中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030424

正直的好朋友－發現三角形兩中線直交定理

學校名稱：金門縣立金城國民中學

作者：	指導老師：
國三 黃郁文 國三 吳真 國三 許涵嵋	宋文法 董超倫

關鍵詞：　重心、互相垂直、畢氏定理

正直的好朋友

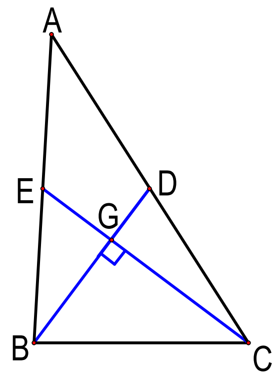
發現三角形兩中線直交定理

摘要：

這篇作品的想法源自於課堂內同學的發問，讓我們對「三角形兩中線直交」的問題產生了興趣，在經過我們嘔心瀝血的研究後，不僅找出了使一般三角形兩中線直交的充分必要條件，更發現到：若一三角形兩中線直交時，其重心到頂點的距離會等於「底邊」的長度等諸多性質，最後並統整出具有兩直交中線的可能特殊三角形。利用這些數學發現，讓我們在必要的時候，很快就能判斷出一三角形的兩中線是否直交，也因此縮短了做題的時間，使解題更有效率，更因此活化了我們的數學思考方式。

壹、　研究動機：

在我們上國三上學期重心的單元的時候，有一個例題是講到一個兩中線垂直的三角形，題目如下：



如右圖，△ABC 中，兩中線 BD、CE 交於 G 點，且 BD⊥CE，若 BD＝9、CE＝12，
試求：（1）BG、CG。
（2）△BGC 與△ABC 的面積。

這題求解過程如下：

（1）　因為 G 重心，所以 BG：GD＝2：1，因此 $BG=\frac{2}{3}\times BD=\frac{2}{3}\times 9=6$

同理，$CG=\frac{2}{3}\times CE=\frac{2}{3}\times 12=8$

（2）　已知∠BGC＝90°，所以△BGC 為直角三角形，

因此：▲BGC 的面積＝ $CG\times BG\times\frac{1}{2}=8\times 6\times\frac{1}{2}=24$ 平方單位

▲ABC 的面積＝3x▲BGC＝3x24＝72 平方單位

這個題目的求解過程並不困難，我們也很快的求出答案來。老師本來想繼續再講解下一個題目，這時候，同學突然提出問題來反問老師：

『老師，所有的三角形都會有兩直交的中線嗎？』

『如果不會，那什麼樣的三角形才會產生兩直交的中線呢？』

『大哉此問！』老師沒有生氣反而很高興的說道，臉上並露出欣慰的表情，表示這是一個很值得討論的問題，要我們記下問題回家先想想，明天課堂再來做分享與討論。

在老師的指導下，我們進行一連串的問題討論與觀察，並對發現的結論進行數學證明，以下是我們追問問題的過程及我們的數學發現。

貳、 研究問題：

一、三角形中兩條中線在何種條件下會互相垂直？

二、若有一三角形兩條中線互相垂直，則會產生哪些性質？

三、有哪些三角形會有兩條互相垂直的中線呢？

參、 研究設備及器材：

GSP 軟體、筆、紙、嚴密的數學邏輯推理、數學思考及創意的小頭腦。

肆、 研究過程：

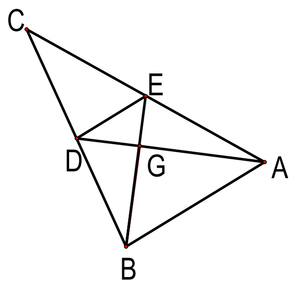
一、三角形中兩條中線在何種條件下會互相垂直呢？

在回答這樣的問題之前，我們想先從結果來做觀察、討論、猜測，最後再給出嚴密的證明，來支持我們的論證：

也就是說，我們想先問的是：『當三角形有兩條互相垂直的中線時，則三角形會產生哪些性質與條件呢？』

以下是我們的觀察：

若△ABC 已有兩互相垂直的中線，例如圖一中：兩中線 AD 與 BE 互相垂直於 G 點，因此 G 為△ABC 的重心，



圖一

又以中線性質來說：

BG＝2EG，AG＝2DG

令 EG＝t，DG＝s；則 BG＝2t，AG＝2s（如圖二）

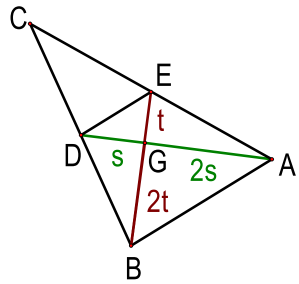
因為∠DGB＝∠BGA＝∠AGE＝∠EGD＝90°

所以：$DE^2=s^2+t^2$

$AB^2=4t^2+4s^2$

$AE^2=t^2+4s^2$

$BD^2=s^2+4t^2$



圖二

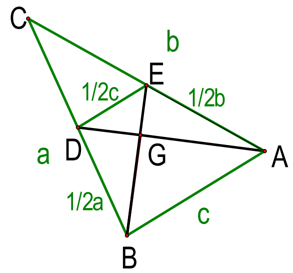
於是：$DE^2+AB^2=AE^2+BD^2$ --------------1

（因為等式的兩邊都等於 $5s^2+5t^2$）

設 BC＝a，則 BD＝$\frac{1}{2}a$（如圖三）

AC＝b，則 AE＝$\frac{1}{2}b$

AB＝c，則 DE＝$\frac{1}{2}c$



圖三

代入1：

$$\left(\frac{1}{2}c\right)^2+c^2=\left(\frac{1}{2}b\right)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$\frac{1}{4}c^2+c^2=\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2$$

$$\frac{5}{4}c^2=\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2$$

所以 $a^2+b^2=5c^2$

也就是說：當有一三角形的兩中線互相垂直時，則此三角形二邊的平方和，必會等於第三邊平方的五倍。

接下來，我們想追問：『這個條件具有可逆性嗎？』

二、若△ABC 二邊長度的平方和等於第三邊平方的五倍，則此三角形的兩中線會垂直嗎？

答案是會的！以下我們提供兩種證明方法：

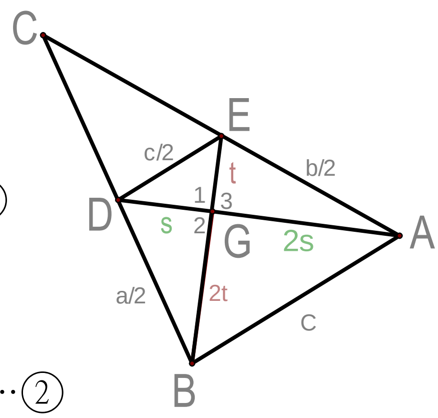
已知：△ABC 的三邊長滿足 $CB^2+CA^2=5AB^2$

求證：兩中線 AD、BE 中，AD⊥BE 於 G

證明方法（一），

我們以<u>反證法</u>證明如下：

假設 AD、BE 不垂直，則∠1＞∠2 或者∠1＜∠2，如下圖。



（1）若∠1＞∠2：

則∠1＞90°，而∠2＝∠3＜90°，

在△DGE 中，因爲∠1＞90°，

所以 $s^2+t^2<\left(\dfrac{c}{2}\right)^2$，即 $s^2+t^2<\dfrac{c^2}{4}\cdots$①

而在△DGB 中，因爲∠2＜90°，

所以 $s^2+(2t)^2>\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$，即 $s^2+4t^2>\dfrac{a^2}{4}\cdots$②

