中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030423

假錢幣快出來

學校名稱：臺南市立金城國民中學

作者：	指導老師：
國一 郭玥均	葉志隆
國一 吳承軒	郭國清
國二 李承熹	
國二 郭家綺	

關鍵詞： 假錢幣、察覺規律、最少次數

假錢幣 快出來

摘　　要

這是一個強調「做中學」、「做數學」及「察覺規律」的研究課題。本研究首先是由生活中獲得研究動機，然後藉以設計出的兩個操作實驗，希望知道在不同條件下，從硬幣堆中最快找出劣幣的方法與公式。

我們用最笨的方法：兩個實驗都要從硬幣個數 n＝1開始進行，再逐次加1，並操作各種可能的狀況。過程中，我們透過討論，逐漸修改操作的技巧，知道如何分堆較省時；如何記錄較便捷。在累積一定的經驗後，我們獲得了一些關鍵的數據與規律，如：等比數列、臨界點、「最少次數」以及「快速獲得臨界點的方法」...等等。最後藉由這些關鍵的數據與規律，歸納出公式，再透過「數學歸納法」加以證明成功。

獲得及證明的公式如下：

① n 枚硬幣中有一枚劣幣，已知劣幣較輕。當 n＝3^k 時，利用天平，最少須量測 k 次，才可以找出劣品。

② n 枚硬幣中有一枚劣幣，另提供足夠數量的完好備品。利用天平量測，當 n＝$\frac{3^k-1}{2}$ 時，最少須量測 k 次可找出劣幣，並知其輕重。

壹、研究動機

我（以下稱：甲同學）是一個國一的學生，去年暑假在家看報紙時，偶然看到一則新聞：【以往僞幣皆以紙鈔爲主，最近赫然發現有僞造的 50 元硬幣，不過在重量上略有不足，所以只需量秤即可找出僞幣。】看完這則新聞後，讓我想到國小時的一個問題：【有一個國王想考驗宰相的智慧，他拿了 4 枚錢幣給宰相，其中有 1 枚是重量不同的假錢幣，可是真、假錢幣無法用手直接秤出，外表看起來也完全一樣。國王問他：「我再給你 4 枚真錢幣，利用天平，你最少需量秤幾次才能找出假錢幣，並知道它的輕重？」】

這是一個有趣的問題，我當時是玩得不亦樂乎，也頗有自信。不過，現在我已開始學習代數，不由得想知道，是否能以公式來回答：「當 n 枚錢幣中有一重量不同的假錢幣，在擁有夠多的真錢幣當備品之下，利用天平至少需量秤幾次才能找出假錢幣，並知道它的輕重。」不過，幾經思考後覺得：這個工程太大了，需找幾位伙伴一起研究才行！於是我找了 3 位同是國樂團的同學（以下稱：乙、丙、丁同學），從去年九月開學起，利用國樂團練習時間及週末假期，開始我們的研究工作。這是本科展作品的研究動機。

貳、研究目的

（一）研究問題

經過96年9月15日（六）4位組員的第一次聚會後，有了更詳細且更有次序的計畫，果然人多好辦事。經過討論後，設計出以下兩個須經過實物操作的實驗，並產生四個研究問題：

【實驗一】：假設我是雜貨店老闆，在今天收到的硬幣當中，已知有一個是重量較輕的假錢幣，利用天平至少需量秤幾次，才能找出假錢幣。

簡化實驗一的問題後，所產生的兩個研究問題如下：

研究問題 1：n 枚硬幣中有一枚較輕的劣幣，請問利用天平最少需秤幾次，才可以找出劣品？能否歸納出一個最少次數的公式呢？

研究問題 2：若能歸納出一個回答實驗一的公式，能否證明公式是正確的？

【實驗二】：假設我是中央鑄幣局員工，已知某批硬幣中有一不同輕重的假硬幣，因爲工作的關係，可以任意取得足夠數量的真錢幣做比較。利用天平，至少需量秤幾次才能找出假錢幣，並知道它的輕重。

簡化實驗二的問題後，所產生的兩個研究問題如下：

研究問題 3：n 枚硬幣中有一枚劣幣，另提供足夠數量的備品，請問利用天平最少需量秤幾次，才可以找出劣品，並知道它的輕重？能否歸納出一個最少次數的公式呢？

研究問題 4：若能歸納出一個回答實驗二的公式，能否證明公式是正確的？

由以上知，本作品的研究目的，就是要回答經由兩次實物操作的實驗，所衍生出的四個研究問題。

（二）研究流程

本作品的研究流程如下：

確立研究問題⇒規劃實驗並分組研究⇒改進操作實驗的技巧⇒4人合併實驗⇒察覺規律⇒推導公式，回答**研究問題**1和3 ⇒證明公式，回答**研究問題**2和4。

參、研究設備及器材

本作品的研究工具如下：

（一）A4紙、直尺和筆

（二）等比數列及等比級數的公式： $a_n = a_1 r^{n-1}$ 以及 $s_n = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1}$ 。

（三）數學歸納法〔Mathematical Induction〕

肆、研究過程或方法

本研究從 96 年 9 月份開始進行，至今已逾半年有餘。非常感動的是，我們四個人一路互相打氣，彼此鼓勵，雖然曾一度因課業繁多及月考壓力而幾乎停擺。但是，總算大家都能堅持信念，終於能達成目標，獲致成果。真的很開心，因爲我們做到了！

本作品的研究過程如下：

（一）確立研究問題：詳如 P5 所述。

（二）規劃實驗並分組研究

乙同學和丁同學進行**實驗一**的操作；甲同學和丙同學進行**實驗二**的操作。並規定進行實驗時，若有任何發現或想法，應直接記錄在紙上。詳見下圖 4-1

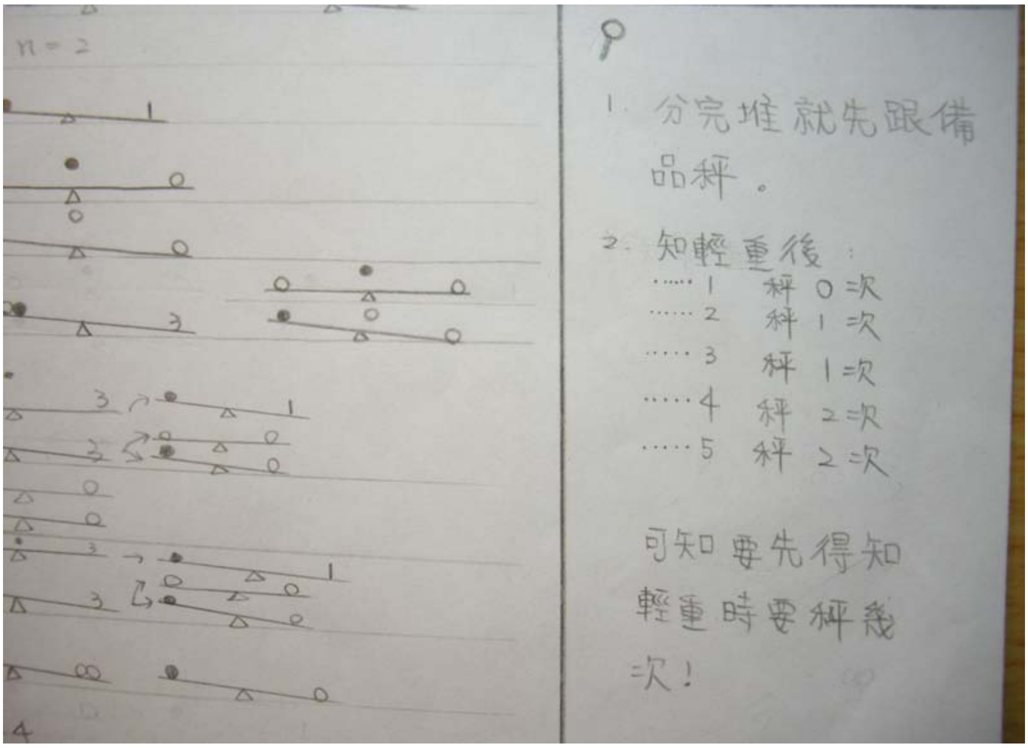


圖 4-1：甲同學將她的發現與想法記錄於右側空白處

（三）改進實驗操作的技巧

實驗一（又稱「**知輕重**」）

（1）「操作及記錄方式」的改進：

①原本實驗是計畫利用圍棋子或正方體教具進行操作。然而在經過反覆操作後，覺得有點浪費時間，所以在 96/09/22 會議時，就直接改用筆畫 ○ 來代表硬幣，◎或●代表假硬幣。詳見下圖 4-2

