中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第一名

030428

形中有形

學校名稱：宜蘭縣立國華國民中學

作者：	指導老師：
國三 黃胤勛 國三 李易哲 國三 劉奕辰 國三 王昱翔	沈志強 吳秉鴻

關鍵詞：　相似形、內接正多邊形、對角線

形中有形

摘要

利用 GSP(動態幾何繪圖軟體)協助探討正 n 邊形對角線相交所圍出圖形的性質與邊長關係，並利用正 n 邊形對角線與邊長的比值來探討正 n 邊形內接正 m 邊形其邊長關係，並找出其規律。

壹、 研究動機

自從二年級下學期數學課上到尺規作圖、三角形的性質、三角形的全等，一直到三年級的相似形，幾何的世界實在令我們著迷，每每遇到一些題目時，心裡就浮現「是否能有進一步的規律？是否能適用於更廣的條件？」這樣的想法。例如我們曾做過一道題目：「任意三角形其三邊中點連線必爲其相似形，並邊長爲原對邊之 $\frac{1}{2}$ ，面積爲原面積之 $\frac{1}{4}$ 。」我們就會去討論：一定要中點連線嗎？是否其他點也可以？一定要三角形嗎？其他 n 邊形可以嗎？因此激發我們作底下的研究。

貳、 研究目的

1. 任意 n 邊形是否能有其內接 n 邊形與其相似？
2. 探討正 n 邊形對角線相交所圍出圖形之性質。
3. 探討正 n 邊形內接正 m 邊形其邊長比。
4. 利用 GSP(動態幾何繪圖軟體)協助探討以上問題。

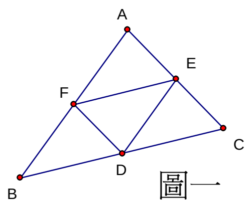
參、 研究器材

GSP(動態幾何繪圖軟體)、電腦、紙、筆、人腦

肆、 研究過程

一、 任意 n 邊形是否能有其內接 n 邊形與其相似？

我們曾做過一道題目：「任意三角形其三邊中點連線(如下圖一)必爲其相似形，並邊長爲原對邊之 $\frac{1}{2}$ ，面積爲原面積之 $\frac{1}{4}$ 。」，我們思考底下幾個問題：



$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

圖一

(一)、 三角形是否有其他內接三角形作法而與其相似？

在我們做三角形的相似形題目時我們發現有很多內接三角形與原三角形相似，並且我們參考了第四十六屆中小學科展佳作作品「內接相似三角形的尺規作圖」，其中探討了一些內接相似三角形的尺規作圖，因此在此我們不再贅述。

(二)、 n 邊形$(n>3)$各中點連線是否與其相似？

1. 非正 n 邊形$(n>3)$：

我們知道任意四邊形中點連線爲平行四邊形，面積爲原四邊形的 $\frac{1}{2}$ ，並不會與原四邊形相似，甚至任意 m 邊形$(m\geq5)$其中點連線並無特定形狀，且面積比亦不一定。因此，除了三角形外，任意 n 邊形各中點連線並不一定爲原 n 邊形之相似形。

2. 正 n 邊形$(n>3)$：

正 n 邊形其中點連線亦爲一正 n 邊形，因此爲原正 n 邊形之相似形，其邊長、面積關係與底下一併討論。

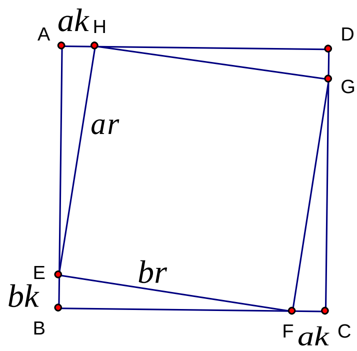
(三)、 任意 n 邊形$(n>3)$是否有其內接 n 邊形與其相似？

1. 非正 n 邊形：

任意 n 邊形若其爲非正 n 邊形，我們原先猜測必存在一內接 n 邊形與其相似，但在我們在針對長方形討論時即發現問題，因此我們反向證明了長方形不存在內接相似形。

研究 1-1：任意長方形若非爲正方形，不存在內接相似形

證明：假設一長方形 ABCD 存在一內接相似形長方形 EFGH 如右圖二，且令 $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ ， $\overline{AD}=\overline{BC}=b$ ， $a<b$



圖二

$\because$ 長方形$ABCD\sim$長方形$EFGH \Rightarrow \overline{AB}:\overline{BC}=\overline{EH}:\overline{EF}\cdots(1)$

又 $\Delta AEH\sim\Delta BFE(\angle A=\angle B=90^0，\angle AEH=\angle BFE)$

$\Rightarrow \overline{EH}:\overline{EF}=\overline{AH}:\overline{BE}\cdots(2)$

由(1)、(2)得知 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{EH}:\overline{EF}=\overline{AH}:\overline{BE}$

我們令 $\overline{EH}=ar$，$\overline{EF}=br$ 且 $\overline{AH}=ak$，$\overline{BE}=bk$ $(r\neq0，k\neq0)$

$\Rightarrow \overline{AE}=a-bk$，$\overline{BF}=b-ak$ ，根據畢氏定理，我們得到：

$\begin{cases}(a-bk)^2+(ak)^2=(ar)^2\\(b-ak)^2+(bk)^2=(br)^2\end{cases}$ ， 化簡後得 $r=\pm1$(負不合)，$k=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

$\Rightarrow \overline{BE}=b\times\dfrac{2ab}{a^2+b^2}=\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}>a=\overline{AB}$ 與原假設矛盾，故長方形不存在內接相似形

除了長方形，我們利用 GSP(動態幾何繪圖軟體)去模擬不特定之四邊形、五邊形、六邊形我們發現亦無內接相似形。

2. 正 n 邊形：

正 n 邊形之內接相似形，只需在每邊上取一點使得與原頂點的距離為 $\frac{1}{a}$，將各點連線即為內接相似形(我們可以簡單證明出其對應角相等、對應邊成比例，證明不在此贅述)，我們將探討內接相似形與原正 n 邊形之邊長比及面積比。

研究 1-2：正 n 邊形若每邊上取一點使得與原頂點的距離為 $\frac{1}{a}$，將各點連線，則邊長與原正 n 邊形面積比為 $\frac{(a^2-2a+2-2(a-1)\cos\theta)}{a^2}:1$，其中 $a\geq 1$，$\theta=180^0-\frac{360^0}{n}$

證明：假設正 n 邊形之每一邊長為 1，且每一內角 $\theta=180^0-\frac{360^0}{n}$ 如下圖三。

$$\overline{BA'}=1-\frac{1}{a}$$

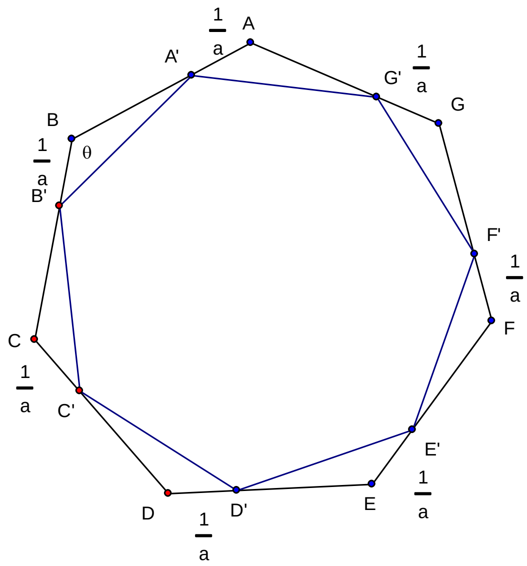
利用餘弦定理我們知道

$$\overline{A'B'}^2=(1-\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{a})^2-2(1-\frac{1}{a})(\frac{1}{a})\cos\theta$$

$$=\frac{a^2-2a+2-2(a-1)\cos\theta}{a^2}$$

$$\therefore\ \overline{A'B'}:\overline{AB}=\frac{\sqrt{a^2-2a+2-2(a-1)\cos\theta}}{a}:1$$

面積比為 $\frac{a^2-2a+2-2(a-1)\cos\theta}{a^2}:1$



圖三

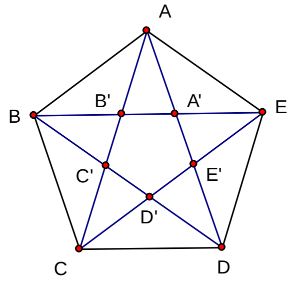
由上可知，我們常見的正 n 邊形各邊中點連線($a=2$)面積與原面積比如下表：

$\frac{2-2\cos\theta}{4}$	$n=3$ $\theta=60^0$	$n=4$ $\theta=90^0$	$n=5$ $\theta=108^0$	$n=6$ $\theta=120^0$	$n=10$ $\theta=144^0$	…	$n\to\infty$ $\theta\to 180^0$
面積比值	0.25	0.5	約 0.65	0.75	約 0.90	…	1

在研究的過程我們發現，因非正 n 邊形所涉及的變數實在太多，除非是特定的多邊形，否則我們實在很難得到結果，因此**接下來的討論我們鎖定在正 n 邊形**。

二、 正 n 邊形對角線相交所圍出圖形之性質。

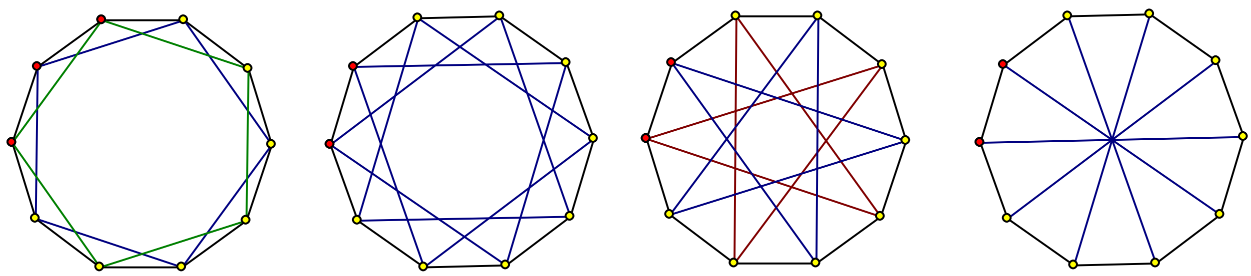
在三年級上學期上到相似形時，我們遇到一個題目：「如下圖四，在正五邊形 $ABCDE$ 中，對角線所圍成的新五邊形 $A'B'C'D'E'$，$\overline{A'B'}:\overline{AB}$ 的比值是多少？」。當時，我們利用 $\Delta BA'A \sim \Delta AB'A'$，對應邊成比例求出 $\overline{A'B'}:\overline{AB}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$。但這樣的方法並不適用於正六邊形、正七邊形等其他正多邊形，而且當正 n 邊形 $n\geq 6$ 時，其對角線的畫法並不唯一，這也影響了所圍成的新正 n 邊形的邊長大小。因此，我們做了底下的探討：



圖四

(一)、 正 n 邊形跳 m 點之對角線所形成之正 n 邊形的形式。

當我們著手去畫正 n 邊形的對角線時，我們發現每跳一點與每跳兩點或跳其他點所畫出來的圖形，不只是所圍的面積大小不同，所畫的形式也不一樣，例如底下圖五是正 10 邊形，跳 1 點、2 點、3 點、4 點對角線所圍成的圖形。



