中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040405

分派問題

學校名稱：國立花蓮女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 郭晏蓉 高二 黃律雅 高二 張貴評	蔡俊傑

關鍵詞：　通訊線路、交點數

壹、 摘要：

1. 若有 a 個城市、b 間公司，每個城市至少有 n 間公司，則每個城市的公司數要如何分配才能使線路有最少條數。
2. 令有些城市有限定的公司數 m，分配方式又將如何改變。
3. 兩城市之公司排成兩平行直線，從任一公司出發，恆可到達另一城市之任意公司，欲找出最少之連線數及交點數的方法。
4. 在兩城市各有固定公司數量，在最少線路及交點數的情況下，求得一畫法，使得從一公司到任一公司有最少或最多的轉接次數。
5. 如果公司數沒有「最多轉接次數等於交點數」的情形，我們試著找出最多的轉接次數。
6. 探討兩個城市間的線路畫法中，哪一種畫法能使線路總長度有最小值。

貳、 研究動機：

我們在準備學科能力競賽時，偶然看到一個關於分派問題的題目，覺得十分有趣，於是在我們找出原題答案的規律後，想進一步探討，於是我們著手研究。

參、 研究目的：

若在一些城市當中，每個城市有一些公司，不同城市間的公司需要有線路相連，且每個城市有限定的公司數。我們想要探討這些線路的條數與所構成的交點數會不會因不同的條件而改變。

肆、 研究內容：

一、研究主題一：

1.設有 a 個城市、b 個公司，且每個城市至少有 n 個公司，在不同城市中的任意兩個分公司之間都必須設置一條獨立的線路，則這 b 個分公司之間最少要設置幾條線路：設想將公司分為 $A_1,A_2,\ldots\ldots,A_a$ ，則線路條數的求法為 $\sum\limits_{1\le i<j\le a} A_iA_j$ 。

定理一、當 $A_1=A_2=A_3=A_4=\ldots\ldots=A_{a-1}=n$，且 $A_a=b\text{-n}(a\text{-}1)=b\text{-}na\text{+}n$，則 $\sum\limits_{k=1}^{a} A_k^2$ 有最大值。

證明：若第 1 種分法為 $n,n,n\ldots\ldots n,b\text{-}n(a\text{-}1)$

第 2 種分法為 $x,n,n\ldots\ldots n,b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}x$

第 3 種分法為 $x,y,n\ldots\ldots n,b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}x\text{-}y$

⋮

第 a 種分法為 $x,y,z\ldots\ldots m,r,b\text{-}x\text{-}y\text{-}z\text{-}\ldots\text{-}m\text{-}r$

(1) 假設第二種方法的條數會小於第一種，則

$n^2+n^2+...+n^2+[b\text{-}n(a\text{-}1)]^2 < x^2+n^2+...+n^2+\ \ [b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}x]^2$

$\Rightarrow n^2+[b\text{-}n(a\text{-}1)]^2 < x^2+[b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}x]^2$

設 $b\text{-}n(a\text{-}2)$為 M

$\Rightarrow n^2+(M\text{-}n)^2 < x^2+(M\text{-}x)^2$

$\Rightarrow M(x\text{-}n) < (x+n)(x\text{-}n)$

$\therefore M\text{-}x < n$ 與已知每個城市至少有 n 個公司的條件矛盾

$\therefore n^2+n^2+...+n^2+[b\text{-}n(a\text{-}1)]^2 > x^2+n^2+...+n^2+[b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}x]^2$

(2) 假設第 a 種方法的條數會小於第 a-1 種，

則 $x^2+y^2+z^2+...+m^2+n^2+[b\text{-}x\text{-}y\text{-}z\text{-}...\text{-}m\text{-}n]^2 < x^2+y^2+...+m^2+r^2+[b\text{-}x\text{-}y\text{-}z\text{-}...\text{-}m\text{-}r]^2$

$\Rightarrow n^2+[b\text{-}x\text{-}y\text{-}z\text{-}...\text{-}m\text{-}n]^2 < r^2+[b\text{-}x\text{-}y\text{-}z\text{-}...\text{-}m\text{-}r]^2$

設 $b\text{-}x\text{-}y\text{-}z\text{-}...\text{-}m$ 為 M''

$\Rightarrow n^2+(M''\text{-}n)^2 < r^2+(M''\text{-}r)^2$

$\Rightarrow (n+r)(n\text{-}r) < M''(n\text{-}r) \qquad \because n<r$

$\Rightarrow M'' < n+r$

$\therefore M''\text{-}r < n$ 與已知每個城市至少有 n 個公司的條件矛盾

$\therefore x^2+y^2+z^2+...+m^2+n^2+[b\text{-}x\text{-}y\text{-}z\text{-}...\text{-}m\text{-}n]^2 > x^2+y^2+...+m^2+r^2+[b\text{-}x\text{-}y\text{-}z\text{-}...\text{-}m\text{-}r]^2$

定理四：由上面討論得知，第一種分法 $\sum_{k=1}^{a} A_k^2$ 有最大值

$\because (\sum_{k=1}^{a} A_k)^2 = \sum_{k=1}^{a} A_k^2 + 2\sum_{1\le i<j\le a} A_iA_j$ $\therefore$當 $\sum_{k=1}^{a} A_k^2$ 有最大值時，$\sum_{1\le i<j\le a} A_iA_j$ 有最小值，

即最少條線路的分法即為 a-1 個城市都只有 n 間公司，而剩下的一個城市擁有其餘的公司數，其方法推導如下：

若有 a 個城市 b 間公司且每個城市至少有 n 間公司 $b\text{-}n(a\text{-}1)\ge n$

$n,n,n,\ldots\ldots,n,b\text{-}n(a\text{-}1)b\ge an$

$$\sum_{1\le i<j\le a} A_iA_j = [n^2(a-2)+n^2(a-3)+...+n^2]+(a\text{-}1)(n)[b\text{-}n(a\text{-}1)]$$

$$= n^2\left[\frac{(a-2)(a-1)}{2}\right]+(a\text{-}1)(n)[b\text{-}n(a\text{-}1)]$$

$$= \frac{1}{2}n(a\text{-}1)(2b\text{-}na)$$

＊ 主題一結論：

要求得最少條線路，即 a-1 個城市的公司有 n 間，而剩下的一個城市則被分配

到剩下的所有公司數，即最少線路條數爲 $\frac{1}{2}n(a\text{-}1)(2b\text{-}na)$。

二、研究主題二：

設有 a 個城市 b 間公司，且每個城市至少有 n 個公司，若有些城市至少有 m 間公司，在不同城市中的任意兩個分公司都必須設置一條獨立的線路，則最少要設置幾條線路：

