中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040403

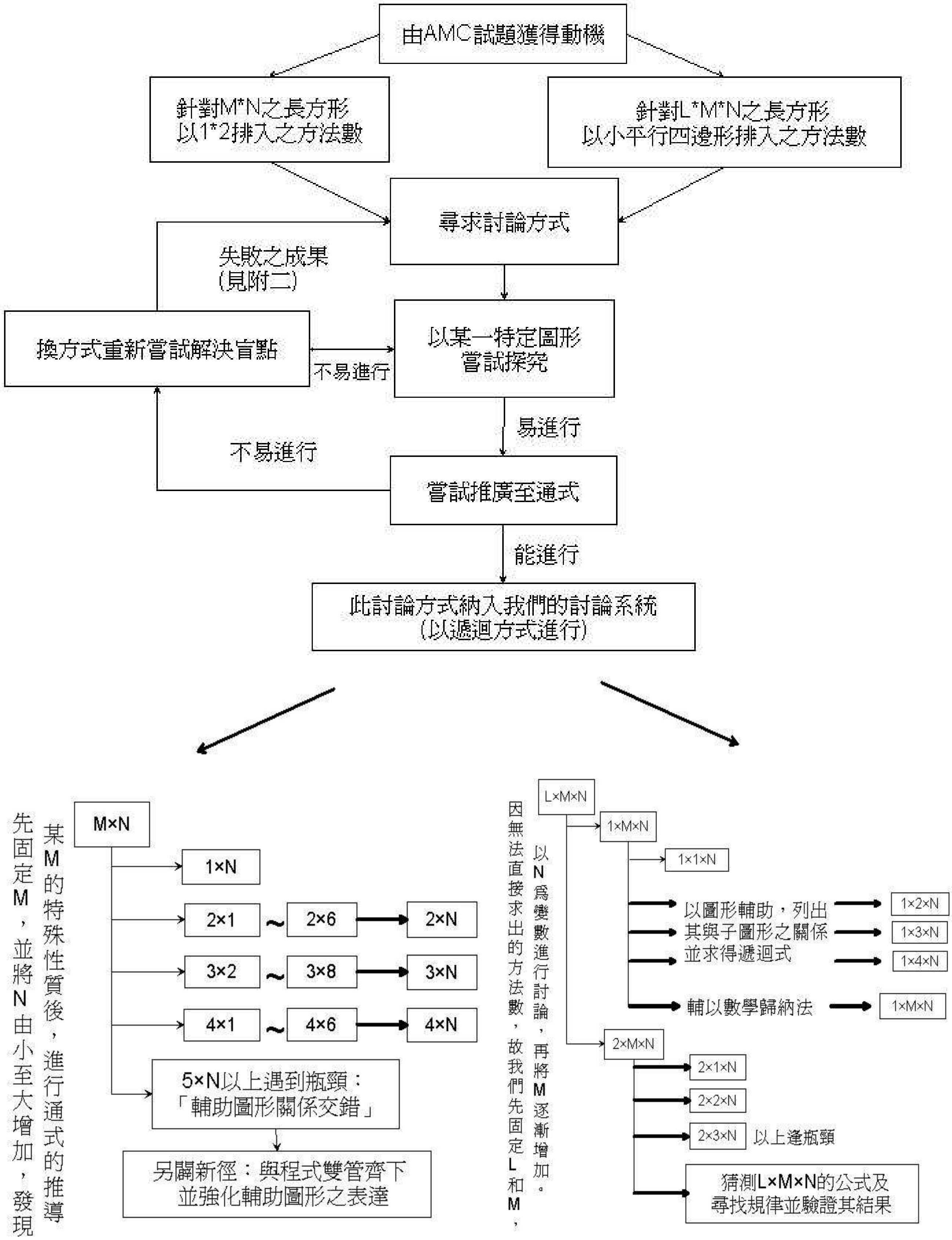
拼出詭譎--變幻莫測的地磚

學校名稱：國立武陵高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳和謙 高二 張翊宇 高二 賴儁睿 高二 李羿廷	王埄彬

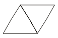
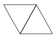
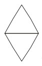
關鍵詞：　地磚、遞迴、費氏數列

總體流程圖：


由AMC試題獲得動機
針對M*N之長方形
以1*2排入之方法數
針對L*M*N之長方形
以小平行四邊形排入之方法數
尋求討論方式
失敗之成果
(見附二)
換方式重新嘗試解決盲點
不易進行
以某一特定圖形
嘗試探究
易進行
不易進行
嘗試推廣至通式
能進行
此討論方式納入我們的討論系統
(以遞迴方式進行)
先固定M，並將N由小至大增加，發現
某M的特殊性質後，進行通式的推導
M×N
1×N
2×1
2×6
2×N
3×2
3×8
3×N
4×1
4×6
4×N
5×N以上遇到瓶頸：
「輔助圖形關係交錯」
另闢新徑：與程式雙管齊下
並強化輔助圖形之表達
因無法直接求出的方法數，故我們先固定L和M，
以N爲變數進行討論，再將M逐漸增加。
L×M×N
1×M×N
1×1×N
以圖形輔助，列出
其與子圖形之關係
並求得遞迴式
1×2×N
1×3×N
1×4×N
輔以數學歸納法
1×M×N
2×M×N
2×1×N
2×2×N
2×3×N
以上遂瓶頸
猜測L×M×N的公式及
尋找規律並驗證其結果

摘要：

（一） 對於M×N平方單位的長方形，以1×2 或 2×1 的長方形填入並拼滿，所具有的組合方法數。

（二） 討論對於以、、拼滿L,M,N為三邊長且三組對邊平行且各組對邊相等的六邊形的所有組合方法數。

壹、研究動機

在導師的建議之下，我們全班報考了AMC12級測驗，其中有這麼一個題目：

26. 用 9 塊 1x2 的磁磚可在牆上鋪成一塊 3x6 的區域。請問要鋪成這塊 3x6 的區域共有多少種不同的方法？

在考完試後的小組會議中，我們發現了這看似不怎麼具有挑戰性的一道試題，竟成了每個人的絆腳石——幾乎全班都有寫出答案，但竟沒有一個是正確的。
事實上，這是整份考卷中最難的一題，同時也是最有推廣領域的一項題材。

雖然後來我們幾人研討出了正解，而且有各式各樣的分配方法(AMC的參考解答亦是一種)，但每種討論方法總都欠缺些許的邏輯性，也就是說，極易漏掉一些討論情形，或是重覆。於是，我們便以尋找「最有系統」且「易於推廣」的方式為目標，並試圖將3*6推廣成其它大小，開始了我們的科展。

貳、研究目的

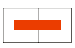
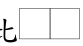
推廣這類地磚問題，找出以固定形狀之小圖形為基本單位，並移動與旋轉填滿某大圖形的方法數，更進一步尋求通解，並尋找子母圖形之關係。

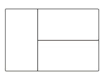
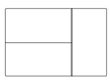
參、研究過程

我們試著先以長方形邊長為變因，保持一塊地磚1×2的大小，訂出遠程的目標為：

一、 對於M×N平方單位的長方形，以1×2 或 2×1 的長方形填入並拼滿，所具有的組合方法數。

為了清楚及方便表示，先在此說明及定義下列數點：

(1). 設**每塊地磚相同**。往後以表示在此的地板上，已貼上一塊地磚。

(2). 此地磚圖形作旋轉其結果視為相異，如： 與  視為2種情形。

(3). 易知**M×N與N×M的長方形所求地磚組合數相同。**

(4). 當M,N皆為奇數時，組合數=0

對於矩形的長及寬以及該矩形的組合數，賦予函數的性質：

(1). 一種長寬的表示法對應一種長方形且擁有唯一不變的組合數。

(2). 並以長寬的表示法(M, N)對應縱向邊長為 M 單位，橫向為 N 單位，且擁有唯一不變的組合數為 $\boxed{M\times N}$ **。**

(一)、(1,N)：

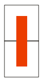
易知，當 N 爲奇數時無法成立，而當 N 爲偶數時無論大小一律只有一種組合數。

因爲無法直接求出 M×N 的方法數，我們先以 N 爲變數 M 爲定數進行討論，如：先求出 2×N。而在求出 2×N 的方法數之前，我們必須從(2,1) 、(2,2)依序開始，並將 N 向上增加，**找出**$\boxed{2\times N}$**與**$\boxed{2\times (N\text{-}1)}$**的關連**，並求出$\boxed{2\times N}$的表示法。我們接著討論 M= 2 的情形：

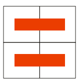
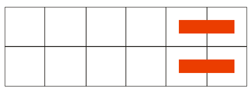
(二)、(2,N)：

推導 $\boxed{2\times N}$ ：

假設一組(2,N)的長方形：

Case 1：於最右端排入一個  ，使成 

則剩餘部分圖形的方法數爲$\boxed{2\times (N\text{-}1)}$ 。

Case 2：於最右端放入一組  ，使成 

則剩餘部分圖形的方法數爲$\boxed{2\times (N\text{-}2)}$ 。

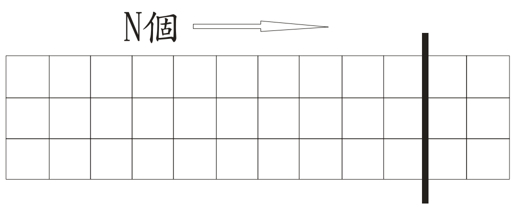
又最右端只有這兩種排入法，故(2,N)的方法數可以表示成：

$$\boxed{2\times N} = \boxed{2\times (N\text{-}1)} + \boxed{2\times (N\text{-}2)}$$

(三)、(3,N)：

在討論(3,N)的方法數前，**我們已知當 N 爲奇數時，無法拼出圖形**，因此，**我們必須從(3,2)的開始以較小圖形討論起。**此省略其過程，直接由過程中獲得的經驗推導 (3,N) 之方法數。

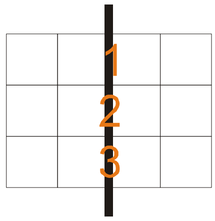
推導 $\boxed{3\times N}$ ：



在進入到(3,N)的階段後，可發現相鄰兩行已不再有如(2,N)般單純的規律，能沿用的只剩(2,N)的遞迴法，亦即在右方分出 (3,N-1) 及 (3,1)，但不跨的方數在此爲 0 ，故稍作修改，使該線在右方分出 (3,N-2) 及 (3,2)，再進行如下討論：

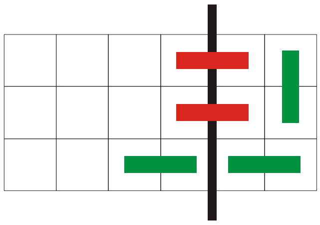
(在這裡，我們定 X_1 為不跨黑線的方法數，X_2 為跨黑線的方法數。)

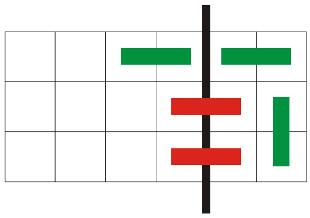
由圖(一)，可知：　不跨黑線的方法數 $X_1 = \boxed{3\times(N-2)} \times \boxed{3\times2}$

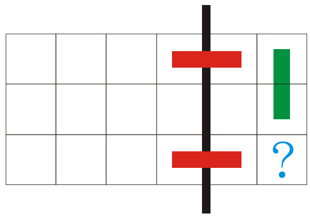


接著我們討論跨黑線之方法數，因任一邊的方格數皆為偶數，我們可以知道跨越黑線的長方形數目必為偶數個。**為了討論方便，我們把可跨越的位置編號**(如右圖)，並將跨線方式分為三種(跨奇數次不成立)：