$n=10$，$m=1$　　$n=10$，$m=2$　　$n=10$，$m=3$　　$n=10$，$m=4$

圖五

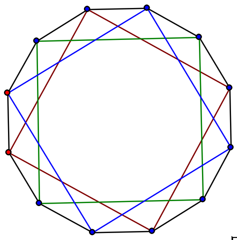
當 $m=1$ 時，我們得到 2 個正五邊形圍成一正 10 邊形。
當 $m=2$ 時，我們得到 1 個一筆畫可完成之正 10 邊形。
當 $m=3$ 時，我們得到 2 個正五角星形圍成一正 10 邊形。
當 $m=4$ 時，我們發現所有的對角線交於一點。

由上述我們知當 m 不同時，會有不一樣形式，因此我們嘗試著去討論及歸納出底下結果：

1. 正 n 邊形對角線若固定跳 m 點連線($m=1,2,\cdots$)，因為每一點可連出 $n-3$ 條對角線，而正 n 邊形是個對稱圖形，又考慮到若 n 為偶數，所有與正對面頂點連線之對角線將交於一點，則**每個正 n 邊形會有 $\left[\dfrac{n-3}{2}\right]$ 個不同之正 n 邊形形式**，其中[ ]代表高斯符號。
2. 當我們固定跳 m 點連線，雖然每個正 n 邊形會有 $\left[\dfrac{n-3}{2}\right]$ 個不同之正 n 邊形形式，但我們針對他的構成形式可分為以下三種形式(因為兩邊對稱，且不可與正對面頂點連線，我們只討論 $m+1<\dfrac{n}{2}$)：

A 型：如果$m+1$是n的因數$\Rightarrow$會形成$m+1$個正$\dfrac{n}{m+1}$邊形，圍成一正n邊形。

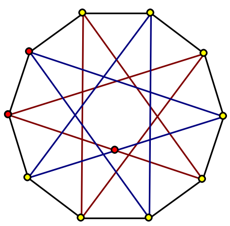
假設正 n 邊形的頂點爲 a_1、a_2、…、a_n，因$m+1$可整除n，若我們以任意一點爲起點，跳m 點與其頂點連線，每跳$\dfrac{n}{m+1}$次即會回到起點，形成正$\dfrac{n}{m+1}$邊形，又因爲有n個頂點，所以有$m+1$個正$\dfrac{n}{m+1}$邊形互相交錯圍成一正n邊形。例如一正十二邊形每跳 2 點之頂點連線，如下圖六，會形成 3 個正 4 邊形(紅、藍、綠)交錯圍成一正十二邊形。



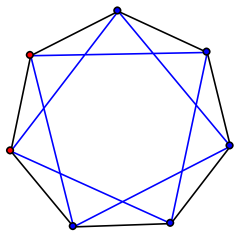
圖六

B 型：如果$m+1$與n的最大公因數爲k $(1<k<m+1)$$\Rightarrow$會形成$k$個正$\dfrac{n}{k}$角星形，圍成一正$n$邊形。

假設正n邊形的頂點爲a_1、a_2、…、a_n，且$m+1=ck$，$n=dk$，$(c,d)=1$，則$[m+1,n]=cdk$ 若我們以任意一點爲起點，跳m 點與其頂點連線，每跳$\dfrac{[m+1,n]}{m+1}=\dfrac{n}{k}$次才會回到起點，又$[m+1,n]>n$，故這些對角線必交錯而形成正$\dfrac{n}{k}$角星形，同樣地，因爲有$n$個頂點，所以有$k$個正$\dfrac{n}{k}$角星形互相交錯圍成一正$n$邊形。例如一正十邊形每跳 3 點之頂點連線，如下圖七，會形成 2 個正 5 角星形(紅、藍)交錯成一正十邊形。



圖七



圖八

C 型：如果$m+1$與n互質(最大公因數$k=1$)$\Rightarrow$會形成一個可一筆畫畫完之正n角星形，形成一正 n 邊形。

同理，因爲$m+1$與n互質，若我們以任意一點爲起點，跳m 點與其頂點連線，每跳$\dfrac{n(m+1)}{m+1}=n$次才會回到起點，且$n(m+1)>n$，這些對角線必交錯而形成正n角星形，也就是形成一個可一筆畫畫完之正n角星形內部圍成一正 n 邊形。例如一正七邊形每跳 1 點之頂點連線，如上圖八，會形成一個可一筆畫畫完之正七角星形。

我們整理結果如下表：

n邊形 \ 跳m點	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…	n
1	C	A	C	A	C	A	C	A	C	A	C	A	C		
2			C	C	A	C	C	A	C	C	A	C	C		
3					C	B	C	A	C	B	C	A	C		
4							C	C	C	C	A	C	C		
5									C	B	B	B	C		
6											C	C	C		
7													C		
⋮															
正角星形個數	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	…	$\left[\dfrac{n-3}{2}\right]$

(二)、 正n邊形跳m點之對角線所圍成之正n邊形的邊長與原正n邊形的邊長比。

當我們討論出正n邊形跳m點之對角線所圍成之正n角星形的形式後，我們進一步想探討這些正n角星形內部所圍成正n邊形的邊長與原正n邊形的邊長比是多少？有沒有一定的規律？

我們一開始先從正5邊形、正6邊形、正7邊形、…開始探討，從跳一點、跳二點、…持續研究，我們得到了底下的結果：

> **研究 2-1：正n邊形跳一點($m=1$)之對角線所形成之正n角星形內部所圍成正n邊形的邊長與原正n邊形的邊長比為$(2\cos\alpha-\dfrac{1}{\cos\alpha}):1$，其中$\alpha=\dfrac{180^0}{n}$**

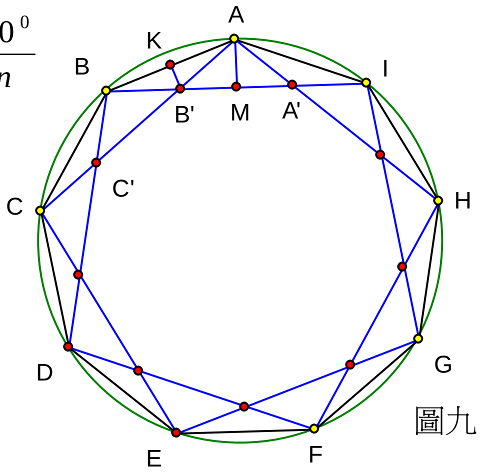
證明：我們作一正n邊形跳一點($m=1$)之對角線所形成之正n角星形及其外接圓如下圖九

令$\overline{AB}=P$，$\alpha=\angle ABB'=\angle BAB'=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{360^0}{n}=\dfrac{180^0}{n}$

並做$\overline{B'K}\perp\overline{AB}$，則$\overline{BK}=\overline{AK}=\dfrac{1}{2}p$

$\therefore\overline{BB'}=\overline{BK}\times\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{p}{2\cos\alpha}$

做$\overline{AM}\perp\overline{BI}$，則$\overline{BM}=\overline{IM}=\dfrac{1}{2}\overline{BI}$



圖九

且 $\overline{BM}=\overline{AB}\cos\alpha=p\cos\alpha$ $\quad\therefore \overline{B'A'}=\overline{BI}-2\overline{BB'}=2p\cos\alpha-\dfrac{p}{\cos\alpha}$

故正 n 角星形內部所圍成正 n 邊形的邊長與原正 n 邊形的邊長比爲

$(2\cos\alpha-\dfrac{1}{\cos\alpha}):1$

研究 2-2：正 n 邊形跳二點($m=2$)之對角線所形成之正 n 角星形內部所圍成正 n 邊形的邊長與原正 n 邊形的邊長比爲 $(2\cos\alpha+\cos2\alpha-2):1$，其中 $\alpha=\dfrac{180^0}{n}$

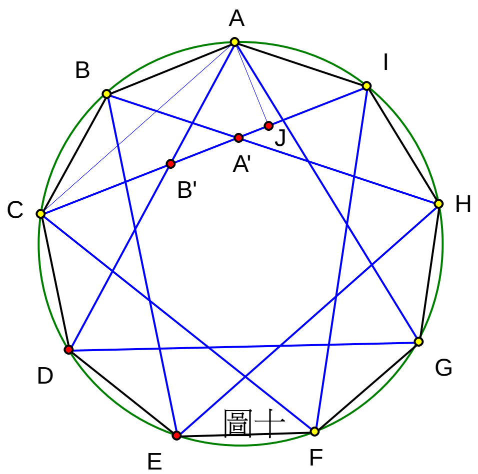
證明：我們作一正 n 邊形跳一點($m=2$)之對角線所形成之正 n 角星形及其外接圓如下圖十

$\because \angle BCA=\dfrac{1}{2}\angle BCI=\dfrac{1}{2}\angle BAD=\angle BAC$

又 $\angle ABC+\angle BCA+\angle BAC=180^0$

$\therefore \angle ABC+\angle BCI=\angle ABC+\angle BAD=180^0$

$\overline{AB}/\!/\overline{CB'}$，$\overline{BC}/\!/\overline{AB'}$，$ABCB'$ 爲平行四邊形



圖十

同理 $ABA'I$ 爲平行四邊形 $\therefore$ 令 $\overline{AB}=\overline{CB'}=\overline{A'I}=p$

$\overline{CI}=\overline{CJ}+\overline{IJ}$

$=\overline{AC}\cos\alpha+\overline{AI}\cos2\alpha$

$=(\overline{AB}\cos\alpha+\overline{BC}\cos\alpha)\cos\alpha+\overline{AI}\cos2\alpha$

$=2p\cos^2\alpha+p\cos2\alpha$

$\overline{A'B'}=\overline{CI}-\overline{CB'}-\overline{A'I}=2p\cos^2\alpha+p\cos2\alpha-2p$

故正 n 角星形內部所圍成正 n 邊形的邊長與原正 n 邊形的邊長比爲

$(2\cos^2\alpha+\cos2\alpha-2):1$

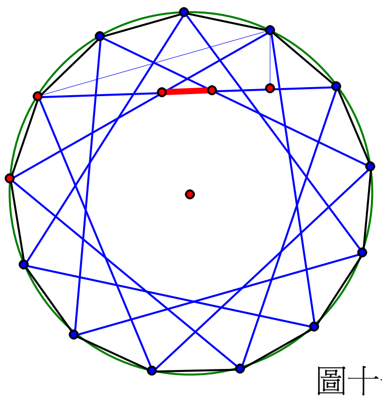
其實上述 $\overline{CB'}$ 也可以以 $m=1$ 時 $\overline{BB'}$ 的求法得到 $\overline{CB'}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\cos\alpha$，**如果我們定義正 n 邊形的邊長爲 1，正 n 角星形內部所圍成正 n 邊形的邊長爲 $F(m,n)$，$m=k$ 時的對角線爲** $L(k,n)$，由上述兩證明得：