在△EGA 中，因爲∠3＜90°，

所以 $t^2+(2s)^2>\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$，即 $t^2+4s^2>\dfrac{b^2}{4}\cdots$③

將②式＋③式，得：

$5s^2+5t^2>\dfrac{a^2+b^2}{4}$，即 $5(s^2+t^2)>\dfrac{a^2+b^2}{4}\cdots$④

結合①、④式，得：$5\times\left(\dfrac{c^2}{4}\right)>5(s^2+t^2)>\dfrac{a^2+b^2}{4}$

所以：$5c^2>a^2+b^2$，即：$CB^2+CA^2<5AB^2$

此與已知△ABC 的三邊長滿足 $CB^2+CA^2=5AB^2$ 矛盾！

（2）若∠1＜∠2：

則∠1＜90°，∠2＝∠3＞90°，

同理，我們可推出：

$5c^2<a^2+b^2$，即：$CB^2+CA^2>5AB^2$

此也與已知△ABC 的三邊長滿足 $CB^2+CA^2=5AB^2$ 矛盾！

由（1）（2）的討論可知：∠1 不大於∠2，也不小於∠2，

因此，∠1＝∠2

又因爲∠1＋∠2＝180°，所以∠1＝∠2＝180°÷2＝90°，

即：AD⊥BE，故得證。

證明方法（二），

我們利用三角函數的性質與餘弦定理，直證如下：

（1） 作△ABC 如圖四，而 D、E 分別為 CB、CA 的中點，兩中線 AD、BE 相交於 G

（2） 設 BC＝a，AC＝b，AB＝c，

已知 $CB^2+CA^2=5AB^2$

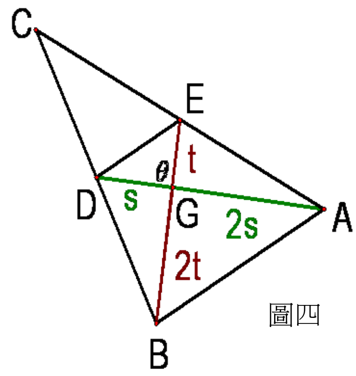
所以 $a^2+b^2=5c^2$

$$\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2=\frac{5}{4}c^2$$

$$\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2=\frac{1}{4}c^2+c^2$$

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^2=\left(\frac{1}{2}c\right)^2+c^2$$

∴ $BD^2+AE^2=DE^2+BA^2$



圖四

（3） 設 DG＝s，EG＝t，則 AG＝2s，BG＝2t

令∠DGE＝θ，由餘弦定理可知：

$DE^2=s^2+t^2-2\cdot s\cdot t\cdot\cos\theta$ ------------②

$AB^2=(2s)^2+(2t)^2-2\cdot(2s)\cdot(2t)\cdot\cos\theta$ ------------③

$DB^2=s^2+(2t)^2-2\cdot s\cdot(2t)\cdot\cos(180^\circ-\theta)$ ------------④

$AE^2=t^2+(2s)^2-2\cdot t\cdot(2s)\cdot\cos(180^\circ-\theta)$ ------------⑤

由（2）知道：$DE^2+AB^2=AE^2+BD^2$

即②＋③＝④＋⑤，因此：

$[s^2+t^2-2\cdot s\cdot t\cdot\cos\theta]+[(2s)^2+(2t)^2-2\cdot(2s)\cdot(2t)\cdot\cos\theta]$

$=[s^2+(2t)^2-2\cdot s\cdot(2t)\cdot\cos(180^\circ-\theta)]$

$+[t^2+(2s)^2-2\cdot t\cdot(2s)\cdot\cos(180^\circ-\theta)]$

$\therefore 5s^2+5t^2-10\cdot s\cdot t\cdot\cos\theta=5s^2+5t^2-8\cdot s\cdot t\cdot\cos(180^\circ-\theta)$

$\therefore -10\cdot s\cdot t\cdot\cos\theta=-8\cdot s\cdot t\cdot\cos(180^\circ-\theta)$