Case1: 1、2 跨　　Case2: 2、3 跨　　Case3: 1、3 跨





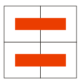


其中**我們以紅色表示該情況的條件，以綠色表示在該條件亦必需遵守的情形。**

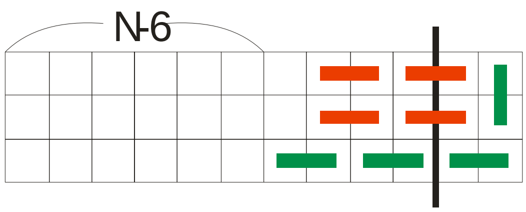
由以上三圖可知 Case3 並不成立，而 Case1 與 Case2 因對稱性可得 Case1+ Case2 = 2(Case1)

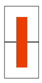
Case1：1、2 跨　→　**再分為兩種情形**

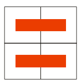
[狀況 1]

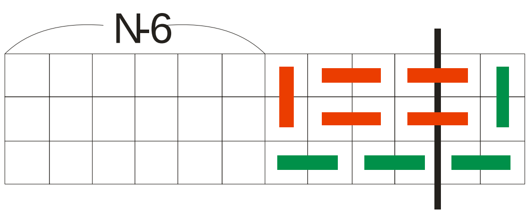
如果右邊填入一組  ，如下圖

則需繼續討論：



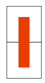
若再填一塊  ，得(3,N-6)，如下圖($\boxed{3\times(N-6)}$)

若再填入一組  時，需繼續討論……

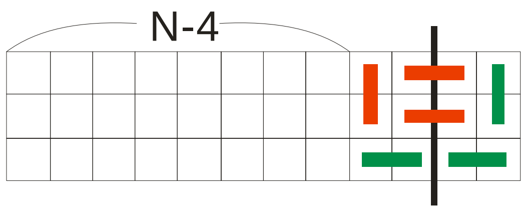


由此類推……

[狀況 2]

但若我們在右邊先填一塊 

得(3,N-4)，如下圖($\boxed{3\times(N-4)}$)



又由 Case1 的討論，可知 **跨的方法數(X_2)**

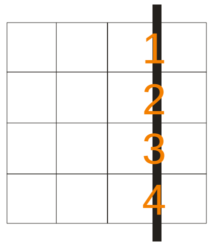
$= 2 \times (\text{Case1})$

$= \boxed{3\times(N-4)} + \boxed{3\times(N-6)} + \cdots + \boxed{3\times2} + 1$

故　(3,N)的方法數 = **不跨黑線的方法數(X_1) + 跨黑線的方法數(X_2)**

於是 $\boxed{3\times N} = \left(\boxed{3\times(N-2)} \times \boxed{3\times2}\right) + 2 \times \left(\boxed{3\times(N-4)} + \boxed{3\times(N-6)} + \cdots + \boxed{3\times2} + 1\right)$

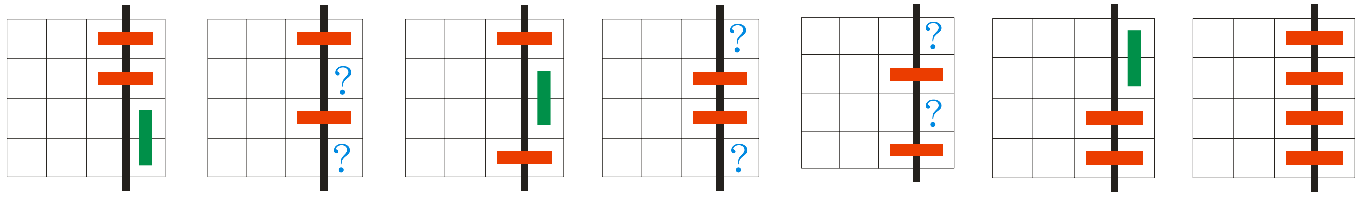
(四)、(4,N)：



仿(2,N)及(3,N)的討論方式，我們以一條黑線將(4,N)分爲(4,N-2)及(4,2)，並討論其跨黑線與否的方法數，同樣地，我們將跨線的部分編號(以後不再說明)：

而討論跨線的情形中，可知(4,N)明顯地比(3,N)增加許多，如下：

Case1: 1,2 跨　Case2: 1,3 跨　Case3: 1,4 跨　Case4: 2,3 跨　Case5: 2,4 跨　Case6: 3,4 跨　Case7:全跨



同樣地，跨奇數次不可能成立，於是依次序討論跨偶數次的各種情形。

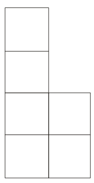
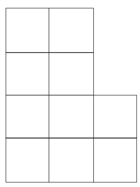
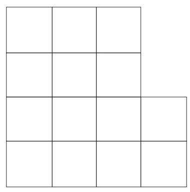
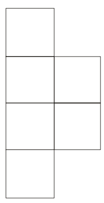
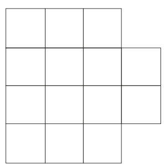
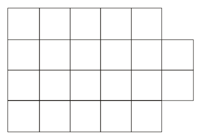
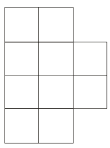
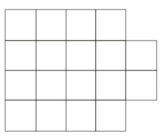
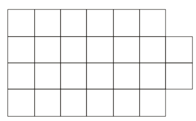
由以上七種情形可知 Case2,4,5 並不成立，而 Case1,6 因對稱性可得 Case1+ Case6= 2×(Case1)

因此，**往後討論時只需探討 Case1 ,Case3, Case7**，最後的結果就是：

$\boxed{4\times N}$ 之 跨黑線的方法數(X_2) = 2 × (Case1) + Case3 + Case7

然而我們接著就發現對於這三種不同情況再討論的情形太多，於是我們必須**針對這 3 種不同的狀況，分別建立屬於各個情況的輔助圖形：**

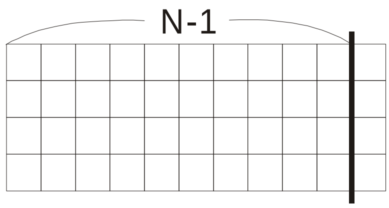
由於輔助圖形像一個家庭般龐雜，爲便於分類，故賦予它們名字，列舉如下：

 X_1：$\boxed{4\times 1}$ X_2：1 A_2	 X_1：$\boxed{4\times 2}$ X_2：A_2 A_3	 X_1：$\boxed{4\times 3}$ X_2：A_3 A_4
 X_1：$\boxed{4\times 1}$ X_2：0 B_2	 X_1：$\boxed{4\times 3}$ X_2：B_2 B_4	 X_1：$\boxed{4\times 5}$ X_2：B_4 B_6
 X_1：$\boxed{4\times 2}$ X_2：1 C_3	 X_1：$\boxed{4\times 4}$ X_2：C_3 C_5	 X_1：$\boxed{4\times 6}$ X_2：C_5 C_8

其個別名稱爲「**輔助圖形系列**最大寬度」，如 A_3 即代表 A 系列最大寬度爲 3 者。

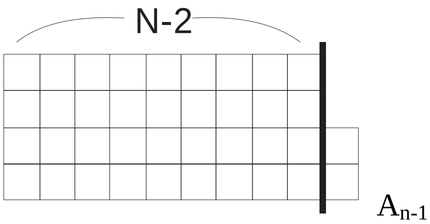
有了輔助圖形，我們的討論變得以簡化，於是現在開始推導 $\boxed{4\times N}$ ：

由右圖，可知 **不跨黑線的方法數(X_1) =** $\boxed{4\times(N-1)}$ $\times$ $\boxed{4\times1}$



跨黑線的方法數(X_2)：(以下示意圖均已省略第一次跨線)

Case1： 1 、 2 跨 (輔助圖形：A 系列)



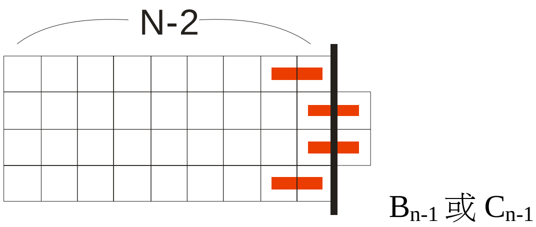
X_1 ： $\boxed{4\times(N-2)}$

X_2 ： A_{n-2}

$$A_{n-1} = \boxed{4\times(N-2)} + A_{n-2} = \boxed{4\times(N-2)} + \boxed{4\times(N-3)} + A_{n-3} = \cdots\cdots$$

$$= \boxed{4\times(N-2)} + \boxed{4\times(N-3)} + \cdots\cdots + \boxed{4\times1} + 1$$

Case3： 2 、 3 跨 (輔助圖形：B 或 C 系列)



X_1 ： $\boxed{4\times(N-2)}$

X_2 ：若 N 是奇數： B_{n-3}

若 N 是偶數： C_{n-3}

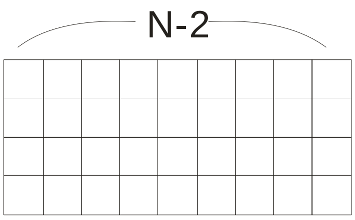
若 N 是奇數： $B_{n-1} = \boxed{4\times(N-2)} + B_{n-3} = \boxed{4\times(N-2)} + \boxed{4\times(N-4)} + B_{n-5} = \cdots\cdots$

$$= \boxed{4\times(N-2)} + \boxed{4\times(N-4)} + \cdots\cdots + \boxed{4\times1}$$

若 N 是偶數： $C_{n-1} = \boxed{4\times(N-2)} + C_{n-3} = \boxed{4\times(N-2)} + \boxed{4\times(N-4)} + C_{n-5} = \cdots\cdots$

$$= \boxed{4\times(N-2)} + \boxed{4\times(N-4)} + \cdots\cdots + \boxed{4\times2} + 1$$

Case7： 1 、 2 、 3 、 4 跨



$\Rightarrow$ 即 $\boxed{4\times(N-2)}$

於是可知：

(4,N)的方法數 ＝ **不跨黑線的方法數(X_1) +** **跨黑線的方法數(X_2)**

(4,N)的方法數 ＝ **不跨黑線的方法數(X_1) +** 2 $\times$ (Case1) + Case3 + Case7

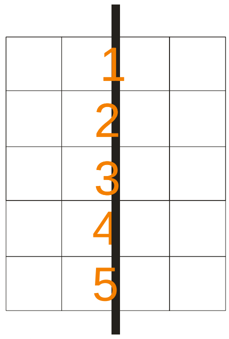
$$\boxed{4\times N} = \boxed{4\times(N-1)} \times \boxed{4\times1} + (2A_{n-1}) + (B_{n-1} \text{ 或 } C_{n-1}) + (\boxed{4\times(N-2)})$$

$$= \boxed{4\times(N-1)} + \boxed{4\times(N-2)} + 2\times(\boxed{4\times(N-2)} + \boxed{4\times(N-3)} + \cdots\cdots + \boxed{4\times1} + 1) +$$

$$(\boxed{4\times(N-2)} + \boxed{4\times(N-4)} + \cdots\cdots + (\boxed{4\times1} \text{ 或 } 1))$$

(五)、(5,N)：

在跨線的情況中，必同時跨 2 或 4 個，否則黑線右側爲奇數，不合。



跨線之分類：

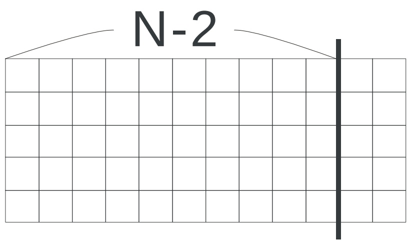
A 類：1,2 跨（4,5 跨)　　D 類：1,2,3,4 跨（2,3,4,5 跨)

B 類：2,3 跨（3,4 跨)　　E 類：1,2,4,5 跨

C 類：1,4 跨（2,5 跨)