$L(1,n)=2\cos\alpha$，$L(2,n)=L(1,n)\cos\alpha+\cos2\alpha$

$F(1,n)=L(1,n)-\dfrac{1}{\cos\alpha}$，$F(2,n)=L(2,n)-\dfrac{L(1,n)}{\cos\alpha}$

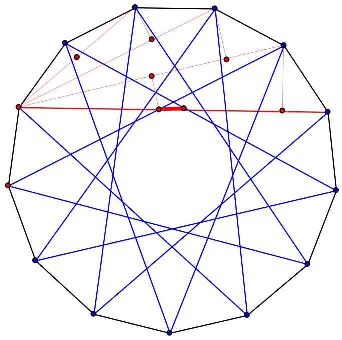
當我們做 $m=3$，如右圖十一，我們得到

$L(3,n)=L(2,n)\cos\alpha+\cos3\alpha$，$F(3,n)=L(3,n)-\dfrac{L(2,n)}{\cos\alpha}$


圖十一

我們持續作研究，得到底下重要結論：

研究 2-3：正 n 邊形跳 k 點之對角線與正 n 邊形邊長比值爲 $L(k,n)=\sum_{i=0}^{k}\cos i\alpha\cdot\cos^{k-i}\alpha$



圖十二

證明： 若正 n 邊形的邊長爲 1，如右圖十二，我們可知 $L(k,n)$ 可由 $L(k-1,n)$ 及邊長來表示，如下：

$$L(k,n)=L(k-1,n)\cos\alpha+\cos k\alpha\text{，}k=1,2,\cdots,m\text{，}\alpha=\frac{180^0}{n}$$

令 $L(0,n)=$ 正 n 邊形的邊長 $=1$

利用遞迴，$L(k,n)$ 可以展開如下：

$$\begin{aligned}L(k,n)&=2\cos^{k}\alpha+\cos 2\alpha\cdot\cos^{k-2}\alpha+\cos 3\alpha\cdot\cos^{k-3}\alpha+\cdots+\cos k\alpha\\&=\cos^{k}\alpha\cdot\cos 0\alpha+\cos^{k-1}\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha\cdot\cos^{k-2}\alpha+\cdots+\cos k\alpha\\&=\sum_{i=0}^{k}\cos i\alpha\cdot\cos^{k-i}\alpha\end{aligned}$$

在之後我們發現 $L(k,n)$ 對於我們底下的研究非常有幫助。

我們由研究 2-1、2-2、2-3 可推得底下的研究 2-4

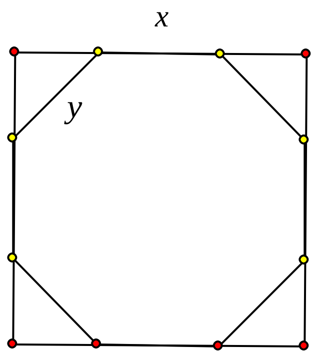
研究 2-4：正 n 邊形跳 m 點之對角線所形成之正 n 角星形內部所圍成正 n 邊形的邊長與原正 n 邊形的邊長比爲 $F(m,n):1$，其中 $F(m,n)=L(m,n)-\dfrac{L(m-1,n)}{\cos\alpha}$

我們利用 C⁺⁺程式(程式如附錄)計算出 $F(m,n)$ 的值如下表：

n邊形 ＼ 跳m點	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000	100000	…
1	0.382	0.577	0.692	0.765	0.815	0.851	0.999	1	1	1	
2			0.246	0.414	0.532	0.618	0.996	1	1	1	
3					0.184	0.325	0.993	1	1	1	
48							3.14×10^{-2}	0.988	1	1	
498								3.14×10^{-3}	0.988	1	
4998									3.14×10^{-4}	0.988	
49998										3.14×10^{-5}	
⋮											

三、正 n 邊形內接正 kn 邊形之邊長比。

二年級我們做過這樣的題目：『在一邊長爲 x 的正方形內接一邊長爲 y 的正八邊形，如下圖十三，求 $y:x=?$』，當時我們利用等腰直角三角形的邊長比，得到 $y:x=(\sqrt{2}-1):1$。但，對於其他如正 6 邊形內接一正 12 邊形、正 7 邊形內接一正 14 邊形，甚至正 n 邊形內接一正 $2n$ 邊形會是如何？是否連正 n 邊形內接一正 bn 邊形都有規律？因此，我們做了底下的探討：



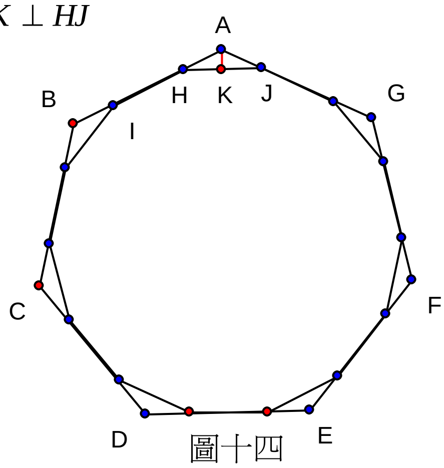
圖十三

(一)、 正 n 邊形內接正 $2n$ 邊形之邊長比。

爲了找出正 n 邊形內接正 $2n$ 邊形之邊長比的規律，我們嘗試了幾個方法後，決定用三角函數來當工具。

> **研究 3-1：正 n 邊形若內接一正 $2n$ 邊形，則正 $2n$ 邊形邊長比正 n 邊形邊長的比值爲 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha+1}$，其中 $\alpha=\dfrac{180^0}{n}$**

證明：我們作一正 n 邊形內接一正 $2n$ 邊形如右圖十四，並作 $\overline{AK}\perp\overline{HJ}$



圖十四

令 $\alpha=\angle AHK=\dfrac{180^0}{n}$ （$2n$ 邊形的一外角)

設 $\overline{AH}=\overline{BI}=x$

$$\overline{IH}=\overline{HJ}=2x\cos\alpha$$
$$\overline{AB}=\overline{IH}+2\overline{AH}$$
$$=2x\cos\alpha+2x$$
$$\therefore \overline{IH}:\overline{AB}=2x\cos\alpha:(2x\cos\alpha+2x)$$
$$=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+1}$$

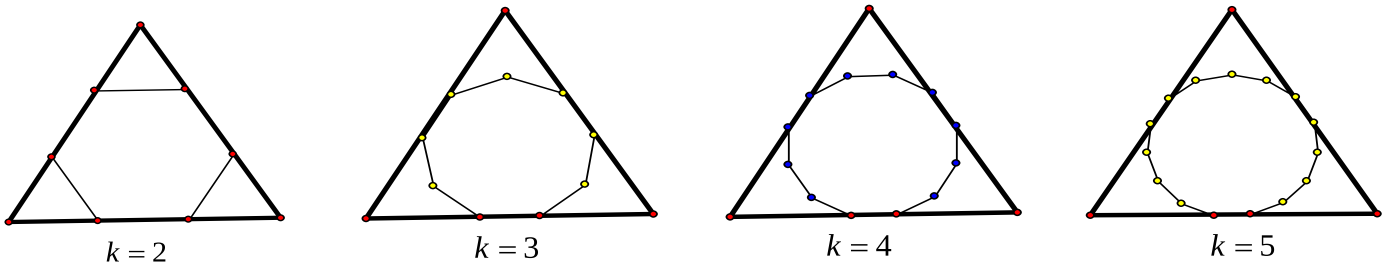
這樣的結果可適用於任意正 n 邊形內接正 $2n$ 邊形之邊長比，且我們知道當 $n\to\infty$ 時 $\cos\alpha\to1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha+1}=\dfrac{1}{2}$，也就是說邊長比會趨近於 $\dfrac{1}{2}$，我們得到了底下的表格：

$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha+1}$	$n=3$ $\alpha=60^0$	$n=4$ $\alpha=45^0$	$n=5$ $\alpha=36^0$	$n=6$ $\alpha=30^0$	$n=7$ $\alpha=\dfrac{180^0}{7}$	…	$n\to\infty$ $\alpha\to0^0$
邊長比值	$\dfrac{1}{3}=0.\bar{3}$	$\sqrt{2}-1$ ≒0.414	≒0.447	$2\sqrt{3}-3$ ≒0.464	≒0.473	…	$\dfrac{1}{2}=0.5$

我們嘗試著用這樣的方法去推導正 n 邊形內接正 $2n$ 邊形、內接正 $3n$ 邊形，乃至於內接正 kn 邊形，但顯然我們必須修正一下方法。

(二)、 正n邊形內接正kn邊形之邊長比。

首先，探討正n邊形內接正$2n$邊形、正$3n$邊形、…、正kn邊形的簡單關係。我們發現當$k=2$、$k=3$、$k=4$、$k=5$，如下圖十五，



圖十五

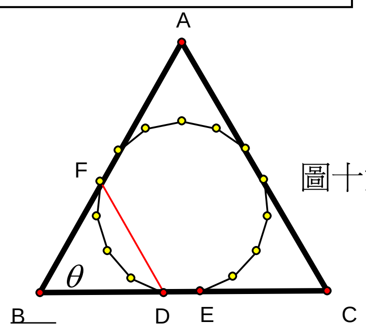
正kn邊形因內接於正n邊形上，所以會有兩個頂點在每一正n邊形的邊上，很容易的我們知道正n邊形相鄰兩邊所夾共有$k-2$個頂點未在邊上。

在研究的過程，我們試著利用定理 5 中的對角線$L(k,n)$來協助研究，我們得到了令人振奮的結果。

研究 3-2：正n邊形若內接一正kn邊形，則正kn邊形邊長比正n邊形邊長的比值為

$$\frac{\cos\alpha}{L(k-2,kn)+\cos\alpha}\text{，其中}\alpha=\frac{180^0}{n}$$

證明：我們作一正n邊形內接一正kn邊形如右圖十六，



圖十六

連接正n邊形兩鄰邊上靠近頂點之正kn邊形頂點$\overline{DF}$

令正n邊形邊長$\overline{BC}=p$，內接正kn邊形邊長$\overline{DE}=q$

我們知道正n邊形相鄰兩邊所夾共有$k-2$個頂點未在邊上，$\overline{DF}$相當於正kn邊形跳$k-2$點之對角線

$\therefore \overline{DF}=L(k-2,kn)\cdot q$

$\because \overline{BD}=\overline{BF}\Rightarrow \angle BFD=\angle BDF=90^0-\frac{1}{2}\theta$，其中$\theta=180^0-\frac{360^0}{n}$(正$n$邊形之內角)

在ΔBDF中，利用正弦定理得知

$$\frac{\overline{DF}}{\sin\theta}=\frac{\overline{BD}}{\sin(90^0-\frac{1}{2}\theta)}$$

$$\overline{BD}=\frac{\overline{DF}\sin(90^0-\frac{1}{2}\theta)}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\overline{DF}\sin\alpha}{\sin 2\alpha} \qquad (\alpha=\frac{180^0}{n})$$
$$=\frac{\overline{DF}}{2\cos\alpha}$$
$$=\frac{L(k-2,kn)\cdot q}{2\cos\alpha}$$

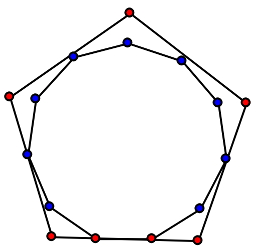
又 $\overline{BC}=2\overline{BD}+\overline{DE}$

$$\therefore \overline{DE}:\overline{BC}=q:(2\cdot\frac{L(k-2,kn)\cdot q}{2\cos\alpha}+q)$$
$$=1:\frac{L(k-2,kn)+\cos\alpha}{\cos\alpha}$$
$$=\frac{\cos\alpha}{L(k-2,kn)+\cos\alpha}$$

