中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040402

拼出世界鴻圖—Torus 拼排

學校名稱：國立武陵高級中學

作者：	指導老師：
高二　鄭伊婷 高二　童宇凡 高二　劉雨鑫	王埄彬

關鍵詞：　拼圖配對、接合處、填入數字

摘要：

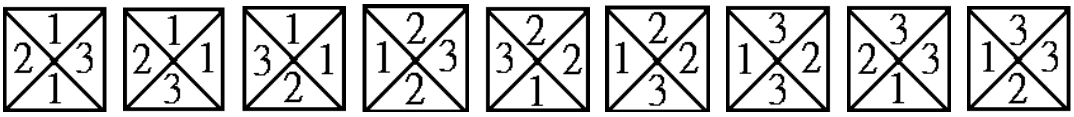
Torus，一種益智拼圖難題。

希求：其所有的拼法及構型樣式→進而設計新的拼圖難題

簡介 Torus 這款遊戲：

基本拼塊 (可由報告封面看出)：

每塊正方形積木，沿對角線區分成 4 個區域後，這 4 個區域中，放置 3 種不一樣的高度，而每種高度皆至少出現一次。因此有 9 種可能的積木。但由於，積木形狀過於複雜，因此爲了簡化它，我們將最低處設 1，中位置用 2，最高處用 3，讓它成爲一個平面的正方形拼塊。



拼法：以這 9 種相異拼塊，同數字相接，拼成 3 x 3 正方形。
(可旋轉不能翻轉)

壹、 研究動機

一、 邂逅：

在偶然的機會下，從 〝有趣的數學遊戲〞 這本書中，翻閱到這個拼圖難題，書中並未做詳細的描述，僅簡略地介紹了拼塊性質，並列舉出一兩種成立的情形。並在單元結束前說道：拼塊的性質已明瞭，但基本的解答仍待讀者的研究。

二、 激起興趣：

就這短短的幾句話，勾起了我們的興趣，而上網查取，但不幸竟未找到相關資料。因此，我們開始了以下的討論，希望能算出 Torus 的總數解，並進而尋找規律或適用的分析手法，讓這類的難題，皆能輕易藉由一種方式，得到所有構型及情形數。

貳、 研究目的

一、尋找出 Torus 的構型總數解。

二、尋找這類型遊戲的規律、分析方式。

三、自行設計一個這類型的拼圖遊戲，以證實分析方式的可行性及實用性。

四、將求得的 Torus 構型樣式，加以改造，給予部份已知，讓玩家由這些已知推測其他拼塊可能爲何，增加遊戲本身的思考挑戰性。

參、 研究分析(方法與步驟)

一、 將每一塊拼圖命名，以利分析。

已知：(每一塊拼塊的限制)

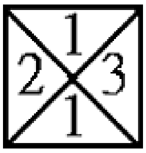
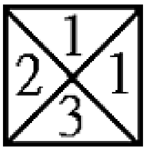
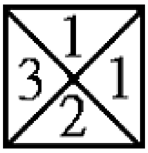
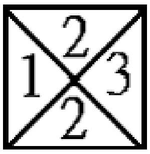
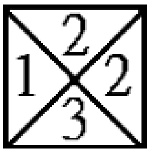
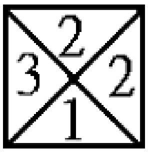
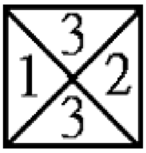
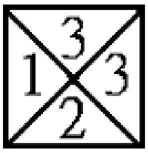
現有 9 塊拼圖，每一塊爲正方形，連接其對角線使其分成 4 個區域，如圖：

區域中任意填入１、２、３，每個至少填入一次。

按照此規則，恰可區分成相異９塊拼圖。

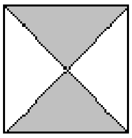
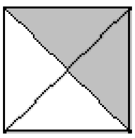
<u>(此處的 1、2、3 在前面提過，即：Torus 的 3 種相異高度的表示)</u>

如下表：

<table>
<tr><td>1 對</td><td>1 鄰(1132)</td><td>1 鄰(1123)</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr><td>2 對</td><td>2 鄰(2231)</td><td>2 鄰(2213)</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr><td>3 對</td><td>3 鄰(3321)</td><td>3 鄰(3312)</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

爲辨別這相異９塊拼圖，我們以出現２次的數字把它區分成相對及相鄰。

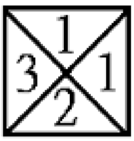
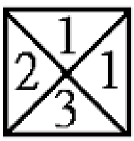
如圖：

<table>
<tr><td>相對</td><td>相鄰</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

註：灰色者表同一數字之位置。

且因爲相鄰者有２種，爲了區別２者，以順時針旋轉方向，依序命名。

例如：

<table>
<tr><td>1123</td><td>1132</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

二、確立這 9 塊拼圖以後，分析所拼成的 3 x 3 正方形。

已知：(拼圖過程的限制)

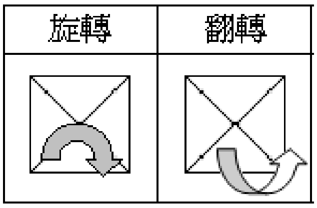
相異 9 塊拼圖，拼排時，每塊限用一次，且可旋轉不可翻轉 (註一)，而相接的 2 塊，相對應的數字必須相同 (註二)，試求能拼成 3 x 3 正方形的總數。

(將 3 x 3 正方形旋轉後仍視為同一種可能)

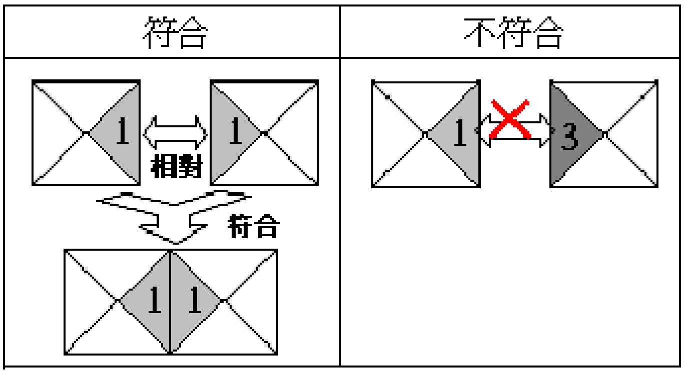
註一：旋轉 vs.翻轉

旋轉：拼塊放置在桌面上(2D)，順或逆時鐘轉動。

翻轉：拼塊由正面轉至反面，或相反之。

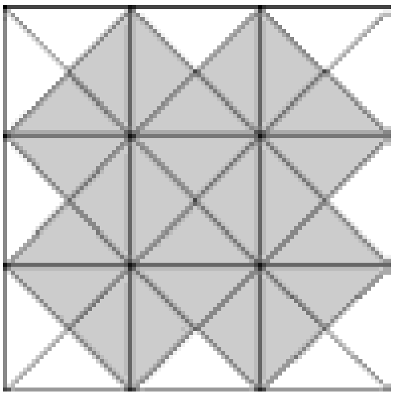


註二：相對應的數字需相同 (判別)

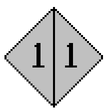


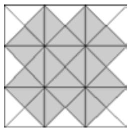
三、分析合理的 3 x 3 正方形：

(一)相接的數字需相對



所以灰色區域內，每一菱形方塊的數字必須相同。

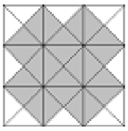
如圖：

(二)討論：不同數字的菱形方塊在  **中，所佔個數的情形：**

1. 考慮正中央的拼圖塊，對角線分割的四個方格，其決定了 4 個菱形塊，又依定義，四個方格必出現每一種數字，並有一個重複的數字，所以可得 12 個菱形內，每一種數字至少出現一次。

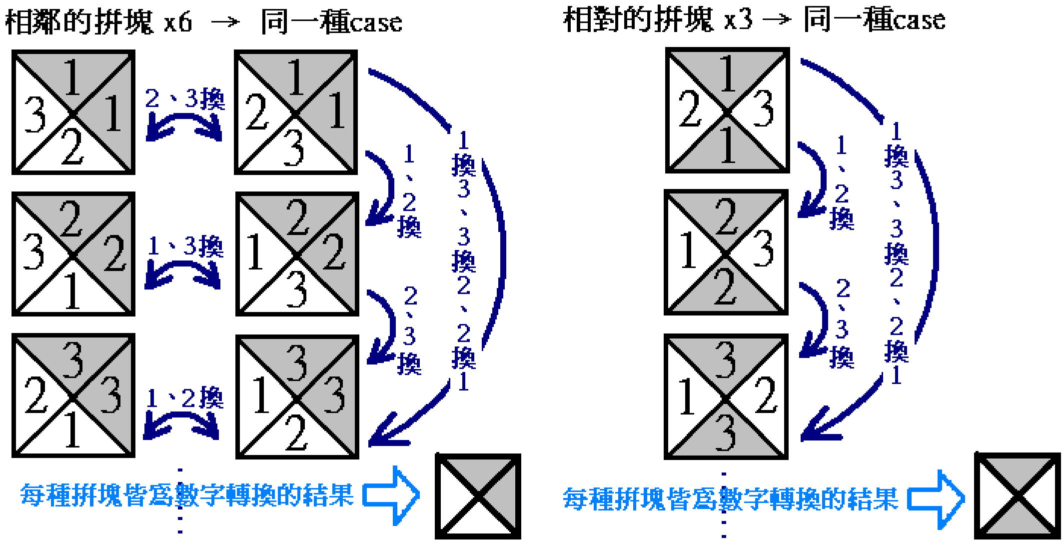
2. 又因爲九個拼圖塊中，每一種數字的總個數分別各 12 個，所以可得同數字的菱形塊最多出現六個。