如此一來，不可替代的情況已增至 5 個，相較於 m=4 時的 3 個，難度顯然較高。

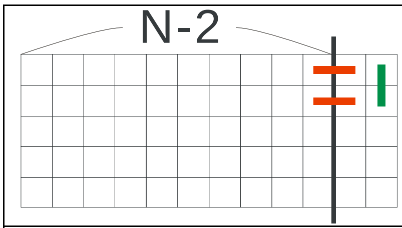
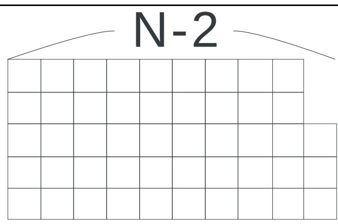
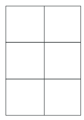
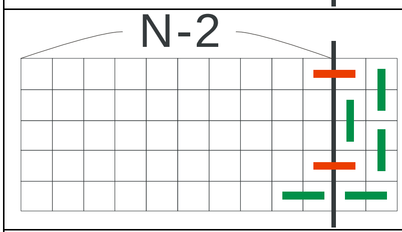
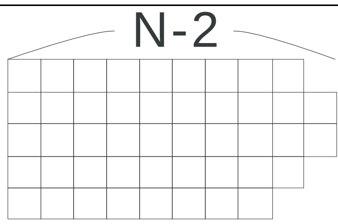
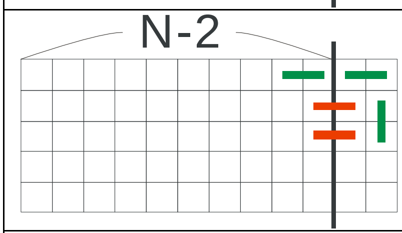
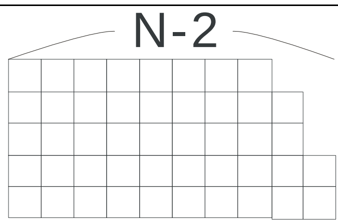
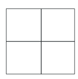
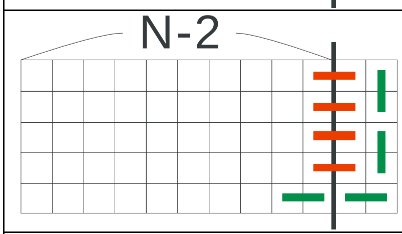
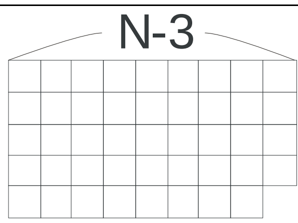
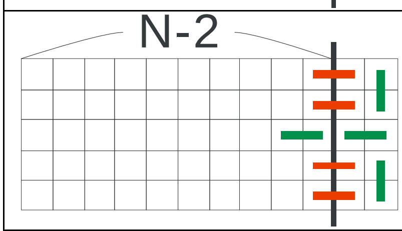
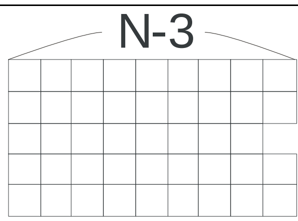
推導 $\boxed{5\times N}$ **：**

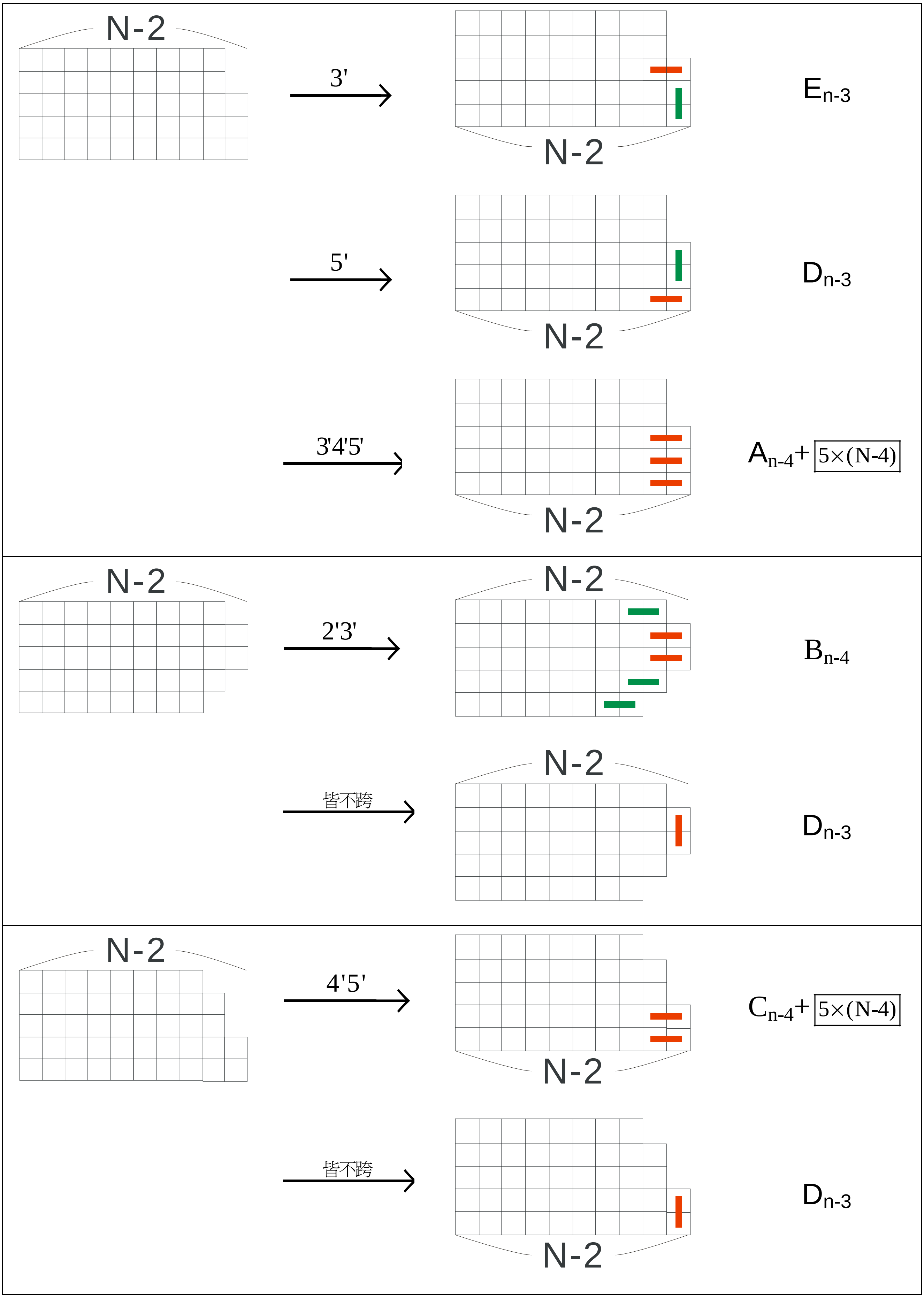


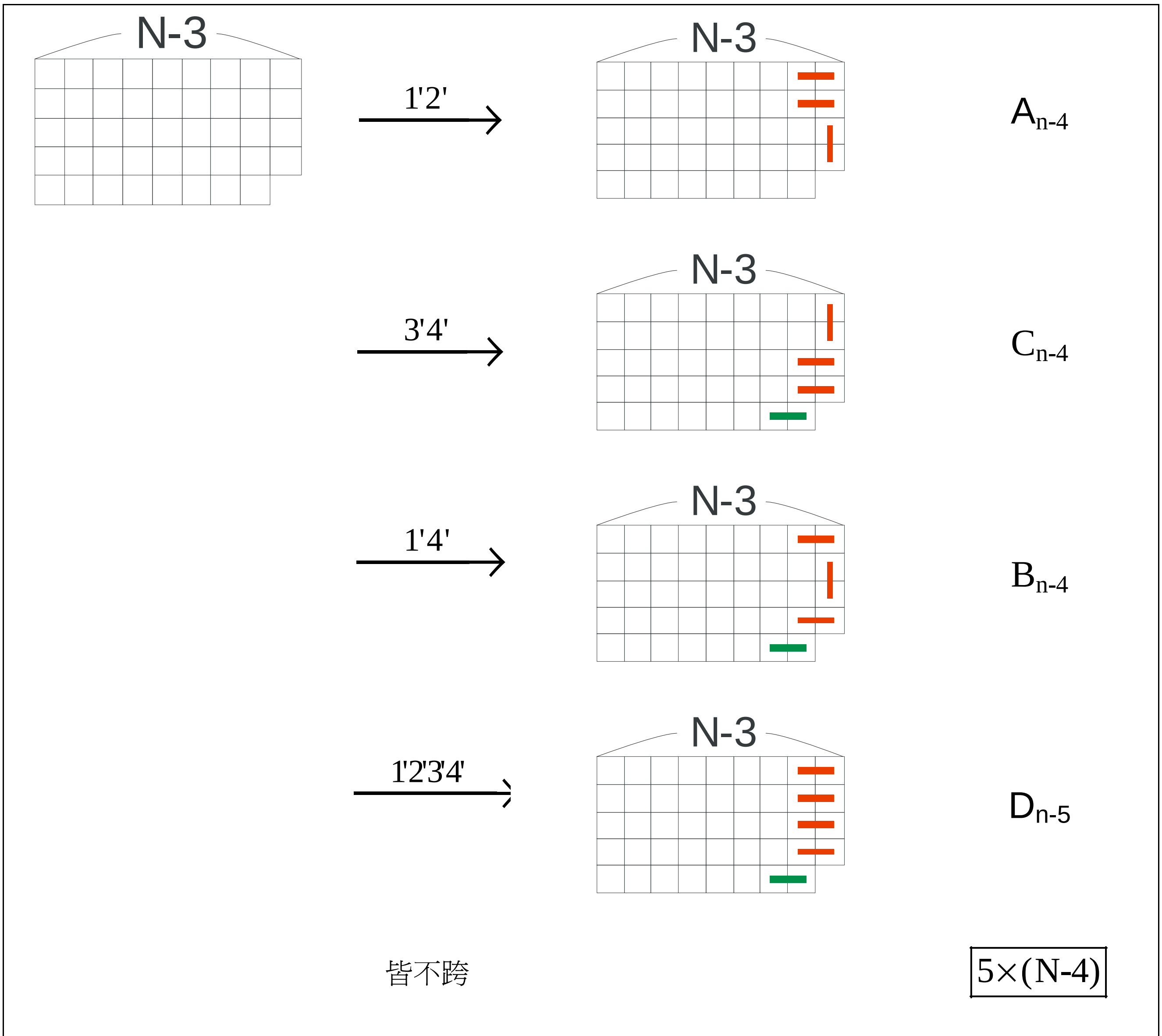
將(5,N)由黑線分隔成(5,N-2)及(5,2)