得到以上的結果，讓我們想要更進一步想要研究若內接正多邊形並非 n 的倍數時，是否有一定的規律，是否一樣可以利用對角線 $L(m,n)$ 來表示呢？

四、正 n 邊形內接最大正 s 邊形(一邊相接， $s>n$)邊長比

首先，我們考慮內接正 s 邊形的一邊需與正 n 邊形一邊相接。如此我們要求最大的內接正 s 邊形必還有兩頂點落在與正 n 邊形相接的兩鄰邊上，且內接正 s 邊形與正 n 邊形相接的一邊至頂點落在與正 n 邊形相接的兩鄰邊間必有 $\left\lfloor\frac{s}{n}\right\rfloor-1$ 個頂點(**我們定義** $\left\lfloor\frac{s}{n}\right\rfloor$ **為小於** $\frac{s}{n}$ **的最大整數**)，如右圖十七。



為了尋找規律，我們從較簡單的正方形內接正 s 邊形討論起，且 s 不為 4 的倍數，而當我們著手研究時發現，s 為奇數或偶數所得到的公式並不一樣。

圖十七

> 研究 4-1：**正方形內接最大正 s 邊形($s>n$)，若 s 為奇數，正 s 邊形邊長與正方形比值為** $2\sin\frac{90^0}{s}$

證明：我們作一正方形，內接一最大正 s 邊形，且 s 為奇數，如下圖十八。

作 $\overline{GH}\perp\overline{AD}$ ，並連接 $\overline{GB}$

$\overline{GB} = \overline{EF} = \overline{AD}$ ， $\overline{BH} = \dfrac{1}{2}\overline{BC}$

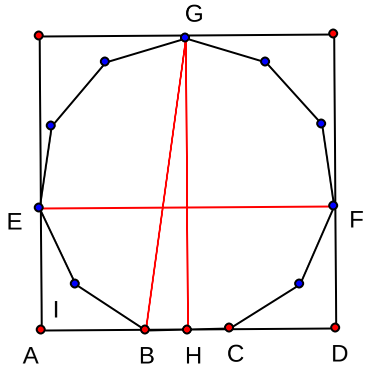
利用定理 3、定理 4 定義α 的方法，我們得到

$$\angle GBH = \frac{s-1}{2} \times \frac{180^0}{s} = 90^0 - \frac{90^0}{s}$$

$$\overline{BC} = 2\overline{BH} = 2\overline{GB}\cos(90^0 - \frac{90^0}{s})$$

$$= 2\overline{AD}\sin\frac{90^0}{s}$$

$$\therefore \overline{BC} : \overline{AD} = 2\overline{AD}\sin\frac{90^0}{s} : \overline{AD} = 2\sin\frac{90^0}{s}$$



圖十八

研究 4-2：正方形內接最大正 s 邊形($s > n$)，若 s 為偶數且不為 4 的倍數，正 s 邊形邊長與正方形比值為 $\sin\dfrac{180^0}{s}$

證明：我們作一正方形，內接一最大正 s 邊形，且 s 為偶數，如下圖十九。

連接 $\overline{BG}$ 、 $\overline{CG}$ 、 $\overline{EF}$

$\because$ s 為偶數且不為 4 的倍數

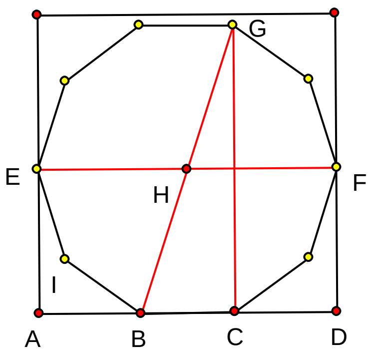
$\Rightarrow \overline{BG} = \overline{EF} = \overline{AD}$ 且 $\overline{CG} \perp \overline{BC}$

$$\angle GBC = \frac{1}{2}\angle IBC = 90^0 - \frac{180^0}{s}$$

$$\overline{BC} = \overline{GB}\cos(90^0 - \frac{180^0}{s})$$

$$= \overline{AD}\sin\frac{180^0}{s}$$

$$\therefore \overline{BC} : \overline{AD} = \overline{AD}\sin\frac{180^0}{s} : \overline{AD} = \sin\frac{180^0}{s}$$



圖十九

若我們想用同樣的想法去套用在正五邊形、正六邊形、…、正 n 邊形內接一最大正 s 邊形，我們發現那是行不通的，而且若 s 是 n 的倍數，定理八、九也不成立，因此我們又必須做修正。

在研究的過程，我們嘗試了許多方法，總是只能解決特例或公式過於冗長。最終，我們想到利用研究 3-2 的想法來試試看，終於讓我們得到底下的公式。

研究 4-3：正n邊形內接最大正s邊形($s>n$)，正s邊形邊長與正n邊形比值為

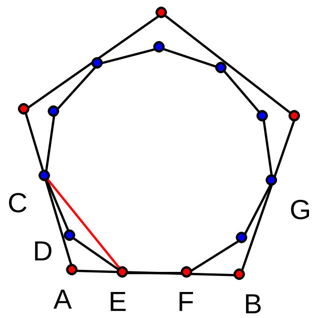
$$\frac{\sin 2\alpha}{2L(p-1,s)\times\sin(2\alpha-(p+1)\beta)+\sin 2\alpha}，\quad p=\left\lfloor\frac{s}{n}\right\rfloor，\alpha=\frac{180^0}{n}，\beta=\frac{180^0}{s}$$

證明：我們作一正n邊形，內接一最大正s邊形，如下圖二十。

連接$\overline{CE}$，由本節最前面所討論知 C、E 間必有$p-1$個頂點，其中$p=\left\lfloor\frac{s}{n}\right\rfloor$

令正n邊形邊長$\overline{AB}=p$，內接正s邊形邊長$\overline{EF}=q$

$\overline{CE}$相當於正s邊形跳$p-1$點之對角線



圖二十

$\therefore \overline{CE}=L(p-1,s)\cdot q$

$$\angle AEC=\angle AED+\angle DEC$$
$$=\frac{360^0}{s}+(p-1)\frac{180^0}{s}$$
$$=(p+1)\frac{180^0}{s}$$

$$\angle CAE=180^0-\frac{360^0}{n}$$

$$\therefore \angle ACE=180^0-\angle AEC-\angle CAE$$
$$=\frac{360^0}{n}-(p+1)\frac{180^0}{s}$$

在ΔACE中，利用正弦定理得知

$$\frac{\overline{AE}}{\sin(\frac{360^0}{n}-(p+1)\frac{180^0}{s})}=\frac{\overline{CE}}{\sin(180^0-\frac{360^0}{n})}$$

$$\overline{AE}=\frac{L(p-1,s)\times q\times\sin(2\alpha-(p+1)\beta)}{\sin 2\alpha}\qquad \alpha=\frac{180^0}{n}，\beta=\frac{180^0}{s}$$

又$\overline{AB}=2\overline{AE}+\overline{EF}$

$$\therefore \overline{EF}:\overline{AB}=q:2\cdot\frac{L(p-1,s)\times q\times\sin(2\alpha-(p+1)\beta)}{\sin 2\alpha}+q$$
$$=1:\frac{2L(p-1,s)\times q\times\sin(2\alpha-(p+1)\beta)+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$
$$=\frac{\sin 2\alpha}{2L(p-1,s)\times q\times\sin(2\alpha-(p+1)\beta)+\sin 2\alpha}$$

利用研究 4-3 的公式，若s是n的倍數，我們令$s=bn$，則$p=\left\lfloor\frac{s}{n}\right\rfloor=b-1$

$$\therefore \frac{\sin 2\alpha}{2L(p-1,s)\times\sin(2\alpha-(p+1)\beta)+\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{2L(b-2,bn)\sin\alpha+\sin 2\alpha}$$

化簡得 $\dfrac{\cos\alpha}{L(k-2,kn)+\cos\alpha}$ ，結果與研究 3-2 相同。

我們利用 C++求得數值如下表：

n / s	3	4	5	6	7	8	9	10
4	0.464							
5	0.368	0.618						
6	0.333	0.5	0.695					
7	0.261	0.445	0.575	0.743				
8	0.228	0.414	0.511	0.625	0.777			
9	0.210	0.347	0.472	0.558	0.663	0.802		
10	0.182	0.309	0.447	0.515	0.595	0.693	0.821	
11	0.165	0.284	0.388	0.485	0.549	0.624	0.717	0.837
12	0.154	0.267	0.351	0.464	0.516	0.577	0.649	0.737
13	0.139	0.241	0.325	0.413	0.492	0.543	0.601	0.670
14	0.129	0.222	0.306	0.378	0.473	0.517	0.565	0.622
15	0.122	0.209	0.292	0.352	0.428	0.496	0.538	0.585
16	0.113	0.198	0.268	0.332	0.396	0.480	0.516	0.557
17	0.106	0.184	0.251	0.317	0.371	0.439	0.499	0.534
18	0.101	0.173	0.237	0.305	0.352	0.409	0.484	0.516

黃色部份爲 $s=2n$ ，值與我們之前的表格相同。

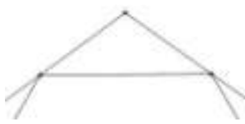
五、研究推廣

由於之前所做的「正 n 邊形內接正 s 邊形，一邊相接(s>n)」之圖形，並非是一正 n 邊形所能內接之最大圖形，有鑑於此，我們轉而把目標轉向找出「正 n 邊形內接最大正 s 邊形」。因爲正多邊形爲對稱圖形，我們認爲若要找出最大的正 s 邊形，須符合：

(1) 正 n 邊形與正 s 邊形之某一對稱軸應重合

(2) 正 s 邊形必須有某些點在正 n 邊形上

則此正 s 邊形才有可能爲內接最大。



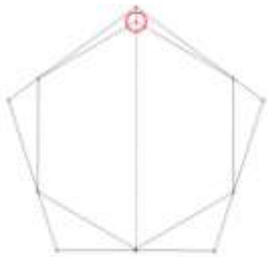
圖二十一

正 n 邊形內接最大正 s 邊形作法類型

(一)、作法一

首先，我們討論正 s 邊形其中有兩點在 n 邊形對稱的兩鄰邊上的狀況，如圖二十一，根

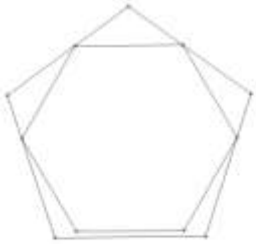
據是否有頂點在對稱軸上，分為：

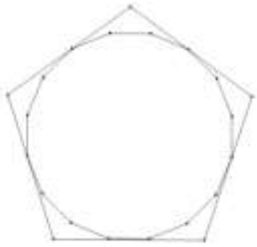

圖二十二


圖二十三

(1).奇數型畫法：其對稱軸兩邊的第一接點所夾之頂點有一點位在對稱軸上，如圖二十二、二十三。其詳細作法以及正 s 邊形與正 n 邊形之邊長比請參照附錄 2-1、2-2。