由此推估出，１≦每種數字的菱形方塊數≦６，所以依序（1~6）列表討論。

	數字 **1** 的菱形方塊	數字 **2** 的菱形方塊	數字 **3** 的菱形方塊
菱形方塊在  中，的個數	5 6	1	6 5
	4 5 6	2	6 5 4
	3 4 5 6	3	6 5 4 3
	2 3 4 5 6	4	6 5 4 3 2
	1 2 3 4 5 6	5	6 5 4 3 2 1
	1 2 3 4 5	6	1 2 3 4 5

(三) 接著，我們設法尋找這 25 種 case 的關聯性，以減少討論的繁瑣。

首先，我們觀察到：拼塊有鄰與對的兩種差異。



而且可以發現到：他們之間的關係爲數字轉換的結果。

因此，我們可以取其中一種來討論，再乘上它相對應的倍數即可，這裡我們取 **1123 (代表鄰的情形)** 及 **一對(代表對的情形)** <u>置於中心位置</u> 開始進行討論。

(即：鄰的總數 ＝ 1123 所有 case 的方法數加總後，再 x 6
對的總數 ＝ 一對所有 case 的方法數加總後，再 x 3
兩者加總後，即爲所求Torus的總數解

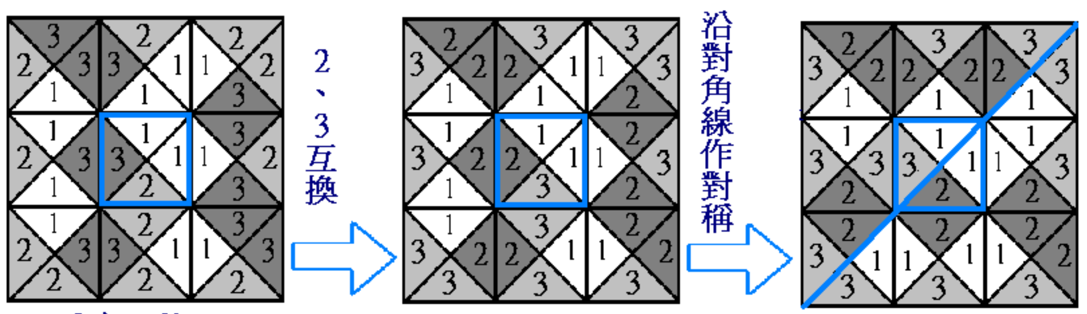
再來，我們再利用數字轉換的特性，<u>**可將 25 種 case 簡化成 13 種 case**</u>。

而爲了方便表示這 25 種 case，我們 **定義一種符號（ ， ，）**，它的意義爲：（數字 **1** 的菱形方塊總數， 數字 2 的菱形方塊總數，數字 3 的菱形方塊總數）

簡化方法爲下：..<u>**(詳情請參考附錄一)**</u>

1. 選取置於中心的拼塊爲 1123 及一對，依拼塊特性：有 2 個 1 在拼塊內，因此至少會產生 2 個 〝數字 **1** 的菱形方塊〞。...①
2. 接著我們將拼成圖形中的 2、3 轉換 (不改變構形)，再沿對角線作對稱 (不改變菱形各數組合)，即可將剩下的 23 個 case 簡化成 13 個 case。...②

→**舉例說明**：在 1123 爲中心的前提下，(6 ,1, 5)case = (6 ,5, 1)case。



1123爲中心的(6 ,1, 5)　1132爲中心的(6 ,5, 1)　1123爲中心的(6 ,5, 1)

經由上述方式簡化後，可得以下表格：

原本的 25 種 Case		**化簡成 13 種 Case**	
(1,5,6) & (1,6,5)	By①：菱形數字 1 至少有 2 個	得知此 2 個 case 不存在	
(5,1,6) & (5,6,1)	By②：2、3 換；再作對稱	化簡成 1 個 case (5 ,6, 1)	分別的 Case 數算出後要 x 2
(6,1,5) & (6,5,1)	By②：2、3 換；再作對稱	化簡成 1 個 case (6 ,5, 1)	
(2,4,6) & (2,6,4)	By②：2、3 換；再作對稱	化簡成 1 個 case (2 ,6, 4)	
(4,2,6) & (4,6,2)	.	化簡成 1 個 case (4 ,6, 2)	
(6,2,4) & (6,4,2)	.	化簡成 1 個 case (6 ,4, 2)	
(3,4,5) & (3,5,4)	.	化簡成 1 個 case (3 ,5, 4)	
(4,3,5) & (4,5,3)	.	化簡成 1 個 case (4 ,5, 3)	
(5,3,4) & (5,4,3)	.	化簡成 1 個 case (5 ,4, 3)	
(5,2,5) & (5,5,2)	.	化簡成 1 個 case (5 ,5, 2)	
(3,3,6) & (3,6,3)	.	化簡成 1 個 case (3 ,6, 3)	
(2,5,5)		還是(2,5,5)	
(6,3,3)		還是(6,3,3)	
(4,4,4)		還是(4,4,4)	

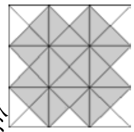
有了以上這些關係以後，我們將它做個總整理，並與以進行加總的工作。
為了方便表示（ ， ， ）所佔的可能數，我們 **定義一種符號[， ，]** 來表示（ ， ， ）所有的可能數。 例如：一鄰的[5,1,6] ＝ 一鄰(5,1,6)的所有可能數

因此：

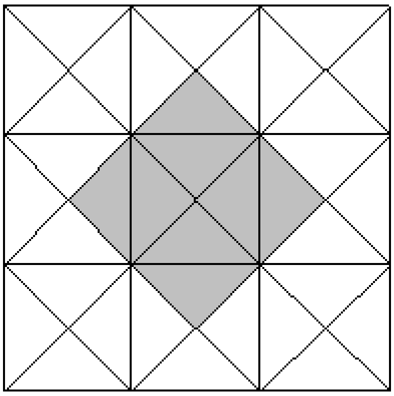
所求總數 ＝ 鄰的總數 ＋ 對的總數
＝（1123 的總數 x 6）＋（一對的總數 x 3）...③

而 1123 的總數與 1 對的總數，分別為各自為中心拼塊時：
他們分別的：
<u>2 x {[6,5,1] + [5,6,1] + [6,4,2] + [4,6,2] + [2,6,4] + [5,4,3] + [4,5,3] + [3,5,4] +</u>
<u>[5,4,3] + [4,5,3] + [3,5,4] +[5,5,2] + [3,6,3]}</u> + <u>[2,5,5]</u> + <u>[6,3,3]</u> + <u>[4,4,4]</u>
進行加總的結果，再代入上式③，即為所求的 Torus 總數解。

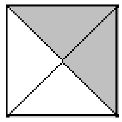
思考到這裡，基本架構的雛型已經出現。
接下來，我們要做的是：<u>找出一套最適當的討論手法，來求出每一種 Case 個數</u>。

(四) 討論手法的探討： 在這 13 種 case 中，不同數量的菱形，尚可於中，任意組合。所以需要一套有效的方式討論：

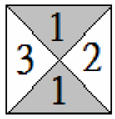
1. 先定出正中央一塊(由九塊拼圖中挑選)



(1) 中央拼塊的挑選：
依拼塊特性(先不考慮 1、2、3 的差異時)，只有相鄰與相對的差別，這裡我們取 1 鄰的 1123 及 1 對分開討論。



(2) 選定中央拼塊後，接著討論**擺放方向**：
鄰的部份：1123，將 1 的部份置於右上角，以決定方向。



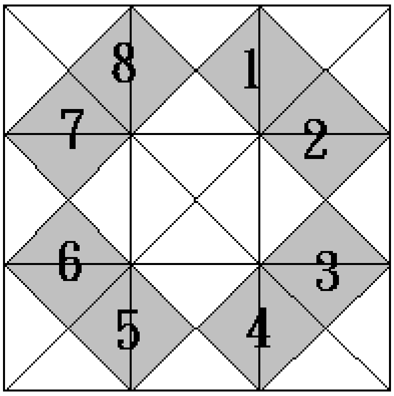
對的部份：1 對，將 2 置於右側，以決定方向。

(3) 最先選定中央拼塊的原因：

(a) 定出中央一塊，四周相對位置皆固定。同時，正中央為 3 x 3 正方形的旋轉中心，將中心定住後，可避免同一個圖形經由不同角度觀看的視差，誤判成 4 種不同情形。