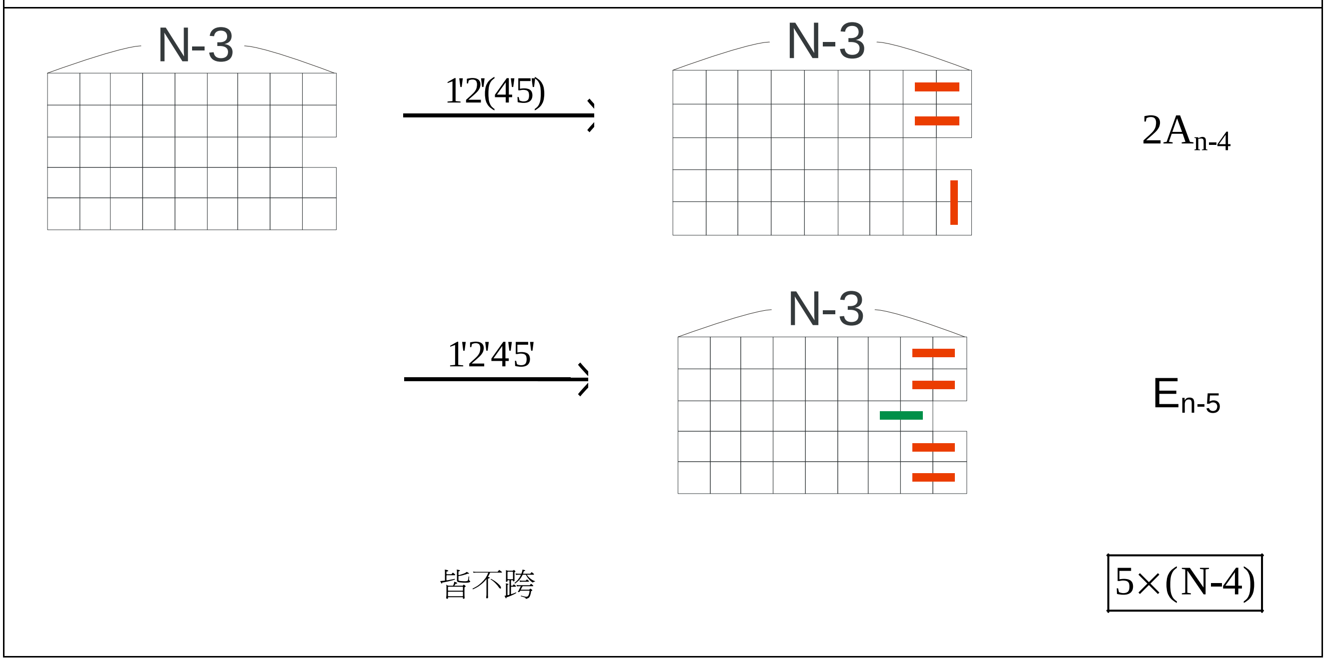
不跨黑線的方法數 X_1 = $\boxed{5\times(N-2)}$ × $\boxed{5\times2}$

而跨黑線的方法數分五大類討論，**每一類子圖形的個別名稱爲「輔助圖形系列**最大寬度」，以下以 **a'** 代表第 a 個位置有「跨」。

	⇒		A_{n-2} × ($\boxed{3\times2}$)
	⇒		B_{n-2}
	⇒		C_{n-2} × ($\boxed{2\times2}$)
	⇒		D_{n-3}
	⇒		E_{n-3}


N-2
3'
E n-3
5'
D n-3
3'4'5'
A n-4 + 5×(N-4)
N-2
2'3'
B n-4
皆不跨
D n-3
N-2
4'5'
C n-4 + 5×(N-4)
皆不跨
D n-3


N-3
1'2'
N-3
A_{n-4}
3'4'
N-3
C_{n-4}
1'4'
N-3
B_{n-4}
1'2'3'4'
N-3
D_{n-5}
皆不跨
5×(N-4)


N-3
1'2'(4'5')
N-3
$2A_{n-4}$
1'2'4'5'
N-3
E_{n-5}
皆不跨
5×(N-4)

$$A_{n-2} = E_{n-3} + D_{n-3} + A_{n-4} + \boxed{5\times(N\text{-}4)} \qquad A_n = A_{n-2} + D_{n-1} + E_{n-1} + \boxed{5\times(N\text{-}2)}$$

$$B_{n-2} = B_{n-4} + D_{n-3} \qquad B_n = B_{n-2} + D_{n-1}$$

$$C_{n-2} = C_{n-4} + \boxed{5\times(N\text{-}4)} + D_{n-3} \quad \Rightarrow \quad C_n = C_{n-2} + D_{n-1} + \boxed{5\times(N\text{-}2)}$$

$$D_{n-3} = A_{n-4} + C_{n-4} + B_{n-4} + D_{n-5} + \boxed{5\times(N\text{-}4)} \qquad D_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1} + D_{n-2} + \boxed{5\times(N\text{-}1)}$$

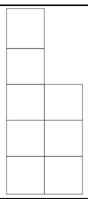
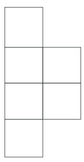
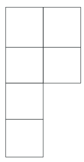
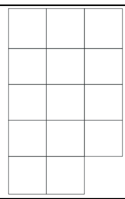
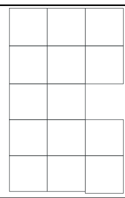
$$E_{n-3} = 2A_{n-4} + E_{n-5} + \boxed{5\times(N\text{-}4)} \qquad E_n = 2A_{n-1} + E_{n-2} + \boxed{5\times(N\text{-}1)}$$

故$\boxed{5\times N} = \boxed{5\times(N\text{-}2)} \times \boxed{5\times2} + 2\times A_{n-2} \times \boxed{3\times2} + 2\times B_{n-2} + 2\times C_{n-2} \times \boxed{2\times2} + 2\times D_{n-3} + E_{n-3}$

$= 8\times\boxed{5\times(N\text{-}2)} + 6A_{n-2} + 2B_{n-2} + 4C_{n-2} + 2D_{n-3} + E_{n-3}$

需特別注意的是：A_n、B_n、C_n 這三數列的 n 值必為偶數，而 D_n、E_n 二數列的 n 值必為奇數，**此代號才不等於 0，亦即此圖形存在至少一種組合數**。而例如 A_3 含有 13 個小正方形，故組合數為 0。

有了 A_n、B_n、C_n、D_n、E_n 及$\boxed{5\times N}$這六條遞迴式後，我們還必須求得各數列的初始值，才能進行「代入」的程序，而其實只要畫圖便可得知各數列的初始值，以下列舉：

代號	A_2	B_2	C_2	D_3	E_3
代表圖形					
組合數	3	1	2	15	15

N 值 \ 數列	A	B	C	N 值 \ 數列	D	E
2	3	1	2	1	1	1
4	41	16	25	3	15	15
6	520	208	312	5	192	192
8	6533	2623	3910	7	2415	2415

其中我們又發現了 D_n=E_n 的現象。

在$\boxed{5\times N}$、$\boxed{6\times N}$以後的跨線情形中，我們並無法像$\boxed{2\times N}$、$\boxed{3\times N}$、$\boxed{4\times N}$一樣單純地分為幾種情形，並由各自獨立的同系列圖形，求得其與本身子圖形的關係，而是輔助圖形關係彼此交錯，我們僅能得到一大組的遞迴式……

(六)、(6,N)：

不跨黑線的方法數 X_1 = $\boxed{6\times(N-1)}$ $\times$ $\boxed{6\times1}$

而跨黑線的方法數 X_2 之中，跨線方式一共有 12 種情形，其中又因其中 8 種兩兩對稱，故最終可簡化成 8 種情形討論，而每類賦予它一個數列的代號：

A：1,2 跨（5,6 跨）

B：3,4 跨

C：1,6 跨

D：1,4 跨（2,6 跨）

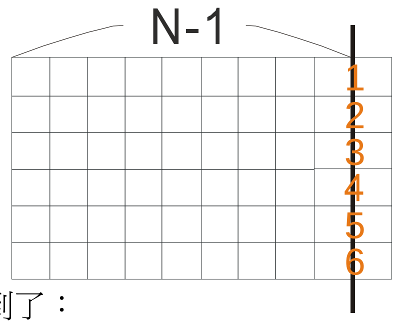
E：1,2,3,4 跨（3,4,5,6 跨）

F：1,2,5,6 跨

G：1,2,3,6 跨（1,4,5,6 跨）

H：$\boxed{6\times(N-2)}$ (全跨)

(H_{n-2} 直接以 $\boxed{6\times(N-2)}$ 表示)



再仿 5xN 的討論方式：一一畫出(但又更繁雜)，我們於 6xN 得到了：

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1} + D_{n-1} + E_{n-1} + \boxed{6\times(N-1)}$$
$$B_n = A_{n-1} + B_{n-2} + X_{n-1} + \boxed{6\times(N-1)}$$
$$C_n = C_{n-2} + 2X_{n-1} + Y_{n-1} + \boxed{6\times(N-1)}$$
$$D_n = 2A_{n-1} + G_{n-1} + \boxed{6\times(N-1)}$$
$$E_n = A_{n-1} + \boxed{6\times(N-1)}$$
$$F_n = X_{n-1} + \boxed{6\times(N-1)}$$
$$G_n = D_{n-1} + \boxed{6\times(N-1)}$$

$$X_n = B_{n-1} + C_{n-1} + F_{n-1}$$
$$Y_n = Y_{n-2} + C_{n-1}$$

$$\boxed{6\times N} = \boxed{6\times(N-1)}\times\boxed{6\times1} + 2\times A_{n-1} + 2\times B_{n-1} + C_{n-1} + D_{n-1} + 2\times E_{n-1} + 2\times F_{n-1} + G_{n-1} + \boxed{6\times(N-2)}$$
$$= \boxed{6\times(N-1)} + \boxed{6\times(N-2)} + 2A_{n-1} + 2B_{n-1} + C_{n-1} + D_{n-1} + 2E_{n-1} + 2F_{n-1} + G_{n-1}$$

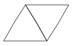
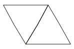
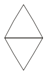
以上共 10 個遞迴式，其中 A,B,C,D,E,F,G 為子圖形直接的衍生圖形，而 X,Y 則為討論中新出線的圖形種類(這是比 5xN 新增加的部份)，而 $\boxed{6\times N}$ 就是我們所求的解。

又為了避免一一將數字由小到大代入如此紛雜的 10 個遞迴式，我們又希望能以較快的速度解出我們所求之值，故我們只要利用 Excel 程式，便能幫入我們輕鬆地達到此項目的。

(如在 A3 輸入 A2+B2+D2+E2+L2，即可代表第一式，

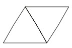
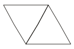
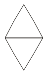
若欲求得 A4，只需將此格之公式向下拉 [其中 $\boxed{6\times2}$ 位於 L2])

另外，觀察自 $\boxed{2\times N}$ 迄 $\boxed{6\times N}$ 之通解，可發現幾乎是完全沒有規律可言，當 M 每增加 1，總會新增加一些其他影響因素或多出更多 M 較小時不需要考慮到的情形，也因此我們無法由這幾個公式中，對 $\boxed{M\times N}$ 提出猜測，於是應可肯定： $\boxed{M\times N}$ 不存在一個通解。

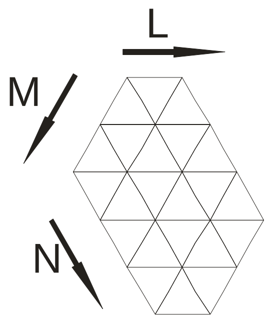
二、討論對於以、、 拼滿 L, M, N 為三邊長且三組對邊平行且各組對邊相等的六邊形的所有組合方法數。

為了方便討論，我們**定義：**

(1). **統一每個六邊形的方向→、↙、↘。**

(2). **規定：→方向的邊長為 L；↙方向的邊長為 M；↘方向的邊長為 N**，並定義**此六邊形的代號為(L, M, N)**，而此**六邊形用**、、**拼出的方法數為** $\boxed{L\times M\times N}$。

說明：



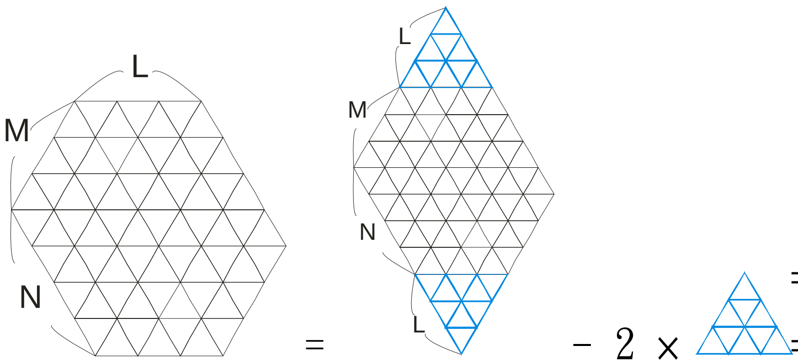
(1). (L, M, N)≠(M, L, N)，因為它們代表不同方向的圖形。

(2). 但 $\boxed{L\times M\times N}$ ＝ $\boxed{M\times L\times N}$，因它們其實為全等圖形。

(3). **當 L、M、N 其一為 0 時，代表的是一個平行四邊形。**

(4). 只要 L、M、N∈ N 且至多恰一為 0，則 **(L, M, N) 所含邊數一單位的三角形必為偶數個**，即 $\boxed{L\times M\times N}\neq 0$

