$$

4. **接著解聯立方程式後即可獲得焦線的參數式。因為解方程式途中需解「微分方程式」，因此可以對此再做更深入的探討。**

陸、結論

一、 平行光射入圓所形成的焦線會剛好形成腎臟線。

二、 平行光射入拋物線後，並不會聚集形成焦線，而是會匯聚於焦點。

三、 平行光射入左半邊的雙曲線所形成的鏡子時會形成虛焦線，而非焦線。此與其他凹面鏡
不同。

四、 平行光射入旋輪線後，會形成兩個 r 減半的旋輪線。

五、 當橢圓的平行 y 軸的軸長 2b 不變，而平行於 x 軸的軸長 2a 改變時，焦線的 x 在最大值時的 y 值將隨著 a 變大而由 $\pm b$ 逐漸逼近 0。

六、 若原二次曲線的焦線方程式的焦線為 $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \end{cases}$，則平行光照射到整個曲柱面所匯聚形成的曲面，其參數式為

$$\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \\ z = s + \sqrt{[p(t) - f(t)]^2 + [q(t) - g(t)]^2}\tan j \end{cases}, \quad 0 \le s \le h \text{ 。}$$

七、 二次曲線的焦線求法為：

1. 假設二次曲線的參數式為 $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \end{cases}$

2. 首先利用「入射光單位向量與二次曲線的切線的內積」會等於「入射光單位向量與二次曲線的切線的內積」來求出光線的反射線向量。

3. 假設第 2 步驟獲得的反射線向量為 $(a(t), b(t))$

設焦線的參數式為：$\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$。

則必滿足下列兩方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{X(t) - p(t)}{a(t)} = \dfrac{Y(t) - q(t)}{b(t)} \because \text{反射線向量必平行於反射線的單位向量} \\ \dfrac{X'(t)}{a(t)} = \dfrac{Y'(t)}{b(t)} \because \text{焦線的切向量平行於反射線向量} \end{cases}$$

$X'(t)$與$Y'(t)$分別為$X(t)$和$Y(t)$對 t 的導函數

4. 設 $g(t) = \dfrac{X(t) - p(t)}{a(t)} = \dfrac{Y(t) - q(t)}{b(t)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(t) = a(t) \cdot g(t) + p(t) \\ Y(t) = b(t) \cdot g(t) + q(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'(t) = a'(t) \cdot g(t) + a(t) \cdot g'(t) + p'(t) \\ Y'(t) = b'(t) \cdot g(t) + b(t) \cdot g'(t) + q'(t) \end{cases}$$

5. **代入** $\dfrac{X'(t)}{a(t)}=\dfrac{Y'(t)}{b(t)}$ **得**

$$\frac{a'(t)\cdot g(t)+a(t)\cdot g'(t)+p'(t)}{a(t)}=\frac{b'(t)\cdot g(t)+b(t)\cdot g'(t)+q'(t)}{b(t)}$$

$$\frac{a'(t)\cdot g(t)+p'(t)}{a(t)}=\frac{b'(t)\cdot g(t)+b\ \cdot g'(t)+q'(t)}{b(t)}$$

$$\Rightarrow\left(a'(t)-b'(t)\right)g(t)=a(t)\cdot q'(t)-b(t)\cdot p'(t)$$

$$\Rightarrow g(t)=\frac{a(t)\cdot q'(t)-b(t)\cdot p'(t)}{a'(t)-b'(t)}$$

6. **得焦線參數式為** $\begin{cases} X(t)=a(t)\cdot\dfrac{a(t)\cdot q'(t)-b(t)\cdot p'(t)}{a'(t)-b'(t)}+p(t) \\ Y(t)=b(t)\cdot\dfrac{a(t)\cdot q'(t)-b(t)\cdot p'(t)}{a'(t)-b'(t)}+q(t) \end{cases}$

八、 凡是以直線傳遞且符合反射定律者，在討論其密集度時皆可以求焦線的方式與以探討。

柒、參考資料

1. **趙文敏（無日期）。等角螺線及其他。**
   取自：http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_20_09_1/page7.html
2. **威力大工作室（民國 86 年 9 月 20 日）。Maple V 學習手冊。出版社：高立圖書有限公司。**
3. M.J.Strauss, G.L.Bradley & K.J.Smith(2002). *Calculus, 3rd edition*. Prentice Hall, Inc.
4. **擺線（無日期）。**
   取自：維基百科,
   http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%97%8B%E8%BC%AA%E7%B7%9A&variant=zh-tw
5. **外擺線（無日期）。**
   取自：維基百科,
   http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%A4%96%E6%91%86%E7%BA%BF&variant=zh-tw

【評語】040406

1) 平行光反射與包絡出的腎臟線可以透過動態幾何的實驗生動活潑來呈現。可惜本作品堅持代數方程式，而喪失實驗性而無法見到美妙的視覺享受，甚為可惜！

2) 動態幾何軟體 Cabri Geometry(http://www.cabri.net)具有繪製包絡線的功能，能夠添增本作品的靈感。