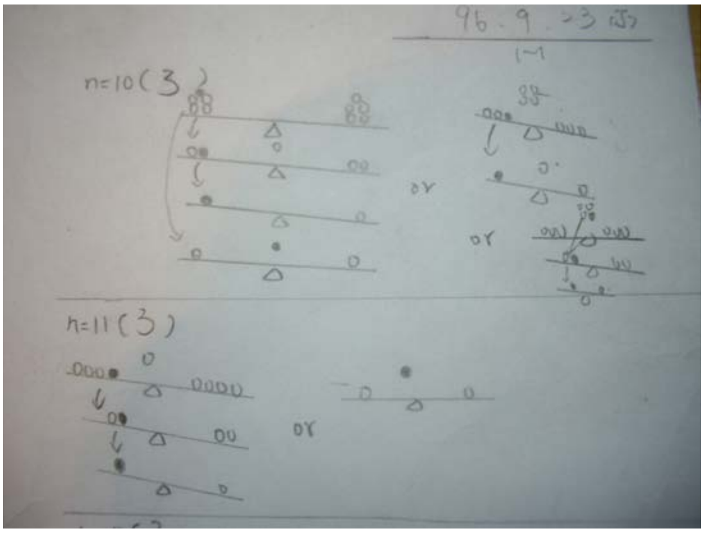


圖 4-2：丁同學畫 ○ 來代表硬幣

②當 n 越大時，畫圈圈又顯得太過麻煩，所以在 96/10/27 討論後又改以阿拉伯數字來代替。詳見下圖 4-3

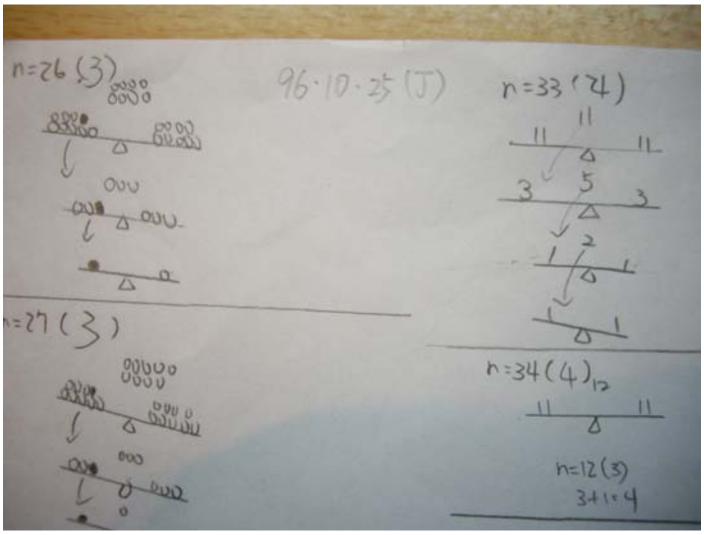


圖 4-3：丁同學從 n＝33 起，改以阿拉伯數字來代替

(2)「分堆技巧」的改進：由操作經驗中慢慢體會到，分成三堆一定可以得到最少量秤次數。詳見下圖 4-4

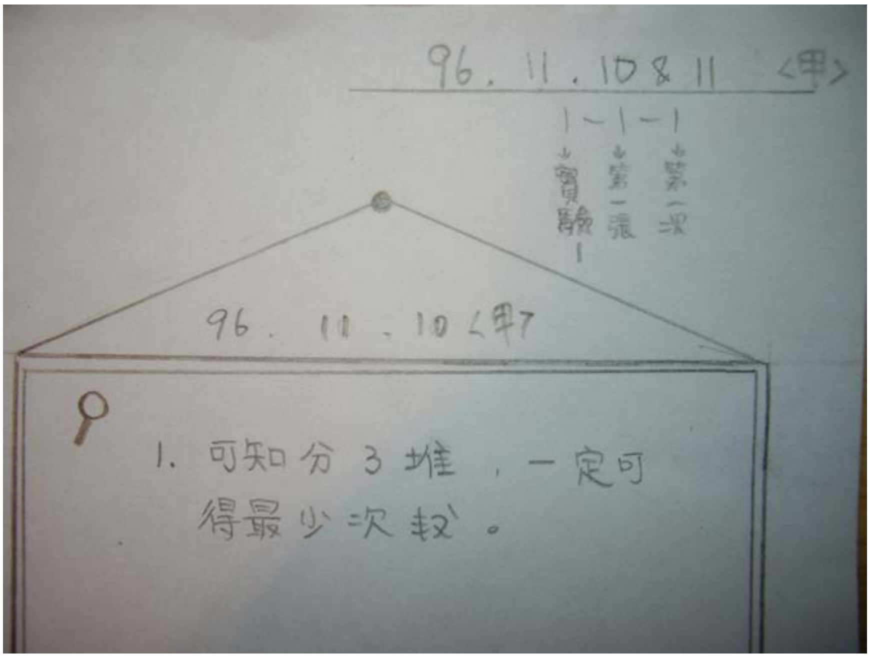


圖 4-4：甲同學發現分成三堆，一定可以得到最少次數

（3）善用經驗數據：當分成三堆經比較得知問題堆時，因問題堆的數量必小於現在的 n 值，故在之前就已操作過，所以可以直接將之前得到的「最少次數」之數據拿來相加即可，這樣可以大大地節省時間，此建議由甲同學於 96/10/27 提出。