附註：證明(L, M, N)中所含的三角形個數為偶數：



$$=2(L+M)(L+N)-2\times L^2$$
$$=2(LM+MN+NL)\ \Rightarrow \text{偶數}$$

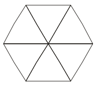
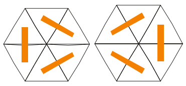
此外，**對於六邊形的表示法，為配合習慣，在文字間用大寫表示，而在算式間無出現 L 時用小寫表示，即 (L, M, N) 與 (l, m, n) 所指為同一圖形 (** $\boxed{L\times M\times N}$ **與** $\boxed{l\times m\times n}$ **亦是)。**

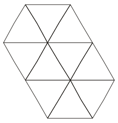
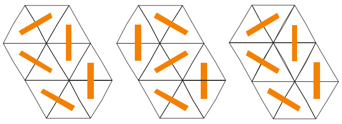
接著我們開始討論排(L, M, N)的方法數，同樣**因為無法直接求出 L×M×N 的方法數，故我們先固定 L 和 M，以 N 為變數進行討論，再將 M 逐漸增加，即：**

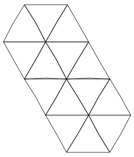
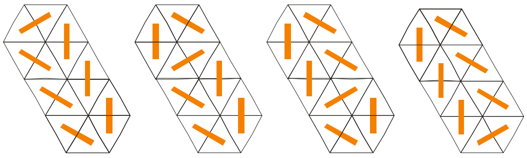
$$\boxed{1\times1\times N}\Rightarrow\boxed{1\times2\times N}\Rightarrow\boxed{1\times3\times N}\Rightarrow\ldots\ldots\Rightarrow\boxed{1\times M\times N}$$
$$\boxed{2\times1\times N}\Rightarrow\boxed{2\times2\times N}\Rightarrow\boxed{2\times3\times N}\Rightarrow\ldots\ldots\Rightarrow\boxed{2\times M\times N}$$
$$\boxed{1\times M\times N}\Rightarrow\boxed{2\times M\times N}\Rightarrow\boxed{3\times M\times N}\Rightarrow\ldots\ldots\Rightarrow\boxed{L\times M\times N}$$

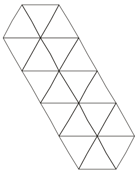
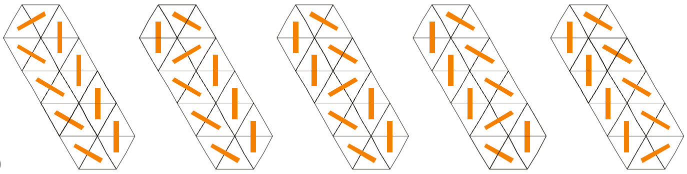
(一)、(1,m,n)：

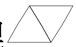
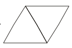
1. (1,1,n)：

 (1,1,1)  ....2 種

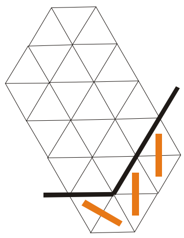
 (1,1,2)  ....3 種

 (1,1,3)  ....4 種

 (1,1,4)  ....5 種

觀察結果發現，排出 (1,1,n) 的方法數，與一個 (1,1,n) 圖形裡形狀的總個數相同，而的個數易知即爲 (n+1) 個，所以 $\boxed{1\times1\times n}$ = n+1

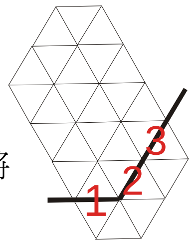
2. (1,2,n)：



(1,2,n) 不易從某一特定的圖形看出其方法數，因此，我們沿用之前討論長方形分區塊的方式，來討論以下的圖形：即討論跨與不跨黑線所得的方法數。

首先，畫一條黑線 (如右圖)，將(1,2,n)分成(1,2,n-1)和另一部分，可知：

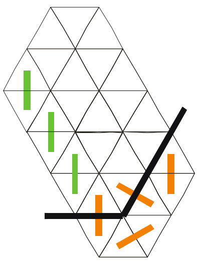
不跨黑線的方法數 X_1= $\boxed{1\times2\times(n-1)}$



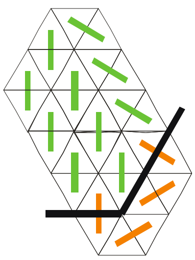
接著我們討論跨黑線之方法數 X_2，因右下方的方格數爲偶數，而每跨一次黑線，黑線以下的三角形個數即少 1，故我們可以知道跨越黑線的小平行四邊形數目必爲偶數個。**爲了討論方便，我們把可跨越的位置編號**(如右圖)，並將跨線方式分爲三種(跨奇數次不成立)：

以下分幾個情況討論：

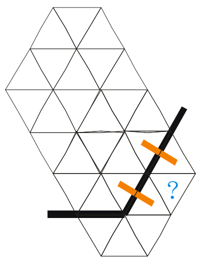
Case1: 1、2 跨 → (1,1, n-1)



Case2: 2、3 跨 → 1 種



Case3: 1、3 跨 →無圖形



其中我們以橙色表示該情況的條件，以綠色表示在該條件亦必需遵守的情形。

得 跨黑線的方法數 X_2 = **Case1 + Case2 + Case3 =** $\boxed{1\times1\times(n-1)}+1$

故 $\boxed{1\times2\times n}$ = X_1 + X_2 = $\boxed{1\times2\times(n-1)}+\boxed{1\times1\times(n-1)}+1$

又 $\boxed{1\times1\times(n-1)}$ = n，於是令 $\boxed{1\times2\times n}=a_n$ （$\boxed{1\times2\times(n-1)}=a_{n-1}$）

故 $a_n=a_{n-1}+n+1$

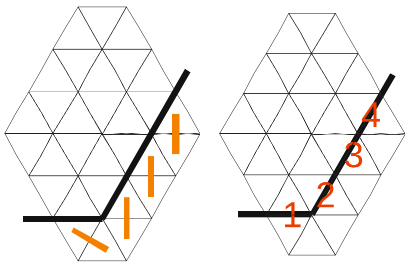
求 a_n (解遞迴式)：

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1+2+1\\
a_3 &= a_2+3+1\\
&\cdots\cdots\cdots\\
+\quad a_n &= a_{n-1}+n+1\\
\hline
a_n &= a_1+[(2+1)+(3+1)+\ldots(n+1)]\\
&=(1+2)+[3+4+\ldots+(n+1)]\\
&=\frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}
$$

即： $\boxed{1\times2\times n}=\boxed{1\times2\times(n\text{-}1)}+\boxed{1\times1\times(n\text{-}1)}+1=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}=C_2^{2+n}$

3. (1,3,n)：

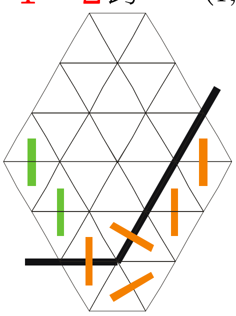
不跨黑線的方法數 X_1 = $\boxed{1\times3\times2}$

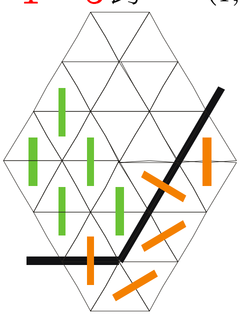


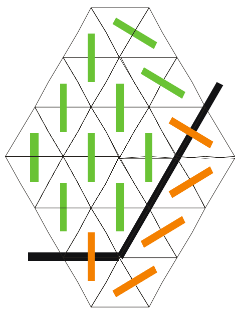
討論跨黑線之方法數：如果圖形跨 2 、 3 、 4 超過一條，則必會發生畫不出圖形的情況(如圖)，故剩下跨 1,2、跨 1,3、跨 1,4 三種情形。

以下分幾個情況討論：

Case1: 1 、 2 跨 → (1,2,n-1)　Case2: 1 、 3 跨 → (1,1, n-1)　Case3: 1 、 4 跨 → 餘 1 種







跨黑線的方法數 X_2 = **Case1 + Case2 + Case3 =** $\boxed{1\times2\times(n-1)}+\boxed{1\times1\times(n-1)}+1$

故 $\boxed{1\times3\times n} = \mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} = \boxed{1\times3\times(n-1)} + \boxed{1\times2\times(n-1)} + \boxed{1\times1\times(n-1)} + 1$

即：$\boxed{1\times3\times n} = \boxed{1\times3\times(n-1)} + \boxed{1\times2\times(n-1)} + \boxed{1\times1\times(n-1)} + 1$

又 $\boxed{1\times1\times(n-1)} = n$；$\boxed{1\times2\times(n-1)} = a_{n-1}$ （註：令 $\boxed{1\times2\times n} = a_n$ ）；令 $\boxed{1\times3\times n} = b_n$

故 $b_n = b_{n-1} + a_{n-1} + n + 1$

求 b_n (解遞迴式)：

$$
\begin{aligned}
b_2 &= b_1 + a_1 + n + 1 \\
b_3 &= b_2 + a_2 + n + 1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+\quad b_n &= b_{n-1} + a_{n-1} + n + 1
\end{aligned}
$$

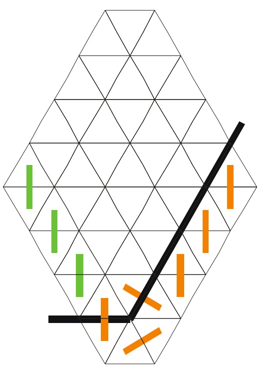
$$
\begin{aligned}
b_n &= b_1 + [(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + (2+3+\ldots+n) + n] \\
&= b_1 + \sum_{k=2}^{n} a_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} (k+1) \\
&= b_1 + [\sum_{k=1}^{n} a_{n-1} - \frac{(1)(1+1)}{2}] + [\sum_{k=1}^{n} (k+1) - (1+1)] \\
&= 4 + [(\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}) - 1] + [\sum_{k=1}^{n} (k+1) - (1+1)] \\
&= (\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)(k+2)}{2}) + 1 \\
&= \frac{1}{2}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n) + 1
\end{aligned}
$$

經整理得： $b_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}$

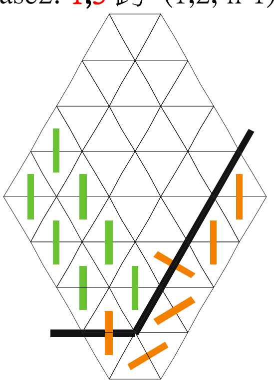
即： $\boxed{1\times3\times n} = \boxed{1\times3\times(n\text{-}1)} + \boxed{1\times2\times(n\text{-}1)} + \boxed{1\times1\times(n\text{-}1)} + 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} = C_3^{3+n}$

4. (1,4,n)：

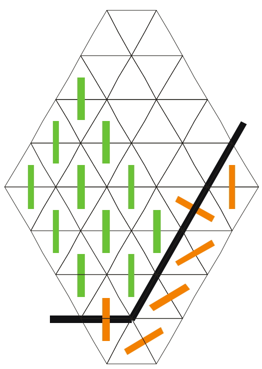
Case1: 1,2 跨 (1,3, n-1)



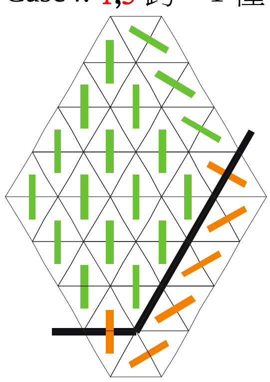
Case2: 1,3 跨 (1,2, n-1)