但是$\because \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

$\therefore -10\cdot s\cdot t\cdot\cos\theta=-8\cdot s\cdot t\cdot(-\cos\theta)$

$\therefore -10\cdot s\cdot t\cdot\cos\theta=8\cdot s\cdot t\cdot\cos\theta$

$18\cdot s\cdot t\cdot\cos\theta=0$

因為 s、t≠0，所以 $\cos\theta=0$

因此：$\theta=90^{\circ}$

即：$\angle DGB=\angle BGA=\angle AGE=\angle EGD=\theta=90^{\circ}$

得證：兩中線 AD、BE 中，$AD \perp BE$ 於 G

也就是說：當△ABC 二邊長度的平方和等於第三邊平方的五倍時，則此三角形的兩中線 BE、AB 會相互垂直於 G 點。

由以上討論可知，三角形二中線直交（互相垂直）的充分必要條件爲：

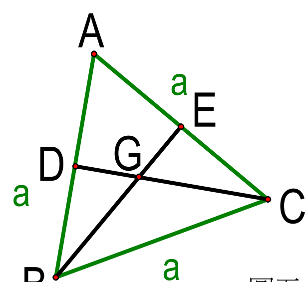
$$a^2+b^2=5c^2$$

我們將這樣的性質稱爲『**三角形兩中線直交定理**』，其中邊長 c 的邊，我們稱爲此定理中的「底邊」，而邊長 c 所對應的角，我們稱爲「頂角」。

三、尋找有「正直好朋友」的三角形：

以下，我們將嘗試找出符合這個條件的三角形，即：有哪些三角形符合二中線直交（互相垂直）呢：

（一） 正三角形可能嗎？



圖五

答案是不可能！

我們解釋如下：

若正三角形的邊長爲 a，如圖五，則：

$a^2+a^2=2a^2\neq 5a^2$

根據我們所發現的『三角形兩中線直交定理』，

正三角形不可能有兩直交的中線。

而從另一方面來看，在正三角形 ABC 中，$\angle BGC=120^{\circ}$，也確實不是直角。

（二） 等腰三角形可能嗎？

答案是可能的，而且只有一種。

1. 當兩腰爲兩中線的邊：

根據『三角形兩中線直交定理』：

$a^2+a^2=5c^2$

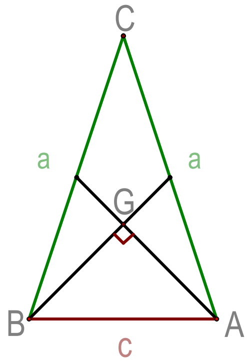
$\therefore 2a^2=5c^2$

$c^2=\dfrac{2}{5}a^2$，所以 $c=\dfrac{\sqrt{10}}{5}a$

∴此等腰三角形三邊比爲

$$a：a：c=a：a：\frac{\sqrt{10}}{5}a=5：5：\sqrt{10}$$

如圖六。



圖六

2. 當一腰及「底邊」爲兩中線的邊：

這種情形不可能發生，我們的理由如下：

假如成立，則 $a^2+c^2=5a^2$

$\therefore c^2=4a^2$

因此：$c=2a$

∴此等腰三角形三邊比爲 $a：a：c=a：a：2a=1：1：2$ （→←）

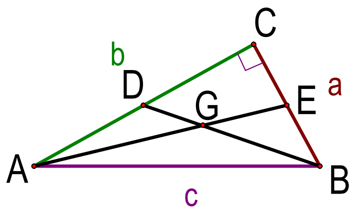
因爲形成三角形三個邊的條件是：任兩邊相加要大於第三邊

但是，1＋1＝2，所以沒有這樣子的三角形存在。

結論：也就是說，等腰三角形中，具備兩相交中線條件的，只有一種，而且其三邊比爲 $5：5：\sqrt{10}$ ，如圖六。

（三） 直角三角形可能嗎？

答案是可能的，而且也只有一種。



圖七

1. 以斜邊爲「底邊」是不可能的：

我們解釋如下：如圖七。

因爲直角三角形必須符合商高定理：

所以 $a^2+b^2=c^2$，

但是此三角形如果又要符合兩中線直交的狀況，而且以斜邊爲「底邊」，則：$a^2+b^2=5c^2$，但是明顯 $c^2\neq 5c^2$，於是產生矛盾的結論。

因此，以斜邊爲「底邊」是不可能的。

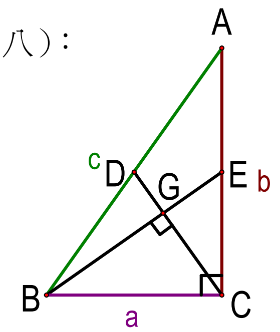
2. 以 BC 爲「底邊」，作兩條中線 BE、CD（如圖八）：

則：$c^2+b^2=5a^2$ ------------⑥

$a^2+b^2=c^2$ ------------ ⑦

由⑦代入⑥ 得：

$a^2+2b^2=5a^2$



圖八

$\therefore 2b^2 = 4a^2$

$b^2 = 2a^2$

因此：$b = \sqrt{2}a$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$

$\therefore c = \sqrt{3}a$

所以此直角三角形存在，而且其三邊比為：

$a : b : c = a : \sqrt{2}a : \sqrt{3}a = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$

結論：也就是說，直角三角形中，具備兩相交中線的條件只有一種，而且其三邊比必為 $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$，如前頁圖八。

（四） 等腰直角三角形可能嗎？

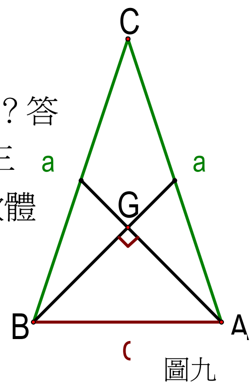
答案是不可能！

1. 若為直角三角形，而且其兩中線又符合直交的狀況，根據前面的討論（三），則其三邊比必為 $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$，顯然此直角三角形非等腰三角形。

2. 若為等腰三角形，而且其兩中線又符合直交的狀況，根據前面的討論（二），則其三邊比必為 $5 : 5 : \sqrt{10}$，在此三角形中，任兩邊的平方和並不等於第三邊，所以此等腰三角形並非直角三角形。

（五） 銳角三角形、鈍角三角形可能嗎？

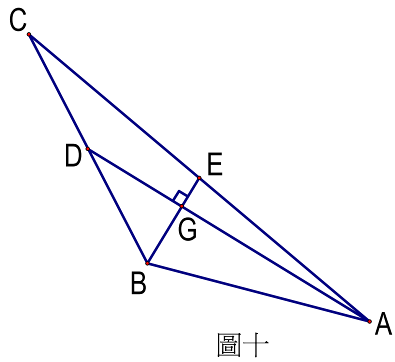
1. 滿足兩中線直交的三角形有可能是銳角三角形嗎？答案是可能的！例如前面的討論（二）出現的等腰三角形 ABC 就是銳角三角形，如圖九，根據 GSP 軟體實測，$\angle BCA = 36.86^\circ$，$\angle CBA = \angle CAB = 71.57^\circ$，而這三個角都是銳角，所以此△ABC 為銳角三角形。