(b) 中央一塊與四周相鄰數最多，所以定出的菱形塊數目也最多(4 個)。

2. 定出正中央一塊後，將 8 塊菱形，以順時鐘方向**編號**，以利討論。



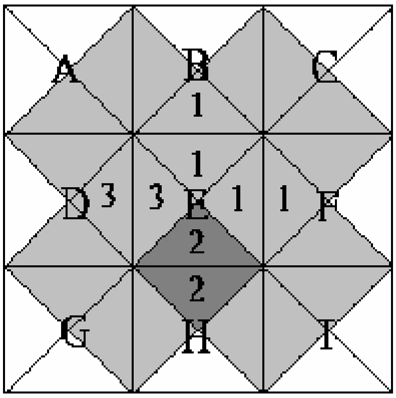
3. 定出 8 塊菱形的編號後，以表格討論。

(五) 例舉其中一種 case 討論：

這裡我們取 1123 爲中心的(6 ,1, 5)爲例。

(爲了方便說明： 我們將數字 **1** 的菱形方塊，簡稱：〝菱形 1〞，其他同理類推。
並依序定方塊可排入的位置：A~I)

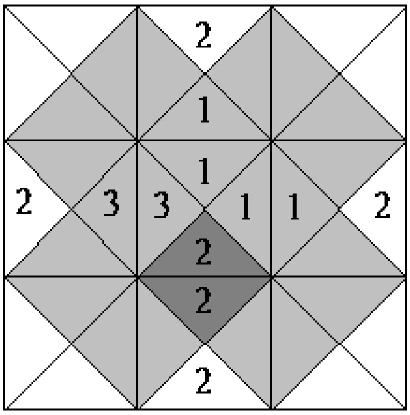
已知圖形：



(1) 依題意，只有一個菱形 2 置於深灰色部分，得到：淺灰色部分不能再出現菱形 2。(即：剩下的 2 都只能塡在白色部分。)

(2) 又依定義，每塊方塊必有一個 2 在裡面。
在這個條件下，與(1)取交集，得 B、D、F 方塊的白色部分，皆必須塡入 2。

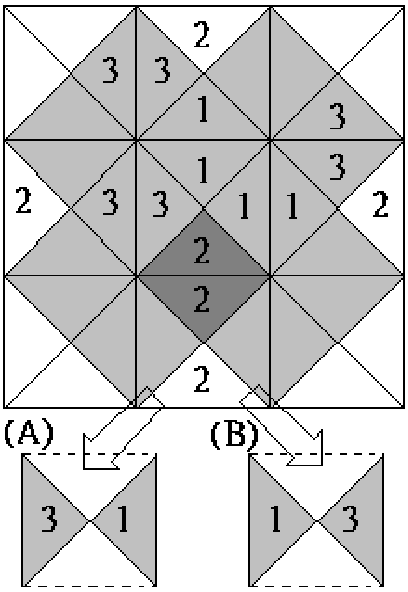
由(2)(3)得的圖形：



(3) 又依定義，方塊內出現兩個 2 的情形，
分：2 鄰(數量 x 2) 及 2 對(數量 x 1)。
考慮 2 對可擺入的位置：
分析白色部分後發現，只在白色部分塡入 2 無法滿足，所以 2 對必與圖內唯一的菱形 2 重疊。
∴2 對需置於 H 處。

(4) 且因爲每一塊方塊皆有獨特性(指唯一)，所以中心定 1123 後，其他位置不能再放 1123，又因剩下的 2 都只能塡在白色部分，所以菱形編號 **2** 和 **8** 的位置，只能塡 3。

由(4)(5)得圖形：

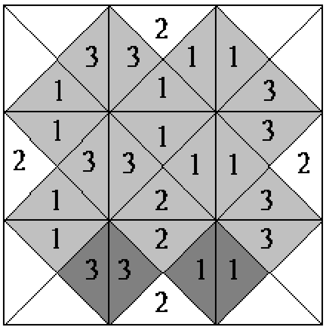


(5) 又因決定 H 方塊，可以一次定出 2 個菱形塊，所以先假設 H 方塊。

A—case：設 H 爲 2123

B—case：設 H 爲 2321

A-case：

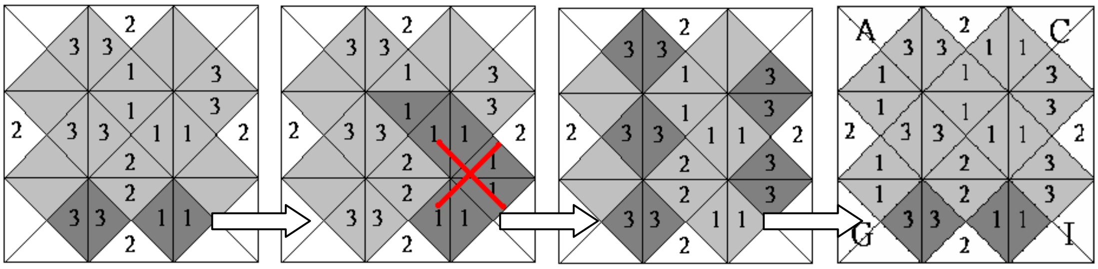


(a) 設 H 為 2123

(b) 因為 1 鄰只有 2 個，所以菱形編號 **3** 的位置不能填 1(填 1 的話，會出現 3 個 1 鄰)，又灰色區域內不能填 2，所以，菱形編號 **3** 的位置只能填 3。

(c) 又依題意，菱形 3 只有 5 個，所以，剩下的菱形塊皆為：菱形 1。

(↓ b 中所指的不合)　(↓ 由 b 得)　　　(↓ 由 c 得)



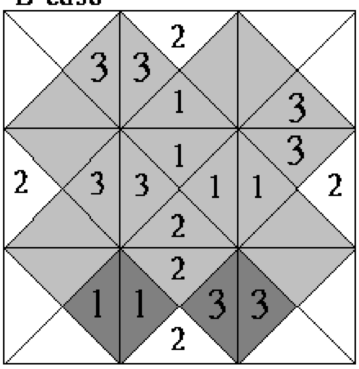
(d) 列表討論方塊 A、C、G、I 可能的情形：

	A	C	G	I
2213			✓	✓
2231	✓	✓		
3312	✓	✓		
3321			✓	✓

而每一種方塊皆須用到的前提下，A、C 方塊可互換，G、I 方塊可互換。

∴A—case：共 4 種 (2 x 2)