Case3: 1,4 跨 (1,1, n-1)



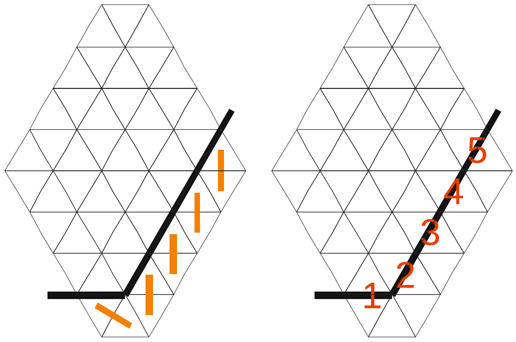
Case4: 1,5 跨…1 種



不跨黑線的方法數 X_1 = $\boxed{1\times4\times(n-1)}$

跨黑線的方法數 X_2 = Case1 + Case2 + Case3 + Case4

= $\boxed{1\times3\times(n-1)}$ + $\boxed{1\times2\times(n-1)}$ + $\boxed{1\times1\times(n-1)}$ + 1



故 $\boxed{1\times4\times n}$ = X_1 + X_2 = $\boxed{1\times4\times(n-1)}$ + $\boxed{1\times3\times(n-1)}$ + $\boxed{1\times2\times(n-1)}$ + $\boxed{1\times1\times(n-1)}$ + 1

又 $\boxed{1\times1\times(n-1)}$ = n；$\boxed{1\times2\times(n-1)}$ = a_{n-1}；$\boxed{1\times3\times(n-1)}$ = b_{n-1}；令 $\boxed{1\times4\times n}$ = C_n

故 $C_n = C_{n-1} + b_{n-1}+a_{n-1}+n+1$

求 C_n (解遞迴式)：

$$C_2 = C_1 + b_1 + a_1 + n + 1$$

$$C_3 = C_2 + b_2 + a_2 + n + 1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\ C_n = C_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-1} + n + 1$$

$$C_n = C_1 + [(b_1+b_2+\dots b_{n-1}) + (a_1+a_2+\dots+a_{n-1}) + (2+3+\dots+n)+n]$$

$$= c_1 + \sum_{k=2}^{n} b_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} a_{n-1} + \sum_{k=2}^{n}(k+1)$$

$$= 5 + [\sum_{k=1}^{n} b_{n-1} - \frac{(1)(1+1)(1+2)}{6}] + [\sum_{k=1}^{n} a_{n-1} - \frac{(1)(1+1)}{2}]$$

$$+[\sum_{k=1}^{n}(k+1) - (1+1)]$$

$$= [\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(k^3+6k^2+11k+6)]+1$$

$$= \frac{1}{6}[\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 11\frac{n(n+1)}{2} + 6n]+1$$

經整理得： $c_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4!}$

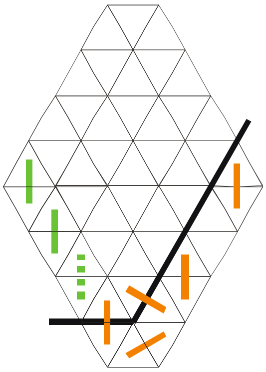
即： $\boxed{1\times4\times n} = \boxed{1\times4\times(n\text{-}1)} + \boxed{1\times3\times(n\text{-}1)} + \boxed{1\times2\times(n\text{-}1)} + \boxed{1\times1\times(n\text{-}1)} + 1$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4!} = C_4^{4+n}$$

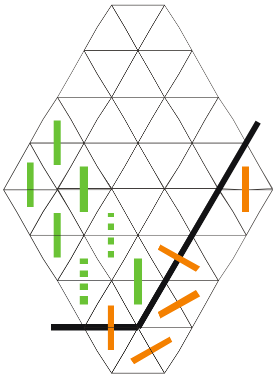
5. (1,m,n)：

討論跨黑線的方法數 **X_2**：

Case1: 1,2 跨…
------(1,m-1, n -1)

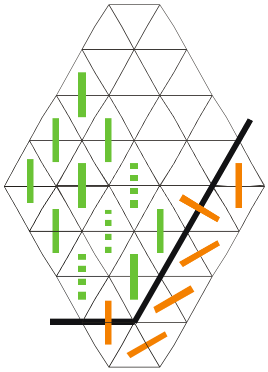


Case2: 1,3 跨
------(1, m-2, n-1)

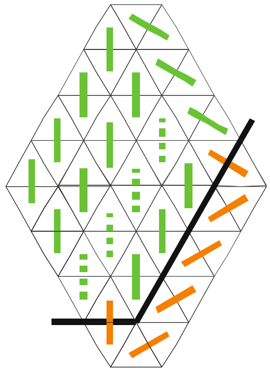


……

Case (n-2): 1,4 跨
------(1, 1, n-1)



Case (n-1): 1,5 跨
------1 種

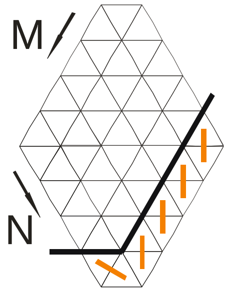


不跨黑線的方法數 **X_1** = $\boxed{1\times m\times(n-1)}$

跨黑線的方法數 **X_2** = Case1 + Case2 + ⋯ + Case(n-1)

$=\boxed{1\times(m-1)\times(n-1)}+\boxed{1\times(m-2)\times(n-1)}+\cdots+\boxed{1\times1\times(n-1)}+1$

$\boxed{1\times m\times n}$ = **X_1** + **X_2** = ($\boxed{1\times m\times(n-1)}$) + ($\boxed{1\times(m-1)\times(n-1)}$ + $\boxed{1\times(m-2)\times(n-1)}$ + ⋯ + $\boxed{1\times1\times(n-1)}$ + 1



欲證： $\boxed{1\times m\times n}=C_m^{m+n}$

當 m=1 時，$\boxed{1\times1\times n}=C_1^{1+n}$ ，m=1 時成立

設當 m=k 時，有 $\boxed{1\times k\times n}=C_k^{k+n}$

則當 m=k+1 時，知

$$\boxed{1\times(\mathrm{k}+1)\times n}=\boxed{1\times(\mathrm{k}+1)\times(n\text{-}1)}+\boxed{1\times(\mathrm{k})\times(n\text{-}1)}+\ldots\ldots+\boxed{1\times2\times(n\text{-}1)}+\boxed{1\times1\times(n\text{-}1)}+1$$

$$=(\boxed{1\times(k+1)\times1}+1)+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+2}}+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+3}}+\ldots+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+N\text{-}1}}+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+N}}$$

$$=(1+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+1}})+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+2}}+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+3}}+\ldots+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+N\text{-}1}}+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+N}}$$

$$=(C_{k+1}^{k+1}+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+1}})+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+2}}+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+3}}+\ldots+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+N\text{-}1}}+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+N}}$$

$$=(C_{k+1}^{k+2})+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+2}}+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+3}}+\ldots+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+}n\text{-}1}+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+}n}$$

……

$$=(C_{\mathrm{k+1}}^{\mathrm{k+N}})+C_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k+N}}=C_{\mathrm{k+1}}^{\mathrm{k+N+1}}$$

故 m = k+1 時成立

由數學歸納法，知 $\boxed{1\times m\times n}=C_m^{m+n}$

討論出 $\boxed{1\times m\times n}$ 之後，我們接著往 $\boxed{2\times m\times n}$ 邁進。

(二)、(2,m,n)：

一如往常，我們必須從開始逐次增加 m。

沿用跨線與否的討論方式，輔以圖形之間的關係，我們可得到：

$\Rightarrow a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + (n+1)^2 \quad \Rightarrow a_n = \boxed{2\times 2\times n} = \dfrac{n+2}{2}C_3^{n+3}$

而我們在 $\boxed{2\times 3\times n}$ 又再逢瓶頸了，費盡千辛萬苦將(2,3,n)的情況討論完畢後，我們只得到

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots$$

在此以前的遞迴一個總會耗盡我們半節至一節課，包括思考、整理、化簡以及歸納、驗錯等，或試圖同時使用 2 種以上的方法去得到同一個結果，但這 4 項的遞迴式欲得到一般式，以目前的方式速度明顯不足，亦即計算量將極爲龐大，況且這只是 $\boxed{2\times 3\times n}$，那 m≧4 者想必推導更爲困難，於是我們退而求其次，另在討論的部分做出一些假設，並驗證其結果(見討論二)。

雖是如此，我們仍在未確定的遞迴式中探出了一點端倪：

$\boxed{2\times 2\times n}$ 之三項的係數分別是 1,2,1，而 $\boxed{2\times 3\times n}$ 之四項的係數分別是 1,3,3,1，明顯地不單單只是巧合，其中各種暗藏的規律及玄機指引了我們接下來的假設方向。

肆、討論

一、深入探索 $\boxed{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}$ ：

(一) 對於數據的探究：

(1) $\boxed{2\times\mathrm{N}}$ ：

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\dfrac{後項}{前項}$
N=2	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	趨近於 1.618
$\dfrac{\boxed{2\times\mathrm{N}}}{\boxed{2\times(\mathrm{N}-1)}}$	無	2	1.5	1.667	1.6	1.625	1.615	1.619	1.6176	1.6181	

因 $\boxed{2\times\mathrm{N}}$ 為費氏數列，故可得知 $\lim\limits_{\mathrm{N}\to\infty}\dfrac{\boxed{2\times(\mathrm{N}+1)}}{\boxed{2\times\mathrm{N}}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ 即所謂黃金比例。

(2) $\boxed{3\times\mathrm{N}}$ ：

M	2	4	6	8	10	12	14	16	$\dfrac{後項}{前項}$
N=3	3	11	41	153	571	2131	7953	29681	趨近於 3.73205
$\dfrac{\boxed{3\times\mathrm{N}}}{\boxed{3\times(\mathrm{N}-2)}}$	無	3.667	3.727	3.731	3.732	3.732	3.732	3.732	

由上表可得知：$\lim_{N\to\infty}\frac{\boxed{3\times(N+1)}}{\boxed{3\times N}}=2+\sqrt{3}\approx 3.73205$

此為我們無意間發現的結果，至於如何證明，尚無找出適當的方法。

(3) $\boxed{4\times N}$：

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N=4	1	5	11	36	95	281	781	2245	6336	18061	51205
$\frac{\boxed{4\times N}}{\boxed{4\times(N-1)}}$	無	5	2.2	3.273	2.639	2.958	2.779	2.875	2.822	2.851	2.835

M	12	13	14	15	16	17	18	$\frac{後項}{前項}$
N=4	145601	413351	1174500	3335651	9475901	26915305	76455961	趨近於 2.8405
$\frac{\boxed{4\times N}}{\boxed{4\times(N-1)}}$	2.843492	2.83893	2.841411	2.84006	2.840795	2.840395	2.840613	

觀察 $\boxed{2\times N}$ 、 $\boxed{3\times N}$ 及 $\boxed{4\times N}$ ，可明顯發現其中 $\boxed{4\times N}$ 的趨近值必須在較後面才能觀察出來，而 2.8405 究竟是何者的近似值呢？我們尚無法得知。

(4) $\boxed{5\times N}$：

M	2	4	6	8	10	12	14	16	$\frac{後項}{前項}$
N=5	8	95	1183	14824	185921	2332097	29253160	366944287	趨近於 12.5437
$\frac{\boxed{5\times N}}{\boxed{5\times(N-1)}}$	無	11.875	12.452	12.530	12.541	12.5434	12.54371	12.543748	

(5) 小結論： 1. 目前只有 $\boxed{2\times N}$ 可以算式求出確切之值。
2. M≧4 者，趨近之值無法推得出來源。
3. **當M為奇數時，由小至大趨近於某值，且速度較快；**
當M為偶數時，震盪趨近於某值，且速度較慢。

