中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030425

有圓千里切線牽~探討 n 圓公切圓之存在性

學校名稱：新竹市立光武國民中學

作者：	指導老師：
國二　林子傑	張仲凱
國二　董學行	蔡淑貞
國二　林域天	
國二　李柏叡	

關鍵詞：　公切圓、雙曲線、反演

有圓千里切線牽—探討 n 圓公切圓之存在性

壹、摘要

有次閱讀一篇有關公切圓的文章，使我們對公切圓產生好奇，進而想知道 n 個圓究竟有存在多少個公切圓呢？於是我們用雙曲線上一點到兩圓距離之差為定值，找出兩圓的公切圓，並以雙曲線交點為圓心，作出任意三圓的 8 個公切圓。另一方面，我們以反演法作圖驗證，利用反演後圖形的相對關係不變之原理，推廣出 n 圓公切圓的作圖與判別法。進一步地，將公切線視為一曲率半徑無限大之圓，將曲率半徑縮放以判別公切圓相關性質。最後研究歸納出雙曲線、反演、切線等研究方法的優勢與劣勢，更結合雙曲線與反演法判別 n 圓公切圓的存在情況，並以條件方程式 $f(n)=\begin{cases}\infty & n=2\\ 11-n & n=3,8\\ 10-n & n=4,6,7\\ 9-n & n=5\\ 2 & n\geq 9\end{cases}$，$n\in N$ 完整呈現 n 個圓所存在最多的公切圓數目，即 9 圓以上最多僅存在 2 個公切圓。

貳、研究動機

給定兩圓其因相對關係不同，而有內、外公切線 2 至 4 條不等，我們不禁思考：給定兩圓究竟存在多少公切圓呢？那 n 個圓的時候呢？於是我們決定朝這個方向著手研究。另外，在蒐集文獻資料時，看到有前輩利用雙曲線作出兩圓的公切圓，並且在《反演》書中，對反演的性質感到奇妙，發現它可以在不改變幾何圖形彼此關係的情況下，將其作一個位置、型態、形狀上的轉變，所以進一步地我們希望透過雙曲線、反演作輔助，來探討 n 圓公切圓之存在性。

參、研究目的

一、探究兩個圓的公切圓作圖法與相關性質
二、探究三個圓的公切圓作圖法與相關性質
三、探討如何利用反演輔助作出公切圓
四、探究如何判別公切圓是否存在
五、研究 n 圓的公切圓的存在性及其相關性質

肆、研究工具

紙、筆、尺、圓規、GSP 動態幾何軟體

伍、研究過程與討論

本研究從「雙曲線作圖」及「反演變換」出發，在「研究過程與討論」中，驗證並探討二圓、三圓公切圓的存在狀況，進一步地，在「驗證與推廣」中，我們從切線的觀點來觀察三圓的公切圓，甚至探究 n 個圓的公切圓存在狀況。

一、二任意圓求作的公切圓的探究

（一）二等圓公切圓

我們首先探討兩等圓的公切圓，假設圓 A、圓 B 半徑均為 r，作法如下：

1. 內公切圓與外公切圓：

如圖 A-1-1，顯然，連心線 $\overline{AB}$ 的中垂線上任一點皆為外切圓或內切圓圓心，所以兩等圓 A、圓 B 存在無限多個內、外公切圓。

2. 一內一外公切圓：

公切圓同時與圓 A 內切且與圓 B 外切的情況，不能使用中垂線找到公切圓圓心，我們研究發現其與兩不等圓的情況相同，需利用雙曲線輔助，且存在無限多個，茲將敘述併於後段。

（二）二任意圓求作公切圓的探究

1. 雙曲線定義

在平面上，F_1 、F_2 是兩定點，則平面上任一點 P 到 F_1 和 F_2 之距離差的絕對值為定值 K 的所有點所成的圖形，稱為雙曲線。兩定點 F_1 ，F_2 稱為焦點，如圖 A-1-2，即 $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = K$（定值）。

2. 兩任意圓其內（外）公切圓的關係及其作法

已知圓 A 之半徑為 r_1，圓 B 之半徑為 r_2 ，$r_1 > r_2$。設公切圓 O_1 半徑為 R，則公切圓圓心 O_1 到二圓圓心之距離分別為 $R + r_1$ 、 $R + r_2$，如圖 A-1-3。經過觀察，可以看到 $\left|\overline{O_1A} - \overline{O_1B}\right| = (R + r_1) - (R + r_2) = r_1 - r_2$（定值），便可以用雙曲線來處理，作出以 A、B 為定點且定值為（$r_1 - r_2$）的雙曲線。雙曲線上任一點就是離二圓（最近）距離相等的點，以其為圓心，可作出圓 A、圓 B 的公切圓。

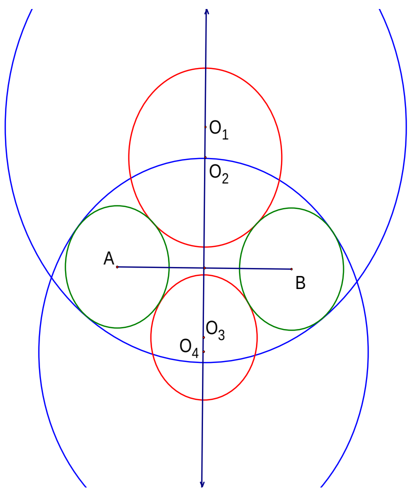


圖 A-1-1 二等圓之內公切圓與外公切圓

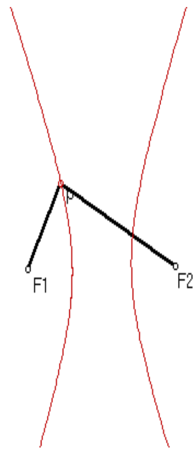


圖 A-1-2 雙曲線

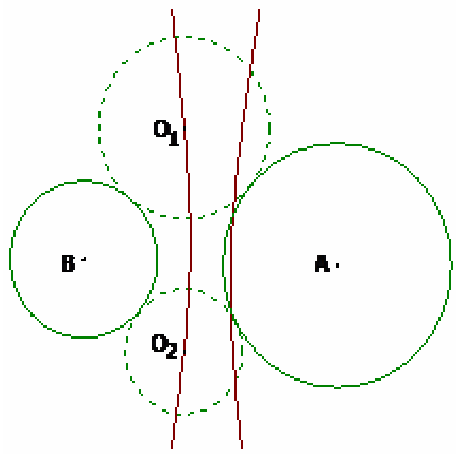


圖 A-1-3 兩不等圓的公切圓

求定值爲| r_1-r_2 |之雙曲線作法：

（1）以 A 爲圓心，作一半徑爲$|r_1-r_2|$的圓C；

（2）在圓C上任取一點 D，與其圓心 A 作一直線L_4（$\overleftrightarrow{AD}$）；

（3）連接$\overline{DB}$，再做出$\overline{DB}$的中垂線，交L_4於 E 點；

（4）利用 GSP 動態幾何使點 D 在C上運動，追蹤相對應 E 點的路徑軌跡。

$\overline{EA}$和$\overline{EB}$的差恆爲$|r_1-r_2|$，則此二條軌跡即是雙曲線，如圖 A-1-4 的曲線Γ_1。以雙曲線Γ_1上任一點 E 爲圓心，E 到圓 A（或圓 B）的最短距離爲半徑作一圓O_1、圓O_2……，如圖 A-1-5，二任意圓有無限多個公切圓。

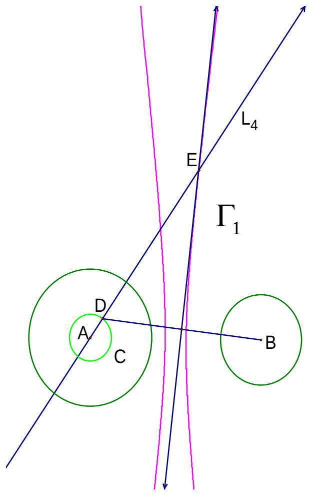


圖 A-1-4
利用（r_1-r_2）爲定值作雙曲線

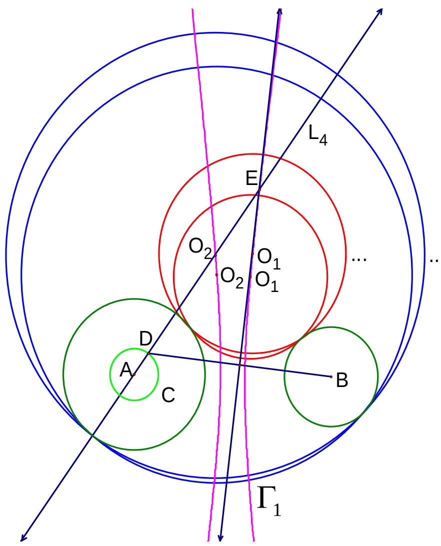


圖 A-1-5 兩任意圓存在無限多個內（外）公切圓

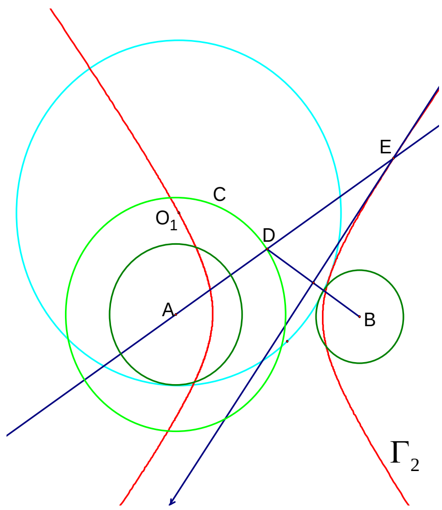


圖 A-1-6 利用（r_1+r_2）爲定值作雙曲線Γ_2

3. 公切圓分別與兩定圓內切與外切的關係及其作法

承上，設公切圓O_1半徑爲 R，則公切圓圓心O_1到二圓圓心之距離分別爲$R-r_1$、$R+r_2$，如圖 A-1-6。同理，不難發現$|\overline{O_1A}-\overline{O_1B}|=|(R-r_1)-(R+r_2)|=r_1+r_2$爲定值，利用雙曲線作出以 A、B 爲定點，定值爲（r_1+r_2）的雙曲線，作法同上。

雙曲線上任一點就是與二圓圓心距離差相等的點，以其爲圓心，$\overline{O_1A}$（或$\overline{O_1B}$）加減r_1（或r_2）爲半徑，可作出與圓 A、圓 B 分別內切與外切的公切圓，進一步地，其存在無限多個公切圓。

二、三圓的公切圓

（一）三等圓的公切圓

設三圓 A、B、C 爲等圓，做連心線$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中垂線交於O_1，以O_1爲圓心，$\overline{AO_1}$-r_1、$\overline{AO_1}+r_1$爲半徑畫圓，其分別爲此三等圓之內公切圓、外公切圓，如圖 A-2-1。

驗證：

$\because O_1$〈或O_2〉為ΔABC外心，

又 $\because r_1=r_2=r_3$，$\therefore \begin{cases} \overline{AO_1}-r_1=\overline{BO_1}-r_2=\overline{CO_1}-r_3 \\ \overline{AO_1}+r_1=\overline{BO_1}+r_2=\overline{CO_1}+r_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{以}O_1\text{為圓心，}\overline{AO_1}-r_1\text{ 為半徑，可得三圓之內公切圓。} \\ \text{以}O_1\text{為圓心，}\overline{AO_1}+r_1\text{ 為半徑，可得三圓之外公切圓。} \end{cases}$

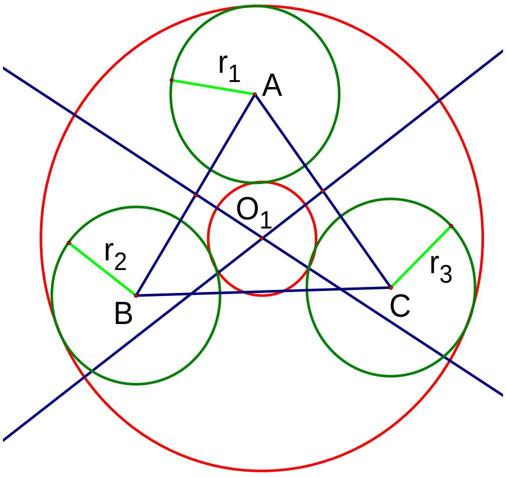


圖 A-2-1 三等圓之內、外公切圓

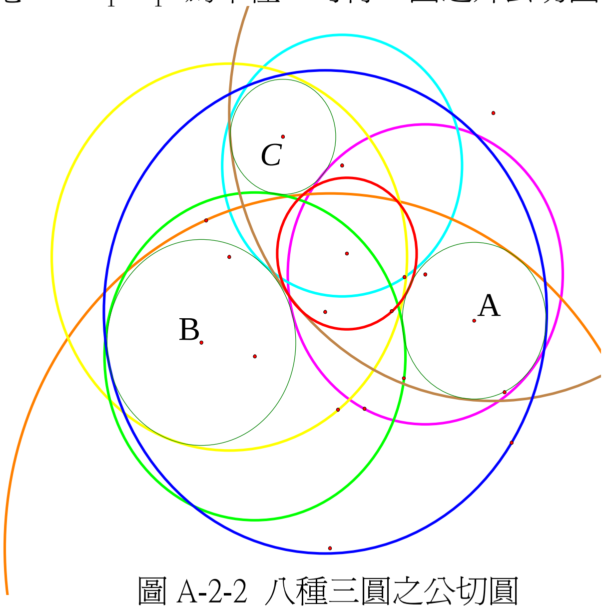


圖 A-2-2 八種三圓之公切圓

（二）任意三圓外離時之公切圓

延續上述雙曲線的作圖，推廣到三圓，探究任意三圓的公切圓作法及相關性質。

1. 初探任意三圓之公切圓

任意三圓外離時，其公切圓分別與三圓的關係必為外切或內切，所以應有$2^3=8$種情況，若不考慮位置的關係，理論上三圓存在 8 個公切圓，如圖 A-2-2，倘若不考慮位置關係，整理 8 種公切圓如下：