1. 有一個限制(m_1)，即有一個城市至少須有 m_1 間公司，且 $m_1 > n$：

當有一個限制時，如何分配公司數，證明如下：

證明： $n,n\ldots\ldots n,\ n,b\text{-}n(a\text{-}1) \quad \rightarrow b\text{-}n(a\text{-}1) \geq m_1$

$n,n\ldots\ldots n,\ m_1,b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}m_1 \quad \rightarrow b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}\ m_1 \geq n$

(1)假設第二種方法所連接的線路會少於第一種方法，則：

$n^2+\ldots+n^2+[\text{b-n(a-1)}]^2 < n^2+\ldots+n^2+m_1^2+[b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}m_1]^2$

$\Rightarrow n^2+[b\text{-}n(a\text{-}1)]^2 < m_1^2+[b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}m_1]^2$

設 $b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}m_1$ 爲 P，且 $P \geq n$

$\Rightarrow n^2+[P+m_1\text{-}n]^2 < m_1^2+P^2$

$\Rightarrow n(n\text{-}P) < m_1(n\text{-}P)$

$\Rightarrow n > m_1$ 與已知條件 $n < m_1$ 矛盾

$\therefore n^2+\ldots+n^2+[b\text{-}n(a\text{-}1)]^2 > n^2+\ldots+n^2+m_1^2+[b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}m_1]^2$

2. 有兩個限制(m_1, m_2)，即有一個城市至少須有 m_1 間公司，有一個城市至少須有 m_2 間公司，且 $n < m_1 < m_2$：

當有兩個限制時，如何分配公司數，證明如下：

證明：$n,n\ldots\ldots n,n,\ m_1,\ b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_1 \quad \rightarrow b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_1 \geq m_2$

$n,n\ldots\ldots n,n,\ m_2,\ b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_2 \quad \rightarrow b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_2 \geq m_1$

$n,n\ldots\ldots n,\ m_1, m_2, b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_1\text{-}\ m_2 \quad \rightarrow b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_1\text{-}\ m_2 \geq n$

(1)假設第二種方法所連接的線路會少於第一種方法，則：

$n^2+\ldots\ldots+n^2+m_1^2+[b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_1]^2 < n^2+\ldots\ldots+n^2+m_2^2+[b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_2]^2$

$\Rightarrow m_1^2+[b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_1]^2 < m_2^2+[b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_2]^2$

設 $b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_1$ 爲 P'，且 $P' \geq m_2$

$\Rightarrow m_1^2+P'^2 < m_2^2+[P'+m_1\text{-}\ m_2]^2$

$\Rightarrow m_2\ (m_2\text{-}\ m_1) > P'\ (m_2\text{-}\ m_1)$

$\Rightarrow m_2 > P'$ 與已知條件 $P' \geq m_2$ 矛盾

$\therefore n^2+\ldots\ldots+n^2+m_1^2+[b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_1]^2 < n^2+\ldots\ldots+n^2+m_2^2+[b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_2]^2$

(2)設第三種方法所連接的線路會少於第二種方法，則：

$n^2+\ldots\ldots+n^2+m_2^2+[b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_2]^2 <$

$n^2+\ldots\ldots+n^2+m_1^2+m_2^2+[b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}m_1\text{-}m_2]^2$

$\Rightarrow n^2+[b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}m_2]^2<m_1^2+[b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}m_1\text{-}m_2]^2$

設 $b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}m_2$ 爲 P''，且 $P''\geq m_1$

$\Rightarrow n^2+P''^2<m_1^2+(P''\text{-}m_1)^2$

$\Rightarrow 2m_1\ (m_1\text{-}P'')>n^2$

$\because P''\geq m_1 \therefore m_1\text{-}P''\leq 0$，故 $2m_1(m_1\text{-}P'')>n^2$ 矛盾

$\therefore n^2+\ldots\ldots+n^2+m_2^2+[b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}\ m_2]^2>$

$n^2+\ldots\ldots+n^2+m_1^2+m_2^2+[b\text{-}n(a\text{-}3)\text{-}m_1\text{-}\ m_2]^2$

→由 1、2 知，將限制的數量由小排到大並依此分配公司數，最後將剩下的公司給限制最多的城市裡，即爲最少條線路的分配方法，其平方和最大，再由$(\sum_{k=1}^{a}A_K)^2=\sum_{1\leq i<j\leq a}A_iA_j+\sum_{k=1}^{a}A_k^2$ 得知，此種分配得最少條線路 $\sum_{1\leq i<j\leq a}A_iA_j$ 。

定理五：若 $m<n$，則可將限制最小的公司數視爲原先所限制的公司數量 n，所以仍可以上述的方式算出最少條線路。

3.有多個限制$(m_1,m_2,\ldots,m_{a-1},\ m_a)$，且 $n<m_1<m_2<\ldots<m_{a-1}<m_a$ ：

證明： $n,n,\ldots,n,b\text{-}n(a\text{-}1)$ $\rightarrow b\text{-}n(a\text{-}1)\geq m_1$

n,n,…, m_1,b-n(a-2)- m_1 →b-n(a-2)- $m_1\geq m_2$

.

.