圖九

又檢驗此三角形的比為 $5：5：\sqrt{10}$

2. 滿足兩中線直交的三角形有可能是鈍角三角形嗎？答案是可能的！例如若有一鈍角三角形 ABC，其三邊的比滿足



圖十

$AC：BC：AB＝\sqrt{15}：\sqrt{5}：2$

因為：$\sqrt{5}^2+\sqrt{15}^2=5\times 2^2$，所以此三角形 ABC 的兩中線 AD、BE 必互相垂直，如圖十。

由 GSP 軟體實測可求得 $\angle CBA＝132.13^\circ$，也就是說，此△ABC 為鈍角三角形，而且有兩互相垂直的中線。

（六） 進一步討論有兩直交中線的鈍角三角與銳角三角形的一般化條件

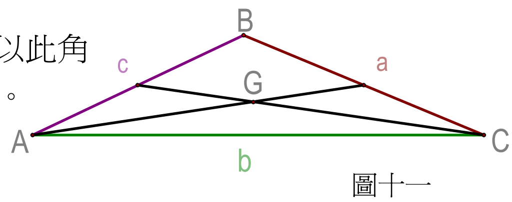
1. 有兩直交中線的鈍角三角形的條件：

（1）若以鈍角所對的最大邊為「底邊」，則此三角形的兩中線不會直交，我們證明如下：

已知：△ABC 中，∠ABC 為鈍角，以此角的兩邊作中線且相交於 G 點。

求證：∠AGC 不會是直角

證明：如圖十一：



圖十一

假設∠AGC 是直角，即 BC 邊及 AB 邊上的兩中線互相垂直於 G，

則 $a^2+c^2＝5b^2$-------------⑧

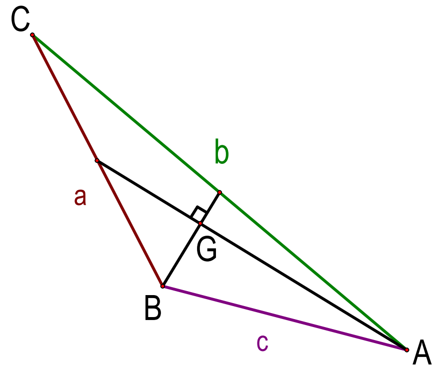
已知 $\angle ABC＞90^\circ$，

所以 $a^2+c^2＜b^2$------------⑨

由⑧代入⑨：$\therefore 5b^2＜b^2$ （→←）

也就是說，若鈍角三角形 ABC 有兩直交的中線，則鈍角∠B 所對應的最大邊 AC 不會是「底邊」。

（2）若不是以鈍角所對應的最大邊爲「底邊」，而以其他兩邊之某一邊爲「底邊」，在此假設以 AB 爲「底邊」，則 AC 及 BC 上的兩中線是有可能互相垂直的，如圖十二，而且當此兩中線 AC 及 BC 直交時：



圖十二

$\because a^2+b^2=5c^2$ -------------⑩

又∠CBA 爲鈍角

$\therefore a^2+c^2<b^2$ -------------⑪

由⑩得：$b^2=5c^2-a^2$ 代入⑪：

$a^2+c^2<5c^2-a^2$

$2a^2<4c^2$

$a<\sqrt{2}c$ 或 $c>\sqrt{\frac{1}{2}}a$ -------------⑫

同理，由⑩得：$a^2=5c^2-b^2$ 代入⑪：

$(5c^2-b^2)+c^2<b^2$

$6c^2<2b^2$

$b>\sqrt{3}c$ 或 $c<\sqrt{\frac{1}{3}}b$ -------------⑬

由⑫、⑬得：$\sqrt{\frac{1}{2}}a<c<\sqrt{\frac{1}{3}}b$ -------------⑭

其中：$a<\sqrt{\frac{2}{3}}b$ -------------⑮

因此，當我們取 $b=\sqrt{15}$，代入⑮得：$a<\sqrt{10}$

取 $a=\sqrt{5}$，代入⑩得：$c=2$

$\therefore$ $a:b:c=\sqrt{15}:\sqrt{5}:2$

這就得到我們前面圖十所給的例子：鈍角三角形 ABC。

結論：若一鈍角三角形有兩直交的中線時，則其鈍角所對應的最長邊不可能當做「底邊」，而必須以較短的兩邊其中之一做爲「底

邊」，此時：三角形的三邊長 a、b、c 滿足 $\sqrt{\frac{1}{2}}a < c < \sqrt{\frac{1}{3}}b$，其中 b 爲鈍角所對應的最長邊之長，而 c 爲「底邊」的長度。

2. 有兩直交中線的銳角三角形的條件：

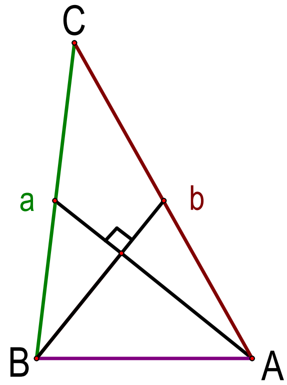
   若△ABC 爲銳角三角形，如圖十三，且 AC 及 BC 上的兩中線直交，而 AB 爲「底邊」，而三內角均爲銳角，則：

   △ABC 三邊長 a、b、c 符合 $a^2+b^2=5c^2$ -------------⑯

   （1）∵∠C 爲銳角：

   ∴ $a^2+b^2>c^2$ -------------⑰

   由⑯代入⑰得：$5c^2>c^2$ 爲恆等式



圖十三

   （2）∠B 亦爲銳角：

   ∴$a^2+c^2>b^2$ -------------⑱

   由⑯得 $a^2=5c^2-b^2$ 代入⑱：

   $(5c^2-b^2)+c^2>b^2$

   ∴$6c^2>2b^2$

   ∴$c>\sqrt{\frac{1}{3}}b$

   同理，由⑯得 $b^2=5c^2-a^2$ 代入⑱可得 $c<\sqrt{\frac{1}{2}}a$

   ∴ $\sqrt{\frac{1}{3}}b < c < \sqrt{\frac{1}{2}}a$

   （3）∠A 亦爲銳角：

   同（2）之討論，a、b 交換，可得：$\sqrt{\frac{1}{3}}a < c < \sqrt{\frac{1}{2}}b$

結論：也就是說，任意銳角三角形 ABC 中，若有兩互相垂直的中線時，則此三角形的三邊長 a、b、c 必滿足以下兩關係式：

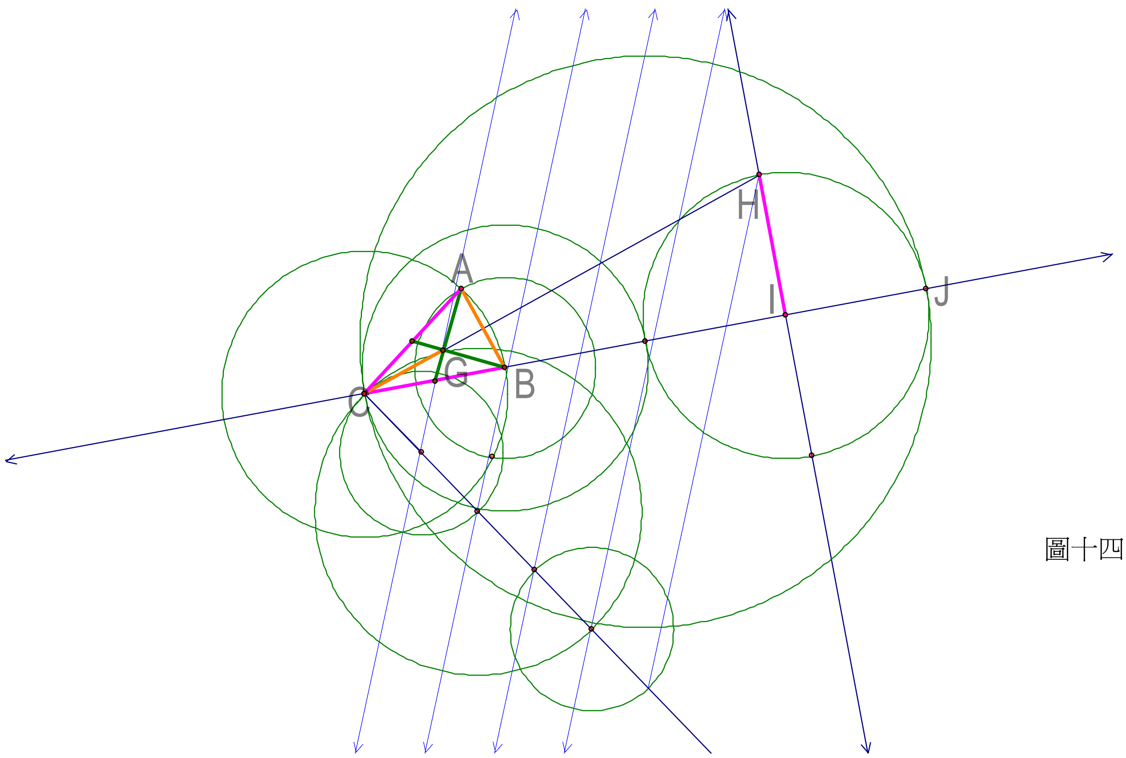
$\sqrt{\frac{1}{3}}b < c < \sqrt{\frac{1}{2}}a$， 及 $\sqrt{\frac{1}{3}}a < c < \sqrt{\frac{1}{2}}b$，其中，邊長 c 的邊爲此三角形的「底邊」。