B-case：



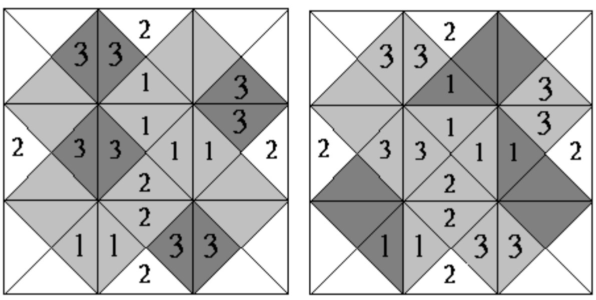
(a) 設 H 為 2321

(b) 依題意，菱形 3 只有 5 個於灰色區域，現在，菱形 3 在灰色內已有 4 塊，所以灰色區域內，只可再出現 1 個菱形 3。

(c) 又菱形編號 **1、3、6** 的位置，至少需兩處填 3，不然，會出現 3 個 1 鄰。

(d) 由(b)∩(c)得：此式矛盾。

∴B—case：共 0 種



∴以 1123 為中心的(6 ,1, 5)case

由 **A—case** ∪**B—case** 得:共 4 種。

<u>由於人工討論過程繁瑣，因此決定使用 **程式模擬** 的方式。</u>

肆、 研究實驗數據(用 C 語言進行模擬)：

為了分析出總組合數，使用 C 語言進行模擬。

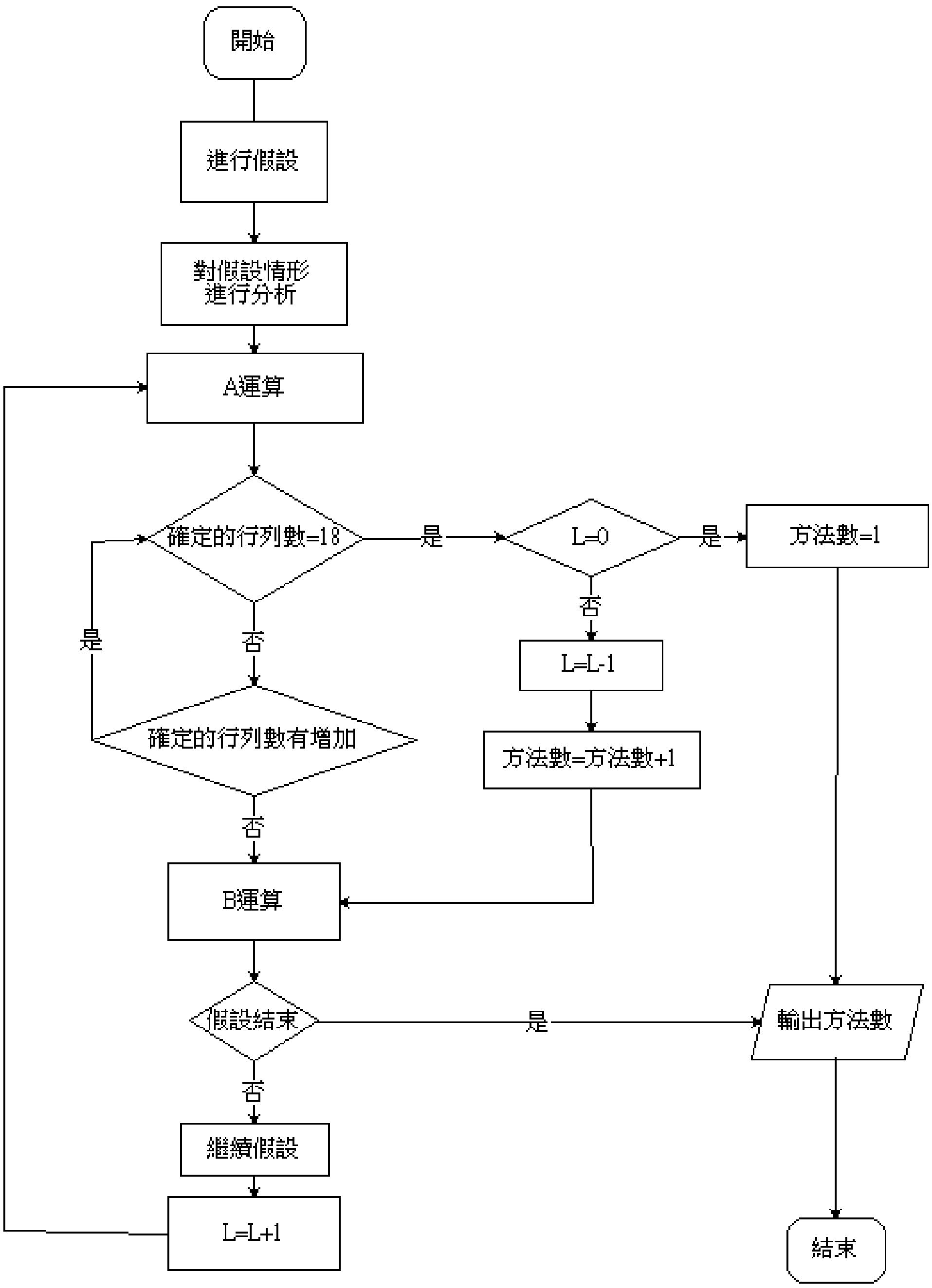
程式分成三個階段：

第一階段為定出中心。由於中心必為鄰或對，分別取 1123 與 1213 作為代表，考慮中心情形及周邊狀況，可假設出 25 種情形。

第二階段為接續上一段的情形，假設各個數字在剩餘菱形中出現的次數，並做出進一步的假設。

第三階段即從前二階段假設出來的資料進行檢驗，找出合理與不合理的構型，並以此作為討論總數的依據。

由於在周圍的八個方塊中，已假設的菱形可影響剩餘的八個方塊，故將這些情形一一加以計數，最後把結果輸出至檔案。



其中第三階段所使用的方法，使用到了如下的概念。

九宮格中每個地方皆須放入一個方塊，而每個方塊也只能放一次，由此可知由九宮格上的位置對應到九個方塊，是一對一的關係。
我們接著又發現，若將一個方塊與一個位置進行配對，可能無法拼上，也可能可以，但只會有一種拼合方法，是不可旋轉的。
現在以 ABCDEFGHI 代表九個位置為行，並將九個方塊編號做為列，若可能放置則標記為 1，不可能則為 0，做出矩陣。
而由於有一對一的關係，我們知道若一行只有一個 1，則這個 1 所在的列其它的部份必定皆為 0。列的情況亦然。
又每個元素皆有對應，則也不會出現一行或一列全部為 0 的情形。
若出現每一行及每一列皆恰有一個 1 時，表示此時此矩陣有一個解。
由以上的性質我們定出矩陣 A 運算及 B 運算。

A 運算：

先進行逐行檢驗，若發現某行恰有一個 1 時，則把這個視為已確定的情形，共刪去與之矛盾的假設。再逐列檢驗，重覆此動作，直到剩下的部份，都無法使用這種方法確定為止。
當檢驗完成後，若發現某行或某列全為 0，則回報為不合理，方法數不增加。若每一行及每一列皆恰有一個 1 時，為合理的解，方法數+1。若不為前 2 種情形，則進入 B 運算。

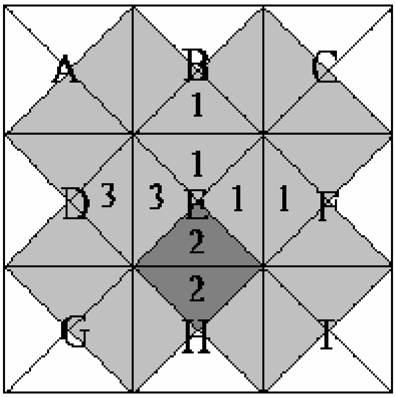
B 運算：

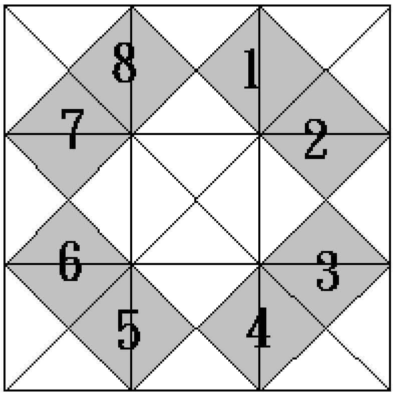
從 1 到 9 行，選出一行有 2 個 1 以上的做基準(若無，則不符合 A 運算，矛盾。)對每個在此行的 1 進行假設，設其為此行中唯一的 1，其餘皆為 0，構造出另一個假設的矩陣。如此處理之後則會得到數個假設出來的矩陣。再將之進行 A 運算。

將一個矩陣如此反覆處理之後，計算出其中合理情形的總數，即為輸出。

以下面的情況為例：

已知圖形：





如圖，在一鄰(6,5,1)的情況下，設菱形 1,2,3,4,5,6,7,8 的數字分別為 1,1,1,1,2,2,2,2 則得到下面的情形：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1.1123	0	1	1	0	1	0	0	0	1
2.1132	0	0	1	0	0	0	0	0	1
3.1213	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.2213	1	0	0	0	0	0	1	1	0
5.2231	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6.2123	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7.3312	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8.3321	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9.3132	0	0	0	0	0	0	0	0	0

我們觀察 F 這一行的時候發現，F 全部皆為 0，故回報為不合理的情形。

然而，若使程式繼續執行，則當假設到 8 個菱形分別為 2,1,2,1,1,2,1,2 時則得到下面情形：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1.1123	0	0	1	0	1	0	0	0	1
2.1132	1	0	0	1	0	1	1	0	0
3.1213	1	0	1	0	0	0	1	1	1
4.2213	1	1	0	1	0	0	1	0	0
5.2231	0	0	1	0	0	0	0	0	1
6.2123	1	0	1	0	0	0	1	0	0
7.3312	0	0	1	0	0	0	0	0	1
8.3321	1	0	0	0	0	0	1	0	0
9.3132	0	0	0	1	0	0	0	0	0

經過 A 運算之後，留下無法確定的部份得到下表。

	A	C	G	I
5	0	1	0	1
6	1	1	1	0
7	0	1	0	1
8	1	0	1	0

接著進入 B 運算得到樹狀圖如下。

	A	C	G	I
5	0	1	0	1
6	1	1	1	0
7	0	1	0	1
8	1	0	1	0

↑對此行做假設

0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	0

0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0

0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0

0	1	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0

0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
1	0	0	0

0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0

由此可知：以 1123 為中心(6,5,1)的可能情形總數，共四種。

藉由以上程式的輔助後，我們可以得知 1123 及 1 對所有的構形及情形數。(註二)
因此，將 1123 及一對個別 case 的數量加總，再代入之前所寫出的關係式後可得：

所求總數 ＝ 鄰的總數 ＋ 對的總數
＝（1123 的總數 x 6）＋（一對的總數 x 3）
＝（4970 x 6）＋（4904 x 3）
＝ 29820 ＋ 14712
＝ 44532

註二：由於每一種 case 的構形過多，不便一一列舉出，只能當日以電腦展示。

伍、 研發新的積木拼塊，來佐證分析手法的可行性：

一、設計拼塊方法：

(一) 所使用拼塊的限制：

1. 拼塊形狀：

由 Torus 的拼塊可看出，需要一種旋轉之後圖案仍不變的樣式，才不會影響拼塊旋轉放入後的形狀，因此應該選用正多邊形較佳。(這裡我們選用正三角形)

2. 分割區域，填入顏色：(以確定拼塊數量)