詳見下圖 4-5

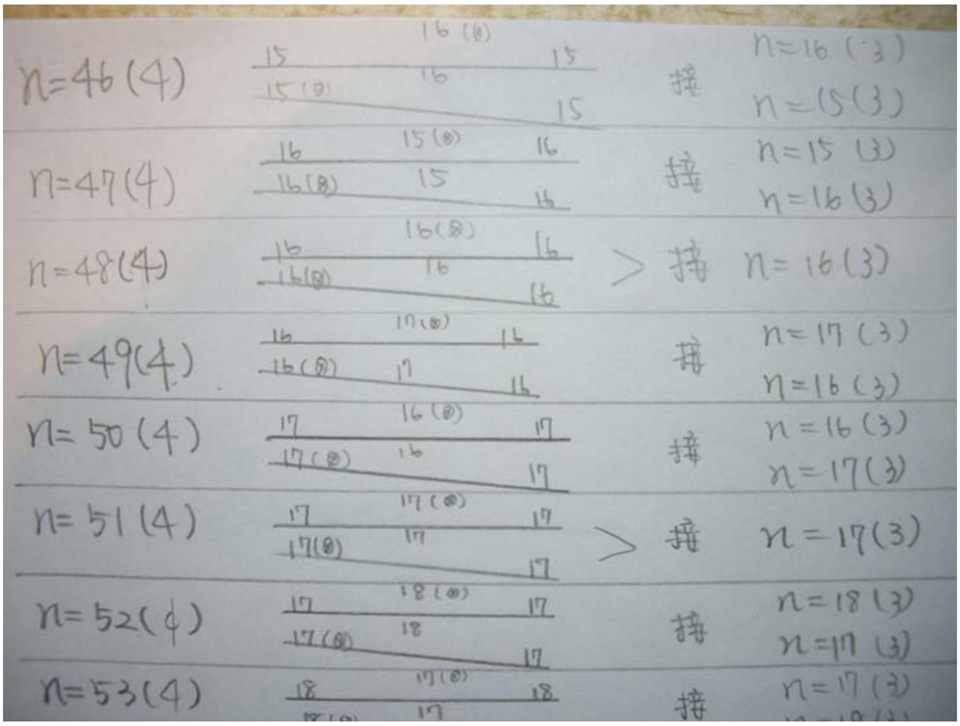


圖 4-5：甲同學開始使用之前的經驗數據

實驗二（又稱「**不知輕重**」）：

（1）「操作及記錄方式」的改進：

改進方式同「**實驗一**」**，**詳見下圖 4-6

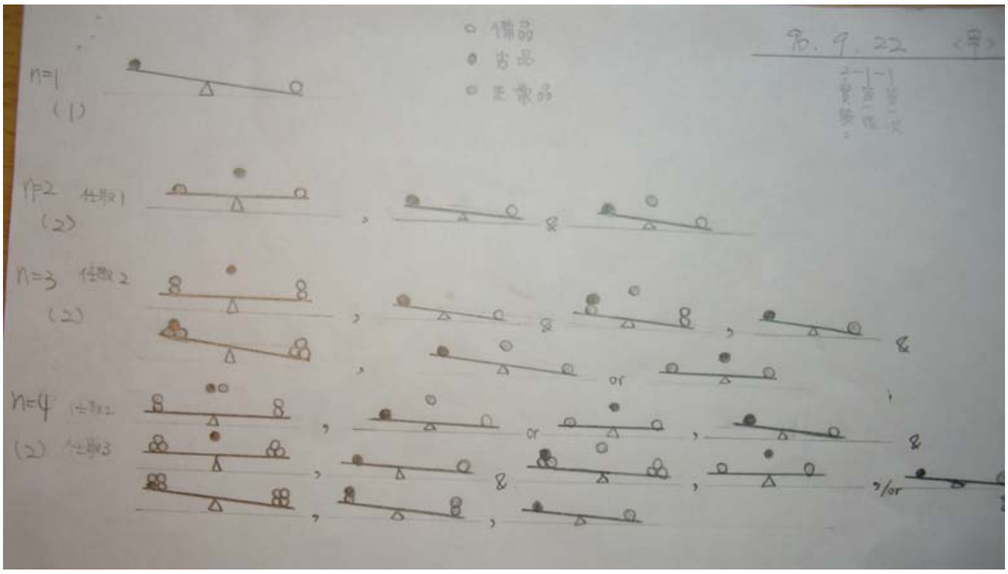


圖 4-6：甲同學改由用筆畫圈代替硬幣

②經過討論後，最後以阿拉伯數字來代替待測硬幣，另用國字來表示備品數量。詳見下圖 4-7

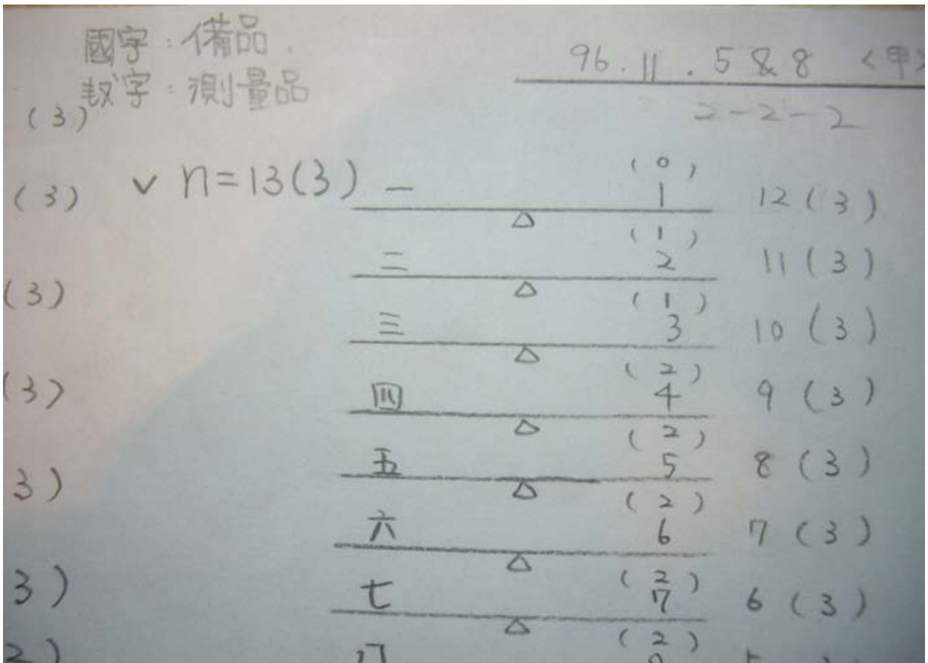


圖 4-7：甲同學以阿伯數字來代替待測硬幣，另用國字來表示備品數量

（2）「分堆技巧」的改進：

①因爲本實驗需經備品比較輕重，又由實驗一知：分成三堆，一定可以得到最少次數。所以本實驗進行不久，即改爲分成兩堆量秤。（加上備品那一堆，就是三堆了）

②分兩堆後，先拿其中一堆和備品比較。若天平不平衡，則可知假錢幣的輕重，並確知假錢幣就在本堆量測品中；若天平平衡，則假錢幣必在另一堆待測品中。

（3）善用經驗數據：甲同學於 96/11/10 會議中，提出她的一個重大發現：當分兩堆後，先拿其中一堆和備品比較。若平衡，則假錢幣必在另一堆待測品中，而本堆待測品因不知輕重且數量必小於現在的 n 值，所以可將實驗二的經驗數據拿來直接相加即可。若不平衡，則可知假錢幣的輕重，並確知假錢幣就在本堆量測品中，此時因量測堆已知輕重，狀況就如同**實驗一**，所以只要在借用**實驗一的經驗數據**即可。所以，得到一個重大結論：欲快速得知**實驗二**的最少次數，須先取得**實驗一**的結果才行。