$n,m_1,m_2,\ldots,m_{a-2},b\text{-}n\text{-}m_1\text{-}m_2\text{-}\ldots\text{-}m_{a-2}$ $\rightarrow b\text{-}n\text{-}m_1\text{-}m_2\text{-}\ldots\text{-}m_{a-2}\geq m_{a-1}$

$m_1,m_2,\ldots,m_{a-1},b\text{-}m_1\text{-}m_2\text{-}\ldots\text{-}m_{a-1}$ $\rightarrow b\text{-}m_1\text{-}m_2\text{-}\ldots\text{-}m_{a-1}\geq m_a$

(1)假設 $n^2+\ldots+n^2+[b\text{-}n(a\text{-}1)]^2<n^2+\ldots+n^2+m_1^2+[b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}m_1\ ]^2$

$\Rightarrow n^2+[b\text{-}n(a\text{-}1)]^2<m_1^2+[b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}m_1]^2$

設 $b\text{-}n(a\text{-}1)$爲 Q，且 $Q\geq m_1$

$\Rightarrow n^2+Q^2<[m_1^2+Q+n\text{-}m_1]^2$

$\Rightarrow m_1(m_1\text{-}n)>Q\ (m_1\text{-}n)$

$\Rightarrow m_1>Q$ 與已知條件 $Q\ \geq m_1$ 矛盾

$\therefore n^2+\ldots+n^2+[b\text{-}n(a\text{-}1)]^2>\ n^2+\ldots+n^2+m_1^2+[b\text{-}n(a\text{-}2)\text{-}m_1\ ]^2$

(2)假設 $n^2+m_1^2+\ldots+m_{a-2}^2+[b\text{-}n\text{-}m_1\text{-}m_2\text{-}\ldots\text{-}m_{a-2}]^2<$

$m_1^2+m_2^2+\ldots+m_{a-1}^2+[b\text{-}m_1\text{-}m_2\text{-}\ldots\text{-}m_{a-1}]^2$

$\Rightarrow n^2+[b\text{-}n\text{-}m_1\text{-}m_2\text{-}\ldots\text{-}m_{a-2}]^2<m_{a-1}^2+[b\text{-}m_1\text{-}m_2\text{-}\ldots\text{-}m_{a-1}]^2$

設 $b\text{-}n\text{-}m_1\text{-}m_2\text{-}\ldots\text{-}m_{a-2}$ 爲Q'' ，且 $Q''\geq m_{a-1}$

$\Rightarrow n^2+Q''^2<m_{a-1}^2+[Q''+n\text{-}m_{a-1}]^2$

$\Rightarrow m_{a-1}\ (m_{a-1}\text{-}n) > Q''\ (m_{a-1}\text{-}n)$

$\Rightarrow m_{a-1} > Q''$ 與已知條件 $Q'' \geq m_1$ 矛盾

$\therefore n^2 + m_1^2 + ... + m_{a-2}^2 + [b\text{-}n\text{-}m_1\text{-}m_2\text{-}...\text{-}m_{a-2}]^2 <$
$m_1^2 + m_2^2 + ... + m_{a-1}^2 + [b\text{-}m_1\text{-}m_2\text{-}...\text{-}m_{a-1}]^2$

→由 3 知，若限制的公司數越多，則對線路的影響越大，使線路的條數越多。

＊ 主題二結論：

在 *a* 個城市、*b* 間公司中，若有些城市有限制的公司數，則按照所限制的公司數量分配公司數，再將剩下的公司全分給限制數量最多的公司，此即爲最少條線路的分法。

三、研究主題三：

爲了討論方便我們設想兩城市之公司排成兩平行直線，且從任一公司出發，恆可到達另一城市之任意公司，一直線可經由兩直線之交點轉至另一直線，並且不能經同城市兩次，且每三條路線不可交於一點，欲找出最少之連線與交點數之方法。

(一)、最少連線數：

在兩城市中，以較多公司城市的公司數爲連線數，如圖 1，連線數爲五條。

(二)、最少交點數：

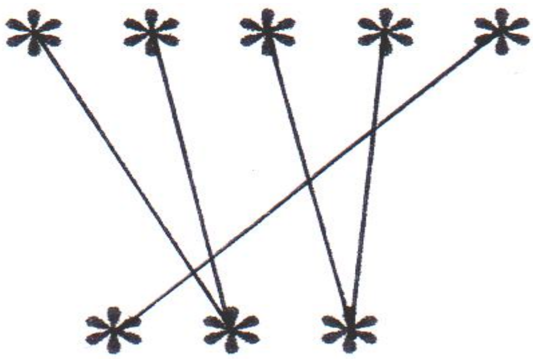

圖 1

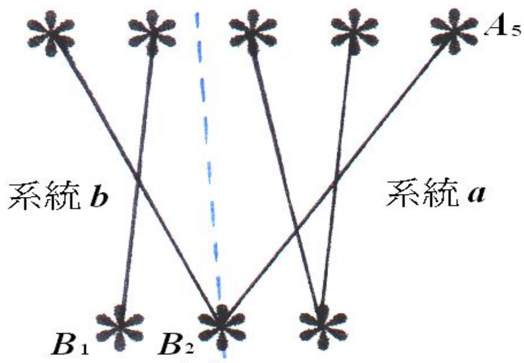

圖 2

1.步驟一：找出不合於條件之可能連線法，再加以排除。如圖 2：

若兩系統僅由一點一折線相連（系統獨立）連線法將不合乎原條件。

∵若系統 *a*(虛線右邊)之 A_5 公司欲至系統 *b*(虛線左邊)之 B_1 公司，必經 B_2 公司，則不符合原條件，即不能經同城市兩次，故不合。排除此條件後，其餘皆符合。