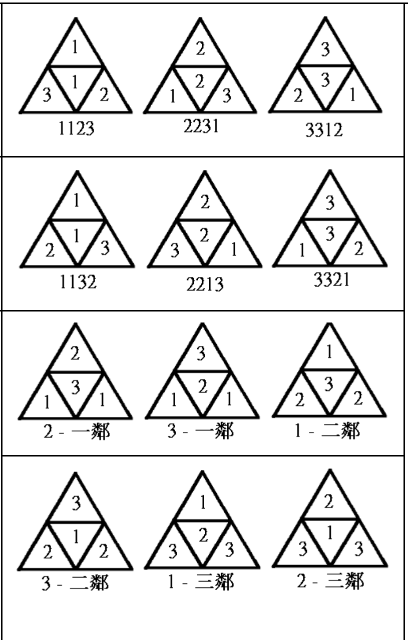
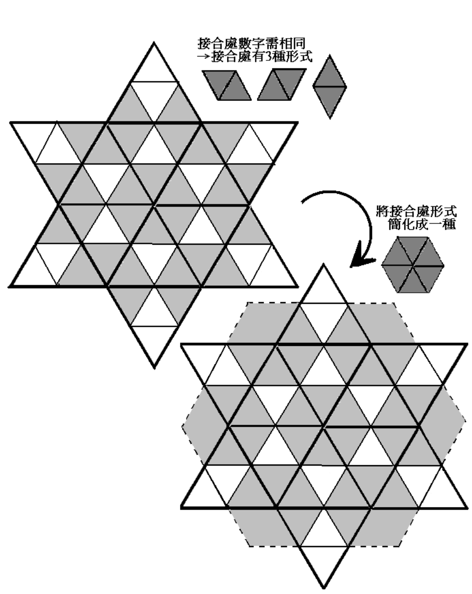
(1) 之前 Torus 以對角線使其分成 4 個區域，並由 3 種相異物放入 4 個區域後，算其所有相異種類方塊的個數。

(2) 這裡，我們連接正三角形每邊中點，一樣區分成 4 個區域，並以 3 種相異物放入，算其所有方塊總數，得 12 相異拼塊。

(二) 拼成的圖案：

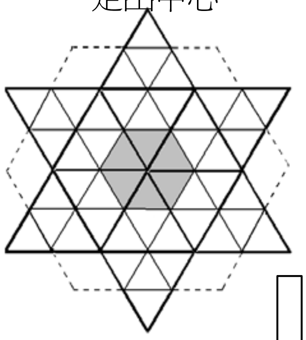
已確立拼塊樣式及數量後，接著我們需討論拼成的圖形。

事實上，拼成圖形以將所有拼塊用完為要，接著只要選取美觀的圖案即可，沒有太多限制。(這裡我們選用六芒星的形狀)

<table>
<tr><th colspan="4">所選用的拼塊—正三角形</th><th>所拼成的圖形—六芒星</th></tr>
<tr><td colspan="4">連接正三角形中點使其分成 4 個區域，以三種相異物填入後，每種相異物必出現一次，則恰可區分成相異 12 塊拼圖。</td><td>拼排時，每塊限用一次，且<u>可旋轉不可翻轉</u>，而<u>相接的 2 塊，相對應的數字必須相同</u>，試求能拼成六芒星的總數。</td></tr>
<tr><td>123類
321類
其他個別六種獨立</td><td>
</td><td>由於中心小三角形，不影響接合處的拼排，所以只需考慮外圍部份</td><td>∴於外圍依順時針方向命名</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="4">∴考慮周圍：有 8 種型態的三角形拼塊</td><td>將接合處形式簡化為單一形式</td></tr>
</table>

二、分析手法

・・・定出中心・・・



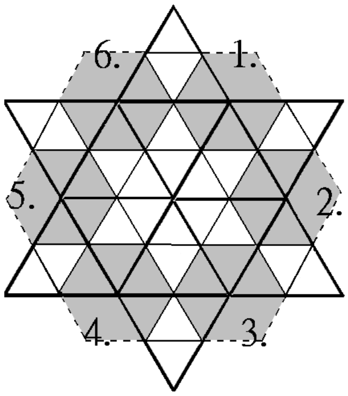
步驟一： 先定出正中央，假設中央六邊形數字爲 2。

理由：

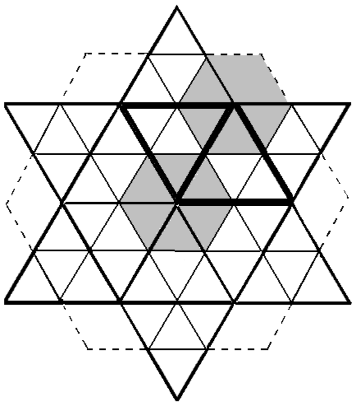
(1)定出中央六邊形，四周相對位置皆固定。

(2)中央六邊形與四周相鄰數最多，所以定出三角形拼塊一角的數目也最多(六塊) 。

・不同數字六邊形組合・



・・・(2) 的說明圖・・・



步驟二： 定出正中央正六邊形後，六塊三角形相接處的六塊六邊形，以順時鐘方向**編號**，以利討論。

接著，開始討論不同數字外圍六個正六邊形中，所佔的個數情形。而爲了方便說明，我們**先定義一種符號（ ， ， ），它的意義爲：**（數字 1 的正六邊形數, 數字２的正六邊形數, 數字３的正六邊形數）

(1) 考慮 〝二鄰三角形〞，拚排時，無論置於何處，皆會有兩小塊小三角形位於〝外圍正六邊形〞內。

又依定義，二鄰三角形有兩小塊小三角形爲 2，因而得到，於二鄰三角形兩側的正六邊形，至少有一個是數字 2。而一鄰、三鄰的情形亦然。

→故每個數字的正六邊形數≧1。

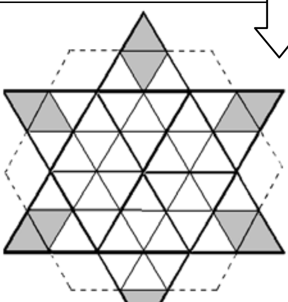
(2)若外圍某一正六邊形數字與中心一樣爲 2，則此時，粗線所顯示的三角形拼塊，依定義爲二鄰。但二鄰只有兩個，故與中心數字相同的正六邊形數≦1。

由(1)∩(2)得：

與中心正六邊形同數字的 〝外圍正六邊形個數＝1〞。

列表分析討論後，得到 2 個 Case：(2, 1, 3) (3, 1 ,2)

並可藉 1、3 數字轉換，將這兩種 Case 簡化爲一，在算出答案後，再乘以二即可。**...<u>(詳情請看下一頁)</u>**

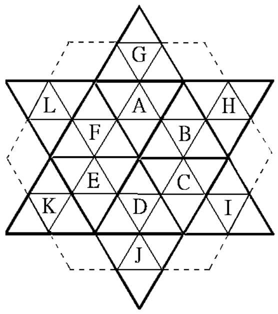


步驟三： 將剩餘未知部分，列表討論。

得到六芒星的總組合數爲 1728 種。

以上，皆爲使用 Torus 分析手法，細節部分請看後面說明。

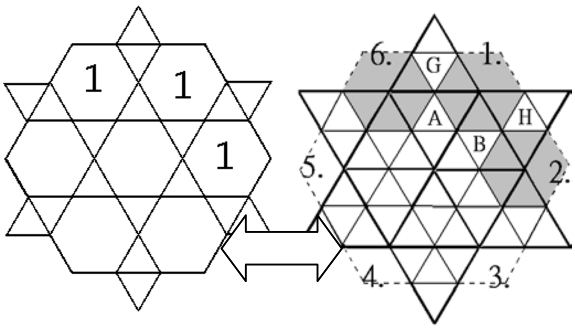
(二) 六芒星 簡化 Case 數的詳細說明：



爲了方便說明，如同 Torus puzzle 先將 **擺放拼塊的位置由內而外，依順時針，以 A~L 標示**。(如右圖)

再來，我們先證明一個引理。

引理宣稱：<u>數字相同的六邊形，彼此之間至多只有 2 個相鄰。</u>



證明如圖，假設六邊形編號 6. 1. 2.數字皆爲 1，比較原圖形可知，位置 A、B、G、H 所放置的拼塊皆須爲一鄰，但一鄰只有兩個，矛盾。

因此可得，引理成立。

因此，由環狀排列的方式：

可以發現 (1 ,1, 4) 數字 3 的正六邊形，必至少有 3 個 3 相鄰→ ∴矛盾不合

(4 ,1, 1) 數字 1 的正六邊形，必至少有 3 個 1 相鄰→ ∴矛盾不合

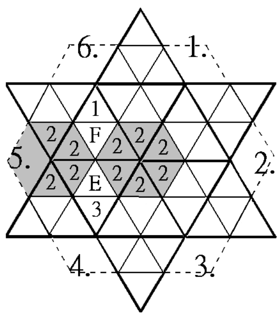
因此符合 **與中心正六邊形同數字的〝外圍正六邊形個數＝1〞** 的這個結論者：

→只剩下的 Case：(2, 1, 3) &(3, 1 ,2)

並可藉 1、3 數字轉換，將這兩種 Case 簡化爲一，在算出答案後，再乘以二即可。

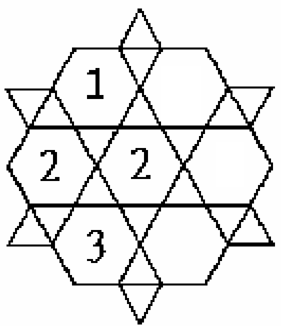
(三) 列表分析六芒星

(一) 不失一般性設中心爲 2，爲了定方向使六芒星不可旋轉，設六邊形編號 5 爲 2，考慮位置 E、F，發現必爲 1- 二鄰和 3- 二鄰，不失一般性設上面爲 1- 二鄰。