詳見下圖 4-8

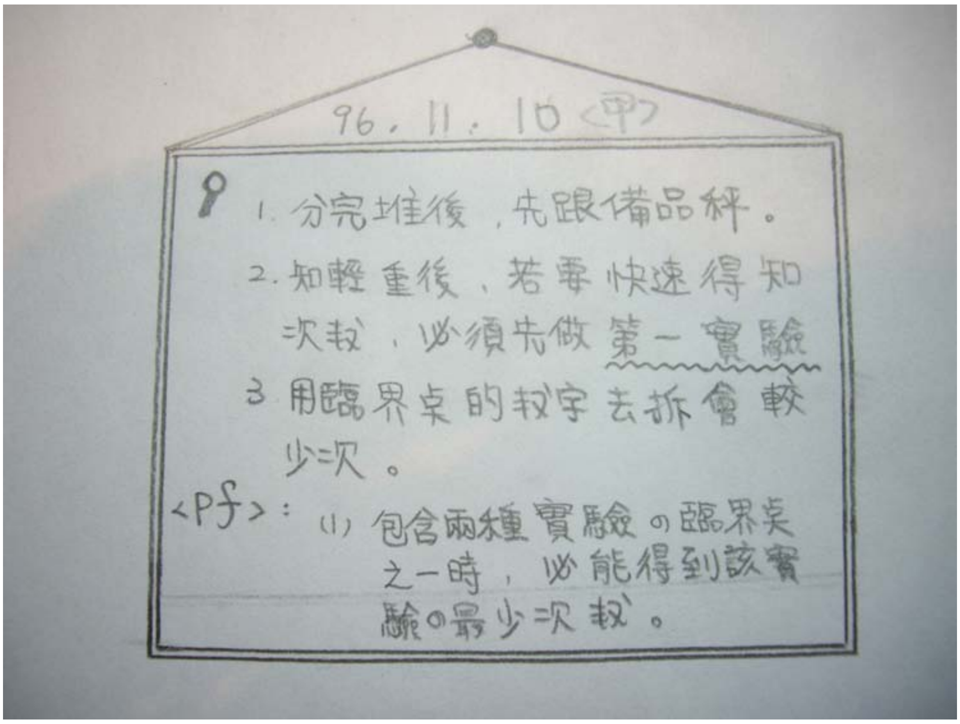


圖 4-8：甲同學發現：欲快速得知**實驗二**的最少次數，須先取得**實驗一**的結果才行。

（四）4 人合併實驗

由於甲同學的上述發現。所以在 96/11/10 會議後，我們 4 人決定將兩實驗合併，並儘速獲得**實驗一**的結果。詳見下圖 4-9

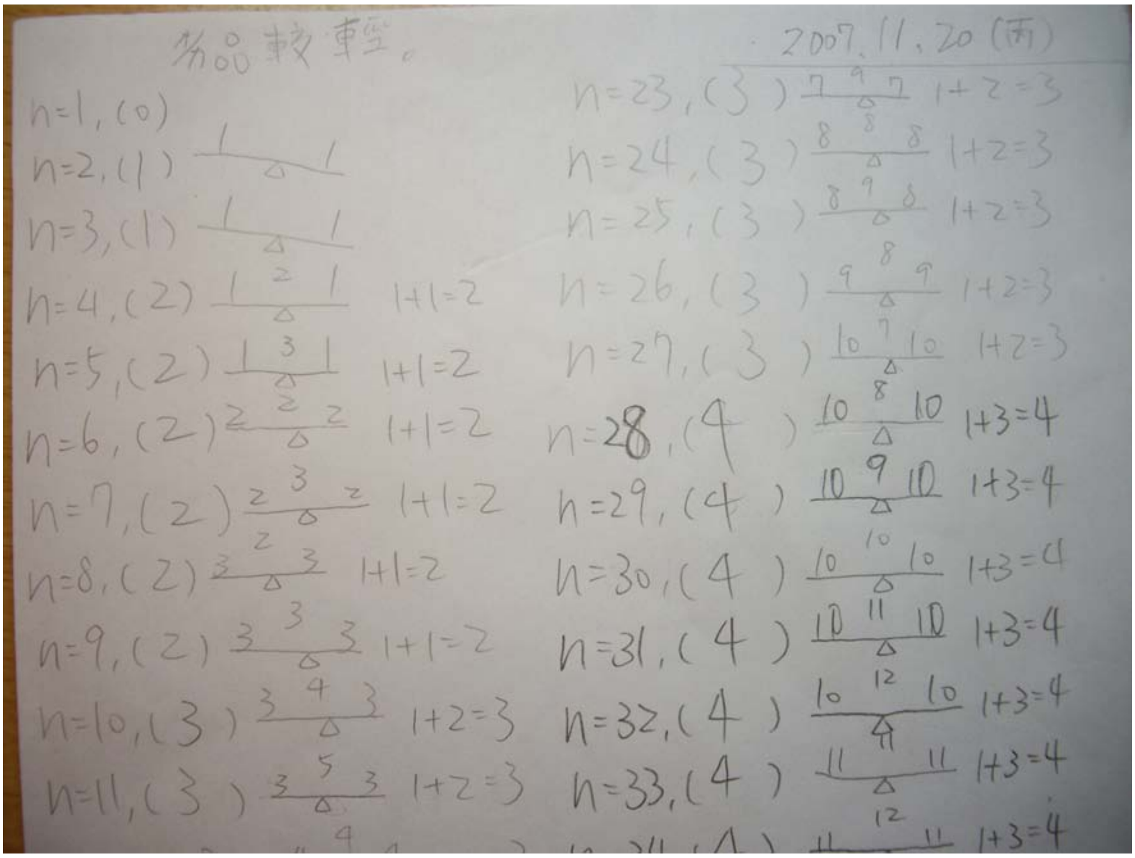


圖 4-9：96/11/20 起，丙同學也開始加入**實驗一**的操作

（五）察覺規律

本研究各項工作皆由我們四人獨立完成。**實驗一**的操作從 n＝1 做到 n＝100 左右；**實驗二**的操作則從 n＝1 做到 n＝50 左右。過程中獲得很多珍貴的數據、規律及想法，彙整如下：

（1）臨界點：最少次數皆相同的幾個 n 值中最大的數，我們稱它爲臨界點。

①最早是由做**實驗一**的丁同學在 96/10/27 會議中提出，當時她做到 n＝30，她發現

n＝1	最少次數＝0	$3^0=1$
n＝2～3	最少次數＝1	$3^1=3$
n＝4～9	最少次數＝2	$3^2=9$
n＝10～27	最少次數＝3	$3^3=27$
n＝28～	最少次數＝4	

臨界點爲 1、3、9、27…，即以 3 爲底數的乘方數。其「指數」恰爲「最少次數」。當我們獲得第 5 個臨界點真的是 n＝3^4＝81 時，即推定**實驗一**的第 k 個臨界點＝3^{k-1}，而此時的「最少次數」恰爲 k-1 次。 詳見下圖 4-10

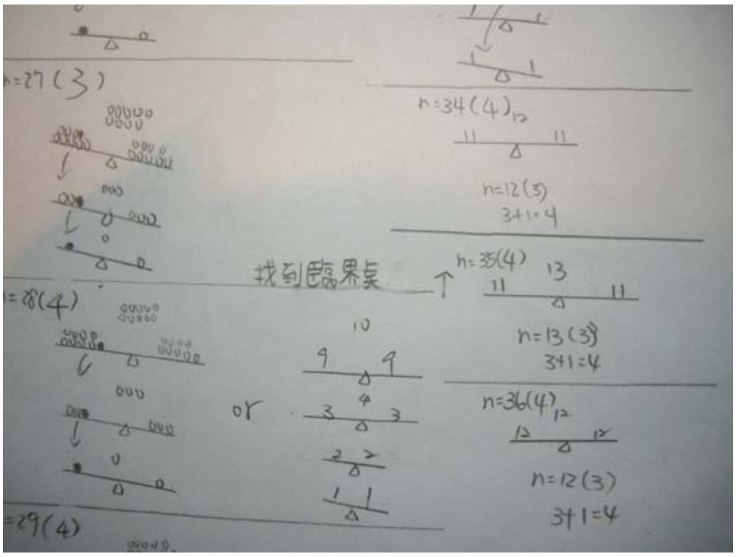


圖 4-10：丁同學發現實驗一的臨界點

②**實驗二**的臨界點則是甲同學於 96/12/29 會議中提出，當時她做到 n＝41 發現

n＝1	最少次數＝1	1＝1
n＝2～4	最少次數＝2	4＝1＋3
n＝5～13	最少次數＝3	13＝1＋3＋9
n＝14～40	最少次數＝4	40＝1＋3＋9＋27
n＝41～	最少次數＝5	

以此觀之，**實驗二**的第 k 個臨界點$=1+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{k-1}$，即首項$a_1=1$，公比＝3 的等比級數前 k 項的和$s_k$，而此時的「最少次數」恰為 k 次。詳見下圖 4-11