（1）三外切型：紅圓

（2）三內切型：藍圓

（3）二內一外切型：橘圓、黃圓、褐圓

（4）一內二外切型：紫圓、綠圓、淺藍圓

2. 任意三圓外離時之公切圓

（1）三外切型、三內切型公切圓

設圓 A 之半徑為r_1，圓 B 之半徑為r_2，圓 C 之半徑為r_3，$r_1>r_2>r_3$，外公切圓半徑為 R，則公切圓圓心O_1到三圓圓心之距離分別為$R+r_1$、$R+r_2$、$R+r_3$。我們

發現：
$$\begin{cases} \left|\overline{O_1A}-\overline{O_1B}\right|=(R+r_1)-(R+r_2)=r_1-r_2 \text{（定值）。} \\ \left|\overline{O_1A}-\overline{O_1C}\right|=(R+r_1)-(R+r_3)=r_1-r_3 \text{（定值）。} \\ \left|\overline{O_1B}-\overline{O_1C}\right|=(R+r_2)-(R+r_3)=r_2-r_3 \text{（定值）。} \end{cases}$$

分別作出圓 A 和圓 B 、圓 A 和圓 C 、圓 B 和圓 C 的雙曲線 Γ_{12} 、 Γ_{13} 、 Γ_{23} ，此三雙曲線將出現二個共同交點 O_1 、 O_2 ，三雙曲線的交點就是離三圓距離相等的點，即爲公切圓的圓心。以 O_1 爲圓心，($\overline{O_1B}-r_2$) 爲半徑作圓同時和圓 A 、圓 B 、圓 C 外切；而以 O_2 爲圓心，($\overline{O_2B}+r_2$) 爲半徑作圓同時和圓 A 、圓 B 、圓 C 內切，如圖 A-2-3。

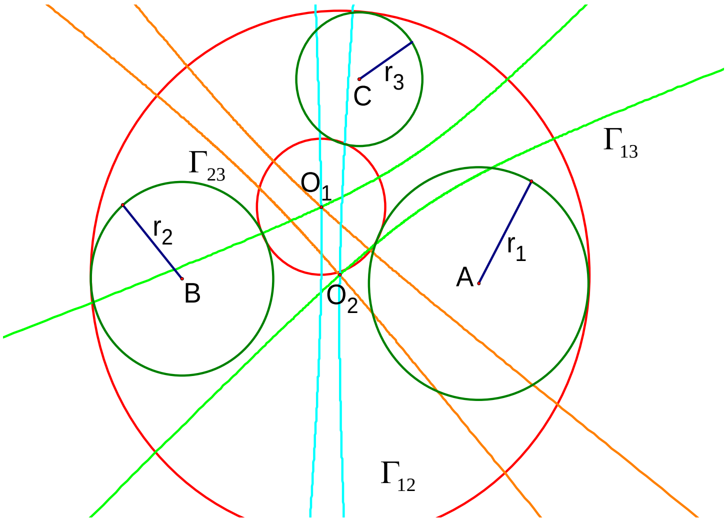


圖 A-2-3
利用 gsp 動態模擬，分別以 $|r_1-r_2|$ 、 $|r_1-r_3|$ 、 $|r_2-r_3|$ 爲定值畫出雙曲線 Γ_{12} 、 Γ_{13} 、 Γ_{23} 。

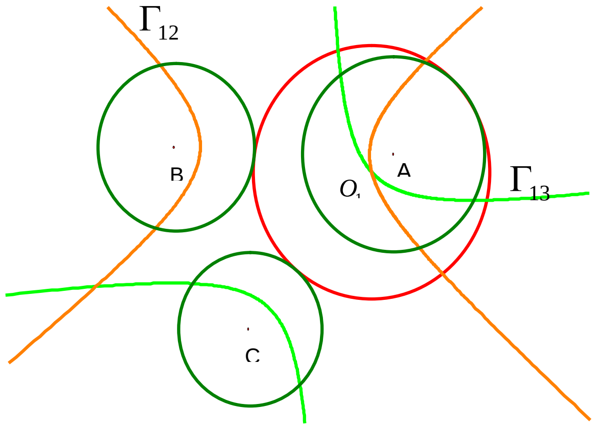


圖 A-2-4　以 r_1+r_2 、 r_1+r_3 爲定值作雙曲線 Γ_{12} 、 Γ_{13} ，其交點所作出的公切圓

（2）二內一外切型及一內二外切型公切圓

設所求外公切圓半徑爲 R，圓 A、B、C 之半徑爲 r_1 、 r_2 、 r_3 。

所求公切圓與圓 B、圓 C 外切且與圓 A 內切時，其公切圓圓心到三圓圓心之距離分別爲 $R-r_1$ 、 $R+r_2$ 、 $R+r_3$ 。

可推得：
$$\begin{cases} \left|\overline{O_1A}-\overline{O_1B}\right|=\left|(R-r_1)-(R+r_2)\right|=\left|r_1+r_2\right| \text{（定值）。} \\ \left|\overline{O_1A}-\overline{O_1C}\right|=\left|(R-r_1)-(R+r_3)\right|=\left|r_1+r_3\right| \text{（定值）。} \\ \left|\overline{O_1B}-\overline{O_1C}\right|=\left|(R+r_2)-(R+r_3)\right|=\left|r_2-r_3\right| \text{（定值）。} \end{cases}$$

以 r_1+r_2 爲定值作雙曲線時，圓 A 與圓 B 分別被公切圓內切與外切；以 r_1+r_3 爲定值作雙曲線時，圓 A 與圓 C 亦分別被公切圓內切與外切；而以 r_2-r_3 爲定值作雙曲線時，圓 B 與圓 C 卻與公切圓同爲外切或同爲內切關係，如圖 A-2-4。

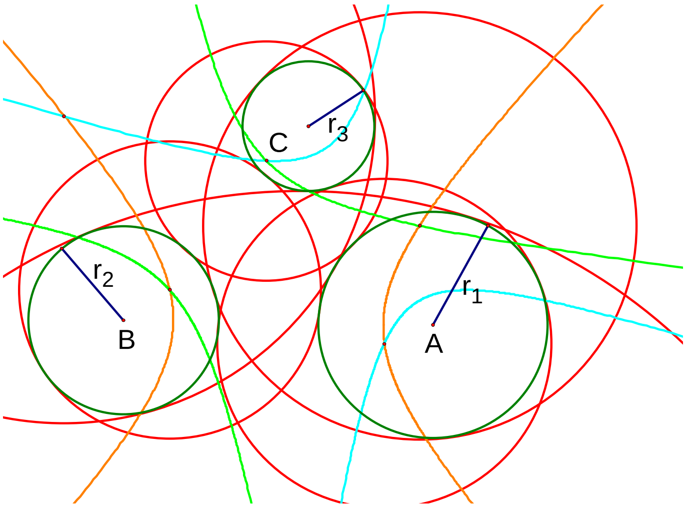


圖 A-2-5 以 $|r_1+r_2|$ 、$|r_1+r_3|$ 、$|r_1+r_3|$ 爲定值作雙曲線並以兩兩交點爲圓心作六個公切圓

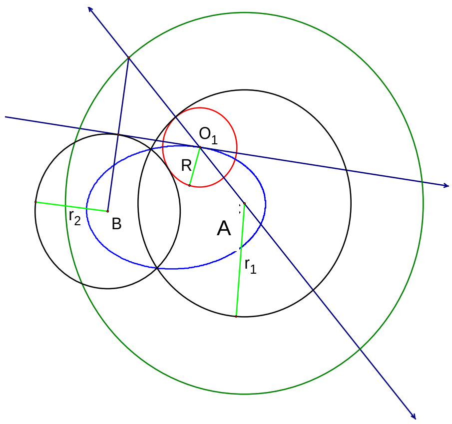


圖 A-2-6 以 $|r_1+r_2|$ 爲定值作橢圓，以其任一點爲圓心，求得公切圓 O_1

（三）任意三圓相交時之公切圓

設兩圓 A、B 的半徑爲 r_1、r_2，圓 A 和圓 B 相交，公切圓 O_1，其半徑爲 R，如圖 A-2-6。若由上述雙曲線的定義著手，可得 $|\overline{O_1A}-\overline{O_1B}|=(r_1\text{-R})-(r_2+\text{R})=|r_1-r_2\text{-2R}|$，R 爲變數，並沒有成爲定值，是以雙曲線無法求得公切圓的圓心。仔細端睨，當兩圓心距相加，即 $|\overline{O_1A}+\overline{O_1B}|=(r_1\text{-R})+(r_2+\text{R})=|r_1+r_2|$（定值），所做的曲線即爲橢圓。

我們利用三組「－」型雙曲線的交點，及任取兩組「＋」型橢圓的交點，作出三圓相交時的所有公切圓。

1. 「三內切型」公切圓

設圓 A、圓 B、圓 C 兩兩相交，半徑爲 r_1、r_2、r_3，分別以 $|r_1-r_2|$、$|r_1-r_3|$、$|r_2-r_3|$ 爲定值作雙曲線，三條交於 O_1 、O_2 ，分別以 O_1 、O_2 爲圓心，$r_1-\overline{O_1A}$ 、$\overline{O_2A}+r_1$ 爲半徑畫圓，圓 O_1 、圓 O_2 均爲三內切型公切圓，如圖 A-2-7。

2. 「三外切型」公切圓

三圓兩兩相交時，不存在三外切圓型公切圓，我們將於後文討論分析。

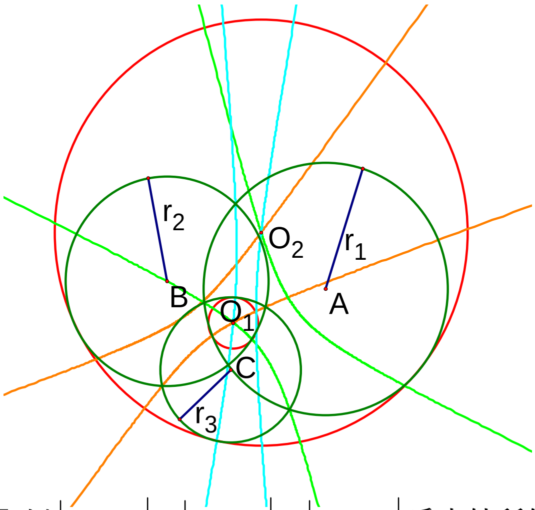


圖 A-2-7 以$|r_1-r_2|$、$|r_1-r_3|$、$|r_2-r_3|$爲定值所作三組雙曲線交點爲圓心，求得公切圓O_1、O_2

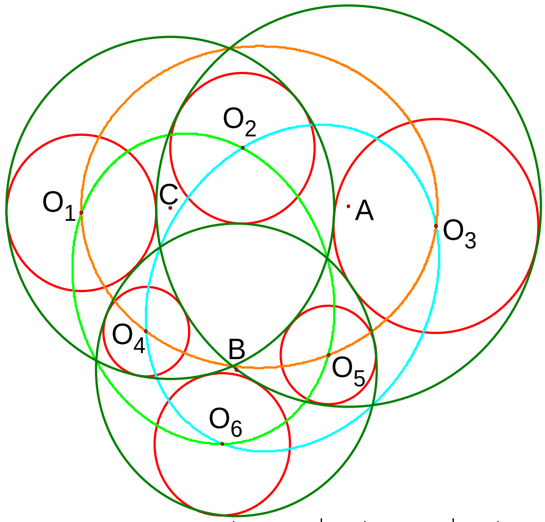


圖 A-2-8 以$|r_1+r_2|$、$|r_1+r_3|$、$|r_2+r_3|$爲定值作圖，求得 6 個公切圓

3. 「二內切一外切型」及「一內切二外切型」公切圓

設圓 A、B、C 相交，半徑爲r_1、r_2、r_3，分別以$|r_1+r_2|$、$|r_1+r_3|$、$|r_2+r_3|$爲貫軸長作雙曲線，三條兩兩相交於六點O_1、O_2、O_3、O_4、O_5、O_6，分別以每一點爲圓心，$r_3-\overline{O_1C}$、$r_3-\overline{O_2C}$、$r_1-\overline{O_3A}$、$r_3-\overline{O_4C}$、$r_1-\overline{O_5A}$、$r_2-\overline{O_6B}$爲半徑作圓，公切圓O_k，k=1、2、3、4、5、6 即爲所求，如圖 A-2-8。

（四）特殊互補情況

我們觀察發現任意三圓在一般情況下，存在 1 個「三外切型」公切圓、1 個「三內切型」公切圓、3 個「一內切二外切型」公切圓，以及 3 個「二內切一外切型」公切圓。當三圓相對位置不足以滿足八種公切圓同時存在時，會有其中一種公切圓多出來補足，使其依然存在八個公切圓，以下就三圓兩兩相交與三圓兩兩外離分述之。

1. 三圓相交時互補情況：

設任意三圓 A、B、C，兩兩相交，如圖 A-2-9，其中圓O_1原應爲三外切型公切圓，但此情況不可能存在，反而與圓 A、圓 B、圓 C 分別內切；因此，雖然少了三外切型公切圓存在，但多出一個三內切型公切圓，三圓公切圓仍存在 8 個。