(二) 因此可得：

	六邊形編號 4	六邊形編號 5	六邊形編號 6
數字	3	2	1



剩下六邊形編號 1. 2. 3.尚未確定。由於假設情形爲 (2, 1, 3)，故剩下一個六邊形爲 1，兩個六邊形爲 3。

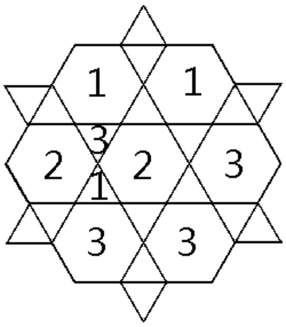
→可以區分成 3 個子 Case：

六邊形編號 1. 2. 3.的數字分別爲 1, 3, 3 ...**Case 1**

六邊形編號 1. 2. 3.的數字分別爲 3, 1, 3 ...**Case 2**

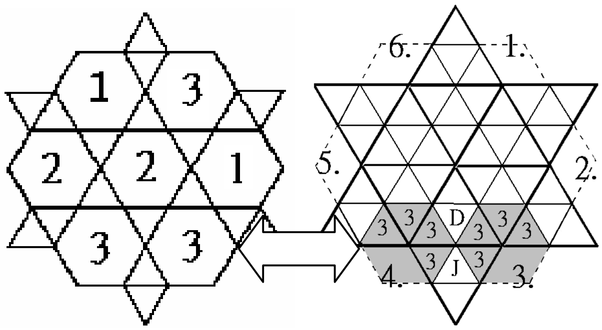
六邊形編號 1. 2. 3.的數字分別爲 3, 3, 1 ...**Case 3**

(三) 子 Case 的討論：



<u>Case 1</u>.六邊形編號 1. 2. 3.的數字分別為 1, 3, 3：
由於六邊形編號 2. 3. 4.數字皆為 3，形成 3 個數字相同的六邊形相連，由引理得知，情形不成立。
所以，組合數為 0。

<u>Case 2.</u> 六邊形編號 1. 2. 3.的數字分別為 3, 1, 3 ：



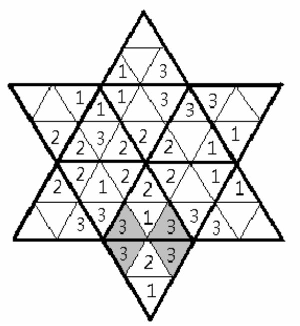
觀察六邊形編號 3. 4.，發現數字皆為 3，故 D、J 皆確定為三鄰。
現在已知二鄰皆用去，三鄰也皆用去，而一鄰皆未用去。
因此，尚未用去者包括：
一鄰 x 2，123 型 x 3，321 型 x 3。

此時，尚未確定的位置，做成表格分析如下。
類似先前處理 3 x 3 正方形的概念，得到下表。

	個數	A	B	C	G	H	I	K	L
2- 一鄰	1								✓
3- 一鄰	1				✓	✓	✓		
123 型	3		✓		✓		✓	✓	✓
321 型	3	✓		✓		✓			

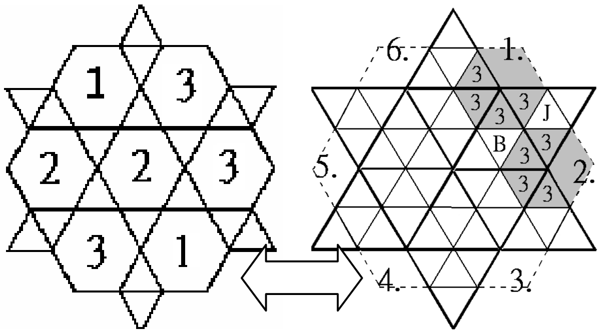
類似先前處理正方形的概念，略去已確定部份，得到下表。
(例如：2- 一鄰只可放入 L，即為確定)

	個數	B	G	I	K
3- 一鄰	1		✓	✓	
123 型	3	✓	✓	✓	✓



故 3- 一鄰可能為 G 或 I，即組合數 2 種。

<u>Case 3.</u> 正六邊形編號 **1. 2. 3.**分別爲 **3, 3, 1** ：

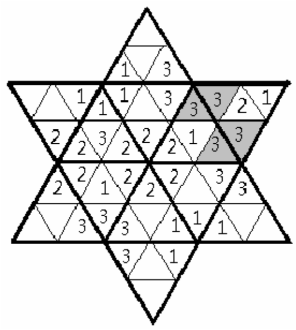


觀察六邊形編號 1. 2.，發現皆爲 3，故 B、H 皆爲 3 鄰。
同法，做表格如下：
尙未用去者包括：
一鄰 x 2，123 型 x 3，321 型 x 3。

	個數	A	C	D	G	I	J	K	L
2- 一鄰	1								✓
3- 一鄰	1				✓	✓	✓		
123 型	3		✓		✓		✓	✓	✓
321 型	3	✓		✓		✓			

運算並刪去確定部份，得表如下

	個數	C	G	J	K
3- 一鄰	1		✓	✓	
123 型	3	✓	✓	✓	✓



故 3- 一鄰可能爲 G 或 J，組合數 2 種。

→ 結合三個子 Case，得共 4 個組合數。

(五) 由(四)知此情形有 4 個組合數後，接著考慮 123 型和 321 型。
由命名得知：
當初因爲中央三角形不參與拼排，所以將 1123、2231、3312 外圈順時針爲 123 者命名爲 123 型，而 1132、2213、3321 亦同理，命名爲 321 型。但這六塊三角形拼塊皆相異，故各有 3! 種組合。

依乘法原理得知：
(2, 1, 3)訂 F 爲 1- 二鄰 的組合數=4 x 3! x 3!=144。

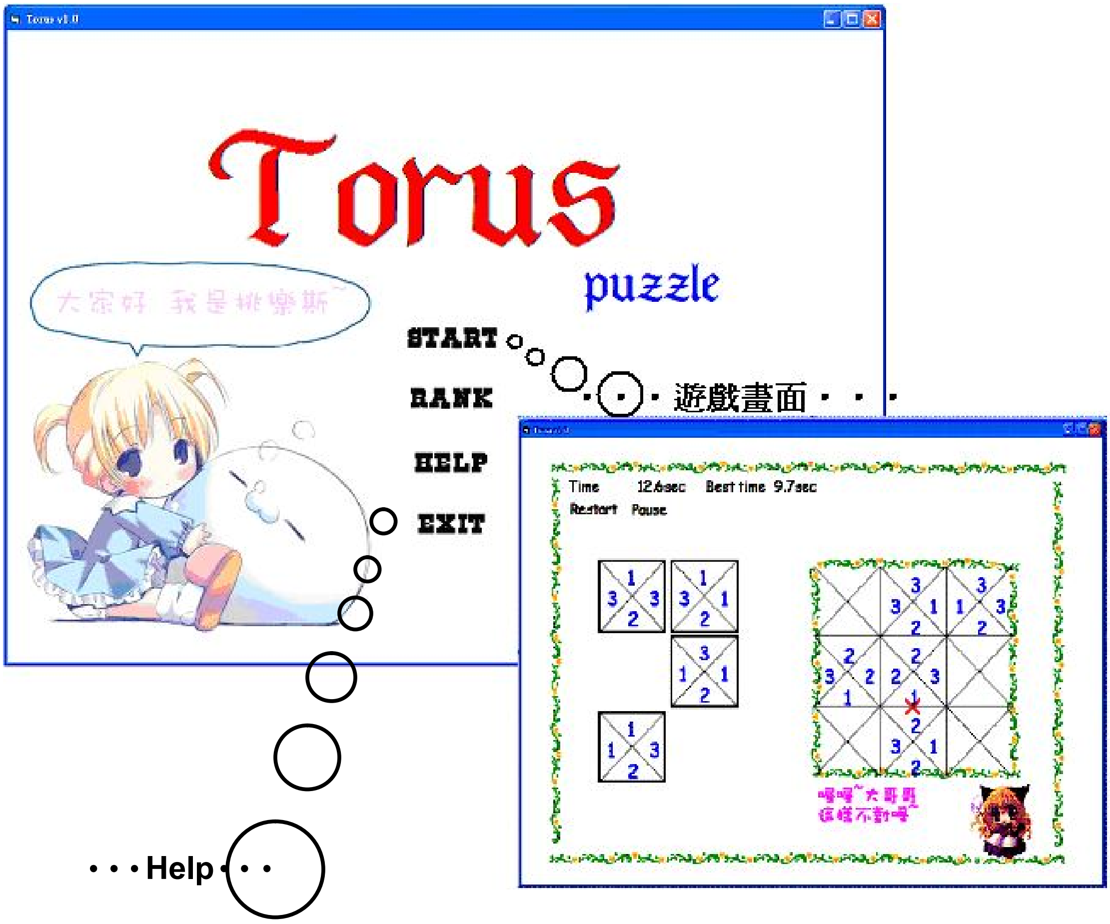
(六) 先前假設 F 爲 1- 二鄰，但位置 E、F 的位置可互換，故(2, 1, 3)的總組合數有 144 x 2=288 種。