伍、　討論：

一、發現另外兩個三角形中線直交的充分必要條件：

（一）　頂點 C 到重心 G 的距離度會等於「底邊」的長度：

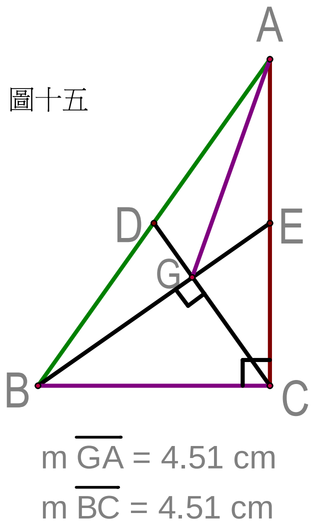
在我們嘗試做出一個有兩個直交中線的等腰三角形時，其實我們第一次找的等腰三角形，其三邊比是 1：1：$\frac{\sqrt{10}}{5}$，其作圖的過程如下圖十四，我們發現在作出所求的△ABC 內，底邊 AB 的長剛好是頂點 C 到兩中線的交點 G 的長度，即 AB＝CG，但是因爲△ABC 是等腰三角形，這種結果會不會是巧合，抑或是特殊狀況呢？



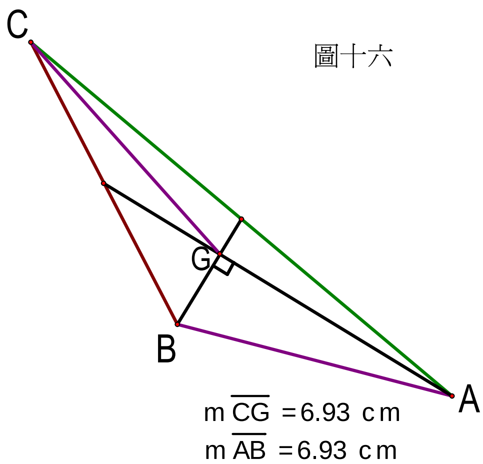
圖十四

我們將所畫過的直角三角形及鈍角三角形，透過 GSP 軟體去一一實測它們的長度，發現我們的觀察是正確的，如下圖十五及圖十六：

圖十五



圖十六



太棒了，這真是令人雀躍的發現！

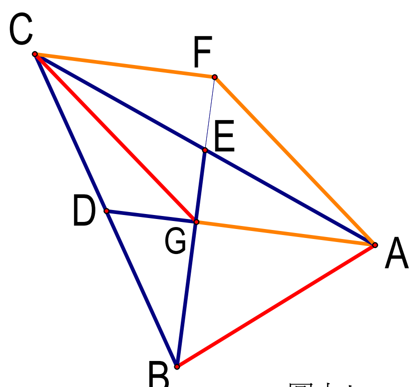
有了這樣驚喜的收穫，接下來我們想進一步、嘗試的去追問：這樣的性質是不是對於所有有兩中線直交的三角形都成立呢？結果發現：這樣的猜測確實是正面的！以下是我們的證明過程：

已知：△ABC 有兩直交中線，如圖十七，而兩中線 AD、BE 交於 G

求證：CG＝AB

證明：

（1） 在射線 GE 上取 F 點，使得 EF＝GE，又因爲 CE＝AE（∵BE 爲 AC 上的中線），∴四邊形 CGAF 爲平行四邊形，所以 AF＝CG



圖十七

（2） ∵G 爲△ABC 的重心，

∴BG：GE＝2：1，

而 GE＝EF，∴ BG＝GF，

已知兩中線 AD、BE 直交，所以∠BGA＝∠AGE＝90°，

根據垂直平分線定理，∴AF＝AB

（3） 由（1）及（2）得證：CG＝AB

而且這個性質具有可逆性，我們證明如下：

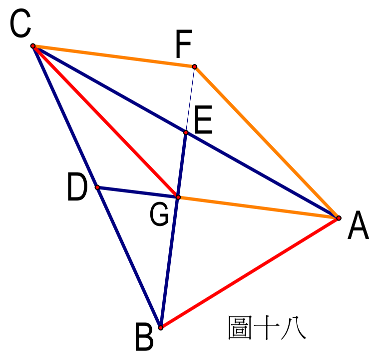
已知：△ABC 有兩中線 AD、BE 交於 G，如圖十八，

而且 CG＝AB

求證：∠BGA＝90°

證明：

（1） 在射線 GE 上取 F 點，使得 EF＝GE，又因為 CE＝AE（∵BE 為 AC 上的中線），∴四邊形 CGAF 為平行四邊形，∴CG＝AF



圖十八

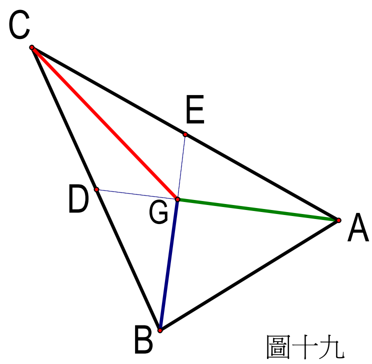
（2） ∵G 為△ABC 的重心，
∴BG：GE＝2：1，
而 GE＝EF，∴ BG＝GF，
已知 CG＝AB，由（1）可知 CG＝AF，於是 AF＝AB

（3） 在△AFG 及△ABG 中，
由（2）知道 BG＝GF， AF＝AB，
又 AG＝AG（共用），
∴△AFG≅△ABG（SSS）

（4） ∵△AFG≅△ABG，
∴∠BGA＝∠FGA，
又∵∠BGA＋∠FGA＝180°（平角：B、G、F 三點共線），
∴∠BGA＝∠FGA＝180°÷2＝90° 得證。