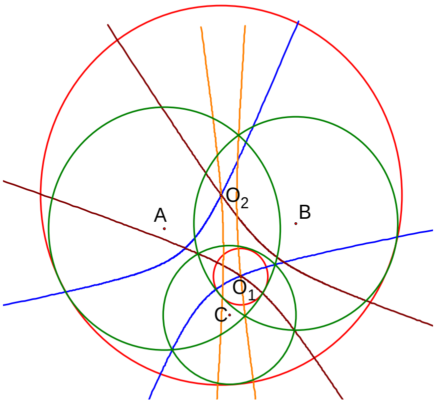


圖 A-2-9

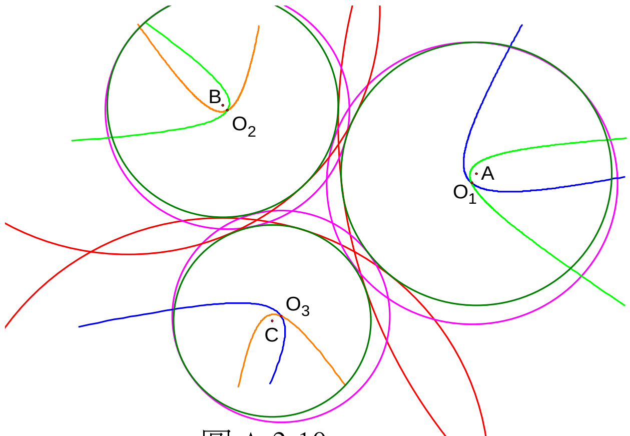


圖 A-2-10

2. 三圓外離時互補情況：

設任意三圓 A、B、C，其兩兩均不相交，當圓非常靠近時，其不容許二內切一外切型公切圓存在，反而多出三個一內切二外切型公切圓〈原只有三個〉，如圖 A-2-10，其中圓O_1、O_2、O_3爲原來的一內二外切型公切圓〈粉紅〉，而三紅圓本爲二內一外切型公切圓，因相對位置關係而轉爲一內切二外切型公切圓，此時公切圓存在 8 個，卻有 6 個一內切二外切型公切圓。

三、利用反演輔助求作公切圓

（一）反演的定義及性質

平面上給定圓心爲 O，半徑爲 r 的圓，定義平面上具有中心 O 和半徑 r 的反演，使平面上 P 點送到$\overrightarrow{OP}$上一點P'，並滿足$\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$。

由上述反演定義可得下列性質：

1. 圓內的點會反演到圓外；圓周上的點不會被反演改變；圓外的點則會反演到圓內。
2. 一條通過反演圓中心的直線反演後不會改變，仍是原來的一條直線；一條不通過反演中心的直線變換後會成爲一個圓。
3. 通過反演中心的圓經過反演會變成直線，此線與反演中心和圓的連心線垂直，但如果圓並沒有通過反演中心，那麼反演後還是維持一個圓。
4. 反演會讓幾何圖形的相對關係不改變。

（二）反演作圖法

假若圓O是一個反演圓，半徑爲 r，O、P'、P爲共線的三點，在圓周上找到 A 點，使△OAP 以及△OAP'爲兩個相似的等腰三角形，則$\overline{OP}$：r=r：$\overline{OP'}$，P及 P'即爲互爲反演的兩個點（如圖 A-3-1）。經由這個原理，我們以 GSP 軟體進行反演轉換之作圖。

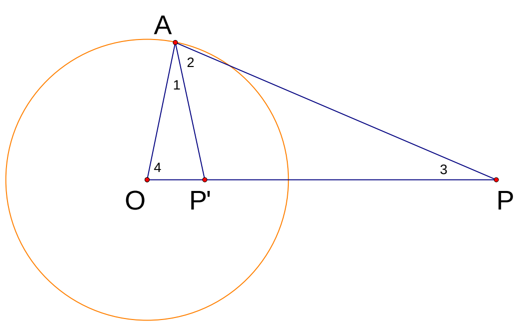


圖 A-3-1

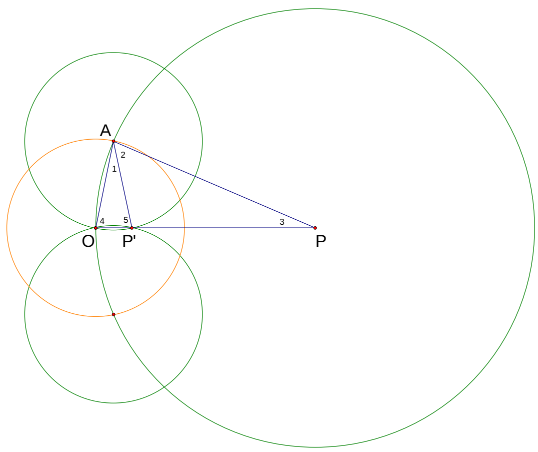


圖 A-3-2　以 GSP 動態軟體畫反演點的方法

如圖 A-3-2，假設O為反演中心，r 為反演半徑，P 是一欲反演的點。首先，以 P 點為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑畫圓，交圓O於 A、B 兩點，再分別以 A、B 為圓心，$\overline{AO}$ 、$\overline{BO}$ 為半徑畫兩圓，交前圓於O和P'，最後運用 GSP 的動態功能畫出一圓 A 經過反演變換後之軌跡圓 B，如圖 A-3-3。由上述作圖，P' 即為 P 的反演點，證明如下：

1. $\triangle$OAP' 中

$\because$ $\overline{AO}=\overline{AP'}$

$\therefore$ $\angle 4=\angle 5$

$\Rightarrow$ $\angle 1=180°-2\angle 4$ ＿①

2. $\triangle O$AP 中

$\because$ $\overline{PA}=\overline{OP}$

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2=\angle 4$

$\Rightarrow$ $\angle 3=180°-2\angle 4$ ＿②

由 ①② $\angle 1=\angle 3$

3. $\triangle$OAP' 和 $\triangle$OAP 中

$\because$ $\begin{cases}\angle 3=\angle 1\\ \angle 4=\angle 4\end{cases}$

$\therefore$ $\triangle AOP' \sim \triangle PAO$ （AA 相似）

$\Rightarrow$ $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OP'}}=\dfrac{\overline{PO}}{\overline{OA}}$，又 $\overline{OA}=r$

$\Rightarrow$ $r^2=\overline{PO}\times\overline{OP'}$

$\Rightarrow$ P' 為 P 之反演點

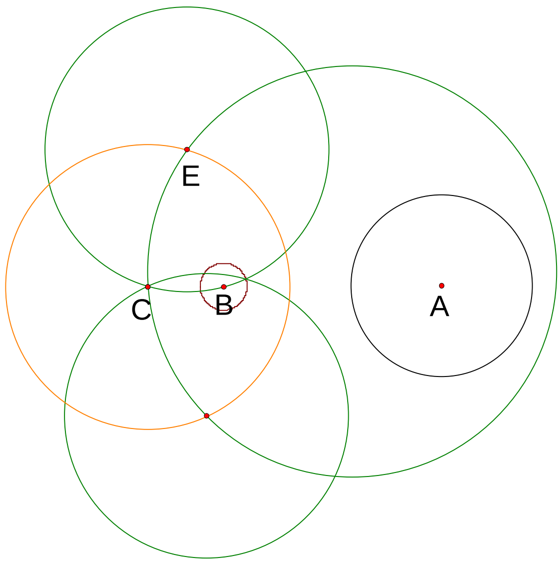


圖 A-3-3
不通過反演中心的圓 A 及其反演轉換圓 B

（三）以反演轉換找出兩圓的公切圓

研究發現若以兩相切圓的切點為反演中心，做一反演圓，這兩個圓在反演變換後為兩平行直線，如圖 A-3-4、圖 A-3-5，而和這兩條平行線相切的圓，其反演轉換後仍與這兩圓相切。我們利用上述方法找出兩圓的公切圓，取定 T 作為具有中心 O 和半徑 r 的平面上的反演，透過加減半徑的不同控制，即可得到不同形式的公切圓，以下分述「同內切、外切型公切圓」及「一內一外切型公切圓」的反演法作圖如下：

1. 同內切、外切型公切圓的反演作圖法（圖 A-3-4）：

（1）作任意不相交的兩圓 A 與圓 B

（2）連 $\overline{AB}$ 交兩圓於 M、N

（3）做 $\overline{MN}$ 中點 O，令 $\overline{OM}$ ＝s

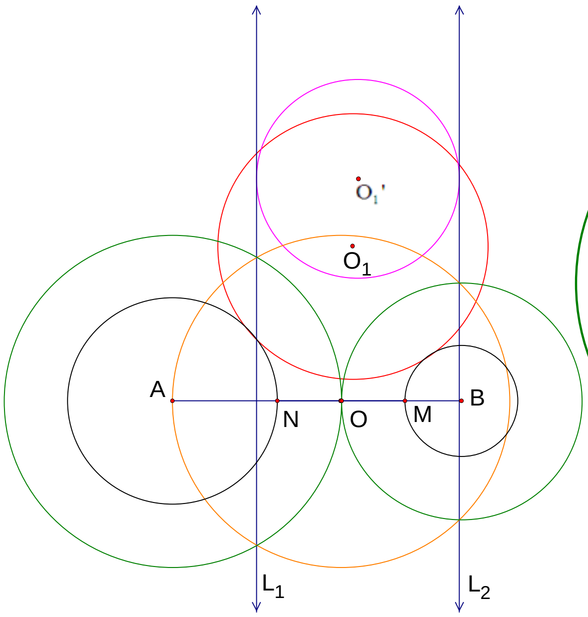
（4）分別以 A、B 為圓心，$\overline{OA}$ 、$\overline{OB}$ 為半徑，作兩圓相切於 O

（5）以 O 為圓心適當長為半徑畫，令圓 O 為反演圓

（6）反演 T 將圓 A、圓 B 轉換成兩平行直線 L_1 、L_2

（7）作圓 O_1' 切 L_1 、L_2

（8）反演 T 將圓 O_1' 轉換，並將反演得到的圓半徑加上 s，此圓即為所求



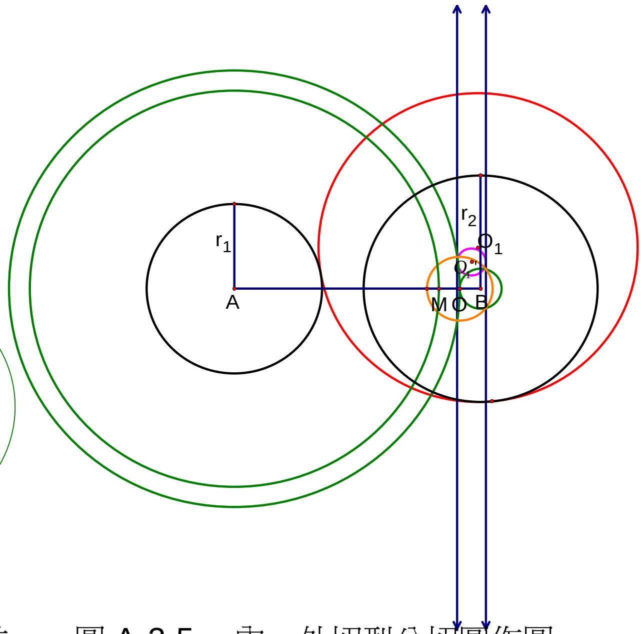


圖 A-3-4 同內切、外切型公切圓作圖法　　圖 A-3-5 一內一外切型公切圓作圖

2. 一內一外切型公切圓的反演作圖法（圖 A-3-5）：

（1）將圓 A 的半徑加大成 r_1+r_2，將圓 B 縮小半徑成一點 B

（2）連 $\overline{AB}$ 交前大圓於 M

（3）做 $\overline{BM}$ 的中點 O，令 $\overline{OM}$ ＝s

（4）分別以 A、B 爲圓心，$\overline{OA}$ 、$\overline{OB}$ 爲半徑，作兩圓相切於 O

（5）以 O 爲圓心，適當長爲半徑畫圓，令其爲反演圓

（6）將切於 O 的兩圓反演 T 成兩平行直線 L_1 、L_2

（7）作圓 O_1'切 L_1 、L_2

（8）反演 T 將圓 O_1'轉換，並將反演得到的圓擴大 s＋r_2，此圓即爲所求

由於與兩平行直線相切的圓有無限多個，大小相同但位置不同的公切圓，經再一次反演後爲半徑不同的許多圓。我們用此反演作圖法，可以畫出任意兩圓無限多的公切圓。

（四）以反演轉換找出三圓的公切圓

作任意三圓的公切圓，是數學幾何裡一個非常有名的 Apollonius 問題，在前面我們以雙曲線作圖，驗證其一般解有 8 個公切圓。我們利用反演作圖法，進一步探討這八個公切圓，然在探討三圓之反演作法前，我們必須能夠做出在兩平行直線及圓 C_T 同時相切之圓，如圖 A-3-6 所示，作法如下：

（1）L_1、L_2 爲兩平行直線，作 L_3 平行 L_1 且 $d(L_1;L_3)=d(L_2;L_3)$，圓 F 爲第三圓反演出來的圓，假設其半徑爲 R_{CT}

（2）以 F 爲圓心，$d(L_1;L_3)+R_{CT}$ 爲半徑畫圓，交 L_3 於 E、D 兩點

（3）分別以 D、E 爲圓心，d（L_1; L_3）爲半徑畫圓，圓 E、圓 D 即爲所求

同理，以 F 爲圓心，$d(L_1;L_3)-R_{CT}$ 爲半徑畫圓交 L_3，可得與圓 F 內切的公切圓。

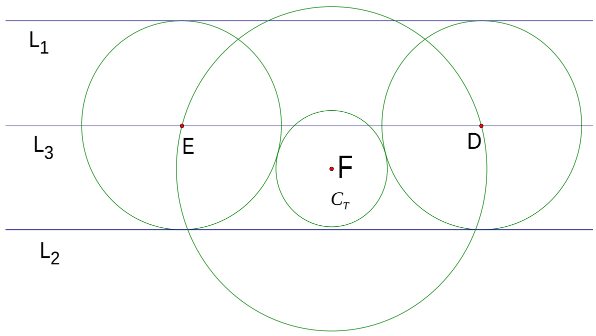


圖 A-3-6 與兩平行直線及圓 C_T 同時

基於上述理由，敘述三圓公切圓反演之作法如下：

（1）作任意不相交的三圓，圓 A、圓 B 與圓 C

（2）連結 $\overline{AB}$ 交兩圓於 M、N

（3）做 $\overline{MN}$ 中點 O，令 $\overline{OM}=s$

（4）分別以 A、B 為圓心，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 為半徑，作兩圓相切於 O