2.步驟二：討論。〈以公司數 6 和 4 爲例，並以圖 3 的公司 B_1 爲準〉

(1).討論 1.：

圖 3 爲排除系統獨立之連法，且藍色公司若欲連至綠色公司，至少要經過紅線一次，即交點數至少爲 5x1 點。

由此，得知結論 1：

若有 m 個公司需經紅線與另一城市之公司相連，則交點數至少為 $m\times1$ 點。

如圖 4-1：

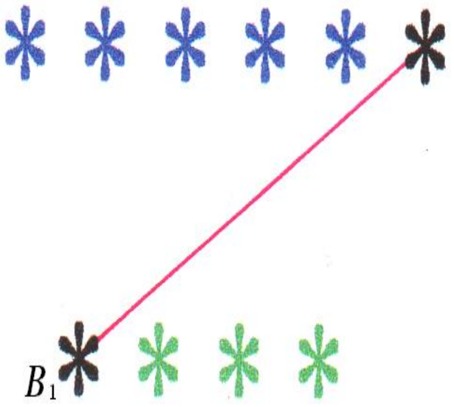

圖 3

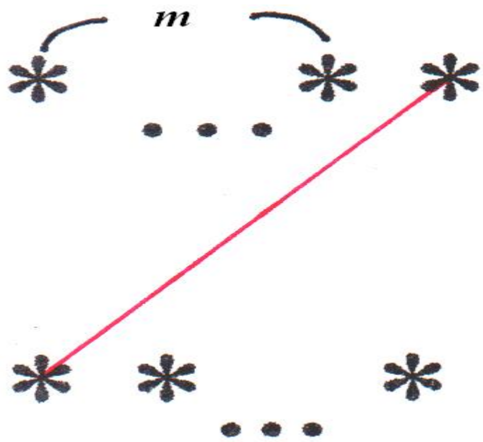

圖4-1

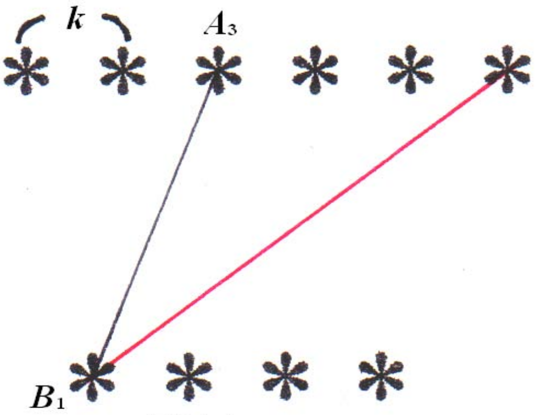

圖 4-2

但不一定 m 個公司皆與紅線相交，如圖 4-2：

A_3 公司亦與 B_1 公司相連，則總交點數將變為 2x2+2x1=6＞5

由此，得知結論 2：

若在只有紅線連接的情況下，再使 m 個公司裡有一個公司所連接的線路與紅線的交點數為零，則剩下之公司交點數變為 $k\times2+(m-k-1)\times1$，如圖 4-1 及 4-2：

設 k 為線路 BA_3 左側的公司數

將結論 1 中的 m 與結論 2 中的 $k\times2+(m-k-1)\times1$ 相比，其中 $k\geq1$:

i.若 $k=1$，則兩結論中的交點數相等

ii.若 $k>1$，則$[k\times2+(m-k-1)\text{x}1]>m$，且交點數相差了$(k-1)$個，所以結論 2 中的交點數會多於結論 1

由上述可知：

因為紅線恰只有 1 條又因為 k 為正整數，所以 $k=1$

所以結論 2 中的交點數會多於結論 1(∵若 k=0，會導致系統獨立)

若使紅線及 $L1$ 之間的任一公司交點數為零，如圖 6：

先只看虛線右邊，在右側系統中紅線有一條又 $k=1$，與圖 5 交點數不變。但若看虛線左邊，A_1 點變成有 3 個交點，即整體而言交點數變多。

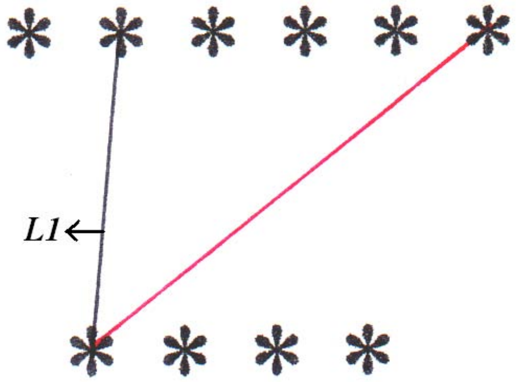

圖 5

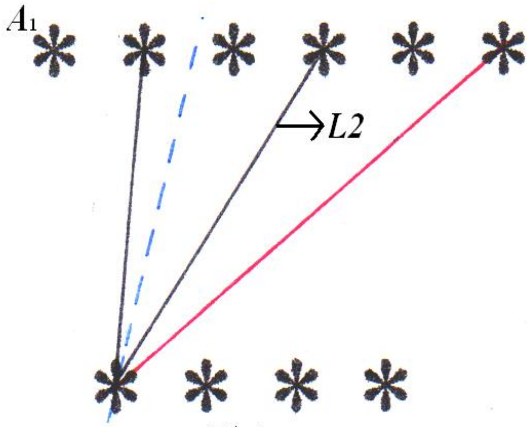

圖 6

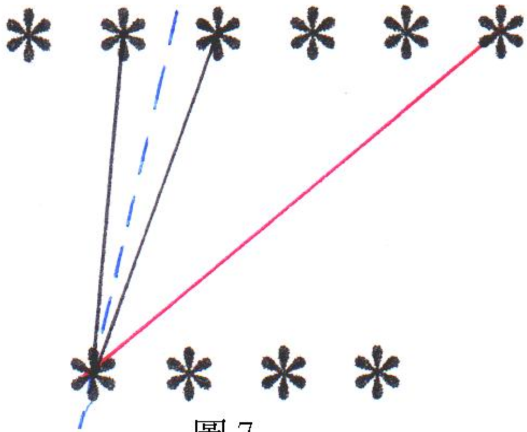

圖 7

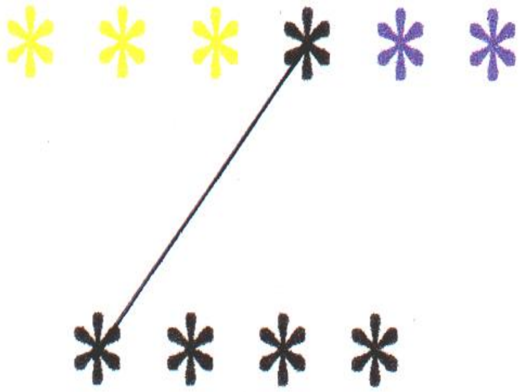

圖 8

也有第二種可能，如圖 7：

虛線右邊的紅線數為一條且 $k=0$，與圖 5 中右側的交點數少 1 個，但若看虛線左邊，則交點數多一個。由此可得定理 3：

若第一條連線即排除了系統獨立之可能，則最少之交點數為：較多公司城市之公司數-1

(2).討論 2.：

圖 8 為未排除系統獨立之連法。

i.步驟一：如何排除系統獨立？

如圖 9，使黃色公司群其中一個公司之連線，與紫色公司群其中一公司的連線產生一交點，如上圖，此點為 S 點。如此，上面城市若欲到達下面公司的城市，即可利用 S 點轉接，而不須經同城市兩次。