結論：若△ABC 有兩直交中線，則頂點到重心的距離為「底邊」的長度。反之亦然，也就是說：若頂點到重心的距離為「底邊」的長度時，則△ABC 會有兩互相垂直的中線。

（二） $CG^2 = BG^2 + AG^2$ ：



圖十九

已知：△ABC 有兩直交中線，如圖十九，
兩中線 AD、BE 交於 G

求證：$CG^2 = BG^2 + AG^2$

證明：

（1） 由前面的討論（一）的性質可知：
若△ABC 有兩直交中線，則頂點到重心的距離為「底邊」的長度，也就是說：
CG＝AB

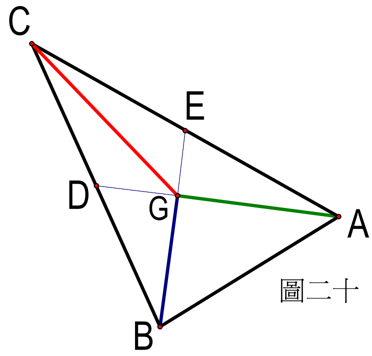
（2） ∵已知△ABC 兩中線 AD 及 BE 互相垂直於 G 點，

∴∠BGA＝90°，△AGB 為直角三角形，

由商高定理得知 $AB^2 = BG^2 + AG^2$ ，

由（1）可知 CG＝AB，

∴ $CG^2 = BG^2 + AG^2$ 　　得證



圖二十

這個性質也是可逆的，我們證明如下：

已知：△ABC 有兩中線 AD、BE，且相交於 G 點，又 $CG^2 = BG^2 + AG^2$ ，如圖二十。

求證：兩中線 AD、BE 互相垂直於 G

證明：

（1） 在射線 GE 上取 F 點，使得 EF＝GE，又因為 CE＝AE（∵BE 為 AC 上的中線），∴四邊形 CGAF 為平行四邊形（如圖二十一），∴CG＝AF

（2） ∵G 為△ABC 的重心，

∴BG：GE＝2：1，

而 GE＝EF，∴ BG＝GF

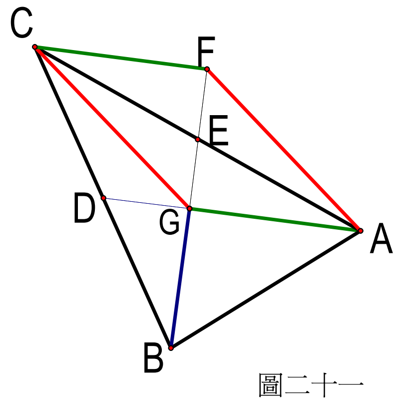
（3） 已知 $CG^2 = BG^2 + AG^2$ ，

由（1）（2）知道 CG＝AF ，BG＝GF

∴ $AF^2 = FG^2 + AG^2$

於是，根據商高定理的逆定理：

我們確定：∠FGA＝90°

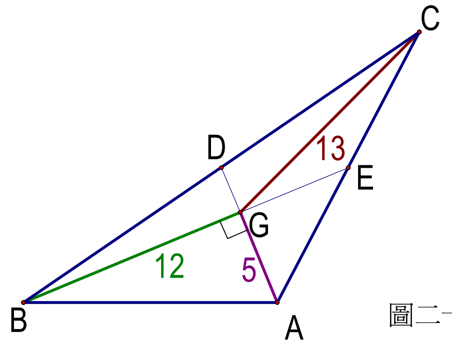


圖二十一

∴兩中線 AD、BE 互相垂直於 G 　　得證。

結論：若△ABC 有兩直交中線，則存在一個頂點使得這個頂點到重心的距離平方，等於重心到另兩個頂點的距離平方和。反之亦然，也就是說：若△ABC 的重心到某個頂點的距離平方，等於該重心到另兩頂點距離的平方和，則此△ABC 有兩直交中線。

簡而言之，若有一個三角形的三個頂點分別到重心的距離構成一組「商高數」，則此三角形必有兩個直交的中線。例如，若△ABC 的重心為 G 點，而 G 到三頂點的距離分別等於 5、12、13，則△ABC 的兩中線 AD、BE，必互相垂直於 G 點，如圖二十二：



圖二十二

二、尋找兩中線直交的三角形之幾何作圖法：

（一） 作圖方法一：

已知：給定兩中線 AD 及 BE 長

求作：有此兩中線 AD、BE 且互相垂直的△ABC

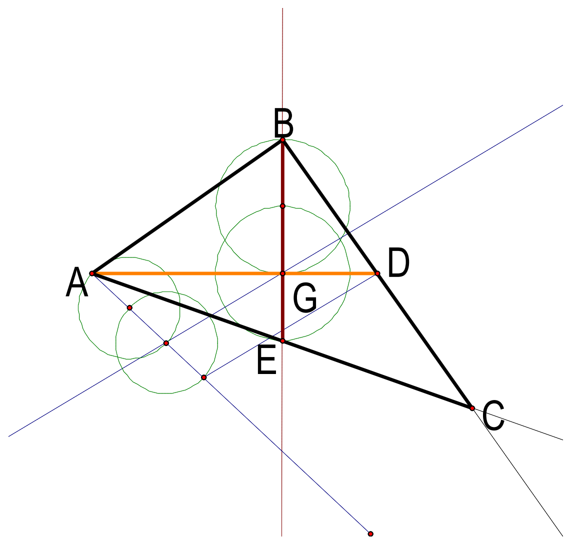
作法：如圖二十三

（1） 分別找出 AD 及 BE 之三等分點

（2） 使 AD 與 BE 互相垂直於該等分點，令此等分點為 G

（3） 延長射線 BD 及射線 AE，假設交於 C 點

（4） △ABC 為所求之三角形



圖二十三

證明：

（只要證明 D、E 分別為△ABC 兩邊 BC 及 AC 之中點即可，即 AD、BE 為△ABC 之兩中線）

（1） 由前面作圖得知

AG：GD＝2：1，

BG：GE＝2：1，

又∠DGE＝∠AGB

（對頂角相等，其實這兩個角在這裡都是直角）

∴△DEG～△ABG（SAS 相似）

（2） ∵△DEG～△ABG，

∴∠DEG＝∠ABG， （對應角相等）

∴AB // DE，（內錯角相等）

∴△CED～△CAB（AAA 相似），
又△DEG～△ABG，得知 AB：DE＝2：1，
∴CA：CE＝CB：CD＝AB：DE＝2：1
∴AD 和 BE 皆爲中線　　　　得證。