（5）以 O 為圓心適當半徑畫圓，令圓 O 為反演圓

（6）反演 T 將圓 A、圓 B 轉換成兩平行直線 L_1、L_2。

（7）將圓 C 的半徑加大 s

（8）反演 T 將圓 C 轉換，記作 C_T

（9）作圓 $O_1^{'}$ 與 L_1、L_2 和 C_T 相切（以 $d(L_1;L_3)+R_{CT}$ 為半徑）

（10）反演 T 將圓 $O_1^{'}$ 轉換，並將反演轉換得到的圓半徑加上 s，此圓即為所求

利用上述作法，我們固定一組反演圓，步驟(9)時將得兩個圓 $O_1^{'}$，亦即在步驟（10）時可得兩個公切圓，分別和圓 A、圓 B 與圓 C 外切及內切。

（五）三圓公切圓存在性之探討

作內公切圓和外公切圓時第三圓的半徑要增加 s；但作內外公切圓時第三圓的半徑要減少 s（步驟（7）），又上述兩種情況時各會得到 2 個公切圓，我們稱其為二組共軛解，所以固定一個反演中心時，我們可以得到 2x2＝4 個公切圓，如圖 A-3-7、圖 A-3-8。

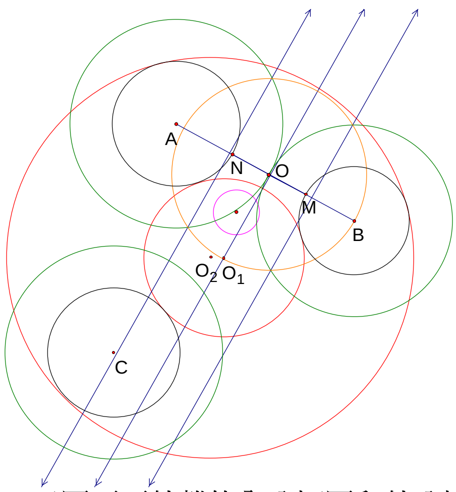


圖 A-3-7 三圓兩兩外離的內公切圓和外公切圓

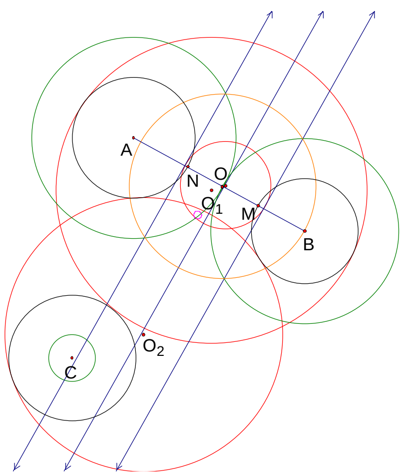


圖 A-3-8 三圓兩兩外離的兩外一內切型公切圓

同理，如果改以連接圓 B 和圓 C，來找反演中心，增加或減少圓 A 的半徑，可以再得到二組共軛解，有 4 個公切圓；同樣的，連接圓 A 和圓 C，找到另一個反演中心，增加或減少圓 B 的半徑，又可得到二組共軛解，其同樣有 4 個公切圓。這三個反演圓可作出 3x4＝12 個公切圓，但其中內公切圓和外公切圓（以 $d(L_1; L_3)+R_{CT}$ 為半徑），是三個反演圓都會重複的，而內外切型公切圓則是一個反演中心會產生兩個，可推算：三任意圓會有 3x2＋2＝8 個公切圓，與雙曲線試驗結果符合，如圖 A-3-9 及圖 A-3-10。

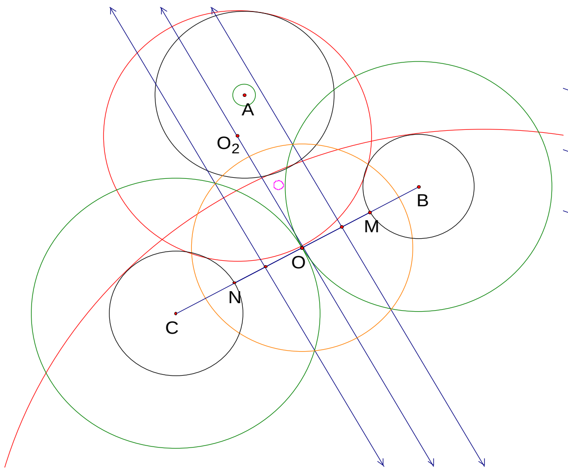


圖 A-3-9 連接圓 B 和 C 所得之三圓公切圓

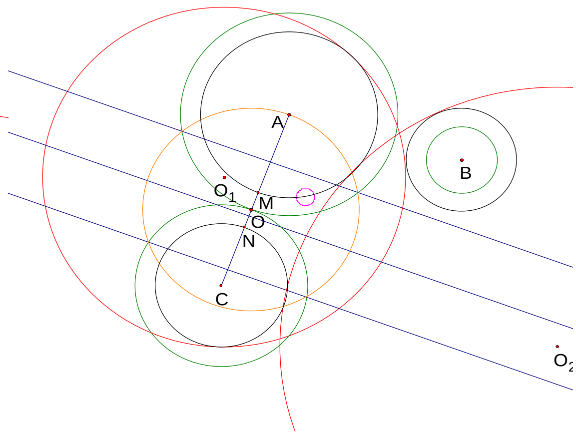


圖 A-3-10 連接圓 A 和 C 所得之三圓公切圓

（六）三圓之相對關係改變時公切圓存在性之探討

1. 兩圓交於兩點，並均與第三圓外離：

此三圓的公切圓只有 4 個，因為其中有 4 個內外公切圓受到圓 A、圓 B 交於兩點的關係而消失，同時為求反演中心使兩圓交於 O 點，兩圓需等量減 s，所以內和外公切圓作圖時，第三圓的半徑要減 s，反之內外公切圓半徑要加 s，如圖 A-3-11、A-3-12。

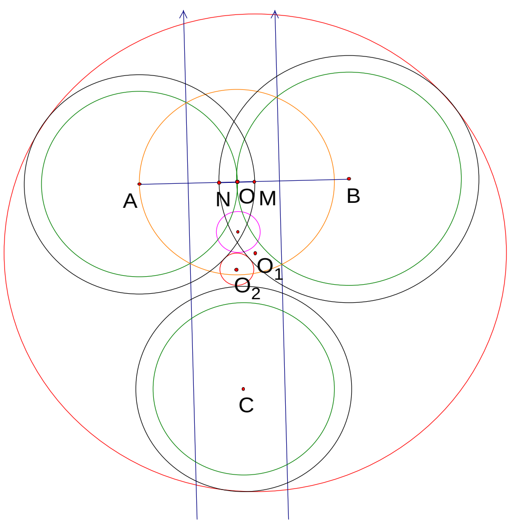


圖 A-3-11 存在三內、三外切型公切圓

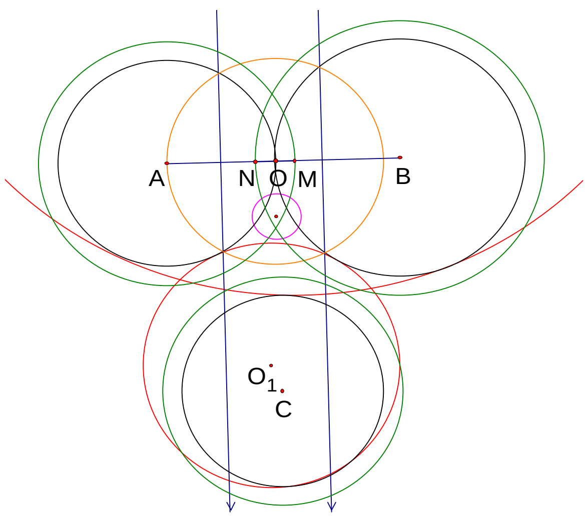


圖 A-3-12 存在一內二外與二內一外切型公切圓

2. 三圓兩兩相交於兩點：

此三圓的公切圓有 8 個，如圖 A-3-13、A-3-14 、A-3-15、A-3-16。

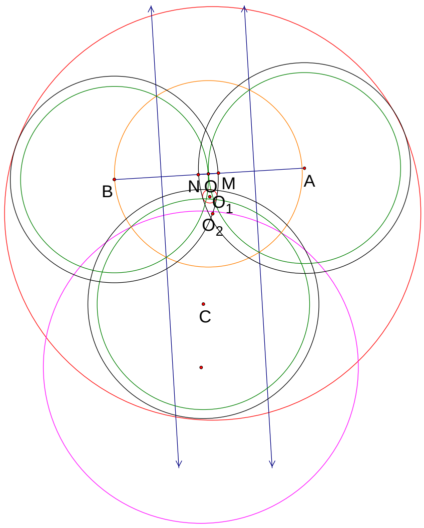


圖 A-3-13 存在三內、三外切型公切圓

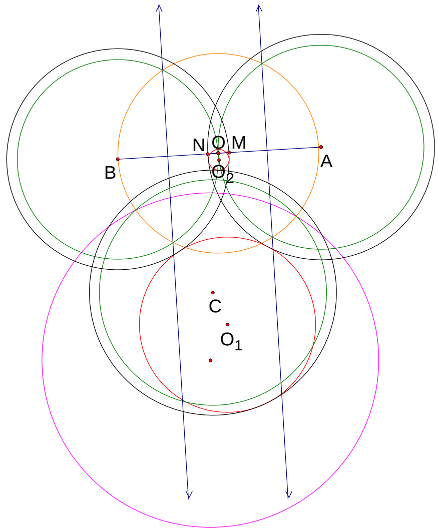


圖 A-3-14 連接 A、B 的內外切型公切圓

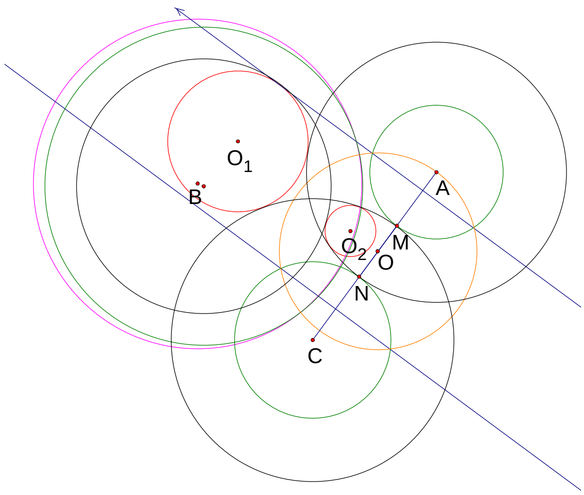


圖 A-3-15 連接圓 A、C 的內外切型公切圓

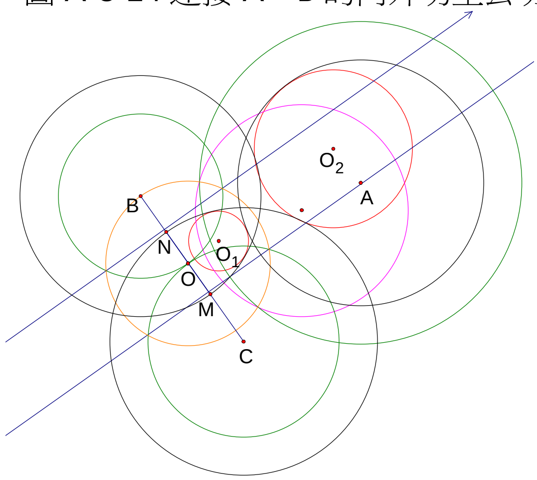


圖 A-3-16 連接 B、C 的內外切型公切圓

由 1.、2. 甚至三圓外離時的狀況，我們驗證雙曲線作圖的結果，進一步地，三圓相對位置的改變，其公切圓的種類亦會不同，數量也會受到影響。表 1 為任意給定三圓求公切圓作圖中，其 s 值增減歸納表。

表 1 反演法求公切圓 s 值增減歸納表

求反演中心的兩圓關係	求反演中心	公切圓種類	第三圓	C_T的半徑	結果
其中二圓外離求反演中心時	增加 s	三內公切圓、三外公切圓	加上 s	加上 s	加上 s
		內外切型公切圓	減少 s	減少 s	減少 s
其中二圓相交求反演中心時	減少 s	內外切型公切圓	減少 s	加上 s	減少 s
		三內公切圓、三外公切圓	加上 s	減少 s	加上 s

陸、驗證與推廣

一、利用切線探討 n 個圓之公切圓的存在性

（一）切線判別法的發想

我們以雙曲線的作圖法找出任意三圓的公切圓，甚至判別出公切圓存在性或是公切圓存在的個數，進一步地，以反演法獲得驗證，然而是否能夠在不作圖的情況下，也獲得一樣的判斷結果？反覆地作圖，從 GSP 的軌跡圖形當中，我們有了新的發想：「**公切線是半徑無限大的圓**」。