(二) 對於M≧5之人工探究：

我們**在M≧5 的討論中遇到最大的問題即在於要找出跨線時的各種跨線情形**：在 M=4 時，簡化成 3 種情形；在 M=5 時，簡化成 5 種情形；在 M=6 時，就已增成 10 種情形！而當 M 為 5 以上時所得的遞迴組擴張速率亦極為可觀，在 M=5 時為六式，M=6 時為十式，而當 M=8 時竟達到了三十六式……

另一方面，再次強調我們也**試著由已推導得知的公式中探得出些許端倪，但我們卻無法像 $\boxed{L\times M\times N}$ 一樣，有明確的規律，我們推測 $\boxed{M\times N}$ 是不存在一個通解的。**

(三) 程式模擬：

目的：(1)求得當 M 數字較大時，M×N 的組合數

(2)驗證之前求得之數據

軟體：Visual Basic 6.0

方法：我們採用的是徒法煉鋼，一塊一塊地排，以求得方法數。

首先定義以下幾個變數：

T：第 T 種方法　　N：排第 k 塊地磚前，所具有的方法數

0：未排地磚　　X：總方法數

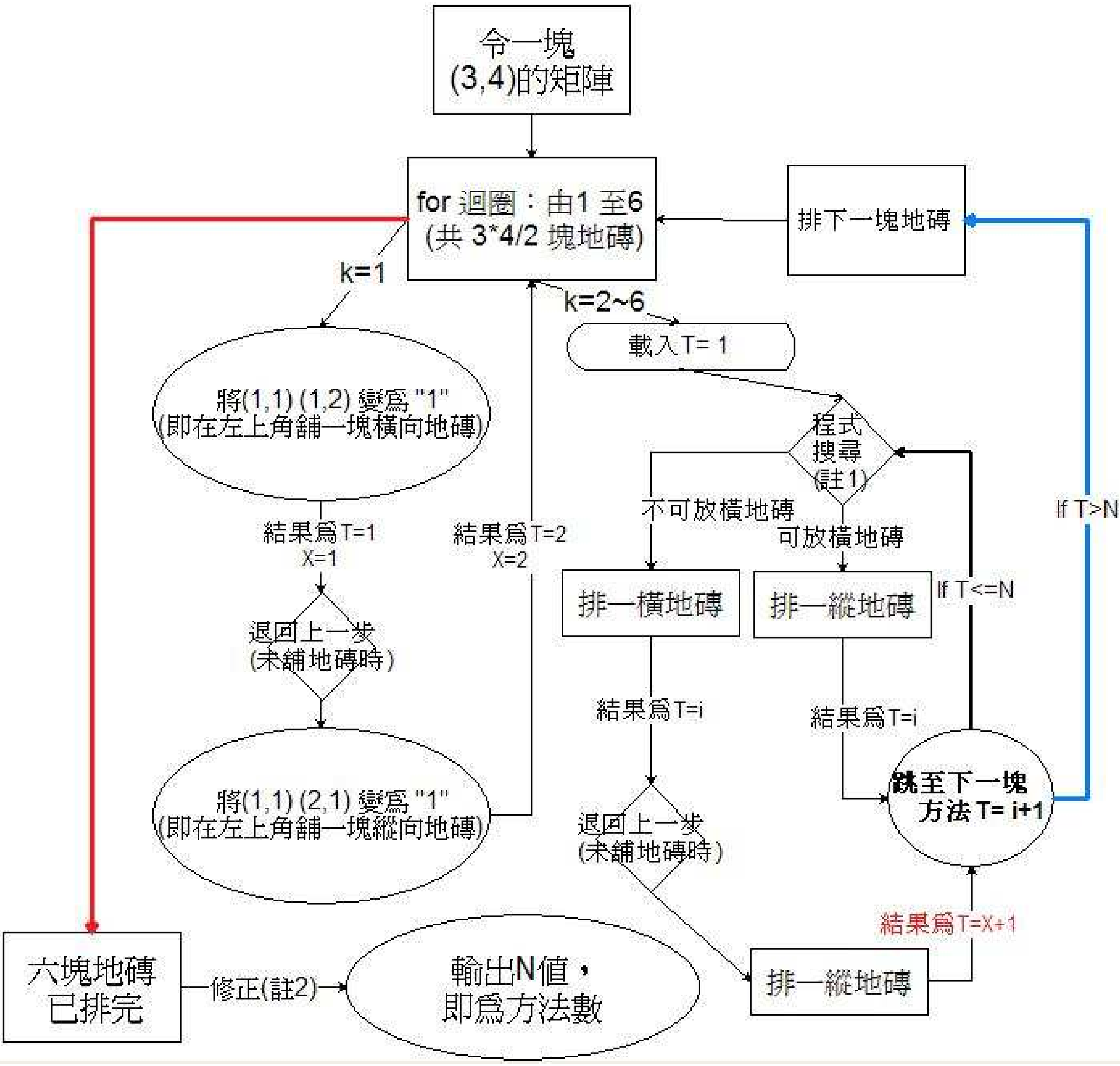
1：已排地磚

k：排第 k 塊地磚

接下來，我們以(3,4)為例，說明程式的運作。

流程圖：

要訣：加橫磚，方法數不變；擺縱磚，方法數 + 1（除非無法擺橫磚）



註 1：此時程式會由左而右，上而下搜尋未排過的方格(即搜尋(i ， j) = 0)

例：紅色標示即為程式搜尋到的格子

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	0	0	1
3	0	0	0	0

圖 1

	1	2	3	4
1	1	1	1	0
2	1	1	1	0
3	0	0	0	0

圖 2

可放橫地磚　：如圖 1，橫地磚可擺(2, 2)、(3, 2)

不可放橫地磚：如圖 2，不可能擺橫磚，故擺縱磚於(4, 1)、(4, 2)(此時，方法數不需+1)

此外，若圖形不許可排縱磚 or 橫磚，此時即跳過這步驟，繼續其它的運算。

如下圖：此時圖形已不容許擺縱磚，故程式運行時，將只會新增一塊橫磚，不另新增方法數

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	0	0	0	0

註 2：修正

雖然程式可以將所有的方法數算出，但在某些地方會出問題，如以下這個情形：

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	0	1
3	0	1	0	0

放下綠色縱磚時，程式的方法數會+1，但很明顯地，上面這種情形並無法拼滿這個圖形，故在數值輸出前，我們必須驗證每一種情形是否已擺滿了地磚，即每個小方格的值皆為「1」。

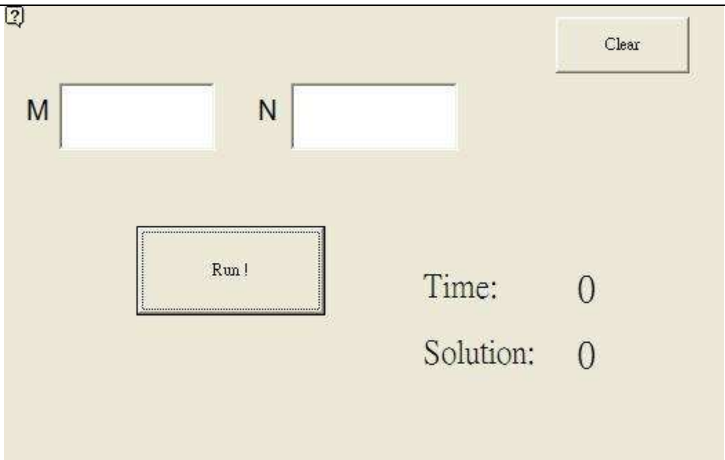
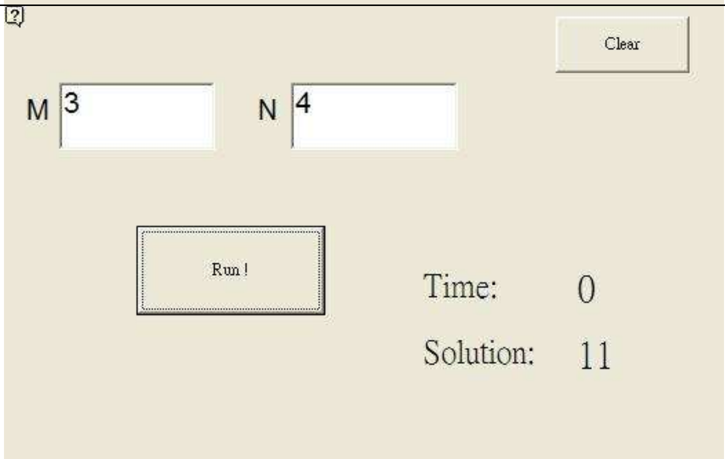
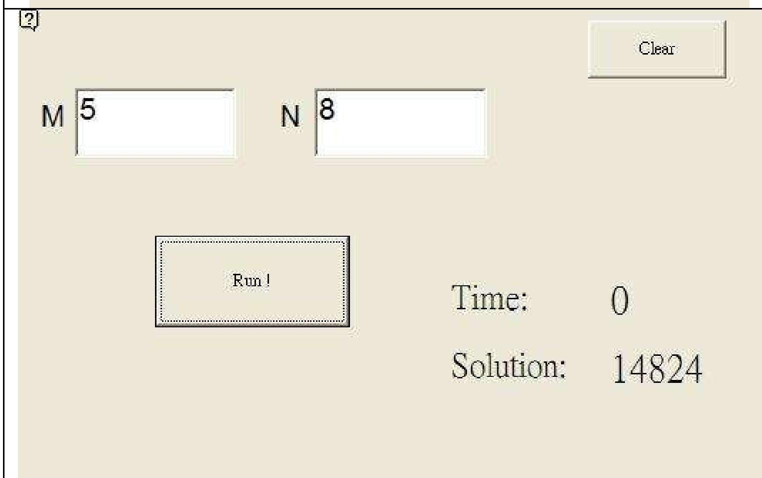
程式面臨之困境：

1. 當M稍大時，電腦運作速度過慢，而所花時間竟以指數成長。(例如：$\boxed{5\times8}$ ＝14824 只需 30 秒，而 $\boxed{6\times8}$=167089，程式需花 2.5 個小時)，又 $\boxed{10\times8}$ > $\boxed{5\times8}\times\boxed{5\times8}$ ，故即使只是以線性成長， $\boxed{10\times8}$ 之值也必上億，所花時間最少就為 $\boxed{5\times8}$ 時的 14824 倍！故所得得知之數據尚有限。
2. 利用這種方法，我們仍無法求得 $\boxed{M\times N}$ 的通式。

改進方法：

1. 改進撰寫程式的方式，如：以其它形式代替矩陣
2. 改用 C 語言可能較 VB 速度更快

程式剪影：

	程式啟動時
	3×4(瞬間出現 11)
	5×8（30 秒後才出現 14824）

二、深入探索 $\boxed{\mathrm{L}\times\mathrm{M}\times\mathrm{N}}$ ：

我們觀察已知公式的數據，設法猜想出 $\boxed{\mathrm{L}\times\mathrm{M}\times\mathrm{N}}$ 的公式：

（一）推想 $\boxed{2\times3\times n}$

由 $\boxed{2\times1\times n}=C_2^{n+2}$

$$\boxed{2\times2\times n}=\frac{n+2}{2}C_2^{n+2}$$

猜想 ： $\boxed{2\times3\times n}=\dfrac{(n+2)(n+3)}{2\times3}C_4^{n+4}$

而其中猜想出的 $\boxed{2\times3\times n}$ 的結果以目前所能得出的幾項數據代回驗證，結果無誤，故 $\boxed{2\times3\times n}$ 的假說應會成立。