（二）　作圖方法二：

已知：三個線段長爲「商高數」：m、n、s，而 s 爲最大數。

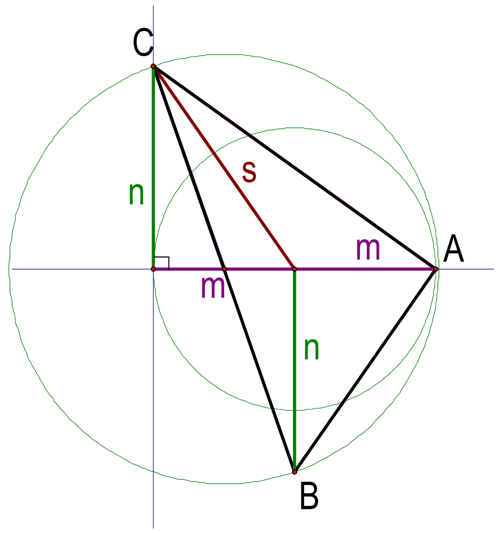
求作：滿足該三角形內的重心到其三個頂點的長度，分別爲這三個數的△ABC

作法：

（1）　先作出一個直角三角形，使其三邊長分別爲 m、n、s，如圖二十四。

（2）　從邊長 m 的邊上作一射線，並在上面找一點 A，使長度等於 m，再取原本的直角三角形邊長 m 的中點，由頂點 C 過此中點作射線，延長一倍至 B 點。

（3）　連接 A、B、C 三點，則△ABC 即爲所求之三角形



圖二十四

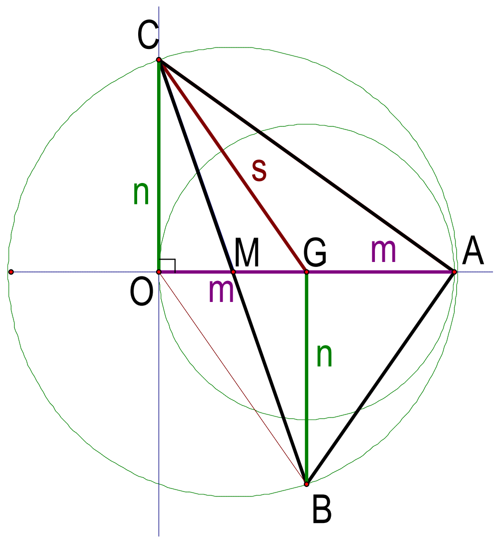
證明：

（1）　連接 B 與原本的直角三角形之直角頂點，如圖二十五中的 OB

（2）　∵ OM＝MG，CM＝MB（已知），
又∠GMB＝∠OMC，（對頂角相等）
∴△GBM≅△OCM（SAS）
∴BG＝CO＝n，（對應邊相等）。

（3）　∵M 爲 BC 的中點，∴AM 爲 BC 邊上的中線，
又 MG：GA＝1：2，∴G 爲△ABC 的重心。

（4）　因此 GA＝m，GB＝n，GC＝s，得證△ABC 爲所求。



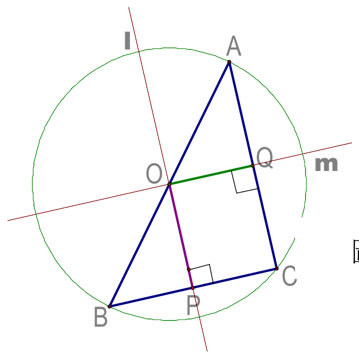
圖二十五

三、水平思考：

由以上的討論，我們知道：有兩條互相垂直的中線的三角形是存在的，但是，當條件由重心改成外心、內心時，也就是說，當互相垂直的兩中線改成兩中垂線、角平分線時，會產生甚麼情況呢？有沒有這樣的三角形呢？如果存在，是不是一樣也可以找到一組關係式來檢驗存在的條件呢？以下是我們的追蹤、討論：

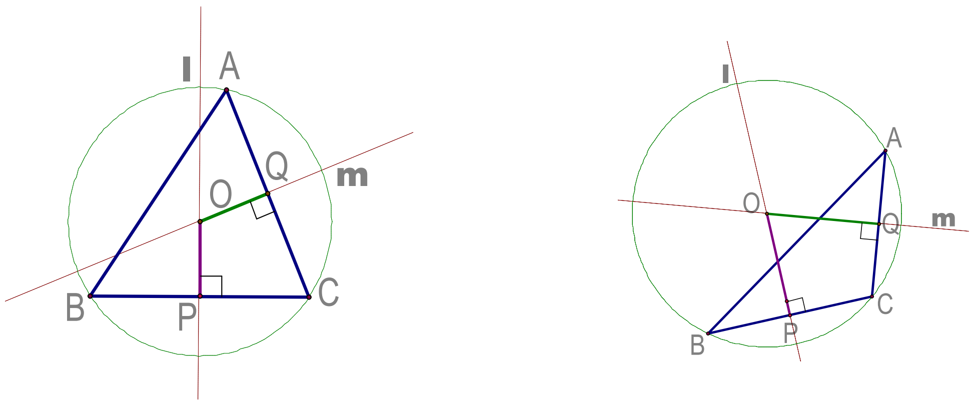
（一）　三角形內兩條互相垂直的中垂線？！：

答案是：有，但是只有一種，即兩條中垂線互相垂直的三角形只有一種，那就是直角三角形，如圖五十：當∠C＝90°時，兩條中垂線 l 及 m 才會剛好直交在斜邊中點 O 上。



圖五十

當∠C 非直角時，不管是銳角還是鈍角，因為如果∠POQ＝90°，而 P、Q 為垂足點，則四邊形 OPQC 的第三個也必定為直角，這與事實矛盾！也就是說，如果不是直角三角形，則它邊上任意兩條中垂線絕對不可能互相垂直，如圖六十。



圖六十

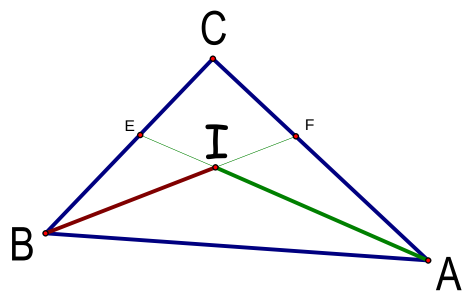
（二）　三角形內兩條互相垂直的角平分線？！：

答案是：不存在！

我們的理由如下：

對於任意的三角形而言，任意兩條角平分線相交在內心位置，而

且其相交的角度為其頂角的一半與直角的和，也就是說，這個交角必是鈍角！如圖七十，△ABC 的內心為 I，而其兩條角平分線的交角為∠BIA，而$\angle BIA=\dfrac{1}{2}\angle C+90^\circ>90^\circ$，顯然：$\angle BIA\neq 90^\circ$。