我們想像兩圓的公切線是半徑無限大的公切圓，兩圓公切線存在情況如圖 B-1-1。

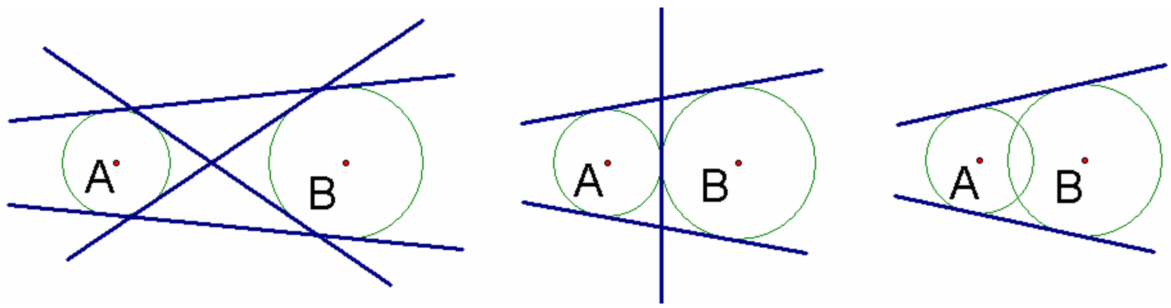


圖 B-1-1　兩圓之公切線示意圖

想像圓心在無限遠處，以切線為公切圓的一部份，當圓心朝公切線漸漸逼近（即曲率半徑逐漸減小），公切線變成圓弧，曲率同時越來越大，可見的圓亦愈完整；曲率半徑漸減所形成的每個圓皆為圓 A、圓 B 的公切圓，如圖 B-1-2，而且，曲率半徑變小的每一個圓，都**保持與圓 A 或與圓 B 一樣的相切關係**。

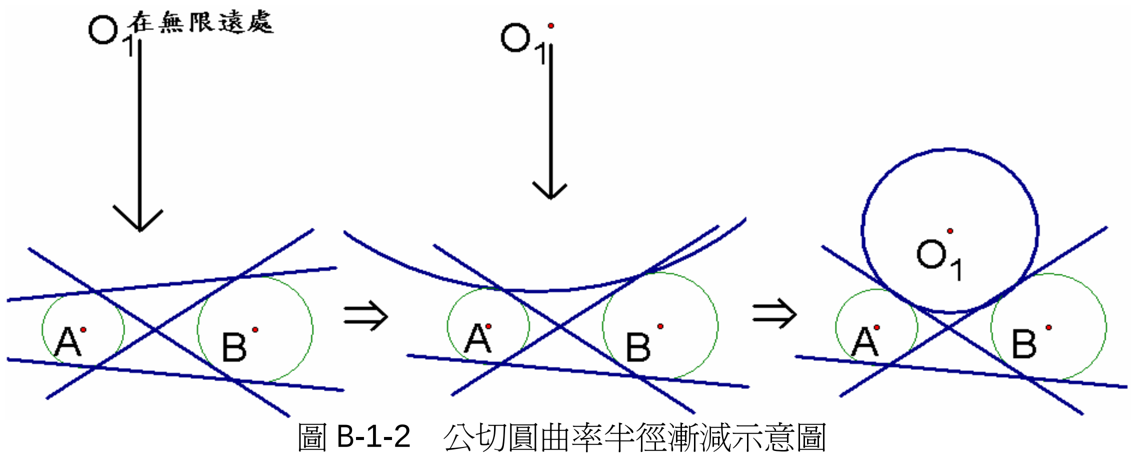


圖 B-1-2　公切圓曲率半徑漸減示意圖

由此，我們可利用兩圓公切線（即半徑無限大的公切圓）進行探討。

（二）利用公切線判斷三圓公切圓的存在性

1. 兩兩外離之圓：

首先畫出四條切線，如圖 B-1-3 中的 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 ，並依上述方法找出每條切線所畫出的公切圓種類，判別法如下：

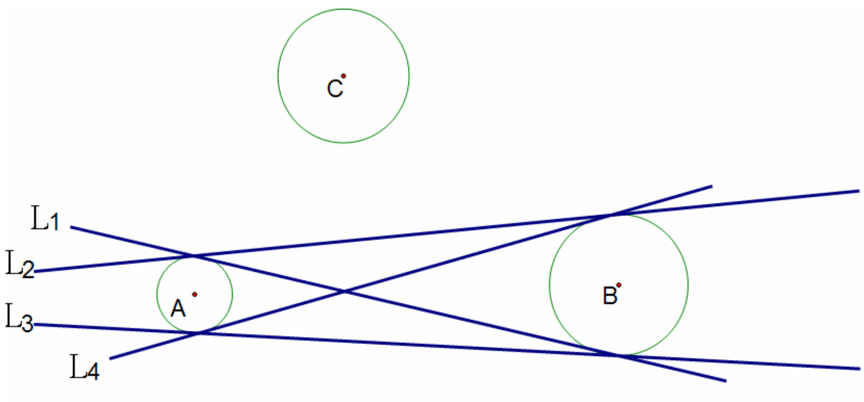


圖 B-1-3　三圓兩兩外離公切線示意圖

（1）利用 L_1 判別公切圓：

Ⅰ. 將 L_1 的圓心由上往下推進，使 L_1 曲率半徑變小，形成一個公切圓 O_1 ，其內切圓 B、圓 C，外切圓 A，稱此圓爲「二內一外公切圓」，如圖 B-1-4。

Ⅱ. 將 L_1 的圓心由上往下繼續推進，使 L_1 曲率半徑更小，形成一個公切圓 O_2 ，其內切圓 B，外切圓 A、圓 C，稱此圓爲「一內二外公切圓」，如圖 B-1-4。

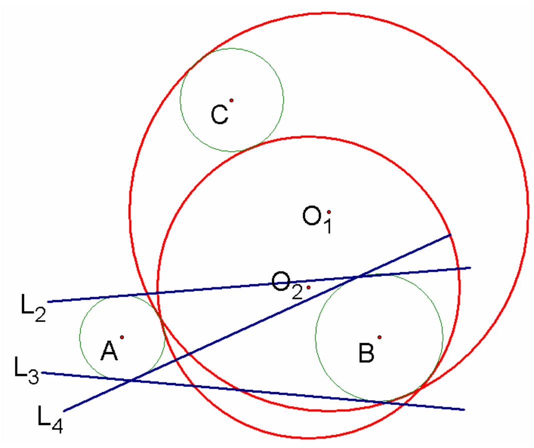


圖 B-1-4　L_1 的曲率半徑由上而下減小

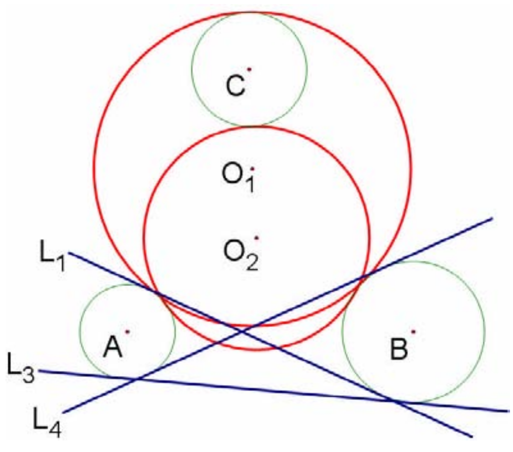


圖 B-1-5　L_2 的曲率半徑由上而下

（2）利用 L_2 判別公切圓：

同理，將 L_2 的圓心由上往下推進，使 L_2 曲率半徑變小，形成公切圓 O_1 、 O_2 ，如圖 B-1-5 所示。

（3）利用 L_3 判別公切圓：

同理，將 L_3 的圓心由上往下推進，使 L_3 曲率半徑變小，形成公切圓 O_1 、O_2 ，如圖 B-1-6 所示。

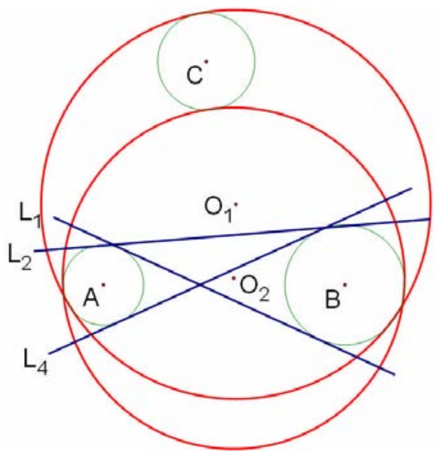


圖 B-1-6　L_3 的曲率半徑由上而下減小

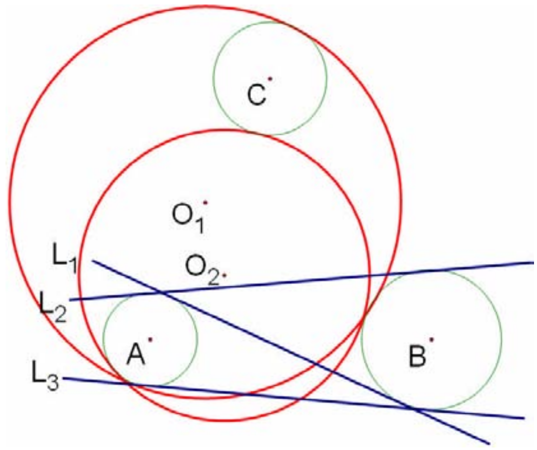


圖 B-1-7　L_4 的曲率半徑由上而下減小

（4）利用 L_4 判別公切圓：

同理，將 L_4 的圓心由上往下推進，使 L_4 曲率半徑變小，形成公切圓 O_1 、O_2 ，如圖 B-1-7 所示。

經過上述操作過程，得到所有切線會出現的公切圓，整理公切圓的個數和種類如下：

L_1 ：一內切二外切型×1、二內切一外切型×1

L_2 ：一內切二外切型×1、三外切型×1

L_3 ：三內切型×1、二內切一外切型×1

L_4 ：二內一外切型×1、一內二外切型×1

由此分析可得：利用切線判斷三外離定圓所有的公切圓種類共有八種，因此再次驗證三圓公切圓數目在一般的情況下有八個。

2. 兩圓相切且第三圓與之外離：

首先畫出三條切線，如圖 B-1-8 中的 L_1 、L_2 、L_3 ，並依上述方法找出每條切線所畫出的公切圓種類，結果如下：

（1）利用 L_1 判別公切圓：

L_1 的曲率半徑由左向右推進逐漸變小，形成二個公切圓，如圖 B-1-8；L_1 的曲率半徑由右到左逐漸變小，無法形成公切圓。

（2）利用 L_2 判別公切圓：

L_2 的曲率半徑由上向下推進逐漸變小，形成公切圓 O_1 、O_2 ，如圖 B-1-9。

（3）利用 L_3 判別公切圓：

L_3 的曲率半徑由上向下推進逐漸變小，形成公切圓 O_1 、 O_2 ，如圖 B-1-10。

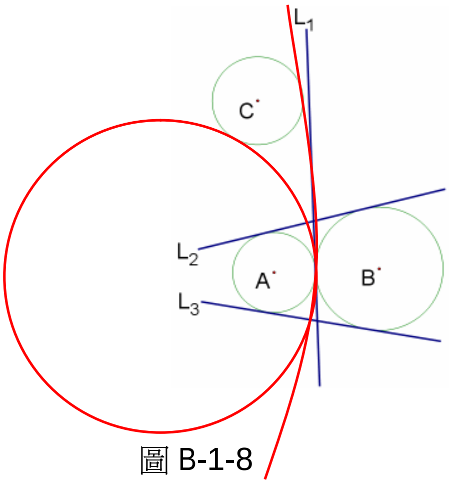


圖 B-1-8

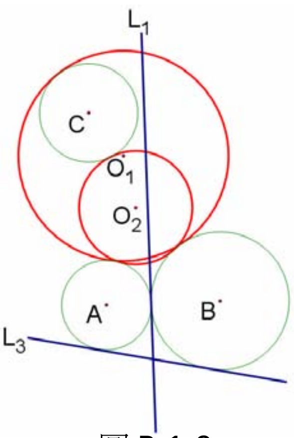


圖 B-1-9

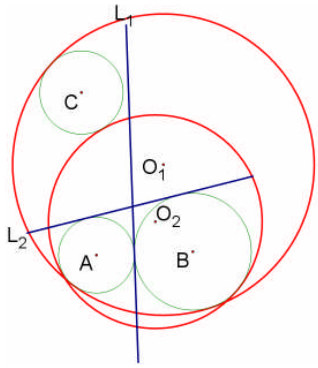


圖 B-1-10

經過上述操作過程，我們彙整所有判別出來的公切圓。這些公切圓的種類如下：

L_1 ：二內切一外切型x1、一內二外切型x1

L_2 ：一內二外切型x1、三外切型x1

L_3 ：三內切型x1、二內一外切型x1

得出用切線判斷此三圓存在公切圓的種類共有六種。

（三）切線判別法之限制

依上述判斷方式雖可找出三圓之所有公切圓種類，但是三圓兩兩交於兩點，則有所限制，如圖 B-1-11，任兩條外公切線必不能判別三內切型公切圓。因此，為解決此問題，我們將所有兩圓的公切線納入判斷，並增加「兩相交圓之根軸」作為判別直線，L_1 、L_3 、L_5 ，如圖 B-1-12 所示。

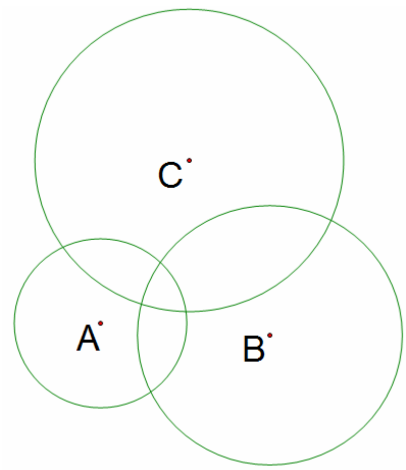


圖 B-1-11　切線判別法的限制

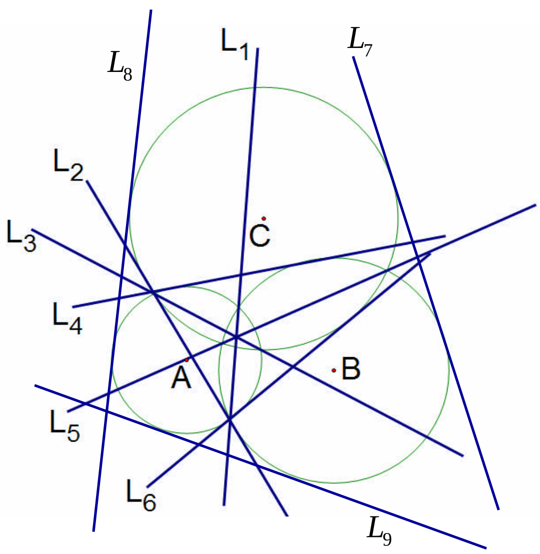


圖 B-1-12 增加了根軸以利探討

針對 L_1 — L_9 ，分別從無窮遠處減小曲率半徑，可判別出所有公切圓的存在，如圖 B-1-13 至圖 B-1-18，然而利用根軸判別公切圓，卻失去了與兩圓相對關係不變的性質。