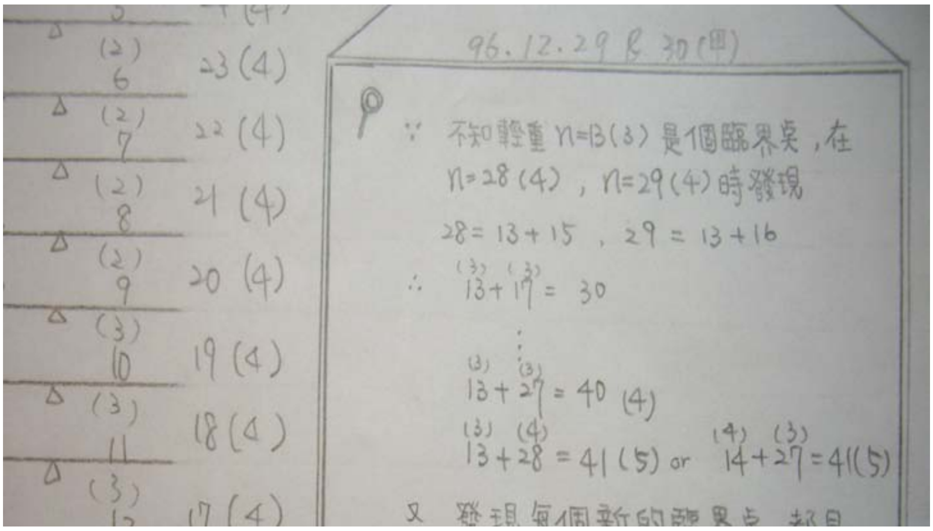


圖 4-11：甲同學發現**實驗二**的臨界點

（2）快速取得「最少次數」的方法

①**實驗一**：分成三堆，每堆數量盡量接近。詳見下圖 4-12

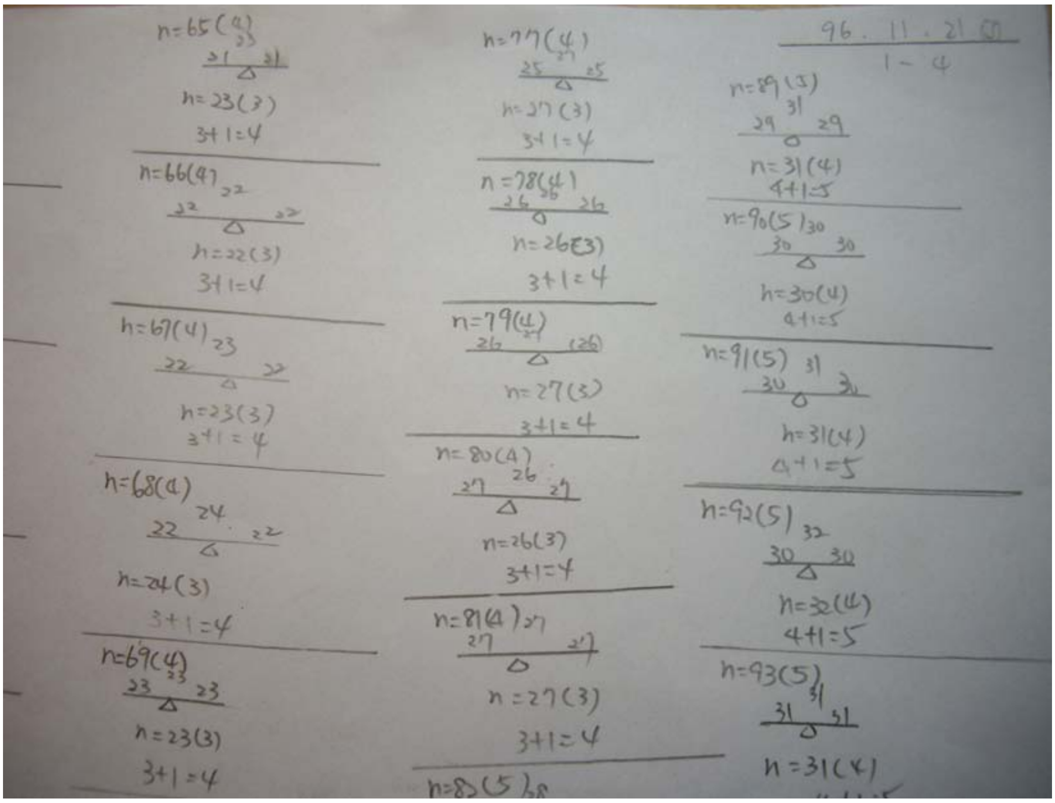


圖 4-12：丁同學於 96/11/21 開始使用均分三堆及善用經驗數據來求實驗一的最少次數

②**實驗二**：96/11/10 會議中，甲同學提出實驗二快速取得「最少次數」的方法：先分成二堆，在天平上與備品比較的那堆之個數盡量是**實驗一的臨界點**；而在一旁未秤的那堆之個數則盡量是**實驗二的臨界點**。也就是分堆後之每堆個數若包含兩實驗的臨界點之一時，必能找出「最少次數」。

例如：n＝12 可分成 8＋4 和 9＋3 兩種，操作如下

n＝12

【狀況一】八　　8（2）　　4（2）　　∴2＋1＝3……「最少次數」

（　）內爲該數量找出劣品的「最少次數」

若天平平衡，則知劣品在 4 這堆，但是因不知輕重，所以查看實驗二，當 n＝4（恰爲**實驗二的臨界點**）時之最少次數爲 2 次，再加上剛才量秤的這 1 次，就剛好是 3 次了；若天平不平衡，則知劣品在 8 這堆且知輕重，所以查看實驗一，當 n＝8 時之最少次數爲 2 次，再加上剛才量秤的這 1 次，剛好也是 3 次了。

【狀況二】九　　9（2）　　3（2）　　∴2＋1＝3……「最少次數」

若天平平衡，則知劣品在 3 這堆，但是因不知輕重，所以查看實驗二，當 n＝3 時之最少次數爲 2 次，再加上剛才量秤的這 1 次，就剛好是 3 次了；若天平不平衡，則知劣品在 9 這堆且知輕重，所以查看實驗一，當 n＝9（恰爲**實驗一的臨界點**）時之最少次數爲 2 次，再加上剛才量秤的這 1 次，剛好也是 3 次了。詳見下圖 4-13

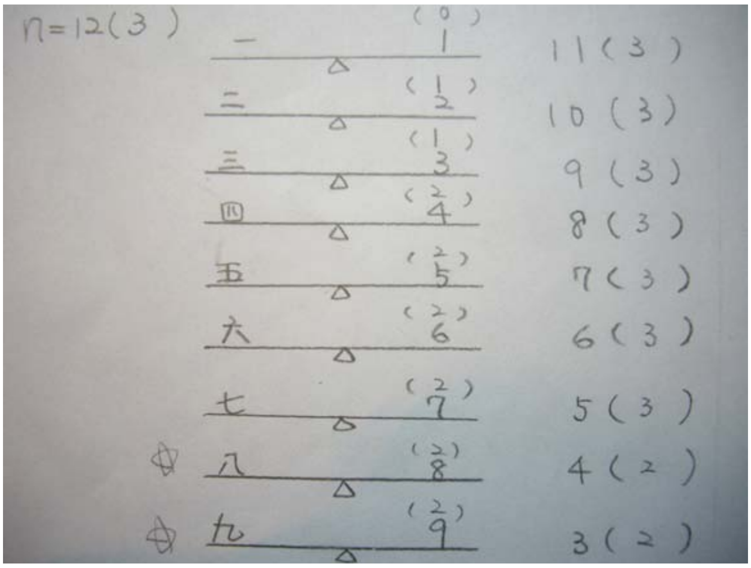


圖 4-13：甲同學利用**實驗一的臨界點**及**實驗二的上一個臨界點**來求實驗二的最少次數

（3）快速獲得下一個臨界點的方法

①**實驗一**：實驗一的第 k 個臨界點＝ 3^{k-1} ，而此時的「最少量秤次數」恰為 k-1 次。

②**實驗二**：96/12/15 會議中，甲同學提出快速獲得實驗二下一個臨界點的方法，她發現實驗二的第 k 個臨界點＝ 實驗二的第 k-1 個臨界點 ＋實驗一的第 k 個臨界點