五、由於此種情形爲(2, 1, 3)，尙須考慮(3, 1, 2)，故組合數 x 2。
並且，這都是在中心正六邊形爲 2 的情況下進行討論，而中心爲 1 和 3 的時候亦然，故組合數需再 x 3。
因此，六芒星總組合數=288 x 2 x 3=1728 種。

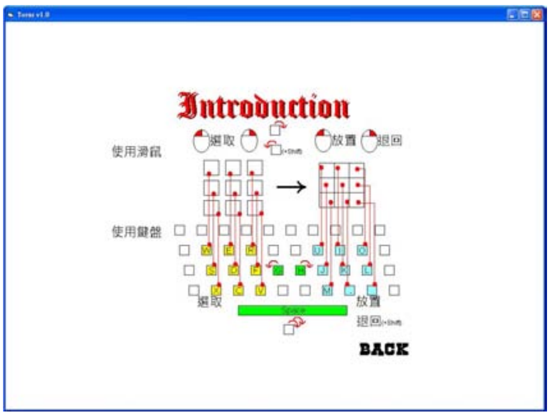
陸、 應用 (電腦互動遊戲設計)：

<u>首先是用 Visual Basic ，撰寫出一個程式，讓玩家能夠親自體驗 Torus 這款遊戲。</u>

以左方 9 塊拼塊任意拼排於右方 3 x 3 正方形，並告知是否違規 (<u>拼合數字需相對應</u>)，違規以紅叉顯示， 讓玩家在時限內，拼出完整的 3 x 3 正方形。

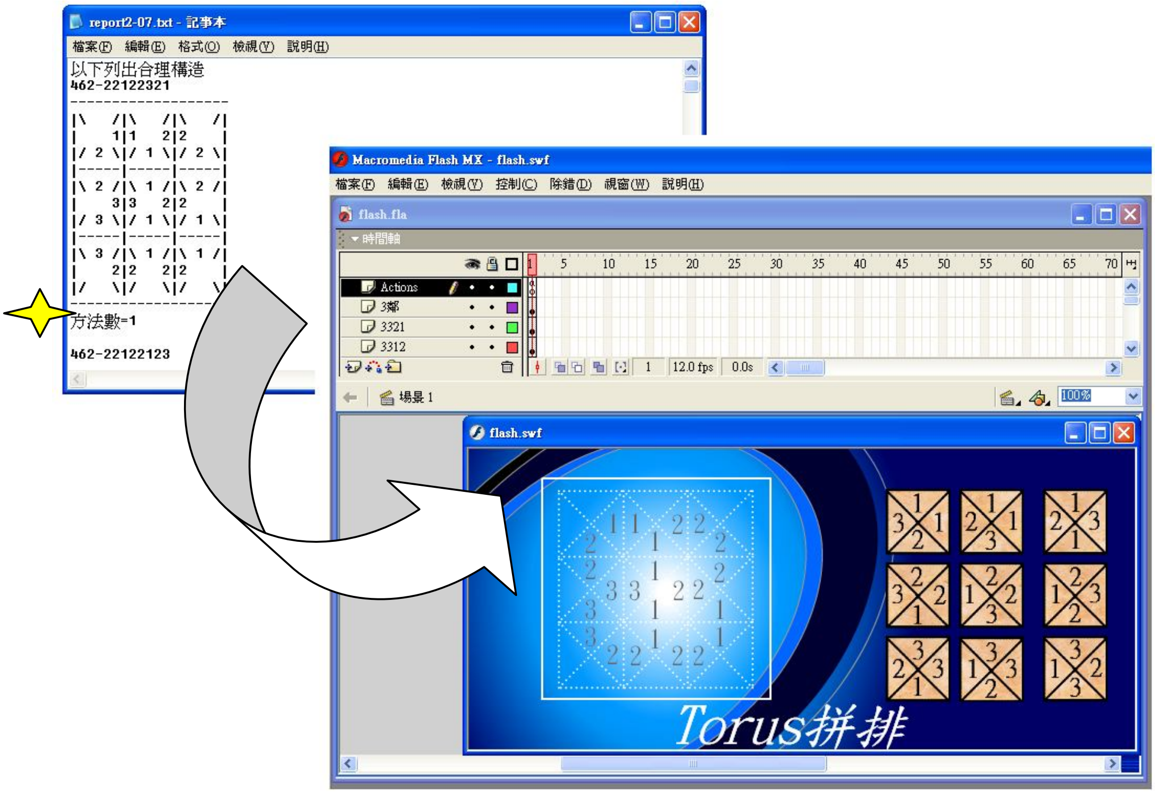


(可以滑鼠或鍵盤進行操作)



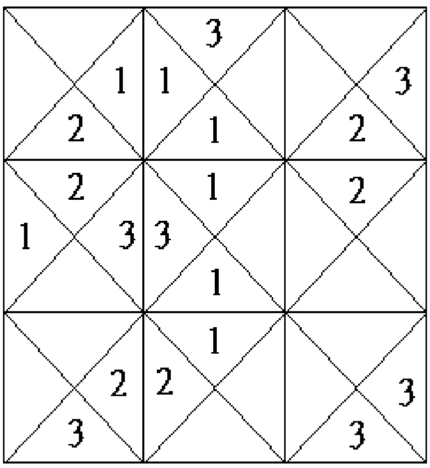
	左側選取區			右側放置區		
滑鼠	左鍵點選		右鍵旋轉	左鍵置入		右鍵取回
鍵盤	W	E	R	U	I	O
	S	D	F	J	K	L
	X	C	V	M	,	.
	G	空白鍵轉 180°				H

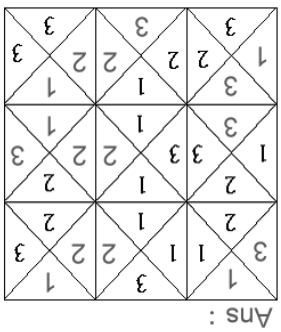
第二種，則為 Torus puzzle 這款遊戲的變形。
根據 C 語言模擬出的數據，分出難易度(方法數=？)，利用 Flash 的 Actionscript 設計遊戲，讓玩家在 **特定限制** 下，設法拼出圖形。



第三種，則是在討論的過程中，所得到的靈感。
在討論的過程中，可以發現：
是透過不斷的分析及填入數字，因此，我們又想到這就像是 **另類的數獨遊戲** 。

例如：





而這應該也可以用 Visual Basic 寫出，但仍在嘗試中。

柒、 結語：

一、討論方法與名字的巧合：

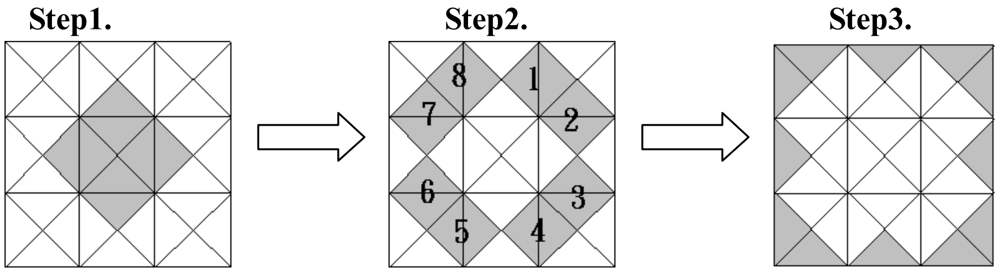
一開始，我們對 Torus 名字的由來備感疑惑，書上的音譯爲：圓環面。但這與高度不一的積木拼塊聯想不出關聯性。一開始，我們只是感到奇怪，並沒有設想太多，即展開熱烈討論。

而經過許多不同的嘗試後，我們所採取的分析方式，是由每個拼塊接合處找尋符合的情況，經由假設、分析、並適時地撰寫程式 (C 語言) 進行模擬。

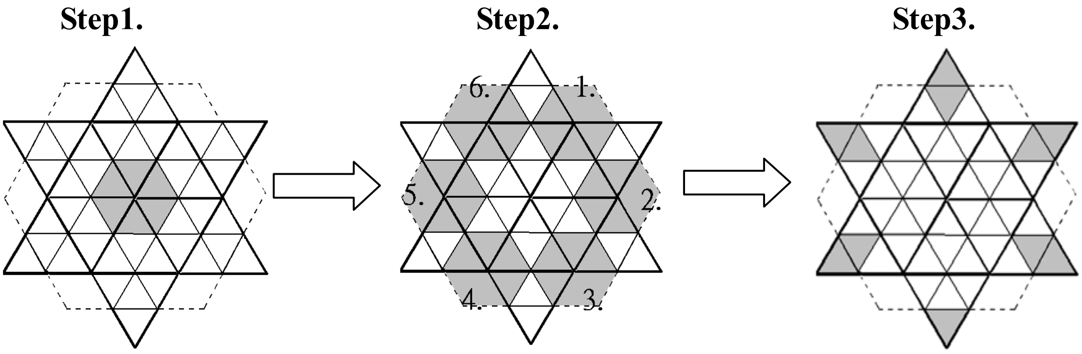
因而，得到了我們所希求的：所有圖示構型、所有可能情形總數、並設計了一種新的難題玩具，證實只要設計妥當，我們的理論 (分析手法) 皆可加以應用，而得到所有構型及情形數。