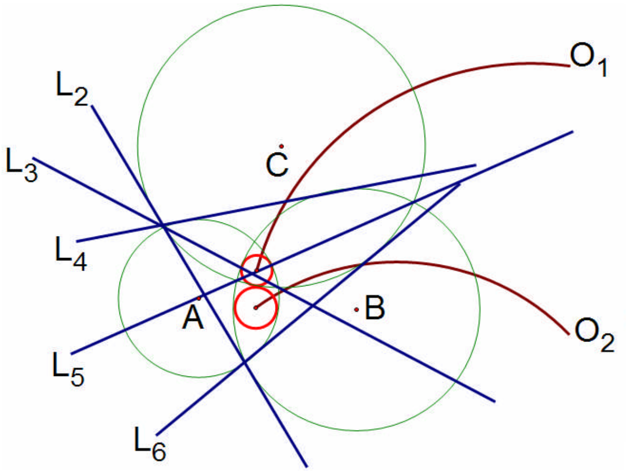


圖 B-1-13　L_1 的判別

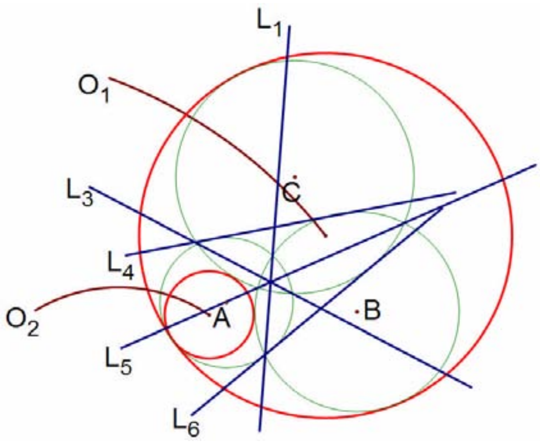


圖 B-1-14　L_2 的判別

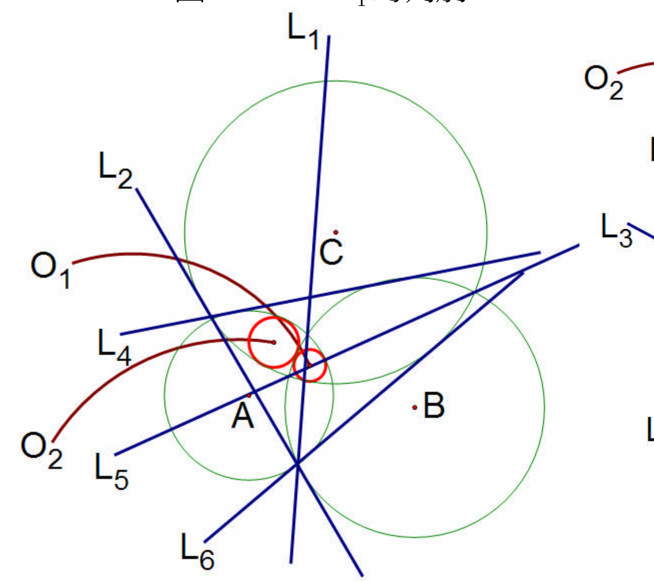


圖 B-1-15　L_3 的判別

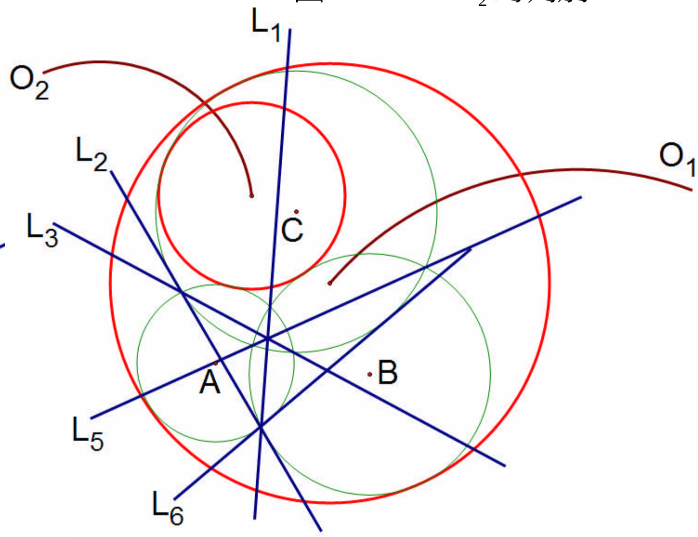


圖 B-1-16　L_4 的判別

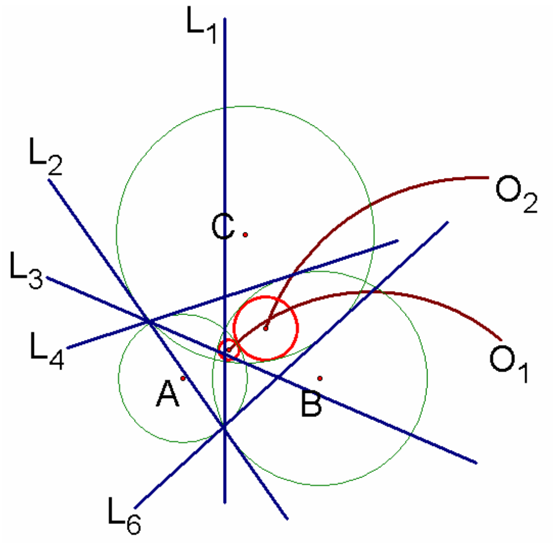


圖 B-1-17　L_5 的判別

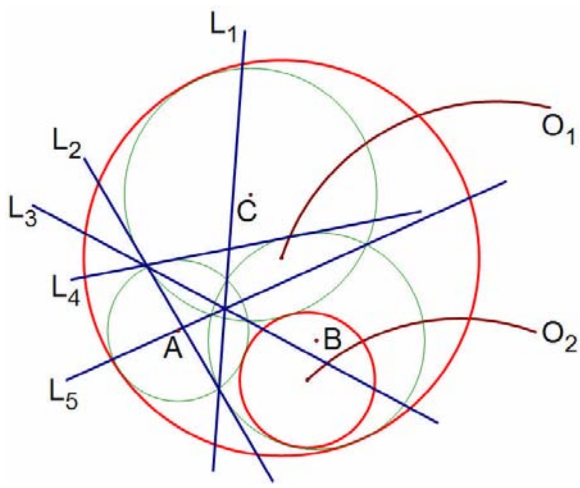


圖 B-1-18　L_6 的判別

二、切線判別法的推廣

從切線判別法的發想，遇到瓶頸的修正，切線判別法逐漸成形，我們完備了切線判別法之外，也作了一些推論，分述如下：

（一）能判別存在必能作圖

首先，外公切線和內公切線存在不同的意義：外公切線代表所切兩圓必同為外切或同為內切關係，而內公切線代表所切兩圓的相切情況相異，即內公切線所判別的公切圓若與一圓內切，則必與另一圓外切。由此可知，三內切或三外切公切圓必為外公切線將曲率半徑減小的結果。

將公切線視為半徑無限大的公切圓，圓心從兩側趨近，曲率半徑逐漸減小，若透過公切線經判斷不存在某種公切圓，則其必不存在，如圖 B-1-10 中的 L_3 內公切線，曲率半徑由下方縮小，並不存在此公切圓。又，曲率半徑的變化，是一種**連續的歷程**，保持與切圓的關係不變，控制曲率半徑的大小與第三圓相切，這是顯然可行的，所以切線判別法必能判別三圓的公切圓存在性，如圖 B-2-1。

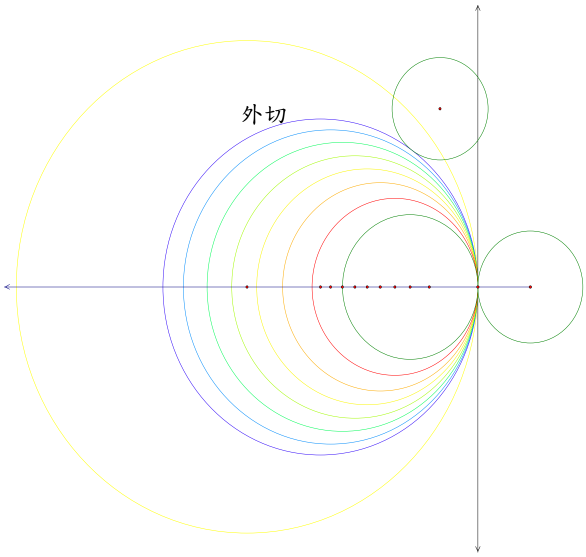


圖 B-2-1 公切線變化為連續歷程示意

（二）切線判別法的使用

給三定圓，其兩兩關係限定，依下列優先順序選取公切線進行判別：

1. 三圓中，若有兩圓外離，以其四條內、外公切線進行判別；
2. 三圓中，若無兩圓外離，卻有兩圓相切，以其三條內、外公切線進行判別；
3. 三圓中，若三圓相交，則以外公切線，不足以判別，有其限制；然若在所有六條外公切線外，加上兩兩相交圓之根軸進行判別，雖失去與兩圓相對關係不變性質，但可約略判斷公切圓的存在，如圖 B-1-13 至圖 B-1-18。

（三）公切圓的互補性質

我們在雙曲線的研究過程中，發現公切圓個數互補的狀況，從切線的觀點，我們推論如下：給定三圓外離，其存在 8 個公切圓，1 個三外公切圓、1 個三內公切圓、3 個二內一外公切圓、3 個一內二外公切圓，由雙曲線得知公切圓的圓心均為雙曲線的交點，而雙曲線無限延伸，隨著三個圓位置的轉變，公切線也跟著改變；我們控制三個圓中的兩個圓不動，第三圓由遠至近移動，如下圖 B-2-2，可由切線的判斷，看到互補的公切圓。

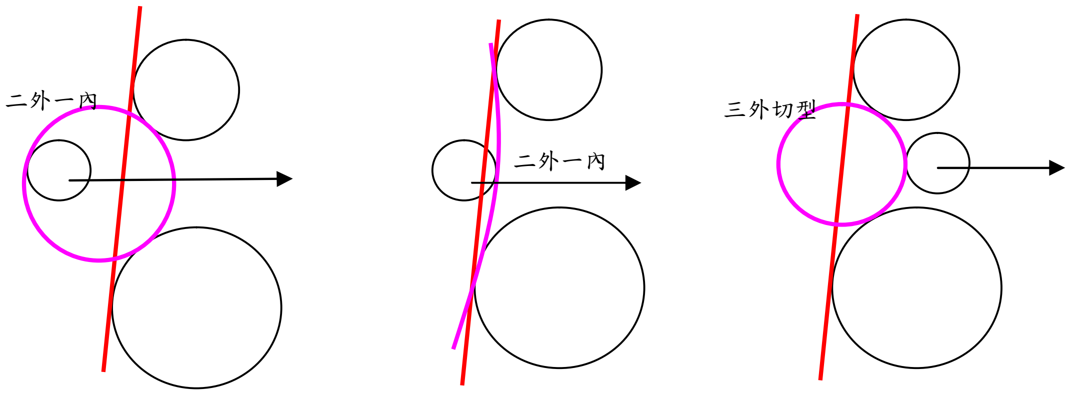


圖 B-2-2 由切線觀察公切圓個數互補歷程

再舉一例，從三圓的角度出發，當三圓在兩兩互外離的情況下時，我們將三圓漸漸逼近，使三圓圓周距離為無限近，卻不相切（亦不相交），此時的公切圓雖然還有八種，「互補」的情況下，經過逼近則變成三內切型x1、三外切型x1、一內二外公切型x6，如圖 B-2-3。因為當我們將圓 C 接近已經幾近併在一起的圓 A、圓 B 時，圓 C 必須嵌入圓 A 和圓 B 圓周間的凹處，而在嵌入的同時，因已造成圓周彎曲的極限，所以無法形成二內一外公切圓，進而互補形成三個一內二外公切圓。特別地，當圓的極限與公切線重和（曲率半徑無限大）或雙曲線沒有交點，則其存在公切圓數目才有可能減少。