詳見下圖 4-14

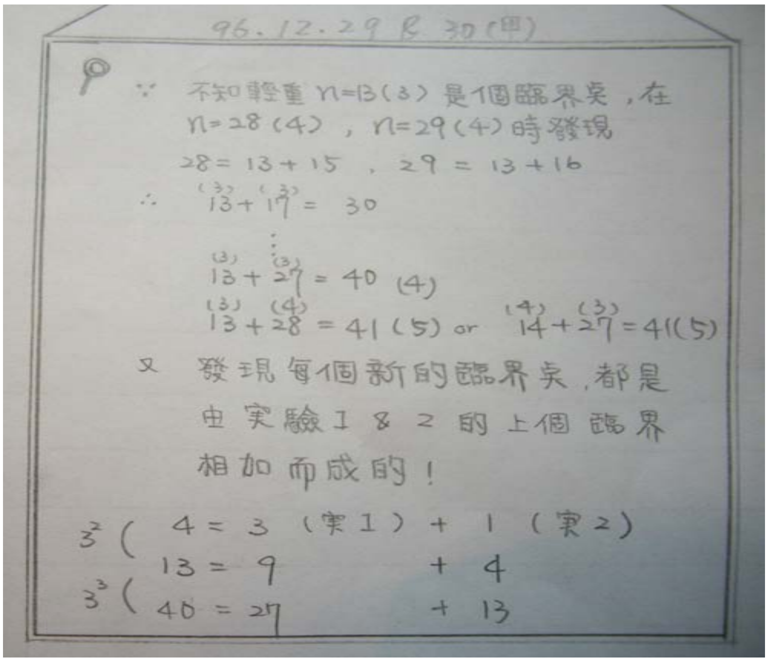


圖 4-14：96/12/29 甲同學發現，實驗二的第 k 個臨界點＝ 實驗二的第 k-1 個臨界點 ＋實驗一的第 k 個臨界點

丁同學也將結果彙整如下圖 4-15

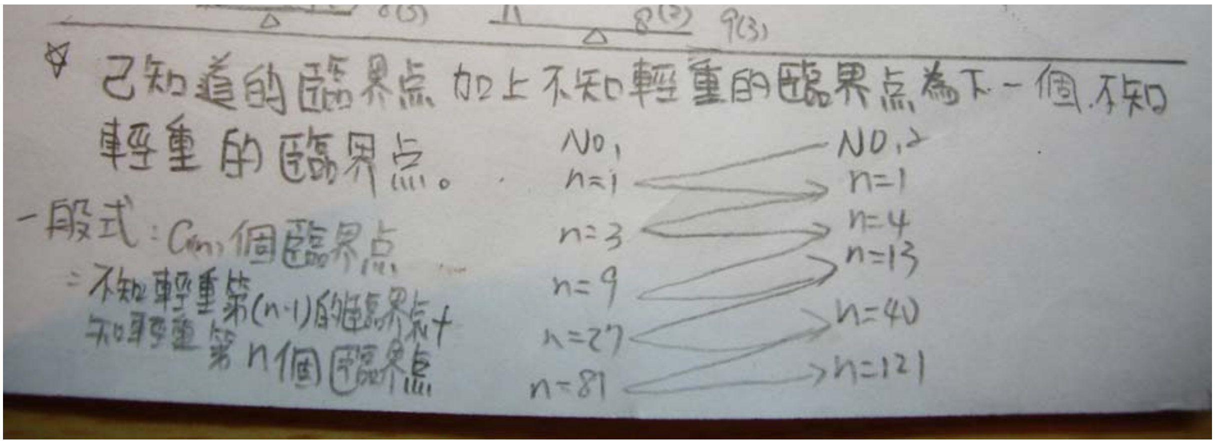


圖 4-15：96/12/29 丁同學將甲同學「快速獲得實驗二下一個臨界點的方法」，以圖線表示

（4）**實驗一**的規律：上一個臨界點< n≤本次臨界點

當 $3^0 < n \le 3^1$ 時，最少次數爲 1 次

當 $3^1 < n \le 3^2$ 時，最少次數爲 2 次

當 $3^2 < n \le 3^3$ 時，最少次數爲 3 次

…

當 $3^{k-1} < n \le 3^k$ 時，最少次數爲 k 次　　　詳見下圖 4-16

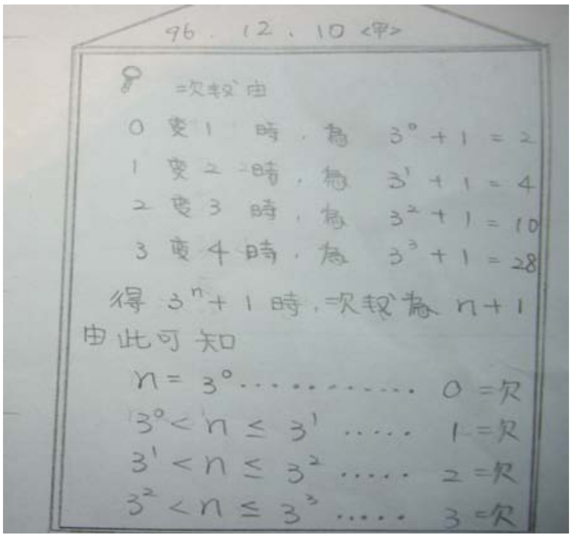


圖 4-16：96/12/10 甲同學發現，實驗一的規律

（5）**實驗二**的規律：上一個臨界點< n≤本次臨界點

當　$n=1$　時，最少次數爲 1 次

當 $1 < n \le 1+3^1$ 時，最少次數爲 2 次

當 $1+3^1 < n \le 1+3^1+3^2$ 時，最少次數爲 3 次

當 $1+3^1+3^2 < n \le 1+3^1+3^2+3^3$ 時，最少次數爲 4 次

…

當 $1+3^1+3^2+\cdots+3^{k-2} < n \le 1+3^1+3^2+\cdots+3^{k-1}$ 時，最少次數爲 k 次

（六）回答**研究問題** 1 和 3 ----- 推導公式

97/01/05 那一天，我們就用所察覺到**實驗一**和**實驗二**的規律，來歸納出**研究問題** 1 和**研究問題** 3「最少次數」的公式。

研究問題 1：n 枚硬幣中有一枚劣幣，已知劣幣較輕，請問利用天平最少需秤幾次，才可以找出劣品？能否藉由察覺規律而歸納出一個最少量秤次數的公式呢？

【推論】：由**實驗一**的規律知

∵當 $3^0 < n \le 3^1$ 時，最少次數爲 1 次

當 $3^1 < n \le 3^2$ 時，最少次數爲 2 次

當 $3^2 < n \le 3^3$ 時，最少次數爲 3 次

…

∴推導出規律爲

當 $3^{k-1} < n \le 3^k$ 時，最少次數爲 k 次

意即「只要知道 n 介於哪兩個 3 的乘方數之間，就能推出最少次數」。

⇒ **公式**可記爲：在本題之條件下，當 $n = 3^k$ 時，最少量測次數爲 k 次。

研究問題 3：n 枚硬幣中有一枚劣幣，另提供足夠數量的，請問利用天平最少需量秤幾次，才可以找出劣品，並知它的輕重？能否藉由察覺規律而歸納出一個最少次數的公式呢？

【推論】：由**實驗二**的規律知

∵當 $n = 1$ 時，最少次數爲 1 次

當 $1 < n \le 1 + 3^1$ 時，最少次數爲 2 次

當 $1 + 3^1 < n \le 1 + 3^1 + 3^2$ 時，最少次數爲 3 次

當 $1 + 3^1 + 3^2 < n \le 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3$ 時，最少次數爲 4 次

…

∴當 $1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{k-2} < n \le 1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1}$ 時，最少次數爲 k 次

然而 $1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1}$ 是一個首項 $a_1 = 1$，公比 $r = 3$ 的等比級數之前 k 項的和 s_k。