甚巧不巧，完成一連串的討論後，偶然發現，若將拼塊接合處以一種顏色表示，再依討論順序層層逼近，恰如一個個的圓環由內而外環環相扣，與它的名字產生了呼應—Torus 圓環面。

1. Torus 的分析流程：



2. 自行設計的圖案 (六芒星) 的分析流程：



二、利用分析方式，設計電腦互動遊戲 (詳見篇章六)

捌、未來展望

一、天馬行空的創造新的難題拼塊 ：

(一) 前提：(詳見前面篇章 〝研發新的積木拼塊〞)

前面提到了 〝所使用拼塊的限制〞 ：

1. 拼塊形狀：選用正多邊形較佳。
2. 確定拼塊數量：(分割區域，填入顏色)

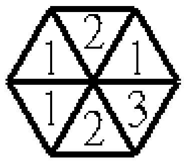
並成功製出以正三角形為拼塊，六芒星為拼成圖案的難題玩具。

(已<u>得知所有構型及情形數)</u>

(二) 所構思的難題拼塊 part Π：

二維發展：(正六邊形)

正六邊形的六個邊，將他分為六個區域，分別填上六個數字。若依先前的規則，使 1、2、3 皆出現 1 次以上，可旋轉且不可翻轉，則總共會有 90 種拼塊。



一種可能情形↑

三維發展：(正立方體)

到目前為止，討論的範圍都只限於 2 維平面上，然而我們很容易想像，這種情形可以推廣至三度空間。我們先想到的是正立方體的拼塊。在三度空間上，每個方塊可旋轉也可翻轉。六個面分別賦予 1 個數字，1、2、3 皆出現 1 次以上，則我們可以得到 30 個拼塊。

二、新難題拼塊可能的瓶頸：

(一)無論是正六邊形的 90 個拼塊，或是正方體的 30 個，相較於之前的情形，都會是很龐大的組合。在大量的假設層級上，程式效率可能會顯得不足，而撰寫的方式也會需要改進。

(二) 隨著拼塊數上升，將會更難使用人力驗證，尤其是在進入三維空間後，後續的討論情形將會很難在紙上進行討論，因此我們也可能會需要找到另一種討論方式。

玖、參考資料：

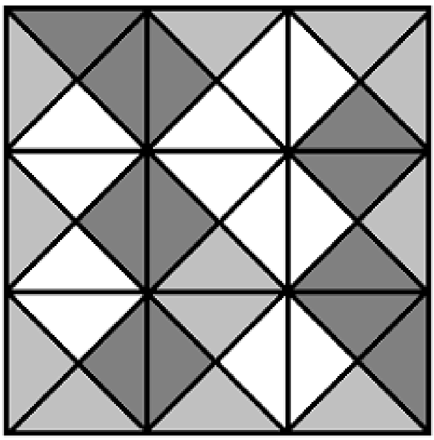
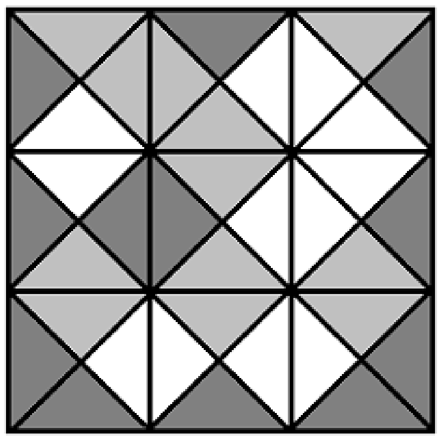
林苑明譯 有趣的數學遊戲 初版 台北 銀禾出版社 第 116~121 頁 1987 年

‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧謝 謝 閱 覽 歡 迎 指 教‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧

附錄：Torus puzzle 簡化 Case 數的詳細說明

在尋找這 25 種 Case 的關聯性時，首先，我們想到了圖形的構形問題。
(前提：中心為 1123(代表鄰的情形) 及一對(代表對的情形))

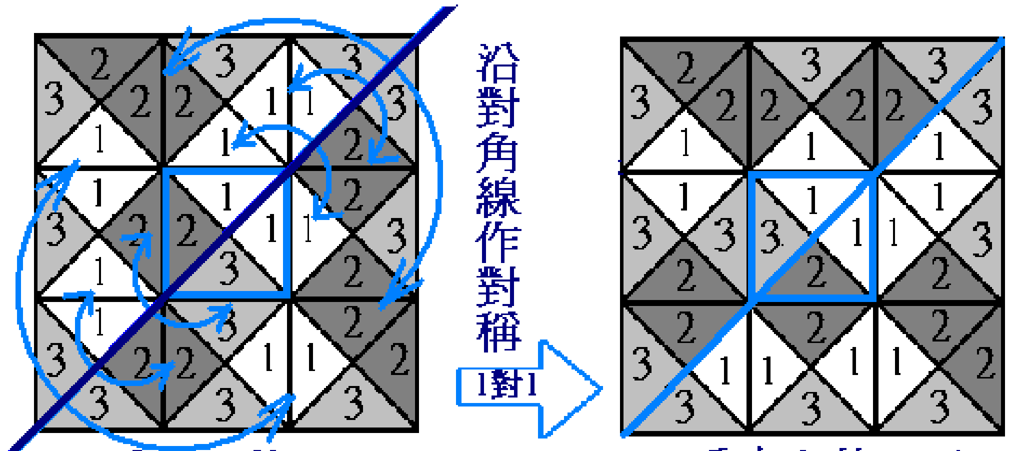
先隨意選取一種成立的圖形觀察：
思考：數字的位子互相轉換的情形
發現到：數字的轉換並不會影響構形 → 所以可以將構形數算出，再乘以輪轉數

鄰為中心的情形	對為中心的情形
 (6,1,5)表 1→白色 2→淺灰 3→深灰 (6,5,1)表 1→白色 2→深灰 3→淺灰	 (5,1,6)表 1→淺灰 2→深灰 3→白色 (5,6,1)表 1→淺灰 2→白色 3→深灰
2、3 轉換後，中心由 1123→1132 因此，需在 **〝不改變不同數目組合出的菱形個數〞** 的前提下，進行修正。	**2、3 轉換後，中心仍為一對 (具對稱性)**

註一：數字 1 不能與 2、3 進行轉換，不然中心就轉變了。(違背原命題)
註二：構形數可由其中的 Case 代表。(即：簡化 Case 數的作用)

接著，在 **〝不改變不同數目組合出的菱形個數〞** 的前提下，我們必須把中心拼塊由 1132 轉換回 1123。因此，我們想到對稱性的問題。
舉例說明：
已知：1123 為中心的 (6 ,1, 5)總數解 ＝ 1132 為中心的 (6, 5, 1)總數解
Want：1132 為中心的 (6, 5, 1)總數解 ＝ 1123 為中心的 (6, 5, 1)總數解

我們所想到的方法爲：沿對角線作對稱圖形。



1132爲中心的(6 ,5, 1)　　1123爲中心的(6 ,5, 1)

在沿對角線作對稱的方式下，中心拼塊由 1132 換回了 1123。
且左上部分的菱形映射到右下，右下則映射至左上部分，過程爲一對一函數，所以不同數字的菱形個數皆未改變，且不會有重複考慮的情形。

因此，得到所求：在 1123 爲中心的前提下，(6 ,1, 5)case = (6 ,5, 1)case。
進而將存在的 23 個 Case 簡化成 13 個 case。

	將存在的 23 個 Case 簡化的情形		
(5,1,6) & (5,6,1)	By：2、3 換；再作對稱 →	化簡成 1 個 case (5 ,6, 1)	分別的 Case 數算出後要 x 2
(6,1,5) & (6,5,1)	By：2、3 換；再作對稱 →	化簡成 1 個 case (6 ,5, 1)	
(2,4,6) & (2,6,4)	By：2、3 換；再作對稱 →	化簡成 1 個 case (2 ,6, 4)	
(4,2,6) & (4,6,2)	.	化簡成 1 個 case (4 ,6, 2)	
(6,2,4) & (6,4,2)	.	化簡成 1 個 case (6 ,4, 2)	
(3,4,5) & (3,5,4)	.	化簡成 1 個 case (3 ,5, 4)	
(4,3,5) & (4,5,3)	.	化簡成 1 個 case (4 ,5, 3)	
(5,3,4) & (5,4,3)	.	化簡成 1 個 case (5 ,4, 3)	
(5,2,5) & (5,5,2)	.	化簡成 1 個 case (5 ,5, 2)	
(3,3,6) & (3,6,3)	.	化簡成 1 個 case (3 ,6, 3)	
(2,5,5)	→	還是(2,5,5)	
(6,3,3)	→	還是(6,3,3)	

【評語】040402

1)本作品雖以”Torus"爲名，然作者群似並未掌握 Torus 與拼排法之間之關聯性。

2)本作品之整體內容與結論之數學本質較爲薄弱。