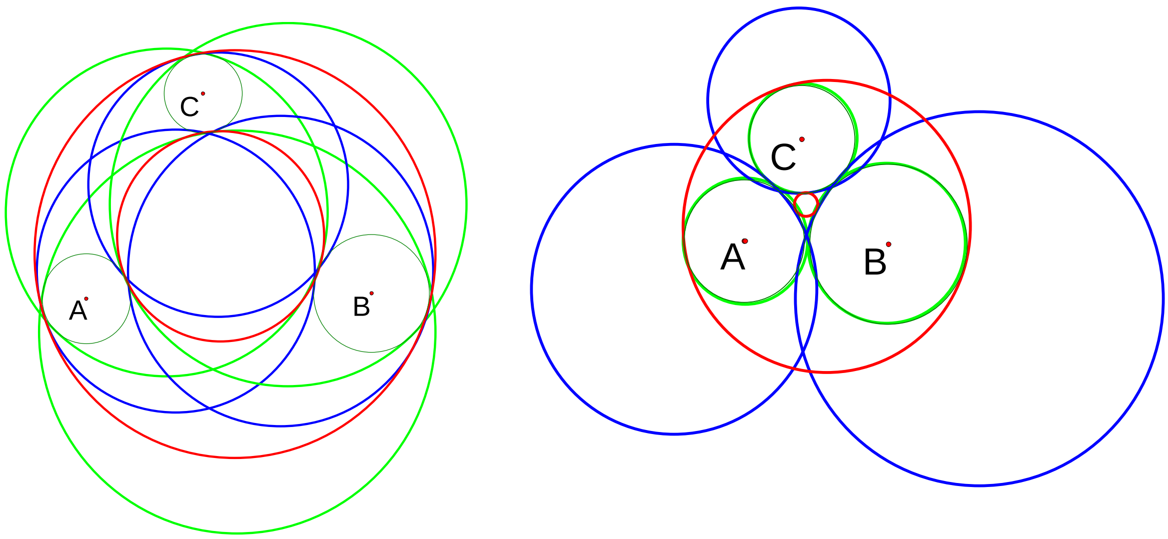


圖 B-2-3　兩兩外離的三圓之公切圓與逼近後的三圓之公切圓

因此，我們可以從互補的性質確認任意給定三圓的一般情況下，其存在 8 個公切圓，圓移動位置時，就已決定圓所能構成之公切圓種類，即圓的位置決定公切圓種類及數目，當圓的極限與公切線重和（曲率半徑無限大）或雙曲線沒有交點，則其存在公切圓數目才有可能減少。

三、n 圓公切圓存在性的探討

（一）「公切線判別觀點」探討 n 圓公切圓之存在性

利用公切線判斷 n 圓的公切圓存在狀況，可先以三圓進行判斷；雖然曲率半徑的改變是連續的歷程，但是改變曲率半徑時仍要考量兩個以上他圓的約束條件，有其困難度，而判別的結果只能確定大部分不存在的公切圓，對於存在幾個公切圓，什麼種類無法清楚呈現，只能有一個約略的情況，不夠嚴謹，如圖 B-3-1，可判別外切圓 A、圓 B 內切圓 C、圓 D 的可能存在，然能否確實同時與圓 C、圓 D 內切，並非切線判別法所能處理的問題。

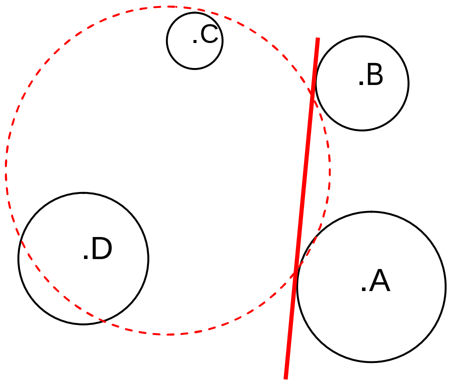


圖 B-3-1　利用公切線判斷 n 個定圓的公切圓

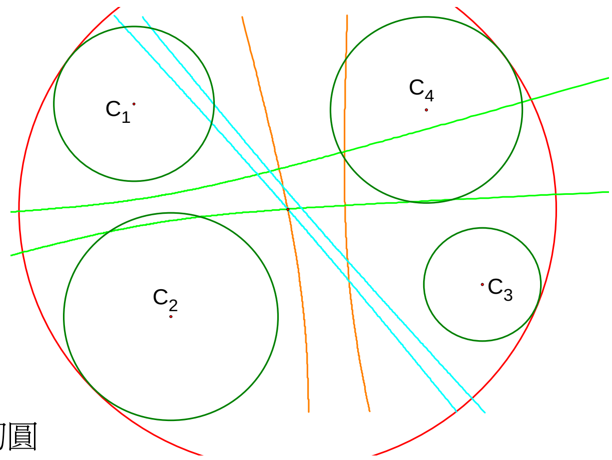


圖 B-3-2 靠近 C_2 之 3 組雙曲線的交點，可作出內切公切圓

（二）「雙曲線的觀點」探討 n 圓公切圓之存在性

1. 四圓公切圓的作法：

假設存在 n 個定圓 $C_1 \sim C_n$，選定其中一個圓 C_2，分別對其他 n-1 個圓各作一組「－」的雙曲線，若其靠近 C_2 的那一葉雙曲線均交於一點，則表示其必有內切公切圓的存在，如圖 B-3-2（我們以四圓舉例）；若其遠離 C_2 的那一葉雙曲線均交於一點，則表示其必有外切公切圓的存在，如圖 B-3-3，然而，試驗的過程中，顯然三葉雙曲線交於一點，並非易事，亦即四圓以上公切圓不見得存在。

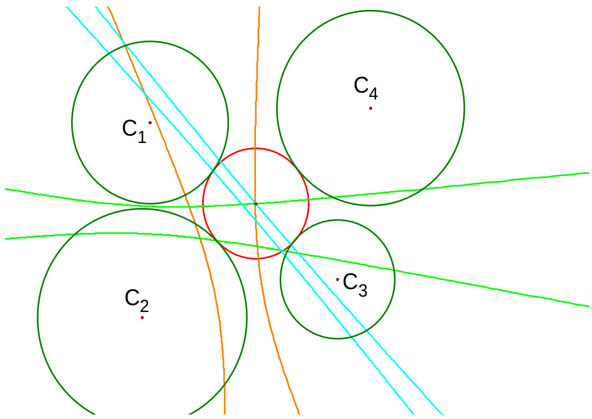


圖 B-3-3　遠離C_2之雙曲線的交點，其所作出的外切公切圓

2. n 圓公切圓的作法：

任意給定 n 個圓$C_1 \sim C_n$，我們利用雙曲線作圖，針對C_1、C_2、C_3作出所有 8 個公切圓，倘$C_4 \sim C_n$不全與此 8 個公切圓相切，則此 n 個定圓不存在 8 個公切圓；倘若，$C_4 \sim C_n$全部皆不與此 8 個公切圓相切，則此 n 個定圓不存在公切圓。進一步地，應證了切線判別法所描述：任意 n 個定圓共同存在公切圓十分不容易。

（三）反演與雙曲線研究法的綜合應用

利用反演法探討 n 圓公切圓的存在性，頗爲繁瑣；幾經研究，我們利用反演將兩圓變換成兩平行直線，進而畫出給定兩圓的內公切圓、外公切圓、內外切型公切圓，也利用「＋」型或「－」型雙曲線上的交點，作出給定兩圓的公切圓；結合兩種研究方法，幫助我們更明確地判斷 n 圓公切圓之存在狀況。

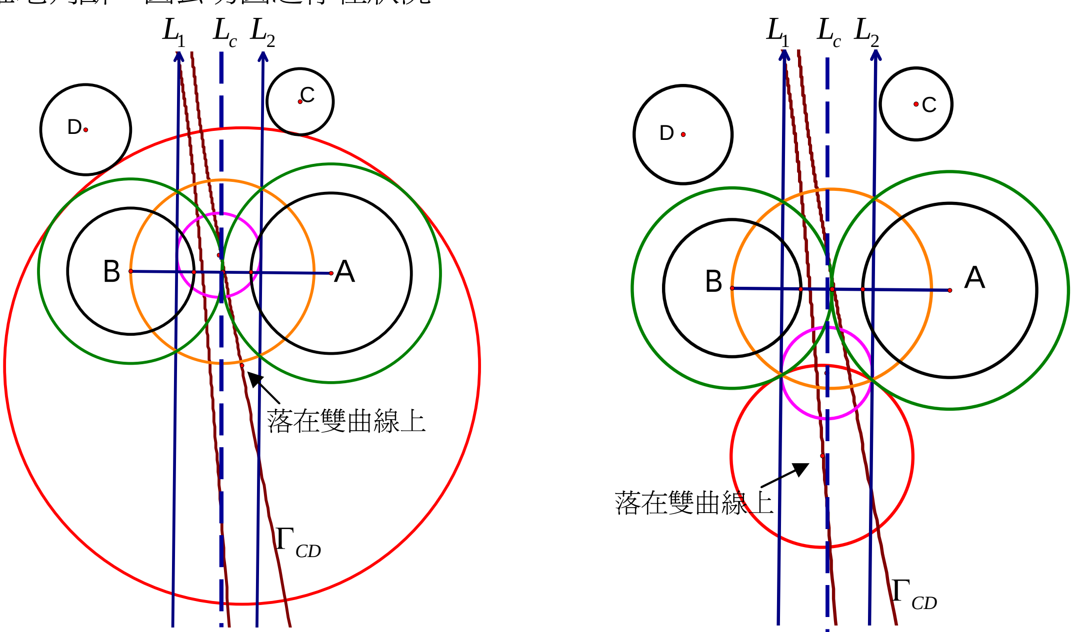
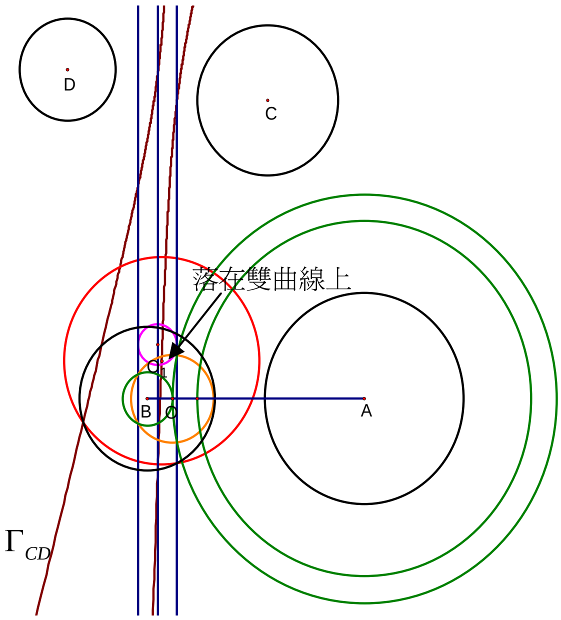


圖 B-3-4　公切圓與圓 A、圓 B 同內切及同外切時，
O_1落在雙曲線上時，四圓存在公切圓及四圓不存在公切圓情況

以四圓爲例，首先取反演中心 O，將圓 A、圓 B 反演爲 L_1 、 L_2 兩直線，作 $L_C \parallel L_1 \parallel L_2$ ，使得 $d(L_1;\ L_C)=d(L_2;\ L_C)$ ；作圓 C、圓 D 的「＋」型或「—」型雙曲線 Γ_{CD} 。作任一圓 O_1' 同時與 L_1 、 L_2 相切（ $O_1' \in L_C$ ），並反演 T 成圓 O_1 ，利用 GSP 動態模擬功能，在 L_C 上移動圓心 O_1' ，**當 O_1 落在雙曲線上時，則四圓可能存在公切圓，如圖 B-3-4、圖 B-3-5，因爲一組雙曲線有兩葉，所以通常會有兩個點，其中一點不合，反之，若 O_1 無法落在 Γ_{CD} 上，則四圓必不存在公切圓。**



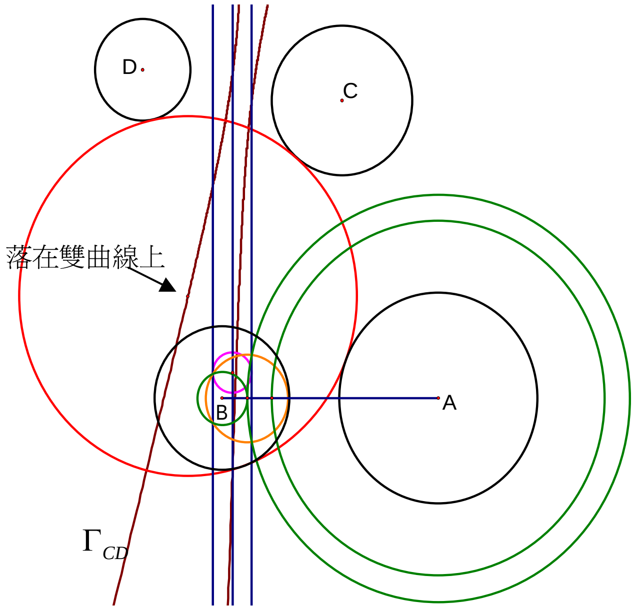


圖 B-3-5 公切圓與圓 A、圓 B 分別內外切時，
O_1 落在雙曲線上時，四圓存在公切圓及不存在公切圓情形

五圓以上時，可以兩圓爲一組進行反演法，其餘 n-2 個圓兩兩一組找出「＋」型或「—」型雙曲線，再進行 O_1 是否落在雙曲線的判別即可。

（四）n 圓公切圓之最大存在數

1. 2 個圓時，存在無限多個公切圓。
2. 3 個圓時，最多存在 8 個公切圓。
3. 4 個圓時，最多存在 6 個公切圓。

利用「反演與雙曲線研究法的綜合應用」，如圖 B-3-6，將圓 A、圓 B 反演 T 成兩組內外切型平行直線（ $L_5\ L_6$ 及 $L_3\ L_4$ ），及內、外切型平行直線（ $L_1\ L_2$ ），分別任作三組平行直線的公切圓 O_1' 、 O_2' 、 O_3' ，將其分別反演 T 成圓 O_1 、 O_2 、 O_3 ，利用 GSP 動態模擬功能，圓 O_1 、 O_2 、 O_3 的圓心軌跡與圓 C、圓 D 的「＋」型或「—」型雙曲

線交點即爲公切圓的圓心；由此，公切圓存在最多時，必爲圓O_1、O_2、O_3的圓心軌跡與雙曲線交點最多時，可得 3 組（圓心軌跡）x2 型（雙曲線），最多共 6 個交點，亦即最多存在 6 個公切圓。