∵等比級數之前 k 項的和 $s_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_k$

其中 $a_2 = a_1 r$ ，$a_3 = a_2 r = a_1 r^2$ ，⋯，$a_k = a_{k-1} r = a_1 r^{k-1}$

∴也可以把等比級數之前 k 項的和寫成

$$\begin{array}{rl} s_k = & a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{k-1} \\ -)\quad r \cdot s_k = & \qquad a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{k-1} + a_1 r^k \\ \hline \end{array}$$

$$(1-r)\cdot s_k = a_1 - a_1 r^k = a_1(1-r^k)$$

$$\therefore\quad s_k = \frac{a_1(1-r^k)}{1-r}$$

∵本題中的首項 $a_1 = 1$，公比 $r = 3$

$$\therefore s_k = 1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1} = \frac{1\cdot(1-3^k)}{1-3} = \frac{3^k - 1}{2}$$

同理，$s_{k-1} = 1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{k-2} = \dfrac{3^{k-1} - 1}{2}$

$\therefore$推導出規律：當 $\frac{3^{k-1}-1}{2} < n \leq \frac{3^k-1}{2}$ 時，最少次數為 k 次。

$\Rightarrow$ **公式**可記為：在本題之條件下，當 $n=\frac{3^k-1}{2}$ 時，最少量測 k 次可找出，並知其輕重。

詳見下圖 4-17

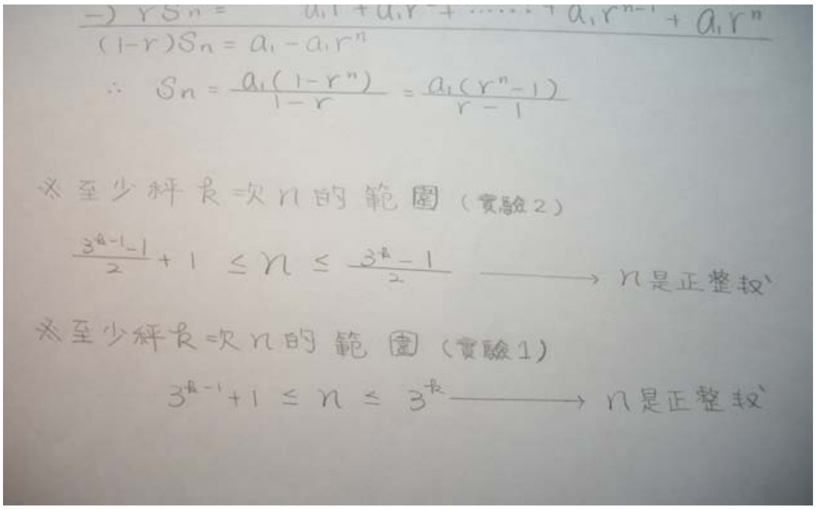


圖 4-17：我們推導出兩實驗的規律

（七）回答**研究問題 2** 和 **4 -----** 證明公式

（1）**研究問題 2**：當 n 枚硬幣中有一枚劣幣，已知劣幣較輕，找出利用天平量秤的最少次數。在上述條件下，試證明當 $n=3^k$ 時，最少量測次數為 k 次？

【證明】：$\because$ k 值為正整數 $\therefore$可使用「數學歸納法」證明如下：

①當 k＝1 時，$n=3^1=3$ 分成 1＋1＋1 三堆已推導出在 $3^{k-1} < n \leq 3^k$ 時

1 ———— 1 　　1

若平衡，則較輕劣幣就是那個未測幣，所以最少次數為 1 次

若不平衡，則較輕一邊即為劣幣，所以最少次數也是 1 次

②設 $n=3^k$ 時，最少次數為 k 次

③當 $n=3^{k+1}$ 時，$\because 3^{k+1}=3\times3^k=3^k+3^k+3^k$

$\therefore$恰可分成三堆，每堆 3^k 個。則

3^k ———— 3^k 　　3^k

若平衡，則較輕劣幣就在那未測的 3^k 個硬幣堆中，根據②的假設，所以須再秤 k 次，再加這 1 次，恰為 k＋1 次；若不平衡，則較輕一邊即為劣幣堆，也須再秤 k 次，再加上這 1次， 亦為 k＋1 次。

$\therefore$由「數學歸納法」知：當 $n=3^k$ 時，找出劣幣的最少次數為 k 次。詳見下圖 4-18

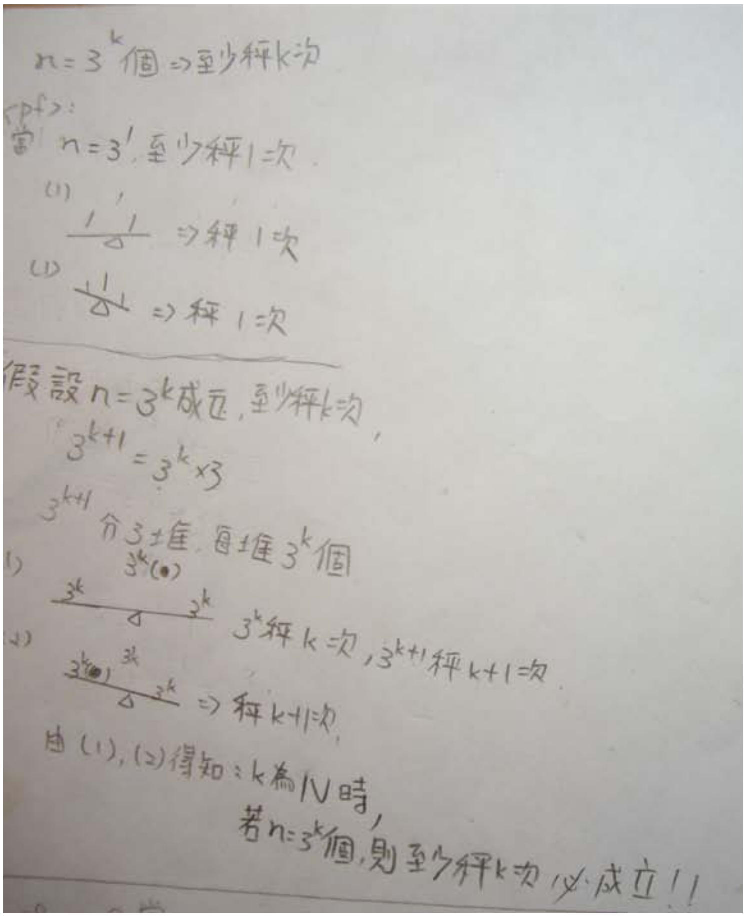

$n=3^k$個 ⇒ 至少秤k次
<pf>:
當 $n=3^1$, 至少秤1次
(1) 1 1 △ ⇒ 秤1次
(2) 1 △ 1 ⇒ 秤1次
假設$n=3^k$成立, 至少秤k次,
$3^{k+1}=3^k\times3$
3^{k+1} 分3堆, 每堆3^k個
(1) 3^k(●) 3^k △ 3^k 3^k秤k次, 3^{k+1}秤k+1次
(2) 3^k(●) 3^k △ 3^k ⇒ 秤k+1次
由(1),(2)得知: k為N時,
若$n=3^k$個, 則至少秤k次必成立!!