(2).偶數型畫法：其對稱軸兩邊的第一接點所夾之頂點皆沒有在對稱軸上，如圖二十四、二十五。其詳細作法以及正 s 邊形與正 n 邊形之邊長比請參照附錄 2-3、2-4。


圖二十四


圖二十五

但是我們之後發現，以上兩種畫法皆有可能藉由移動、放大形成一個更大的正 s 邊形(如圖二十六)。因此此作法並不一定能做成最大正 s 邊形。


圖二十六

(二)、作法二

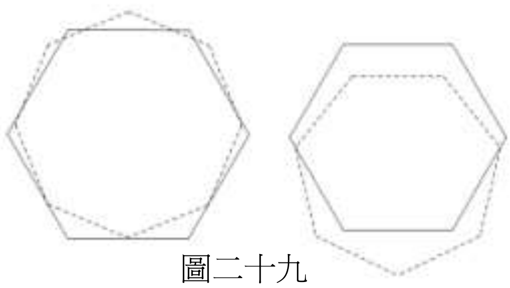

圖二十七

接下來，我們又認為若正 s 邊形的對稱兩點所夾正 n 邊形邊數越多(圖二十七)，且可放進正 n 邊形內，並無法再旋轉、放大時，所構成的圖為最大。作法同樣分為奇數作法與偶數作法：

(1).奇數型畫法：其對稱軸兩邊的第一接點所夾之頂點有一點位在對稱軸上，如圖二十八。

但由於奇數太多特例(無法做出)(圖二十九)，且部份與其他作法做出之圖形相同，因此不另製表格。

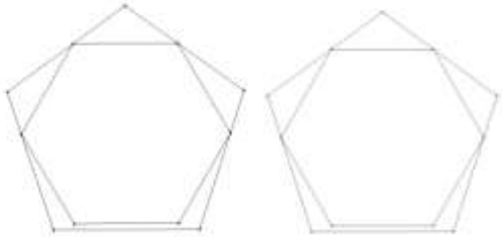

圖二十八


圖二十九

(2).偶數型畫法：其對稱軸兩邊的第一接點所夾之頂點皆沒有在對稱軸上，如圖三十。其詳細作法以及正 s 邊形與正 n 邊形之邊長比請參照附錄 2-5、2-6。


圖三十

在我們以作法二作圖時，我們發現有時候作法一與作法二相同(圖三十一)。



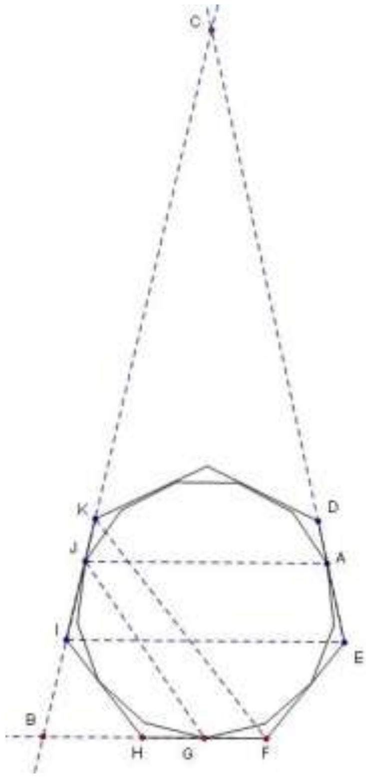
圖三十一

(三)、公式

在完成上述兩種作法後，我們想要探討正 s 邊形與正 n 邊形之邊長比為何？並試著從中尋出內接最大正 s 邊形的規則，因而做了底下的研究。

> **研究 5-1：若正 n 邊形內接正 s 邊形，其中兩正多邊形對稱軸重合且正 s 邊形至少有 3 個點和正 n 邊形相接，則正 s 邊形與正 n 邊形之邊長比為**
>
> $$\frac{\sin 2c\alpha(L(a,n)-2\cos(a\alpha))+2L(c,n)\sin(c\alpha)\cos(a\alpha)}{L(b,s)\sin(2c\alpha)+2\cos(a\alpha)L(d,s)\sin\delta}:1$$
>
> $\delta=(2c+a)\alpha-(b+d+2)\beta$ ， $\alpha=\dfrac{180^0}{n}$ ， $\beta=\dfrac{180^0}{s}$ ，
>
> **a 為左右第一接點所夾之 n 邊形頂點數、b 為左右第一接點所夾之 s 邊形頂點數、c 為第一與第二接點之間所夾之 n 邊形頂點數、d 為第一與第二接點之間所夾之 s 邊形頂點數。**

證明：設 n 邊形邊長為 p，s 邊形邊長為 q，



在 ΔCIE ，利用正弦定理 $\dfrac{\overline{IE}}{\sin\angle ECI}=\dfrac{\overline{CI}}{\sin\angle CEI}$ ，得

$$\overline{CI}=\frac{pL(a,n)\sin(a\alpha)}{\sin(2a\alpha)}=\frac{pL(a,n)}{2\cos(a\alpha)}$$

在 ΔKBF ，利用正弦定理 $\dfrac{\overline{KF}}{\sin\angle KBF}=\dfrac{\overline{KB}}{\sin\angle KFB}$ ，得

$$\overline{KB}=\frac{pL(c,n)\sin(c\alpha)}{\sin(2c\alpha)}=\frac{pL(c,n)}{2\cos(c\alpha)}$$

$$\overline{BI}=\overline{KB}-\overline{KI}=\overline{KB}-p=\frac{pL(c,n)}{2\cos(c\alpha)}-p$$

在 ΔAJC，利用正弦定理 $\dfrac{\overline{CJ}}{\sin\angle AJC}=\dfrac{\overline{AJ}}{\sin\angle ACJ}$ ，得

$$\overline{CJ}=\frac{qL(b,s)\sin(a\alpha)}{\sin(2a\alpha)}=\frac{qL(b,s)}{2\cos(a\alpha)}$$

在 ΔJBG ，利用正弦定理 $\dfrac{\overline{BJ}}{\sin\angle JGB}=\dfrac{\overline{JG}}{\sin\angle B}$ ，得

$$\overline{BJ}=\frac{qL(d,s)\sin\delta}{\sin(2c\alpha)}$$ ，其中 $\delta=\angle JGB$

利用等式 $\overline{CI}+\overline{IB}=\overline{CJ}+\overline{JB}$，得 $\dfrac{pL(a,n)}{2\cos(a\alpha)}+\dfrac{pL(c,n)}{2\cos(c\alpha)}-p=\dfrac{qL(b,s)}{2\cos(a\alpha)}+\dfrac{qL(d,s)\sin\delta}{\sin(2c\alpha)}$，

$$q=p\frac{\dfrac{L(a,n)}{2\cos(a\alpha)}+\dfrac{L(c,n)}{2\cos(c\alpha)}-1}{\dfrac{L(b,s)}{2\cos(a\alpha)}+\dfrac{L(d,s)\sin\delta}{\sin(2c\alpha)}}$$，

$$q=p\frac{\sin(2c\alpha)(L(a,n)-2\cos(a\alpha))+2L(c,n)\sin(c\alpha)\cos(a\alpha)}{L(b,s)\sin(2c\alpha)+2\cos(a\alpha)L(d,s)\sin\delta}$$

則最大正 s 邊形與正 n 邊形之比即為

$$\frac{\sin(2c\alpha)(L(a,n)-2\cos(a\alpha))+2L(c,n)\sin(c\alpha)\cos(a\alpha)}{L(b,s)\sin(2c\alpha)+2\cos(a\alpha)L(d,s)\sin\delta}:1$$ 。

我們發現，此公式雖可以處理研究 5-1 的全部圖形，但「正 n 邊形內接正 s 邊形」其內接交點為奇數，以及 s 為 n 的整數倍時，可以利用類似方法做些微的修正，即可導出較簡化的新公式。

研究 5-2：承研究 5-1，且兩正多邊形的內接點為奇數時，則正 s 邊形與正 n 邊形的邊長比為

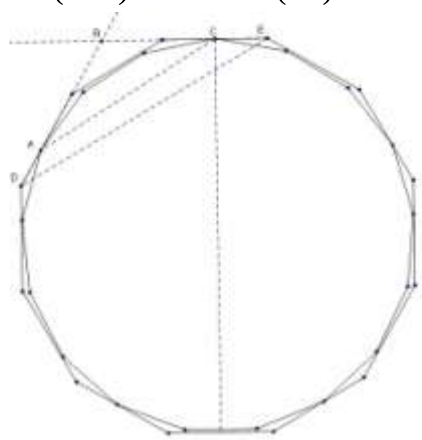
$$\frac{(L(c,n)-\cos(c\alpha))\sin(c\alpha)}{L(d,s)\sin\delta}:1$$

$\delta=2c\alpha-(d+1)\beta$， **c、d 定義如研究 5-1，但以位於對稱軸上的接點為第一接點。**

證明：設 n 邊形邊長為 p，s 邊形邊長為 q

在 ΔBED，利用正弦定理，得 $\dfrac{\overline{DE}}{\sin\angle DBE}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BDE}$，$\overline{BE}=\dfrac{pL(c,n)\sin(c\alpha)}{\sin(2c\alpha)}=\dfrac{pL(c,n)}{2\cos(c\alpha)}$，

$$\overline{BC}=\overline{BE}-\overline{CE}=\frac{pL(c,n)}{2\cos c\alpha}-\frac{p}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



在 ΔBCA，利用正弦定理，得 $\dfrac{\overline{CA}}{\sin\angle CBA}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin\angle BAC}$，

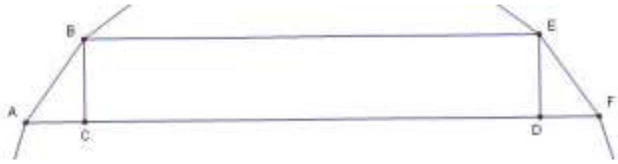
$\overline{BC}=\dfrac{qL(d,s)\sin\delta}{\sin(2c\alpha)}$ ， **其中** $\delta=\angle BAC\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由(1)、(2)得知

$\dfrac{pL(c,n)}{2\cos(c\alpha)}-\dfrac{p}{2}=\dfrac{qL(d,s)\sin\delta}{\sin(2c\alpha)}$，$q=p\dfrac{(L(c,n)-\cos c\alpha)\sin(c\alpha)}{L(d,s)\sin\delta}$

正 s 邊形比正 n 邊形即為 $\dfrac{(L(c,n)-\cos(c\alpha))\sin(c\alpha)}{L(d,s)\sin\delta}:1$

研究 5-3-1：一正 n 邊形內，相隔一邊平行的對角線之關係為 $L(g,n)=L(g-2,n)+2\cos g\alpha$ ，
g 為 A、F 之間所夾之 n 邊形頂點數。



証明：

$\overline{AF} = \overline{BE} + \overline{AC} + \overline{DF}$

$pL(g,n) = pL(g-2,n) + p\cos g\alpha + p\cos g\alpha = p(L(g-2,n) + 2\cos g\alpha)$

$L(g,n) = L(g-2,n) + 2\cos g\alpha$

研究 5-3-2：**承研究 5-1，若 s 值爲 n 之整數倍時，則正 s 邊形與正 n 邊形的邊長比爲(s=kn)。** $$\frac{\cos\alpha}{L(k,kn)+\cos\alpha}:1$$