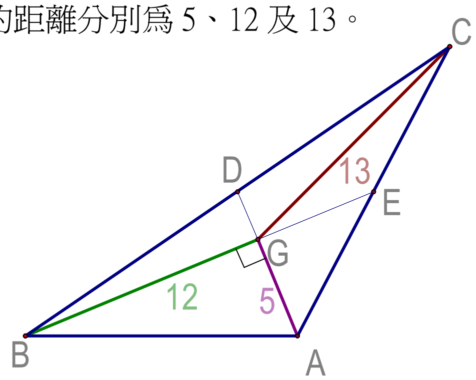


圖七十

四、『三角形兩中線直交定理』的應用：

在適當的時機若應用『三角形兩中線直交定理』得當，則可以有效地簡化問題的困難度。以下我們給出例子，說明如下：

已知：△ABC 的三頂點到重心 G 的距離分別為 5、12 及 13。
請問：此三角形的周長為多少呢？



解題策略分析：

我們要運用垂直的兩中線，來進行直角坐標軸旋轉的變換來解題！

根據前面的討論，又因為 5、12 及 13 為一組「商高數」，所以△ABC 具備兩互相垂直的中線，在這裡是指 AD 及 BE，現在我們以這互相垂直的兩中線，作為新直角坐標軸的兩軸，也就是說，以 AD 為 x 軸，而 BE 為 y 軸；此時重心 G 便成為此直角坐標系的原點，然後畫出△ABC，如下圖七十二。

進行解題：

經過重新選定坐標軸之後，我們很容易就可以找出以下這些點的坐標：

A(5，0)，B(0，－12)，D($-\frac{5}{2}$，0)

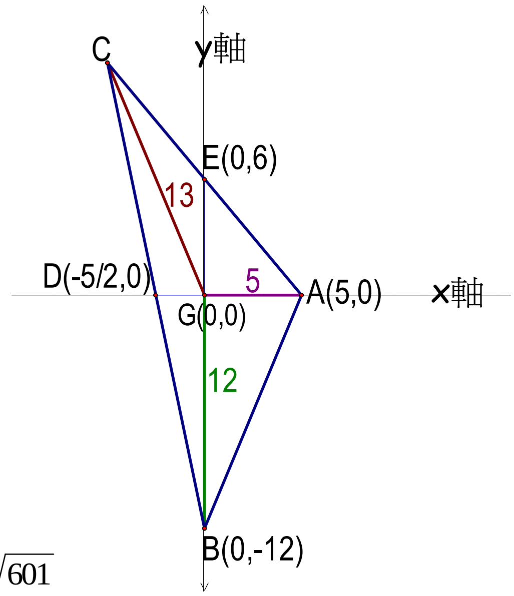
因此，再利用中點公式，可求出 C 點坐標為：(－5，12)

最後，利用距離公式就可求出△ABC 的三邊長：

$$AB=\sqrt{(5-0)^2+(0-(-12))^2}=13$$

$$AC=\sqrt{(5-(-5))^2+(0-12)^2}=2\sqrt{51}$$

$$BC=\sqrt{(-5-0)^2+(12-(-12))^2}=\sqrt{601}$$



圖七十二

因此：△ABC 的周長＝$13+2\sqrt{51}+\sqrt{601}\fallingdotseq 51.8$

有效利用我們所發現的『三角形中線直交定理』，問題的確變得簡單多了！

陸、　研究結果：

一、三角形中兩條中線互相垂直的充分必要條件：

當有一三角形的兩中線互相垂直時，則此三角形二邊的平方和，必會等於第三邊平方的五倍，也就是說三邊長 a、b、c 保持以下關係式：

$a^2+b^2=5c^2$，

而且此關係式具有可逆性，而且是充分必要條件。

二、三角形兩條中線互相垂直時，觀察、歸納及推論所得的性質：

（1） 若△ABC 有兩直交中線，則頂點到重心的距離為「底邊」的長度。反之亦然，若頂點到重心的距離為「底邊」的長度時，則△ABC 會有兩互相垂直的中線。

（2） 若△ABC 有兩直交中線，則存在一個頂點使得這個頂點到重心的距離平方，等於重心到另兩個頂點的距離平方和。反之亦然。

三、具備兩條互相垂直中線的三角形家族：

此時，三角形三邊長 a、b、c 必須滿足 $a^2+b^2=5c^2$ 關係式，因此：

（1） 絕對不可能是正三角形。

（2） 有可能是等腰三角形，但只有一種，且其三邊比爲 $5:5:\sqrt{10}$。

（3） 有可能是直角三角形，也只有一種，且其三邊比爲 $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$。

（4） 鋭角三角形：任意鋭角三角形，若有兩互相垂直的中線時，則此三角形的三邊長 a、b、c 必滿足以下兩關係式：
$\sqrt{\frac{1}{3}}b<c<\sqrt{\frac{1}{2}}a$， 及 $\sqrt{\frac{1}{3}}a<c<\sqrt{\frac{1}{2}}b$，其中，邊長 c 的邊爲此三角形的「底邊」

（5） 鈍角三角形：若一鈍角三角形有兩直交的中線時，則其鈍角所對應的最長邊不可能當做「底邊」，而必須以較短的兩邊其中之一做爲「底邊」，此時：三角形的三邊長 a、b、c 滿足 $\sqrt{\frac{1}{2}}a<c<\sqrt{\frac{1}{3}}b$，其中 b 爲鈍角所對應的最長邊之長，而 c 爲「底邊」的長度。

柒、 研究心得與感想 ：

經過這次的研究，讓我們了解到數學是一門深奧但卻十足有趣的領域，只有透過不斷的發問、猜測、思考、研究，才能使我們更深入的了解到數學力量的神奇奧妙。這次的研究過程雖然辛苦，也遭遇到許多的困難與挫敗，但就是因爲彼此的支持、老師的鼎力協助，以及大家不屈不撓、鍥而不捨的堅持下，印證了「Three heads are better than one.」的意義，最後終於推演出『**三角形兩中線直交定理**』，也讓我們學到如何去進行嚴密的數學邏輯推理，人生路上有數學這位正直的朋友，真好！

捌、參考資料：

一、*第三章：三角形的內心、外心、重心*，國民中學數學第五冊，2007，康軒出版社

二、林福來等編撰，*三角函數的基本概念*，高級中學數學第二冊，p.79--p.147， 2004 年修訂版，南一書局

三、 *餘弦定理*，高級中學數學第二冊， p142-p146，93 年 2 月出版，南一書局

四、John Mason, Leone Burton & Kaye Stacey, Thinking Mathematically(*數學思考*，台北市立建國高級中學 49 屆 314 班全體同學合譯)，p.162， 2000 年一版，九章出版社

【評語】030424

由課本的一個例題所引發的問題。作者由一個小問題出發，觀察特例所具有的特性，進一步的將其一般化，導出具有兩中線互相垂直這種特性的三角形的邊長需滿足的條件，並進一步的證明其爲充要條件，給人的感覺就好像看到了一個理想中的完整研究過程。對國中生而言，能夠有這樣的表現，實屬不易。雖然問題不是特別困難，但所得出的結論應該是被大家忽略的一個全新結果，最後談到具有這種特性的三角形的重心會有的特性也頗有趣，整體而言，是十分優秀的作品。