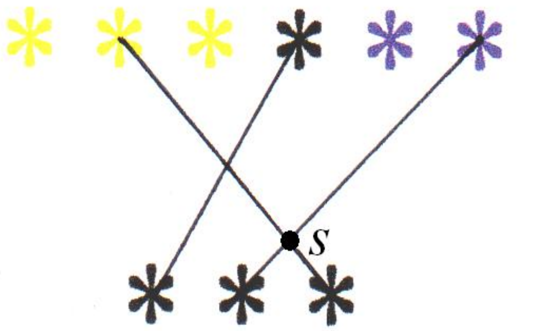

圖 9

ii.步驟二：(以公司數 8 和 4 爲例，左下角之公司 B_1 爲基準)

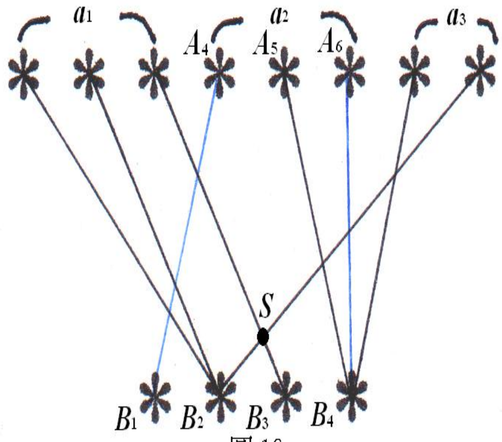

圖 10

如圖 10，若連接 B_1 公司與 B_4 公司的兩線路(藍線)互不相交。依照討論一的結論，a_1 公司群欲產生最少交點數，必須向 B_1,B_2 ,B_3 公司相連(如上圖爲其中之一種可能）。而 a_3 公司群需連向 B_3 或 B_2 或 B_1 公司，且至少有一個公司須與 B_3 相連（依照步驟一)，即與 a_1 公司群連向 B_2 之線路產生一交點 S，而 a_2 公司群產生的最少交點爲一個。

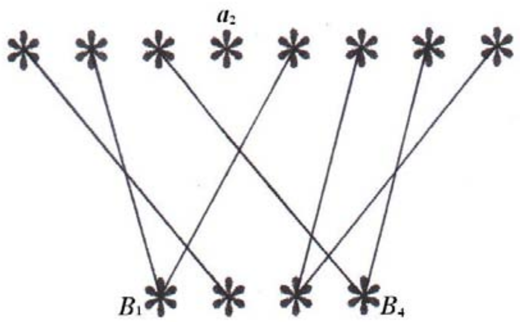

圖 11

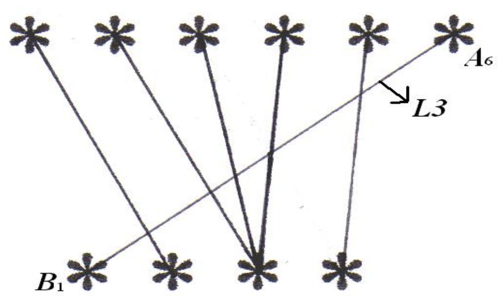

圖 12

如圖 11，若連接 B_1、B_4 公司的兩線路相交。a_2 公司群的交點數將變成兩個。
總交點數變爲(較多公司城市之公司數-2+2)＞（較多公司城市之公司數-2+1）
故非我們所求。
將公司數 8 和 4 同理推廣至公司數爲任意正整數。
由此，得出***第二個結論：***
討論二的最少交點數爲
(較多公司城市之公司數-2+1)=(較多公司城市之公司數-1)
→最少交點數爲(較多公司城市之公司數-1)
(三)、轉接次數：
在兩城市各有固定公司數量，並且在最少條線路及最少交點數的情況下，求得一畫法，使得從一公司到任一公司在最有利的情況下(不繞遠路)有最少的交點數，並求得另一畫法，有最多的轉接次數。
定義：(1)轉接指的是可以經由相交的兩線路的交點，轉移至另一條線路。
(2)→：代表轉一次