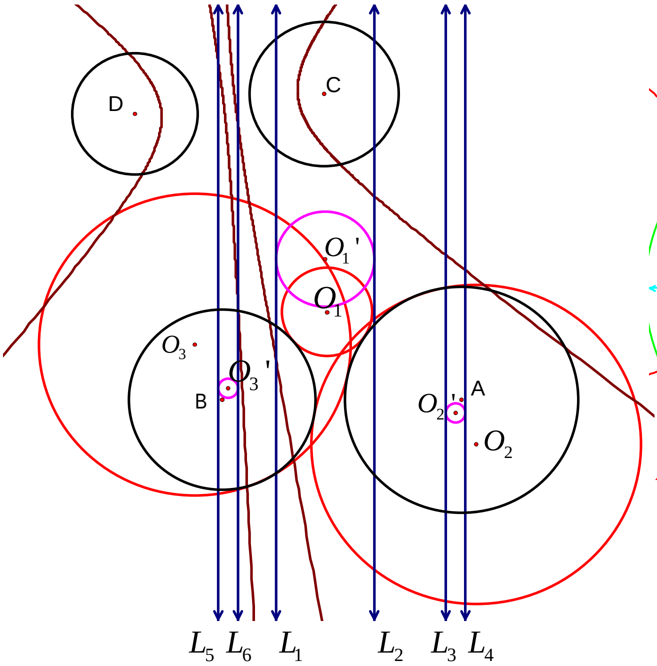


圖 B-3-6　給定任意四圓判定公切圓數示意圖

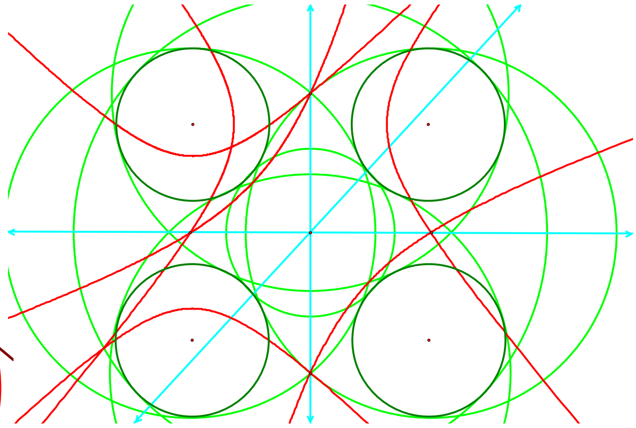


圖 B-3-7　四圓最多存在 6 個公切圓

依此公切圓的最大存在狀況，即需要將四圓都改成等圓，因爲其公切圓的圓心在連心線的中垂線上，也是在前圖 B-3-4 中的L_C，其符合公切圓圓心存在條件，再加上存在兩內切型、外切型公切圓，故 4 圓最多有 6 個公切圓，驗證如圖 B-3-7。

4. 7 個圓時，最多存在 3 個公切圓。

在這邊我們要轉換思考的角度，即一般情況下，任意 3 圓最多存在 8 個公切圓，反過來說，視這 8 個公切圓爲任意給定之圓時，其存在最多 3 個公切圓；同理，任意給定 6 圓時可推得最多存在 4 個公切圓。**利用夾擠原理，給定 7 圓時，最多僅能存在 3 個或 4 個公切圓，若 7 圓存在 4 個公切圓時，反過來看，則 4 圓存在最多應有 7 個公切圓，與前述發現存在 6 個公切圓矛盾，所以給定 7 圓時，最多存在 3 個公切圓。**

得此結論，我們利用切線判別法公切圓的極限概念，作出 3 個公切圓僅存在 7 個公切圓，如圖 B-3-8，反之，即可得給定 7 圓最多存在 3 圓公切圓。

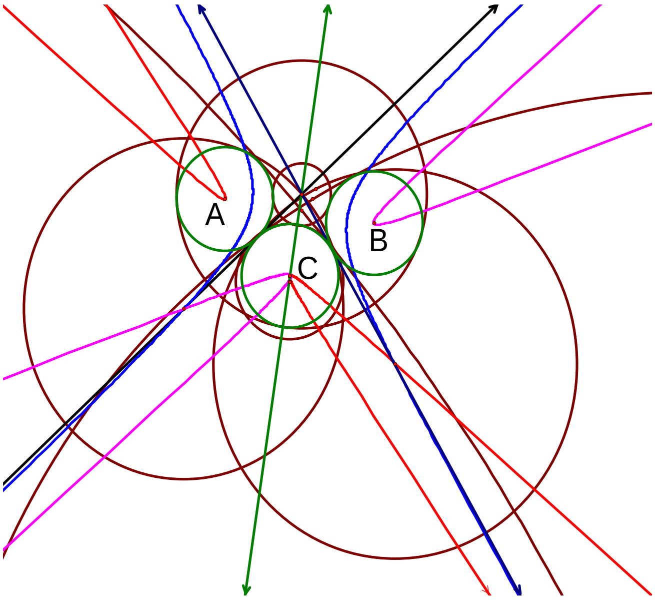


圖 B-3-8　給定 3 圓最多存在 7 公切圓情形

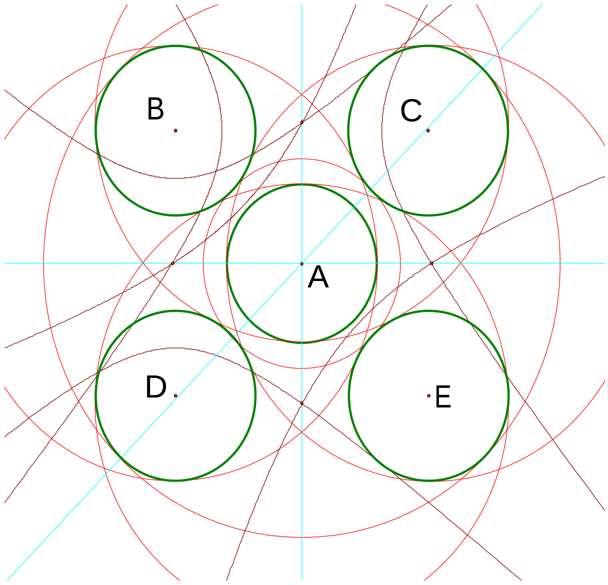


圖 B-3-9　給定 5 圓最多存在 4 公切圓情形

4. 5 個圓時，最多存在 4 個公切圓。

一般情況下，任意 4 圓最多存在 6 個公切圓，仿照 7 圓模式，我們試驗找到 4 圓存在 5 個公切圓情況，反過來說，5 個圓時，最多存在 4 個公切圓，如圖 B-3-9。

5. $n \geq 9$ 時，最多存在 2 個公切圓。

若給定 9 個圓存在 3 個公切圓，反之，則 3 個公切圓最多存在 9 個公切圓，與前述結論矛盾，所以 9 圓最多僅存在 2 個公切圓，如圖 B-3-10；又，給定 2 圓存在無限多個公切圓，反之，當給定無限多個圓時，最多僅存在 2 個公切圓。

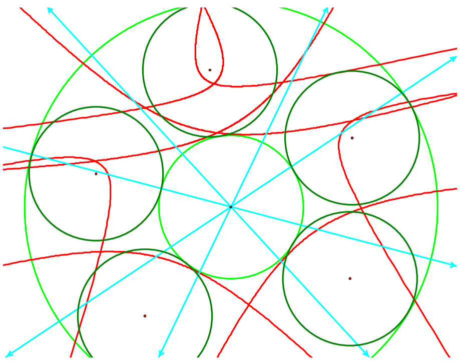


圖 B-3-10 n 圓最多存在 2 個公切圓示意圖

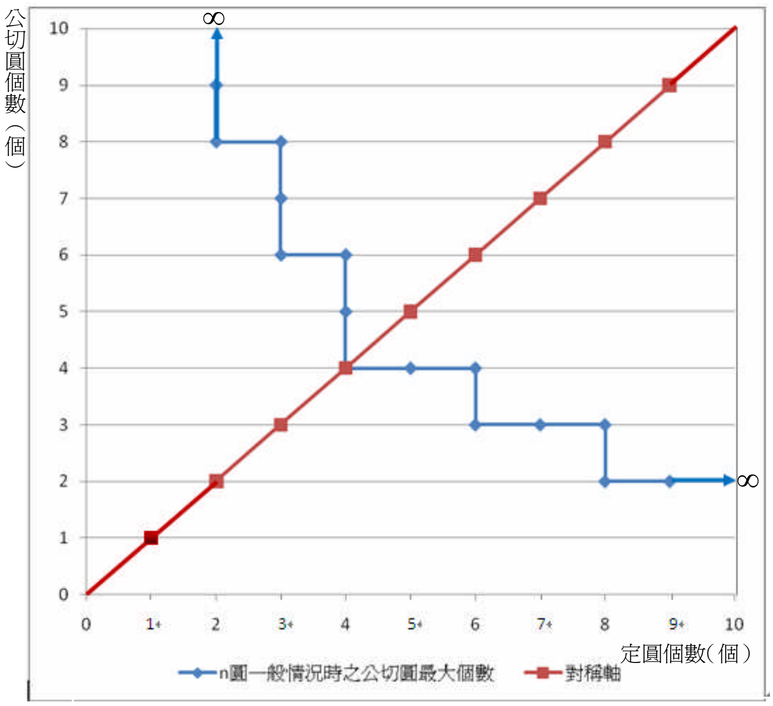


圖 B-3-11　n 圓存在最多公切圓個數折線圖

綜上所述，我們整理數據如表 2，再依據表 2 繪製 n 圓存在最多公切圓個數折線圖，如圖 B-3-11，我們發現：**圖形對稱於 y=x 直線方程式，即前述逆向觀點，而圖中折線以下為公切圓的存在個數，亦即 n 圓是可能不存在任何公切圓的**，我們列出條件方程式如後：

$$f(n)=\begin{cases}\infty & n=2\\ 11-n & n=3,8\\ 10-n & n=4,6,7\\ 9-n & n=5\\ 2 & n\geq 9\end{cases}$$

表 2　n 圓及其最多存在公切圓數對照表

給定 n 圓	2	3	3	4	4	5	6	7	8	∞
公切圓最多存在數	∞	8	7	6	5	4	4	3	3	2

柒、結論

一、利用雙曲線作圖，可由交點求出兩個圓的公切圓圓心，其存在無限多個公切圓。

二、任意三個圓時：

（一）利用雙曲線作圖，可由交點求出三圓公切圓的圓心，其一般解有 8 個公切圓；

（二）圓的相對關係改變，會影響公切圓的數量與種類；

（三）公切圓存在互補性質。

三、透過反演作圖，利用反演前後幾何圖形相對關係不變的性質，求出二、三圓的公切圓，再次驗證二圓、三圓其公切圓的存在性。

四、將兩圓的內外公切線視為半徑無限大之圓，隨著曲率半徑的漸小，可判別任意三圓公切圓存在的種類及個數，進一步地可說明公切圓的互補性質的理由。

五、n 圓公切圓的存在性：

（一）n 圓及其最多存在公切圓數對照表：

給定 n 圓	2	3	3	4	4	5	6	7	8	∞
公切圓最多存在數	∞	8	7	6	5	4	4	3	3	2

（二）n 圓公切圓存在個數為 $f(n)$，其條件方程式為 $f(n)=\begin{cases}\infty & n=2\\ 11-n & n=3,8\\ 10-n & n=4,6,7\\ 9-n & n=5\\ 2 & n\geq 9\end{cases}$，$n\in N$

（三）任意給定 n 個圓，n≧3 時，並不一定存在公切圓，然若存在，必不大於表列公切圓個數。

（四）研究方法的比較，如下表：

	雙曲線作圖法	反演作圖法	切線判別法
優勢	1.在二、三圓時，作圖速度較反演為快 2.透過軌跡可容易發現公切圓圓心 3.圓的相對關係改變，可輕易觀察公切圓圓心位置的改變 4.可判別 n 圓的公切圓。	1.突破 GSP 軟體軌跡無法交點的限制。 2.反演時，將複雜的圖形關係，轉換成簡單的幾何作圖 3.較易判別出 n 圓的公切圓，不受 n 值影響。 4.反演可利用尺規作圖完成。	1.可藉由曲率半徑的改變，快速判別出三圓公切圓之數量與性質。 2.可解釋公切圓互補性質。
限制	1.軌跡無法產生交點，有其少許誤差。 2.作圖加減半徑頻繁，n 個圓需作（2n-2）組雙曲線，雖可判別 n 圓公切圓個數，卻頗為繁複。 3.僅可電腦輔助操作，無法使用尺規作圖。	1.作三圓的公切圓，速度略慢。 2.三圓時，需轉換反演中心及反演半徑，步驟繁瑣。 3.反演半徑有其作圖限制，需適中，較易進行反演操作	1.只能用來判別，無法作圖。 2.會受到圓的相對關係所影響。 3.無法明確判別 n 圓公切圓的存在性（n＞3）。

捌、未來展望

將圓從平面推廣到空間是為球，球與球之間，仍存有公切球的概念，竟究兩個球、三個球甚至 n 個球其公切球為何？存在性及其性質又為何？是我們未來想要面對研究的課題。

玖、參考資料

林保平（2004）。公切圓之圓心軌跡—用動態幾何軟體探討幾何性質。科學教育月刊，271 期，p1-9。台北市立教育大學。

反演（1998）。反演與圓束。反演，p34-42。九章出版社。

嚴鎮軍（2002）。反射與反演。反演變換的概念和性質，p42-72。九章出版社。

蔣聲（1994）。幾何變換。反演，p73-82。凡異出版社。

維基百科 http://www.wikipebia.org/Problem of Apollonius

【評語】030425

1. 從簡到繁逐類探究圓圓相切的性質與可能性，將所求公切圓與已知圓半徑之間關係，一面表以雙曲線，一面作反演轉換，得出有系統的結果，且導出可能的公切圓的數目。
2. 利用動態幾何軟體 GSP，既可表現公切圓位置與動向，又可循以推測隱藏其中性質。
3. 把公切線視爲半徑爲無限大的公切圓，在方法上與理念上皆有創意。
4. 數學中的通用名詞與術語請自然採納，排版上的疏忽請改正。