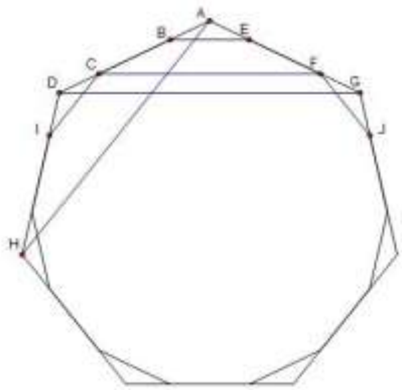
證明：參照研究 3-2 及研究 5-1，在 ΔACF 中，利用正弦定理，得

$\dfrac{\overline{CF}}{\sin\angle CAF} = \dfrac{\overline{AC}}{\sin\angle AFC}$ ，$\overline{AC} = \dfrac{qL(k,s)}{2\cos\alpha}$

(由於在此用到的三角形爲 ΔACF ，因此若在處理最大正 s 邊形爲 n 的倍數時，左右第一、二接點的定義要改爲 C、F 爲左右第一接點，I、J 爲左右第二接點)

在 ΔCDI ，利用正弦定理，得 $\dfrac{\overline{CI}}{\sin\angle CDI} = \dfrac{\overline{CD}}{\sin\angle DIC}$ ，

$\overline{CD} = \dfrac{qL(k-2,s)\sin\delta}{\sin(2\alpha)}$



在 ΔADG ，$\dfrac{\overline{DG}}{\sin\angle DAG} = \dfrac{\overline{AD}}{\sin\angle AGD}$ ，$\overline{AD} = \dfrac{pL(1,n)}{2\cos\alpha} = p$ （之前定義的 a 在此恆等於 1)，利用等式 $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}$ ，得

$\dfrac{qL(k,s)}{2\cos\alpha} + \dfrac{qL(k-2,s)\sin\delta}{\sin 2\alpha} = p$ ，$\dfrac{qL(k,s)\sin\alpha + qL(k-2,s)s}{2\cos\alpha\sin\alpha}$

$q = \dfrac{pL(1,n)\sin\alpha}{L(k,s)\sin\alpha + L(k-2,s)\sin\delta}$ ，化簡後 $q = \dfrac{pL(1,n)}{L(k,s)+L(k-2,s)}$

另外，利用研究 1-2 對角線之間的關係，可以把此公式化爲與前面「**正 n 邊形內接一正 kn 邊形**」相同之公式。(過程如下)

$$q = \frac{pL(1,n)}{L(k,s)+L(k-2,s)} = p\frac{2\cos\alpha}{2L(k-2,s)+2\cos b\beta} = p\frac{\cos\alpha}{L(k-2,s)+\cos\alpha}$$

(原式爲 $p\dfrac{\cos\alpha}{L(k,kn)+\cos\alpha}$ ，依照 b 的定義，k=b 且 kn=s。)

由以上這些方法，我們雖可以找到內接正 s 邊形，但因 GSP 作圖過於繁雜且費時，所以我們利用 c++程式協助研究。

將此程式運用簡單的介面，以及電腦快速的運算，使我們可以利用輸入 n、s、a、b、c、d，求得邊長比，也讓我們更方便在所有可能內接正 s 邊形中找出最大的邊長，並再用 GSP

作圖做進一步驗證。且為使做出之 c++程式更快求出最大正 s 邊形，於是做進一步的條件限制，從而更方便使用。

透過 GSP 的兩種作法及 C++程式的輔助，我們發現內接最大正 s 邊形，都存在著共同的三種性質：(1)兩正多邊形對稱軸重合、(2)至少有 3 個點和正 n 邊形相接、(3)圖形無法再旋轉、移動。再由研究 5-1，的定義，及內接最大正 s 邊形的邊長比，我們完成了以下的簡表。

作圖類型 ← 作法一奇數

a、b、c、d 值 ← 1.1.1.0(0.716648) → 內接最大正 s 邊形與正 n 邊形之邊長比

s \ n	5	6	7	8
6	作法一奇數 1.1.1.0(0.716648)			
7	作法一奇數 1.1.1.0(0.604978)	作法二偶數 2.1.1.0(0.772997)		
8	作法二偶數 1.0.1.1(0.531968)	偶數(一、二) 2.2.1.0(0.668547)	作法二偶數 3.2.1.0(0.811441)	
9	作法一偶數 1.0.1.1(0.479257)	作法一奇數 1.1.1.0(0.601535)	作法二偶數 3.3.1.0(0.71296)	作法二偶數 4.3.1.0(0.838448)
10	作法一偶數 1.2.1.0(0.447214)	作法一奇數 1.1.2.2(0.538181)	偶數(一、二) 1.0.2.2(0.644449)	作法一偶數 1.0.3.3(0.74834)
11	作法一偶數 1.2.1.1(0.392441)	作法一奇數 1.1.1.1(0.492993)	作法一奇數 1.1.2.2(0.587109)	作法一偶數 1.0.2.2(0.681614)
12	作法二偶數 1.2.1.1(0.357806)	偶數(一、二) 1.2.1.0(0.464102)	作法二偶數 3.4.1.1(0.538612)	作法一偶數 1.0.1.1(0.630236)
13	作法二偶數 1.1.1.2(0.330628)	作法二偶數 2.3.1.1(0.41789)	作法二偶數 1.1.1.1(0.500407)	作法一奇數 1.1.2.2(0.578641)
14	作法一奇數 1.1.1.2(0.308543)	作法一奇數 1.1.2.4(0.386498)	作法二偶數 1.2.1.0(0.473952)	作法一奇數 1.1.3.4(0.53806)
15	作法二偶數 1.2.1.2(0.286166)	作法一偶數 1.2.1.1(0.362097)	作法二偶數 1.1.1.1(0.43399)	作法二偶數 2.3.1.1(0.504708)
16	作法一奇數 1.3.1.2(0.27004)	偶數(一、二) 1.2.2.4(0.338631)	作法二偶數 3.6.1.1(0.405604)	偶數(一、二) 1.2.1.0(0.480217)
17	作法二偶數 1.3.1.2(0.253465)	作法二偶數 2.5.1.2(0.319779)	作法二偶數 1.1.2.4(0.382128)	作法二偶數 2.3.1.1(0.445511)
18	作法一偶數 1.2.1.3(0.239474)	作法二偶數 1.3.1.1(0.305407)	偶數(一、二) 1.2.2.4(0.361063)	作法一奇數 1.1.3.6(0.419623)

伍、 結論

一、 正n邊形若每邊上取一點使得與原頂點的距離爲$\frac{1}{a}$，將各點連線，則邊長與原正n邊形邊長比爲$\frac{(a^2-2a+2-2(a-1)\cos\theta)}{a^2}:1$，其中$a\geq 1$，$\theta=180^0-\frac{360^0}{n}$

二、 每個正n邊形會有$\left[\frac{n-3}{2}\right]$個不同之正$n$角星形形式，其中[ ]代表高斯符號。

我們針對他的構成形式可分爲以下三種形式：

A 型：如果$m+1$是n的因數$\Rightarrow$會形成$m+1$個正$\frac{n}{m+1}$邊形，圍成一正n角星形內部正 n 邊形。

B 型：如果$m+1$與n的最大公因數爲$k\ (1<k<m+1)\Rightarrow$會形成k個正$\frac{n}{k}$角星形，圍成一正n角星形內部正 n 邊形。

C 型：如果$m+1$與n互質(最大公因數$k=1$)$\Rightarrow$會形成一個可一筆畫畫完之正n角星形內部正 n 邊形。

三、 正n邊形跳k點之對角線與正n邊形邊長比值爲$L(k,n)=\sum_{i=0}^{k}\cos i\alpha\cdot\cos^{k-i}\alpha$，其中$\alpha=\frac{180^0}{n}$

四、 正n邊形跳m點之對角線所形成之正n角星形內部所圍成正n邊形的邊長與原正n邊形的邊長比爲$F(m,n):1$，其中$F(m,n)=L(m,n)-\frac{L(m-1,n)}{\cos\alpha}$。

五、 正n邊形若內接一正kn邊形，則正kn邊形邊長比正n邊形邊長的比值爲$\frac{\cos\alpha}{L(k-2,kn)+\cos\alpha}$

六、 正n邊形內接最大正s邊形($s>n$)，正s邊形邊長與正n邊形比值爲$\frac{\sin 2\alpha}{2L(p-1,s)\times\sin(2\alpha-(p+1)\beta)+\sin 2\alpha}$， $p=\left\lfloor\frac{s}{n}\right\rfloor$，$\alpha=\frac{180^0}{n}$ ，$\beta=\frac{180^0}{s}$

七、 我們將上述結論三~六利用 C++求出數值，程式如附錄。

八、 若正 n 邊形內接正 s 邊形，其中兩正多邊形對稱軸重合且正 s 邊形至少有 3 個點和正 n 邊形相接，則正 s 邊形與正 n 邊形之邊長比爲$\frac{\sin 2c\alpha(L(a,n)-2\cos(a\alpha))+2L(c,n)\sin(c\alpha)\cos(a\alpha)}{L(b,s)\sin(2c\alpha)+2\cos(a\alpha)L(d,s)\sin\delta}:1$。

九、 若正 n 邊形內接正 s 邊形，其中兩正多邊形對稱軸重合且正 s 邊形至少有 3 個點和正 n 邊形相接，且兩正多邊形的內接點爲奇數時，則正 s 邊形與正 n 邊形的邊

長比爲$\dfrac{(L(c,n)-\cos(c\alpha))\sin(c\alpha)}{L(d,s)\sin\delta}:1$。

十、 因爲時間上的限制，研究推廣的部分雖我們有辦法利用 c++程式快速求出邊長比，但仍無法馬上找出最大內接正 s 邊形，而仍需藉由 GSP 來驗證判斷後來找出邊長比，這部份的相關研究仍可繼續努力。

陸、 未來發展

正n邊形中的世界很迷人，非正n邊形的世界絕對更是精采，但由於需要的變數太多，並不容易歸納，而目前我們所知的幾何性質也太過於粗淺。往後，可以朝向特殊多邊形進行討論，例如：長方形、菱形、平行四邊形、梯形、固定角度的多邊形、固定邊長比的多邊形、…等，來進行研究。