(3) 上 A：指上面城市左邊數來第 A 間公司
下 B：指下面城市左邊數來第 B 間公司
頭公司：指下面城市最左邊的公司
尾公司：指下面城市最右邊的公司

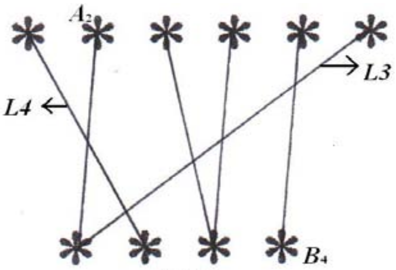

圖 13

1.最少轉接次數：

出發公司→$L3$→目的公司

我們發現在此種畫法下有最少的轉接次數爲：2 次，如圖十二。

但在圖十三的情況下，從 A_2 公司到 B_4 公司的路徑爲：

出發公司→$L4$→$L3$→目的公司

→在 B_1 連至 A_6，且 A_6 只接一條線路的圖形中，若排除系統獨立且有最少條數及交點數的限制下，即有最少轉數的連接方法。

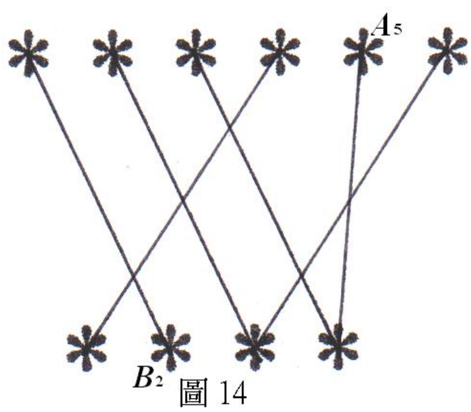

圖 14

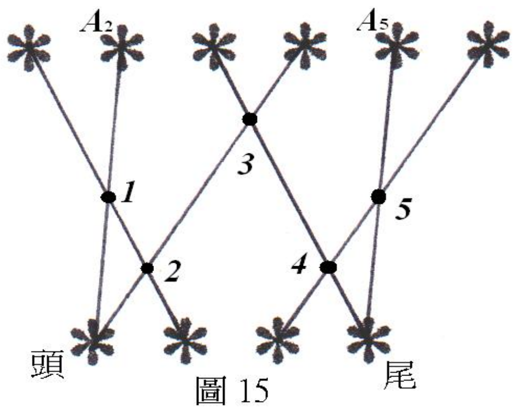

圖 15

2.最多轉接次數：

(1).需產生最多的轉接次數，即每個交點都要經過。可得其條件爲：

i.一條線路最多只能有兩個交點。因爲若一條線路有三個交點，如圖十四：(上五爲 A_5，下二爲 B_2)

由圖十四知：A_5 公司要到 B_2 公司會跳過第二個點，這樣就不會每個交點都轉接到。所以，一條線路最多只能有兩個交點。

ii.較少公司數的城市的頭公司或尾公司不能同時連接兩個線路，如圖十五：

(i).若由較多公司的城市出發：

a 公司至尾公司有兩種走法，又因爲頭公司有接兩條線路

∴會產生兩個交點，導致若要到尾公司可不須經 5

(ii). 若由較少公司的城市出發：

頭公司至 A_5 公司有兩種走法，又因爲頭公司有接兩條線路

∴會產生兩個交點，導致若要到 A_5 公司可不須經 1、2。

故由 i、ii 知，若頭公司和尾公司都同時接兩條線路，則無最多轉接次數的情況因爲如果照此畫法，出發或目的的選擇就有兩種，不會每個交點都轉接到。

iii.較少公司數的城市的頭公司或尾公司不能同時有一個點連接兩條線路，且另一個點又和兩條線路相交產生兩個交點，如圖十六：綠色線路有兩個交點，也會有兩種選擇，又如上述(2)知，此圖不合。

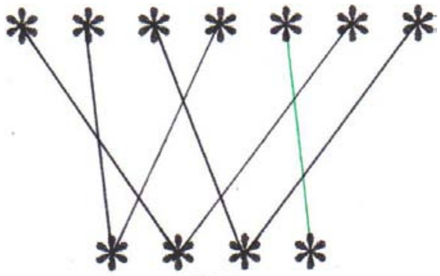
圖 16

但若尾公司左邊的公司只連接一條線路，此種畫法是成立的，如圖十七： 如此出發點可由 B_5 公司出發。

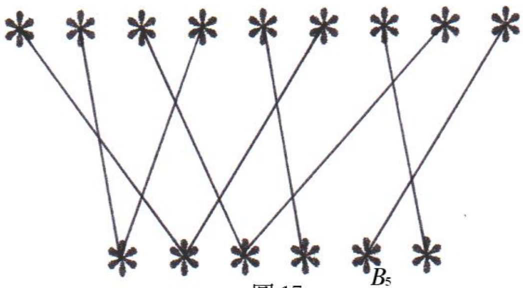

圖 17

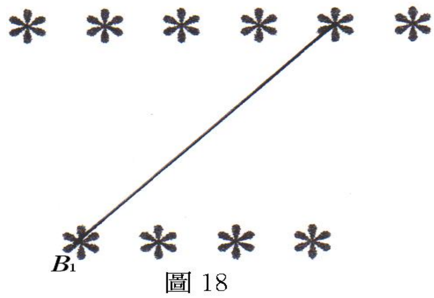

圖 18

(2).畫法：

如圖十八：

若連接 B_1 公司的線路左邊有四個公司以上，則會使連接 B_1 公司的線路產生兩個以上交點，故不合。所以，連接 B_1 公司的線路左邊只能有三個公司以下。

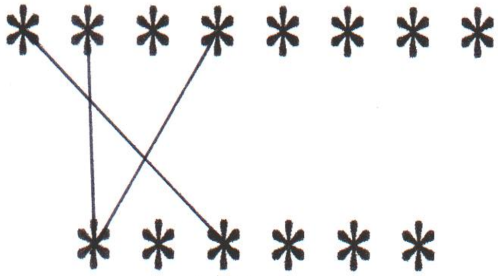
圖 19

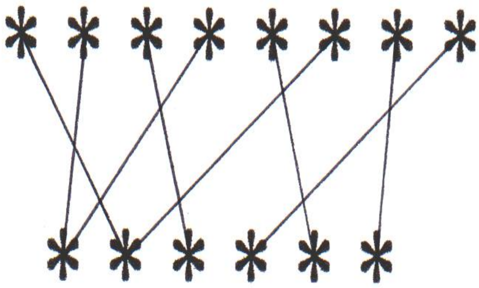
圖 20

1.