（二）推想 $\boxed{2\times m\times n}$ ：

由 $\boxed{2\times1\times n}=C_2^{n+2}$

$$\boxed{2\times2\times n}=\frac{n+2}{2}C_2^{n+2}$$

猜想 ： $\boxed{2\times3\times n}=\dfrac{(n+2)(n+3)}{2\times3}C_4^{n+4}$

$$\boxed{2\times4\times n}=\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2\times3\times4}C_5^{n+5}$$

…………

$$\boxed{2\times m\times n}=\frac{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}{m!}C_{m+1}^{n+m+1}=\frac{1}{n+1}C_m^{n+m}\cdot C_{m+1}^{n+m+1}$$

而其中猜想出的 $\boxed{2\times m\times n}$ 的結果以目前所能得出的幾項數據代回驗證，結果也尚未發現有誤者，故 $\boxed{2\times m\times n}$ 的假說也應會成立。

（三）推想 $\boxed{l\times m\times n}$ ：

雖然 $l\geqq3$ 的情況會複雜到難以討論，但由假設的 $\boxed{2\times m\times n}$ 以及其他現在得知的資料，我們大膽推測：

由 $\boxed{1\times2\times n}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ $\qquad$ $\boxed{2\times1\times n}=C_2^{n+2}$

$\boxed{1\times3\times n}=\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2\times3}$ $\qquad$ $\boxed{2\times2\times n}=\dfrac{n+2}{2}C_2^{n+2}$

及 $\boxed{1\times m\times n}=C_n^{m+n}$

$$\boxed{2\times m\times n}=\frac{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}{m!}C_{m+1}^{n+m+1}=\frac{1}{n+1}C_m^{n+m}\cdot C_{m+1}^{n+m+1}$$

於是再猜測：

$$\boxed{3\times m\times n}=\frac{(n+3)(n+4)\ldots(n+m)}{m!}C_{m+1}^{n+m+1}C_{m+2}^{n+m+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}C_{m}^{n+m}\cdot C_{m+1}^{n+m+1}\cdot C_{m+2}^{n+m+2}$$

以目前所能得出的幾項數據代回驗證，結果亦無誤，故再推測：

$$\boxed{l\times m\times n}=\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+l-1)}C_{m}^{n+m}\cdot C_{m+1}^{n+m+1}\cdot\ldots\cdot C_{m+l-1}^{n+m+l-1}$$
$$=\frac{n!}{(n+l-1)!}\prod_{k=1}^{l}C_{n}^{n+m+k-1}$$

推測至此，或許大家會質疑我們假設的正確性，不如我們代入了幾個已知的式子去驗證：

如：$\boxed{1\times2\times4}=\frac{4!}{(4+1\text{-}1)!}C_{4}^{4+2+1\text{-}1}=C_{2}^{6}=15$

$\boxed{2\times2\times4}=\frac{4!}{(4+2\text{-}1)!}C_{4}^{4+2}C_{4}^{4+2+2\text{-}1}=\frac{1}{5}C_{4}^{6}C_{4}^{7}=105$

神奇的是，據我們所知，尚未有代入而不合的結果出現，故猜測的 $\boxed{l\times m\times n}$ 似乎成立。

更甚者，我們可知Ｌ、Ｍ、Ｎ的順序可以互換，故公式也隨之有三種表示方式，但其實我們發現只需要代入其中一種，且不須限定Ｌ≦Ｍ≦Ｎ，代入的結果都可以得到同一個答案。

伍、結論

一、對於Ｍ*Ｎ平方單位的長方形，以 1*2 或 2*1 的長方形填入並拼滿，所具有的組合方法數。

當Ｍ≦４時，可得到其子母圖形的遞迴式：

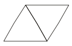
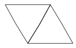
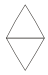
$\boxed{2\times N}=\boxed{2\times(N\text{-}1)}+\boxed{2\times(N\text{-}2)}$

$\boxed{3\times N}=(\boxed{3\times(N\text{-}2)}\times\boxed{3\times2})+2(\boxed{3\times(N\text{-}4)}+\boxed{3\times(N\text{-}6)}+\cdots+\boxed{3\times2}+1)$

$\boxed{4\times N}==\boxed{4\times(N\text{-}1)}+\boxed{4\times(N\text{-}2)}+2\times(\boxed{4\times(N\text{-}2)}+\boxed{4\times(N\text{-}3)}+\cdots\cdots+\boxed{4\times1}+1)+(\boxed{4\times(N\text{-}2)}+\boxed{4\times(N\text{-}4)}+\cdots\cdots+(\boxed{4\times1}$ 或 $1))$

又其中只有 $\boxed{2\times N}$ 的遞迴式可以被化為一般式來表示。

當Ｍ≧５時，須由含許多遞迴數列的一大組關係式來表示。

二、討論對於以**、****、****拼滿 L,M,N 為三邊長的平行六邊形(以(L,M,N)表示)的所有組合方法數(以 $\boxed{l\times m\times n}$ 表示)。**

由討論得知：

當 L=1，則 $\boxed{1\times M\times N}=C_{\mathrm{N}}^{\mathrm{M+N}}$

當 L=2，M=1，則 $\boxed{2\times 1\times N}=C_{\mathrm{N}}^{\mathrm{N+2}}$

當 L=2，M=2，則 $\boxed{2\times 2\times n}=\dfrac{n+2}{2}C_{2}^{n+2}$

由猜測並驗證結果得知：

$$\boxed{l\times m\times n}=\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+l-1)}C_{m}^{n+m}\cdot C_{m+1}^{n+m+1}\cdot\ldots\cdot C_{m+l-1}^{n+m+l-1}$$

$$=\frac{n!}{(n+l-1)!}\prod_{k=1}^{l}C_{n}^{n+m+k-1}$$

三、現有討論之延續

$\boxed{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}$：

我們**推測** $\boxed{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}$ **是不存在一個通解的**，而就改進討論方面而言，我們不認為有其他方法足以淘汰遞迴方式的討論，但在改進程式方面而言，對於程式的撰寫方式，我們相信仍有再進展的空間。

$\boxed{\mathrm{L}\times\mathrm{M}\times\mathrm{N}}$：

在六邊形(L,M,N)的討論之中，我們猜想 $\boxed{l\times m\times n}=\dfrac{n!}{(n+l-1)!}\prod_{k=1}^{l}C_{n}^{n+m+k-1}$ 。

然而這個假設仍**缺乏嚴謹的證明**，因此，**找出這個式子的證明，或者修正這個式子之盲點，即是我們下一個要探討的問題。**

四、未來展望——類似圖樣之推展

在長方形(M,N)之中，我們還可以用 1*3 或 3*1 的長方形，甚至更多各式各樣的矩形來排列，計算其方法數，抑或綜合不同形狀之矩形作排列。

甚至，我們可以討論立方體(L,M,N)時的情形，並比較與六邊形(L,M,N)的異同。

陸、參考資料及其他

一、參考資料：

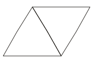
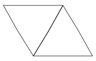
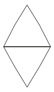
2007 澳洲 AMC 高級卷試題

二、附錄

附錄一〈數據〉

(一) 1*2 或 2*1 的長方形填入 M*N 長方形之方法數：(×：無解 ?：未以人工方法找出)

N \ M	1	2	3	4	5	6	7	8
1	×	1	×	1	×	1	×	1
2	1	2	3	5	8	13	21	34
3	×	3	×	11	×	41	×	153
4	1	5	11	36	95	281	781	2245
5	×	8	×	95	×	1183	×	14824
6	1	13	41	281	1183	6728	31529	167089

(二) 以、、**拼滿 L,M,N 爲三邊長的六邊形的所有組合方法數：**

1. $\boxed{1\times m\times n}$

N \ M	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	6	10	15	21	28	36	45
3	4	10	20	35	56	84	120	165
4	5	15	35	70	126	210	330	495
5	6	21	56	126	252	462	792	1287
6	7	28	84	210	462	924	1716	3003

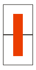
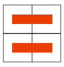
2. $\boxed{2\times m\times n}$

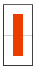
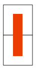
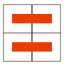
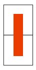
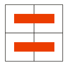
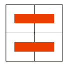
N \ M	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36	45
2	6	20	50	105	196	336	540	825
3	10	50	?	?	?	?	?	?
4	15	105	?	?	?	?	?	?

附錄二〈失敗的可貴方法〉 (此以(2,6)爲例)：

對於求出 $\boxed{2\times6}$ ，我們想出了各式各樣的討論方式，並驗證其可行性：

[法 A]

填入  與 ，分幾種情況討論：

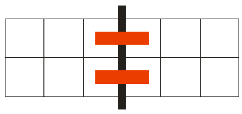
六個  、 四個  與一個  、 二個  與二個  、 三個 。

$$即\ \boxed{2\times6}=\frac{6!}{6}+\frac{5!}{4!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{3!}{3!}=1+5+6+1=13\ \ 種$$

[法 B]

在中間分一線使(2,6)爲兩個(2,3)，而 $\boxed{2\times6}$ =不跨此線之方法數(X_1)+跨此線之方法數(X_2)

Case 1：**不跨**。

Case 2：**跨**。()

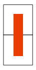
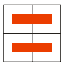
此時 $X_1=\boxed{2\times3}\times\boxed{2\times3}=9$

則組合數 $X_2=\boxed{2\times2}\times\boxed{2\times2}=4$

總組合數= $X_1+X_2=13$(種)

而我們對 $\boxed{2\times N}$ 另有其它討論方式：

[法 C]

設填入 X 個  Y 個 ，則 X+2Y=N，已不難發現，此即費氏數列，即可得知

$$\boxed{2\times N}=\boxed{2\times(N\text{-}1)}+\boxed{2\times(N\text{-}2)}$$

但此法無法推廣，於是我們才試著找尋在幾何上的解釋方法。

附錄三〈 5×n 及 6×n 及其子圖形之數據〉

5×n ：

n=1				1	1		
n=2	3	1	2			8	
n=3				15	15		11.875
n=4	41	16	25			95	
n=5				192	192		12.45263158
n=6	520	208	312			1183	
n=7				2415	2415		12.53085376
n=8	6533	2623	3910			14824	
n=9				30305	30305		12.54189153
n=10	81967	32928	49039			185921	
n=11				380160	380160		12.54348352
n=12	1028208	413088	615120			2332097	
n=13				4768673	4768673		12.54371495
n=14	12897651	5181761	7715890			29253160	
	A_n	B_n	C_n	D_n	E_n	5xN 之值	後項除以前項

6×n ：

n=1	1	1	1	1	1	1	1		0	0	1	
n=2	5	2	1	4	2	1	2		3	1	13	13
n=3	26	22	21	25	18	16	17		4	1	41	3.15384
n=4	132	73	51	110	67	45	66		59	22	281	6.85365
n=5	663	494	442	611	413	340	391		169	52	1183	4.20996
n=6	3364	2088	1624	2900	1846	1352	1794		1276	464	6728	5.68723
n=7	16926	11862	10186	15250	10092	8004	9628		5064	1676	31529	4.68623
n=8	85659	55607	44957	75009	48455	36593	46779		30052	10650	167089	5.29953
n=9	431819	294662	248029	385186	252748	197141	242098		137157	46633	817991	4.89554
n=10	2182406	1442574	1183895	1923727	1249810	955148	1203177		739832	258679	4213133	5.15058
	A_n	B_n	C_n	D_n	E_n	F_n	G_n		X_n	Y_n	6xN 之值	後項除以前項

$\Rightarrow$ 6×n **趨近於 5.0489**

【評語】040403

1) 科展作品必須附加參考資料，其目的在於告訴讀者該研究的思路來源。本作品所附參考資料太過貧乏（只有一項），作者實在需要多下功夫進行資料搜索。

2) 本作品似偏離科學報告應有的格式，無法令讀者體會到科展應具備的邏輯性、精準性、簡潔性等。建議作者多多閱讀有高度啓發性的數學入門論文(如「數學傳播」)及其他高品質的科技報導，學習其高水準的表達方式。