柒、 參考書目

一、國中數學第四冊—康軒出版社。

二、國中數學第五冊—康軒出版社。

三、高中數學第一冊—翰林出版社。

四、中華民國第四十六屆科學展覽會，國中組數學科，內接三角形的尺規作圖。

捌、 附錄

一、 C++程式碼

程式一：底下的 C++程式爲我們所想求的四大項，利用電腦幫我們求出數值：

1. 正n邊形跳k點之對角線與正n邊形邊長比值爲$L(k,n)=\sum_{i=0}^{k}\cos i\alpha\cdot\cos^{k-i}\alpha$
2. 正n邊形跳m點之對角線所形成之正n角星形內部所圍成正n邊形的邊長與原正n邊形的邊長比爲$F(m,n):1$，其中$F(m,n)=L(m,n)-\dfrac{L(m-1,n)}{\cos\alpha}$
3. 正n邊形若內接一正kn邊形，則正kn邊形邊長比正n邊形邊長的比值爲

$$\frac{\cos\alpha}{L(k-2,kn)+\cos\alpha}$$

4. 正n邊形內接最大正s邊形($s>n$)，正s邊形邊長與正n邊形比值爲

$$\frac{\sin 2\alpha}{2L(p-1,s)\times\sin(2\alpha-(p+1)\beta)+\sin 2\alpha}，\quad p=\left\lfloor\frac{s}{n}\right\rfloor，\alpha=\frac{180^0}{n}，\beta=\frac{180^0}{s}$$

```
#include <stdio.h>
#include <tchar.h>
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
#define pi
3.141592653589793238462643383279502884197
1
int n,m,e;
double Q,ratio1,ratio2,theda;
char answer;
double L(int,int);
double s(int,int,double);
double q(int,int,double);
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
	do{
	cout<<"請選擇方法:\n	a.正 n 邊形之對角線長\n	b.正 n 邊形內接的正 n 邊形之邊長比值\n	c.正 n 邊形內接正 pn 邊形之邊長比值\n	d.正 n 邊形內接正 m 邊形之邊長比\n	e.離開\n";
	cin>>answer;
	switch(answer)
	{
		case'a':
			cout<<"請輸入(正 n 邊形之邊數) (正 n 邊形跳的點數) (正 n 邊形之邊長):\n";
			cin>>n;
			while(n<5)
				{cout<<"n 不可小於 5!\n";
				cout<<"請輸入(正 n 邊形之邊數) (正 n 邊形跳的頂點數 m) (正 n 邊形之邊長):\n";
				cin>>n;
				}cin>>e;
				while(e>(n/2))
				{
					cout<<"m 不可大於 n/2!\n 請輸入 m\n";
					cin>>e;
				}
				cin>>Q;while(Q<0)
				{
					cout<<"邊長不可為負數!\n 請輸入邊長\n";
					cin>>e;}
			cout<<"正"<< n<<"邊形跳"<<e<<"點的對角線長:"<<Q*L(e,n)<<"\n";
			break;
		case'b':
			cout<<"請輸入(正 n 邊形之邊數) (正 n 邊形跳的點數) (正 n 邊形之邊長):\n";
			cin>>n;while(n<5)
				{cout<<"n 不可小於 5!\n";
				cout<<"請輸入(正 n 邊形之邊數) (正 n 邊形跳的點數) (正 n 邊形之邊長):\n";
				cin>>n;
				}cin>>e;while(e>(n/2))
				{
					cout<<"m 不可大於 n/2!\n 請輸入 m\n";
					cin>>e;
				}cin>>Q;while(Q<0)
				{
					cout<<"邊長不可為負數!\n 請輸入邊長\n";
					cin>>e;}

			cout<<"正"<< n <<"邊形內邊長為:"<<L(e,n)-L(e-1,n)/cos(pi/n)<<"\n";
			break;
		case'c':cout<<"請輸入(正 n 邊形之邊數) (內接正 pm 邊形之 p) (正 n 邊形之邊長):\n";
```

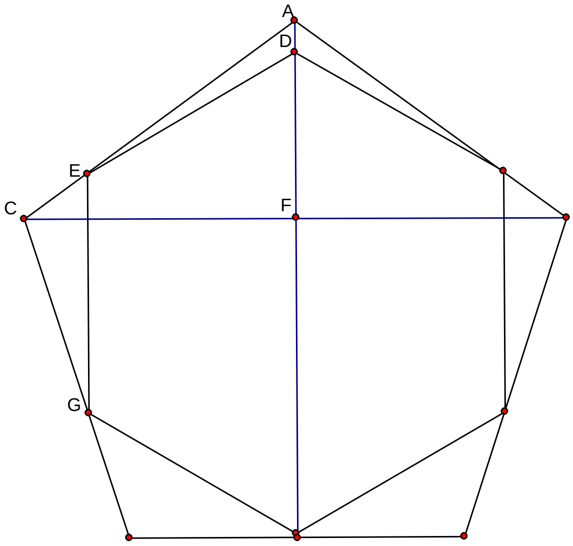
```
            cin>>n;
            while(n<3)
                {cout<<"n 不可小於 3!\n";
                cout<<"請輸入 n(正 n 邊
形):\n";
                cin>>n;
                }cin>>e;
                while(e<0)
                {
                    cout<<"p 不可為負
數!\n 請輸入 p\n";
                    cin>>e;
                }cin>>Q;while(Q<0)
                {
                    cout<<"邊長不可為負
數!\n 請輸入邊長\n";
                    cin>>e;}
            cout<<"正"<< n<<"邊形內接正
"<<e<<"邊形的邊長:"<<q(n,e,Q)<<"\n";

            break;
        case'd':
                cout<<"請輸入(正 n 邊形之
邊數) (內接正 m 邊形之 m) (正 n 邊形之邊
長):\n";
            cin>>n;
            while(n<3)
                {cout<<"n 不可小於 3!\n";
                cout<<"請輸入 n(正 n 邊
形):\n";
                cin>>n;
                }cin>>e;while(e<0)
                {
                    cout<<"p 不可為負
數!\n 請輸入 p\n";
                    cin>>e;
                }cin>>Q;  while(Q<0)
                {
                    cout<<"邊長不可為負
數!\n 請輸入邊長\n";
                    cin>>e;}
                cout<<"正"<< n<<"邊形內接正
"<<e<<"邊形的邊長:"<<s(n,e,Q)<<"\n";
            break;
            case'e':
            break;
        };
        }while(answer!='e');
        exit(0);
        return 0;
}
double L(int a, int b)
{
        ratio1=0;
        double x=1;
        theda = pi/(double)b;
        for(int k=0;k<=a;k++){
            x=1;
            for(int i=0;i<k;i++)
            {x*=cos(theda);}
        ratio1+=x*cos((double)(a-k)*theda);
        }
        return ratio1;
}
double s(int e,int t,double c)
{
        int i=0;
        for(;i<(t/e);i++);
        theda=pi/(double)t;
        ratio2 =
2*(L((i-1),t)/sin(2*pi/e))*sin((2*pi/e)-(2*pi/t)-(i-1
)*theda)+1;
        return c/ratio2;
}
double q(int a,int b,double c)
{
        double p=pi/(double)a;
        double u=cos(p);
        double r=((L((b-2),(b*a)))+cos(p));
        return c*u/r;
```

}

程式二：藉由輸入 n 邊形內接 s 邊形的變數 n、s、a、b、c、d，可得此內接 s 邊形與 n 邊形之邊長比

```
#include <stdio.h>
#include <tchar.h>
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
#define pi
3.14159265358979323846264338327950288419711
int n,m,a,b,c,d;
double Q,ratio1,theda,alpha,beta,delta,ratio2;
char answer;
double L(int,int);
double P(int,int,int,int,int,int);
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
	do
	{
			cout<<"Input n:\n";
			cin>>n;
			cout<<"Input s:\n";
			cin>>m;
			cout<<"Input a:\n";
			cin>>a;
			cout<<"Input b:\n";
			cin>>b;
			cout<<"Input c:\n";
			cin>>c;
			cout<<"Input d:\n";
			cin>>d;
			if(a>(n/2))
			{a=n-a-2*c;}
			if(b>(n/2))
			{b=m-4-b-2*d;}
			cout<<"ratio = ";
			cout<<P(n,m,a,b,c,d);
			cout<<"\n" <<"Again?\n";
			cin>>answer;
	}
	while((answer=='y')||(answer=='Y')) ;
}
double L(int a, int b)
{
	ratio1=1;
	double x=1;
	theda = pi/(double)b;
	for(int k=1;k<=a;k++)
		ratio1
=ratio1*cos(theda)+cos((k)*theda);
	return ratio1;
}
double P(int n,int m,int a,int b,int c,int d)
{ alpha=pi/n;beta=pi/m;delta=(2*c+a)*alpha-(b+d
+2)*beta;
		ratio2
=sin(2*c*alpha)*(L(a,n)-2*cos(a*alpha))+2*L(c,n
)*sin(c*alpha)*cos(a*alpha);

ratio2=ratio2/(L(b,m)*sin(2*c*alpha)+2*cos(a*al
pha)*L(d,m)*sin(delta));
		return ratio2;
}
```

程式三：利用迴圈不斷的嘗試變數 n、s、a、b、c、d，爲了能使變數爲合理的，再利用以下條件限制：



1.邊長比必須大於 0，而且小於 1。

2. $a+2c \le n$

3. $b+4+2d \le m$

4. $\overline{DF} < \overline{AF}$

5. $\angle CGE(\delta) > d\alpha$

6.當 a=0 時，b 只能等於 0 或-1

7. $\angle AEE' > \angle DEE'$

求出所有可能的組合，方便我們用 GSP 驗證。

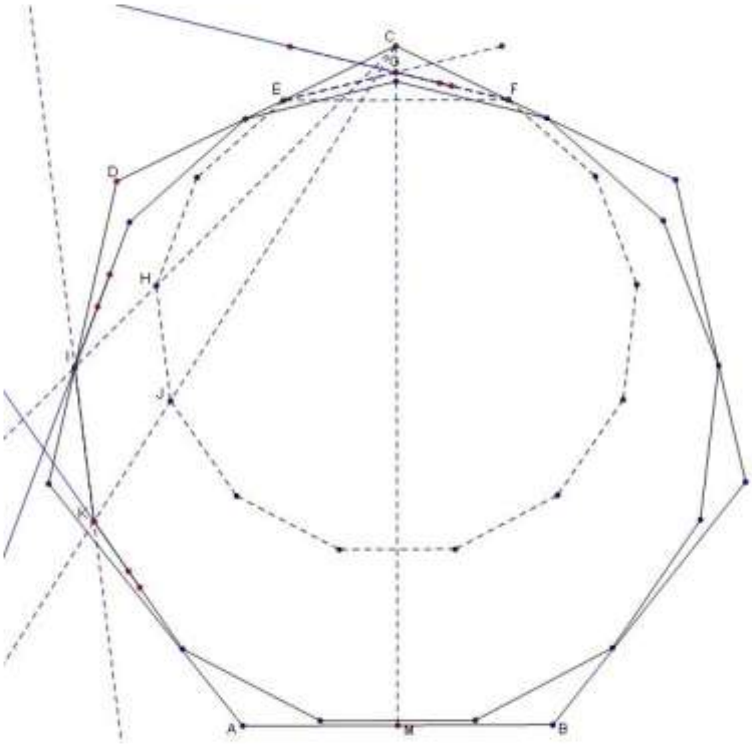
```
#include <stdio.h>
#include <tchar.h>
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
#define pi
3.14159265358979323846264338327950288419
1
int n,m,a,b,c,d,t,y,u,temp,te,cou=1;
double Q,ratio1,theda,alpha,beta,delta,ratio2,
sd ,q,w,;
bool z=true,o=true;
char answer;
double L(int,int);
double P(int,int,int,int,int,int);
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{

    for(n=5;n<=7;n++){
            for(m=n+1;m<=11;m++){
            for(int i=0;i<=n;i++){
            for(int j=-1;j<=m;j++){
            for(c=0;c<=n;c++){
            for(d=0;d<=m;d++){
                temp=n-i-2*c;
                te= m-4-j-2*d ;

if((i>temp)&&(temp>0)&&(te>0))
                {a=temp;
                b=te;
                }
                else{a=i;b=j;}
                sd=P(n,m,a,b,c,d);
                q=0;w=0;z=1;
                        for(int s=a;s>0;s=s-2)
                        {q=q+sin(s*pi/n);}
                        for(int s=b;s>0;s=s-2)
                        {w=w+sd*sin(s*pi/m);}
                        for(int e=b;e>0;e-=2)

{z=(z&&(a*alpha>e*beta));}

if(a==0){o=((b==0)||(b==-1));}
                        else{o=true;}

u=(double)(L(a,n)/(2*cos((double)(a)*alpha))-sd*
L(b,m)/(2*cos((double)a*alpha)));
```

```
w=w+(u)*sin((a)*alpha);

if((sd>0)&&(sd<1)&&((a+2*c)<=n)&&((n-a-2*c)
>=0)&&((b+4+2*d)<=m)&&((q-w)>=0)&&(delta
>=(d*beta))&&((delta-d*beta+pi-2*beta)<=pi)&
&((pi-(2+b)*beta)<=(pi-a*alpha))&&(a*alpha>=b
*beta)&&z&&o){
                    cout << cou <<" "<<
n<<" "<<m<< " "<<i <<" " <<j <<" "<<c <<"
"<<d <<" ";
                    cou++;
                  cout<<"ratio = ";
                    cout<<sd<<"\n";}
                }
                }
                }
                }
                }
               }
              cin>>a;
}
double L(int a, int b)
{
    ratio1=1;
    double x=1;
    theda = pi/(double)b;
    for(int k=1;k<=a;k++)
        ratio1
=ratio1*cos(theda)+cos((k)*theda);
    return ratio1;
}
double P(int n,int m,int a,int b,int c,int d)
{ if(a==0){a=n-2*c;b=m-b-2*d;}
alpha=pi/n;beta=pi/m;delta=(2*c+a)*alpha-(b+d+
2)*beta;
        ratio2
=sin(2*c*alpha)*(L(a,n)-2*cos(a*alpha))+2*L(c,n
)*sin(c*alpha)*cos(a*alpha);

ratio2=ratio2/(L(b,m)*sin(2*c*alpha)+2*cos(a*al
pha)*L(d,m)*sin(delta));
        return ratio2;
}
```