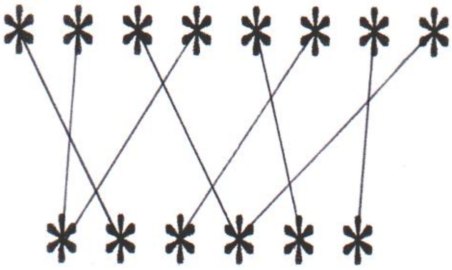
圖 21

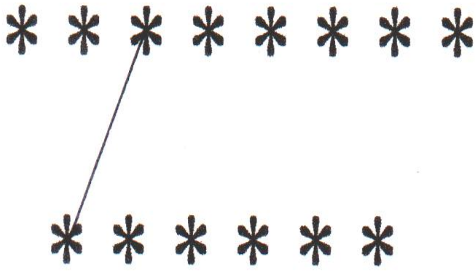
圖 22

如圖十九，上二連到下一，爲了避免系統獨立及要符合先決條件所畫出的圖可得到圖 20 和圖 21

ii.如圖二十二，上二不能連到下一∵若上二連到下一(圖二十三)，則上一即使連到下二也已經產生兩個交點了∴不能再和別條線相交，這樣就會導致系統獨立。

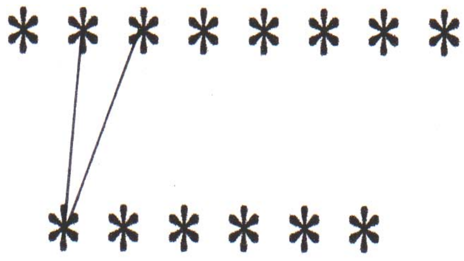

圖 23

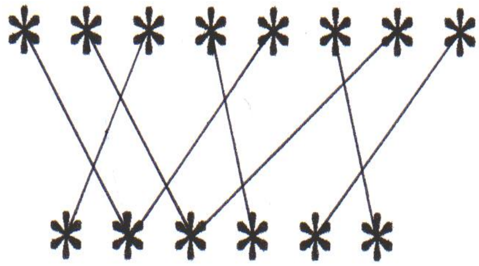

圖 25

故上二只能連到下三，爲了避免系統獨立及要符合先決條件所畫出的圖可得到圖25

→由 i.ii.知：若要產生最多的轉接次數，我們發現，須以交叉式的畫法來連接公司間的線路。

三、綜合上述，我們推測只要條件符合大城市(公司數較多的城市)的公司數目減小城市(公司數較少的城市)公司數目≤小城市公司數目減 1，即能依照上述的畫法畫出符合最多轉接次數的線路的圖。但是，我們以公司數７與４爲例，發現怎麼畫都畫不出來。於是我們進一步探討，當大城市公司數目減小城市公司數目＝小城市公司數目減 1 時，是不是也會不符合。

(一)討論：

當大城市公司數目爲偶數時，我們令其爲 $2n$，且小城市公司數爲 k 時，$2n-k=k-m$ （其中的 m 爲小城市中只連接一條線路的公司數）

整理而得：$k-n=\frac{m}{2}$

∵在圖形中，小城市不可能同時接兩條線路

$\therefore 2k>2n \Rightarrow k>n$，故 $\frac{m}{2}>0$

則 $m=2，4，6，8\ldots$

由此得知：若大城市的公司數爲偶數，則不會產生大城市公司數目減小城市公司數目＝小城市公司數目減 1 的問題。

當大城市公司的公司數爲奇數時，我們令其爲 $2n+1$，$n=0，1，2\ldots$

當小城市公司數爲 k 時，$2n+1-k=k-m$

經過整理可得：$k-n=\frac{m+1}{2}$，$m=1，3，5，7\ldots$

由此得知：若大城市公司數爲奇數時，則會產生大城市公司數目減小城市公司數目＝小城市公司數目減 1 的問題。所以，我們必須進行討論。

我們先來看一個例子，如圖三十二：

圖中畫紅色的線路，兩線間的公司加上左側紅線上的公司有 2 個公司，而最後一

個 v 字形，有六個公司，所以，若要公司數剛好符合在 v 字形內，較多城市公司數需爲偶數。
若爲奇數，則會剛好在 v 字形外多一個公司。如圖三十一：L 會有兩個交點。
由此，我們得知：若爲奇數，則會剛好在 v 字形外多一個公司，L 會有兩個交點。如此就不符合先決條件，故不合。
綜合以上，我們得出一個結論：
→要形成最多轉接次數的圖形，只要符合大城市公司數目減小城市公司數目＜小城市公司數目減 1 的條件即可。

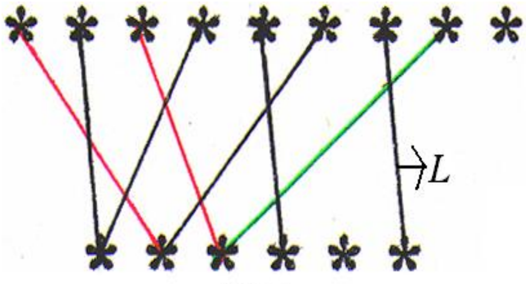

圖31

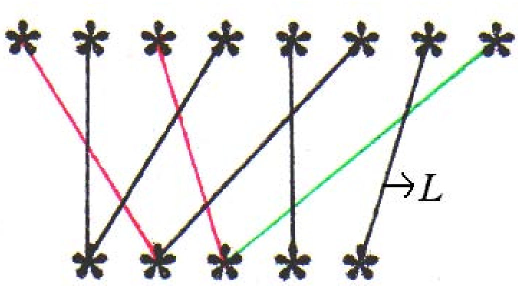

圖32

經由上述結論，我們發現有些公司數目在最有利的條件下沒有**最多轉接次數等於交點數**的可能，所以我們想要進一步找出這些公司數構成的線路圖，最多可以轉幾次。說明：(以圖三十三爲例)

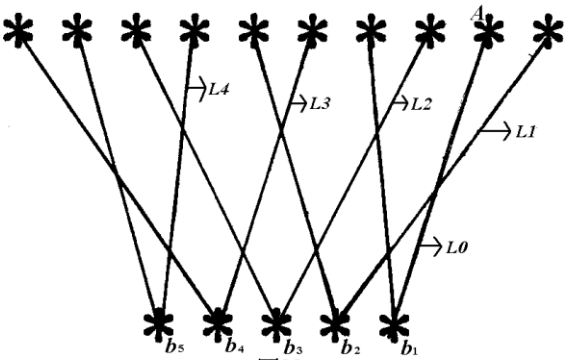

圖33

以圖三十三中的 A 公司到 b_5 公司爲基準(因爲若要構成最多轉接次數必須避免走不到某些交點，所以我們選擇大城市右邊數來第二個或左邊數來第二個公司)

(1) 因爲從任一公司出發必可到達另一公司，所以 A 公司的連線(L0)會與「連接下面除了 b1 的公司線路」(如圖中此線路即爲 L1)產生交點，則 A 可順著 L1 走，又爲了避免碰到 b2 公司，所以要走出 L1，這樣就會在 L1 上轉兩次。
(2) 走出 L1 後<u>必定會碰到連接下面除 b1、b2 的線路</u>(如圖中此線路即爲 L2)，同(1)的理由，在 L2 上必須轉兩次。
(3) 同(1)中理由，再連接 b3、b4 的線路上個轉兩次。
(4) 最後走到了連接目的公司(如圖中此線路即爲 L4)只需在 L4 上轉一次。
(5) 綜合(1)~(4)，我們發現圖中最多的轉接次數是[(5-2)x2+1x1]=7 次。