二、正 n 邊形內接最大正 s 邊形做圖法及其邊長比

附錄 2-1 作法一奇數 GSP 做圖法

1. 取 $\overline{AB}$ 中點 M
2. 連接對稱軸 $\overline{CM}$
3. 在 $\overline{CD}$ 上任意取一點 E
4. 以 $\overline{CM}$ 爲對稱軸做 E 點對稱點 F
5. 連接 $\overline{EF}$
6. 分別以 E、F 爲圓心，$\overline{EF}$ 爲半徑，轉 β 與 $t\beta$ (t 爲奇數整數且 $t\beta$ 爲小於 α 之最大値)，交於 G
7. 以 $\overline{EG}$ 爲內接 m 邊形之邊長做 m 邊形
8. 以 C 爲起始點做射線過 H 交 N 邊形於 I
9. 再以 C 爲起始點做射線過 J 與過 I 平行 $\overline{HJ}$ 交於 K
10. 以 $\overline{IK}$ 爲內接 m 邊形之邊長做 m 邊形即爲所求

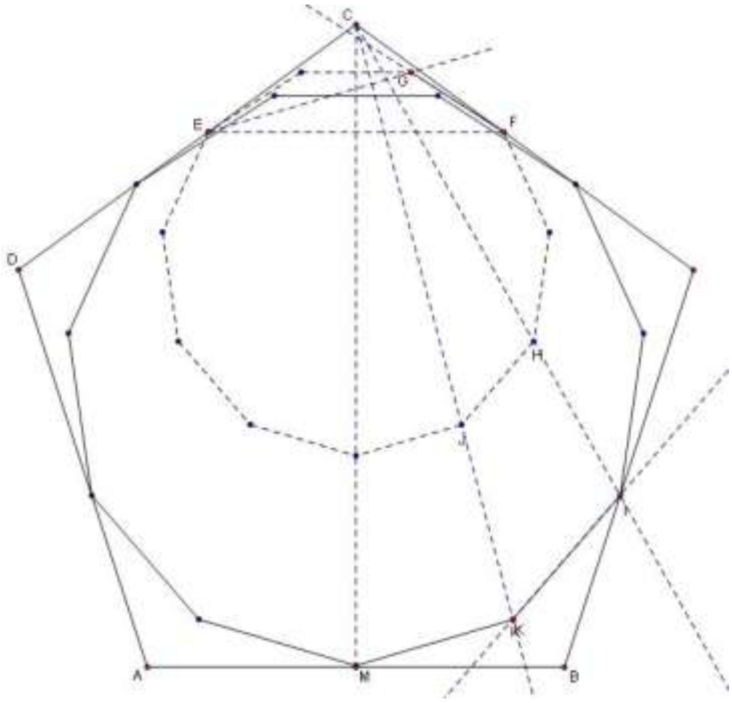


附錄 2-2 作法一奇數邊長比

s \ n	5	6	7	8
6	0.7167			
7	0.605	0.7708		
8	0.5303	0.6628	0.8067	
9	0.4786	0.6015	0.7042	0.8321
10	0.4253	0.5382	0.6417	0.7355
11	0.3921	0.493	0.5871	0.6733
12	0.3573	0.4483	0.5382	0.6302
13	0.3306	0.4175	0.5004	0.5786
14	0.3085	0.3865	0.4621	0.5381
15	0.2926	0.3621	0.434	0.5045
16	0.27	0.3379	0.4054	0.471
17	0.2535	0.3196	0.3821	0.4453
18	0.2393	0.3054	0.3606	0.4196

附錄 2-3 作法一偶數 GSP 做圖法

1. 取 $\overline{AB}$ 中點 M
2. 連接對稱軸 $\overline{CM}$
3. 在 $\overline{CD}$ 上任意取一點 E
4. 以 $\overline{CM}$ 爲對稱軸做 E 點對稱點 F
5. 連接 $\overline{EF}$
6. 分別以 E、F 爲圓心，$\overline{EF}$ 爲半徑，轉 β 與 $t\beta$ (t 爲偶數整數且 $t\beta$ 爲小於 α 之最大値)，交於 G
7. 以 $\overline{FG}$ 爲內接 m 邊形之邊長做 m 邊形
8. 以 C 爲起始點做射線過 H 交 N 邊形於 I
9. 再以 C 爲起始點做射線過 J 與過 I 平行 $\overline{HJ}$ 交於 K
10. 以 $\overline{IK}$ 爲內接 m 邊形之邊長做 m 邊形即爲所求

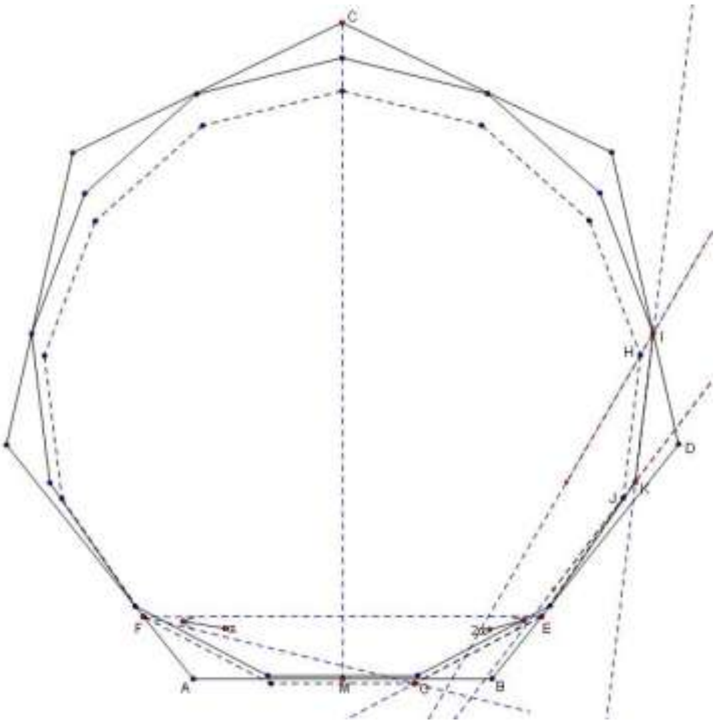


附錄 2-4 作法一偶數邊長比

s \ n	5	6	7	8	9
6	0.7146				
7	0.6025	0.7708			
8	0.532	0.6686	0.8094		
9	0.4793	0.6015	0.7121	0.8374	
10	0.4472	0.5352	0.6445	0.7483	0.8651
11	0.3924	0.493	0.5851	0.6816	0.7749
12	0.3578	0.4641	0.5349	0.6302	0.7138
13	0.3302	0.4176	0.4998	0.5736	0.6589
14	0.3084	0.3854	0.4739	0.5333	0.6096
15	0.2817	0.3621	0.4336	0.5033	0.565
16	0.2699	0.3386	0.404	0.4802	0.5314
17	0.2532	0.3196	0.3816	0.4446	0.5053
18	0.2395	0.3008	0.3611	0.4174	0.4845

附錄 2-5 作法二偶數 GSP 作圖

1. 取 $\overline{AB}$ 中點 M
2. 連接對稱軸 $\overline{CM}$
3. 在 $\overline{BD}$ 上任意取一點 E
4. 以 $\overline{CM}$ 為對稱軸做 E 點對稱點 F
5. 連接 $\overline{EF}$
6. 分別以 E、F 為圓心，$\overline{EF}$ 為半徑，轉 β 與 $t\beta$ (t 為偶數整數且 $t\beta$ 為小於 α 之最大值)，交於 G
7. 以 $\overline{EG}$ 為內接 m 邊形之邊長做 m 邊形
8. 以 E 對 H 做 Locus 與過 I 且與 $\overline{HJ}$ 平行之線段相交於 K
9. 再以 E 對 J 做 Locus 與過 I 且與 $\overline{HJ}$ 平行之線段相交於 K
10. 以 $\overline{IK}$ 為內接 m 邊形之邊長做 m 邊形即為所求



附錄 2-6 作法二偶數邊長比

s \ n	5	6	7	8
6	0.7146			
7	0.605	0.773		
8	0.532	0.6686	0.8114	
9	0.4786	0.5924	0.713	0.8385
10	0.4472	0.5382	0.6445	0.746
11	0.3921	0.4536	0.5871	0.6812
12	0.3578	0.4641	0.5386	0.6248
13	0.3307	0.4179	0.5009	0.5784
14	0.3084	0.3864	0.474	0.5372
15	0.2926	0.3601	0.4343	0.5047
16	0.2699	0.3386	0.4056	0.4802
17	0.2535	0.3198	0.3823	0.4455
18	0.2395	0.3054	0.3611	0.4192

【評語】030428

由正ｎ邊形內接正ｎ邊形的面積比出發，逐步推導出在特殊條件下正ｎ邊形內接正ｍ邊形面積的最大值，對於一般情況下正ｎ邊形內接正ｍ邊形面積的最大值的可能情況做了大膽的預測，想法清楚而明確，討論過程中所利用到的計算工具顯示作者對一些三角性質的熟練度已超越了一般的國中生。是十分傑出的作品。