由圖中公司數推廣到全部沒有最多轉接次數等於交點數的公司數，同理得到了結論：若公司數不能畫出最多轉接次數等於交點數，則最多轉接次數爲[(小城市公司數-2)x2+1]次。

四、研究主題四：

若在兩個城市中有線路連接，則在兩城市公司數量一樣並且交點數爲最少的情況下，我們將此兩城市的公司排成兩平行直線，並將同城市中兩兩公司之間以及兩城市的距離設定爲一定值(如圖三十四)，則哪一種畫法能使得總線路長度有極小值？

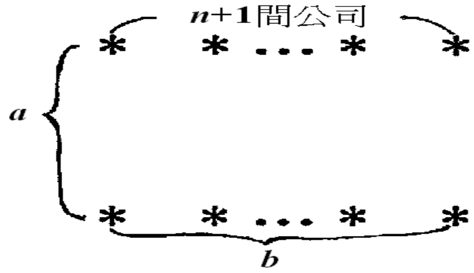

圖34

定義：1 兩城市間距離爲 a

　　　2 一城市中，兩公司的最大間距爲 b

1.我們設想最多轉接次數的畫法其總路線長度爲所有畫法中最短的。

在兩城市公司數量都爲 $n+1$ 的情形下∵轉接次數較多的圖型中，有兩條線路爲連接其對面城市公司的鄰公司∴其線路長度在計算上這兩條線路其底邊長爲兩公司之間之距離($\frac{b}{n}$)，我們定義此爲「空一格」，又扣除這兩條線路之後，其餘的線路皆爲底邊空兩格，又因爲要改變圖形的畫法一次至少要改變兩條路線，所以我們要得知若以最多轉接次數的圖形爲本，改變其線路的畫法不可能使線路長度變短，以下就是排除路線變短的可能。

(1) 圖形中沒有辦法畫出長度爲 a 的線路，即一城市的公司連接其對面的公司：

證明：若在圖形中有線路長度爲 a，此時爲避免系統獨立，則此線路的左側須有一線路與此線相交連至右側的公司，此時因爲公司數量相等的情況下，兩城市各有多出一公司分別在此線路兩側，所以需再加以連接此兩線路，而這樣連接下來就會使得總交點數多一個，與已知的最少交點數不符，所以沒有此種畫法。

(2) 若將空兩格的線路改成空一格，則總路線長度會變長：

證明：因爲公司數固定，所以只要改變一條線路則至少需改兩條以上，又若將其中某些條線路改爲空一格，爲避免系統獨立，則與此條線路交的線不能爲空一格的線至少需空兩格，但因爲最多轉接的畫法其圖中已有兩條空一格的線路在圖的首尾，若須在圖的中間部分更改，則與空一格線路相交的線其爲不只空兩格的線才有可能畫出，若一次改 $x+3$ 條，扣除系統獨立的可能之後，則改後最短長度的畫法爲一條空 $x+2$ 格、兩條空 2 格和一條空 x 格，以下證明即求得 $x+1$ 條空 2 格的總長度會小於改變畫法後可能的最小長度：

證明：$x+1\sqrt{a^2+\left(\frac{2b}{n}\right)^2} \quad < \quad \sqrt{a^2+\left[\frac{(x+2)b}{n}\right]^2}+x\sqrt{a^2+\left(\frac{b}{n}\right)^2}$

$\Rightarrow (2x+3)(a^2b^2n^2+b^4)+x^2a^2b^2n^2>0$

∵x、a、b、n 恆爲正值，故上式成立，即 $x+1$ 條空 2 格的總長度會小於改變畫法後可能的最小長度。

由上述知，排除了變更線路將使總長度變短的可能，因而得知最多轉接次數的畫法其線路總長度會有最小值。

伍、結論：

1.在 a 個城市 b 間公司當中，每個城市至少有 n 間公司，若要求得最少條線路，即將 a-1 個城市各配 n 間公司，剩下的一個城市配到剩下所有的公司數，此即爲最少條路線的分配方法，且這種安排產生的最少條線路爲 $\frac{1}{2}n(a-1)(2b-na)$ 條。

2.在 a 個城市 b 間公司當中，每個城市至少有 n 間公司，若有幾個城市有限定的公司數，我們發現只要將所限定的公司數量由小排至大，並按照前 a-1 個城市分配個別的公司數，剩下的均分給限定數目最大的公司，此種分法可求得最少條線路。

3.若兩城市之公司排成兩平行直線，且從任一公司出發，恆可到達另一城市之任意公司，一直線可經由兩直線之交點轉至另一直線，並且不能經同城市兩次，且每三條路線不可交於一點。

(1)最少的線路條數爲：兩城市中，較多公司城市的公司數。

(2)最少的交點數爲：兩城市中，較多公司城市的公司數-1 個。

(3)最少的轉接次數(兩次)的畫法:所畫的第一條線路及排除系統獨立。

(4)最多的轉接次數(每個交點都轉接到)：在兩城市的連線數及交點數有最小值的情況下，

如果要使兩城市間的「最多轉接次數=交點數」，條件爲「大城市公司數-小城市公司數＜小城市公司數-1」，如果「最多轉接次數<交點數」，則最多須轉接(小城市公司數-2)×2+1 次。

4.當兩城市的線路爲最多轉接次數的畫法時，總線路的長度會有最小值。

陸、未來展望：

1. 在研究主題一中，將公司改以 n 邊形或封閉曲線排列
2. 研究主題三可由 2 個城市推廣到 n 個城市。

【評語】040405

1) 科展作品必須附加參考資料，其目的在於告訴讀者該研究的思路來源。爲了說明本作品並非閉門造車，作者實在需要多下功夫進行資料搜索。

2) 科展重視文字及口語表達的邏輯性、精準性、簡潔性等。數學研究往往把畫龍點睛的精彩結果尊稱爲「定理」。作品中的「定理」呈現出「已知」、「求證」、「證明」三者拖泥帶水的局勢，實在爲本研究的品質帶來減分作用。