圖 4-18：丁同學證明出**實驗一**的公式（即研究問題 2）

研究問題 4：n 枚硬幣中有一枚劣幣，另提供足夠數量的備品，找出利用天平量秤的最少次數，並知道劣幣的輕重。在上述條件下，試證明當 n＝$\dfrac{3^k-1}{2}$時，最少量測 k 次可找出劣幣，並知其輕重？

【證明】：∵ k 值為正整數 ∴可使用「數學歸納法」證明如下：

①當 k＝1 時，n＝$\dfrac{3^1-1}{2}$＝1，和備品至少秤 1 次，即可找出劣幣，並知其輕重⇒成立

一（備品）　1

②設 n＝$\dfrac{3^k-1}{2}$時，最少量測次數為 k 次，並知其輕重⇒成立

③當 n＝$\dfrac{3^{k+1}-1}{2}$時，∵ $\dfrac{3^{k+1}-1}{2}=\dfrac{3\times3^k-1}{2}=\dfrac{2\times3^k+3^k-1}{2}$

$$=\frac{2\times3^k}{2}+\frac{3^k-1}{2}=3^k+\frac{3^k-1}{2}$$

∴先拿3^k個與同數量的備品比較。

3^k（備品）3^k　　$\dfrac{3^k-1}{2}$

若平衡，則劣幣就在那堆未測的$\dfrac{3^k-1}{2}$個硬幣中，根據②的假設，所以須最少再秤 k 次，再加這 1 次，恰為 k＋1 次找出劣幣，並知其輕重。若不平衡，則被測的3^k個即為劣幣堆，且由天平的傾斜知其太輕或太重；因為已知輕重，所以根據研究問題 2 的公式知，這已知輕重的3^k個，也至少須再秤 k 次，再加上這 1 次，亦為 k＋1 次。

∴由「數學歸納法」知：n＝$\dfrac{3^k-1}{2}$時，最少量測 k 次可找出劣幣，並知其輕重。

詳見下圖 4-19、4-20

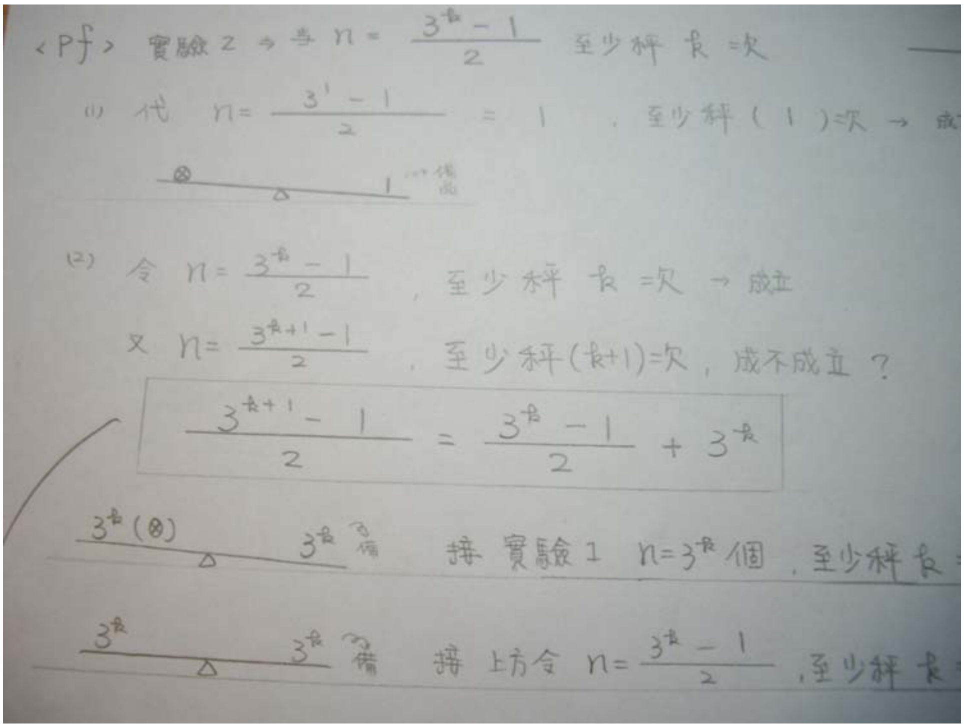
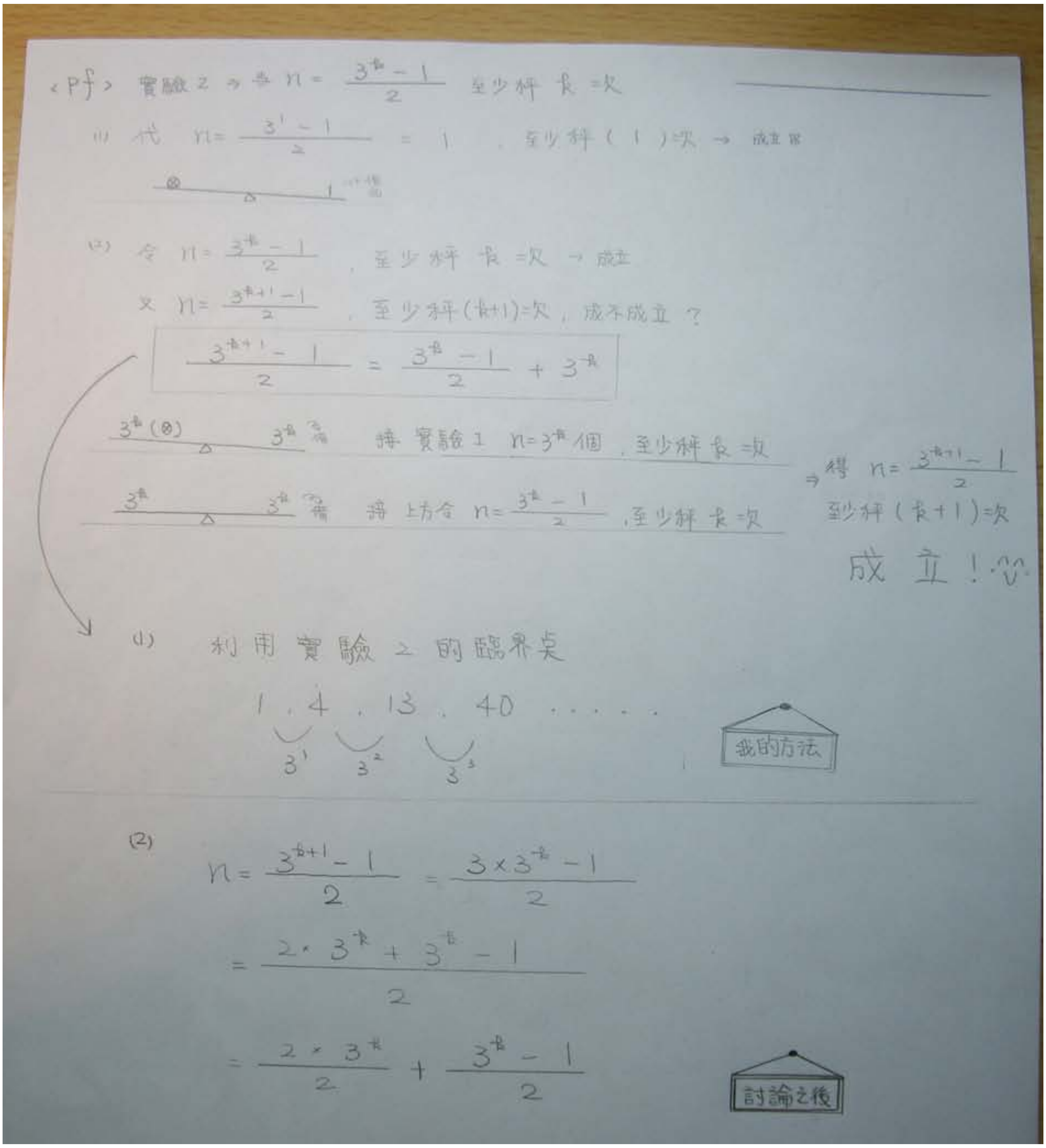


圖 4-19：甲同學證明**實驗二**公式（即研究問題 2）



<Pf> 實驗2 ⇒ 若 $n=\frac{3^k-1}{2}$ 至少秤 k 次

(1) 代 $n=\frac{3^1-1}{2}=1$，至少秤（1）次 → 成立啊

(2) 令 $n=\frac{3^k-1}{2}$，至少秤 k 次 → 成立

又 $n=\frac{3^{k+1}-1}{2}$，至少秤 $(k+1)$ 次，成不成立？

$$\boxed{\frac{3^{k+1}-1}{2}=\frac{3^k-1}{2}+3^k}$$

3^k(⊗) 3^k 準 靠實驗1 $n=3^k$ 個，至少秤 k 次

3^k 3^k 準 靠上方令 $n=\frac{3^k-1}{2}$，至少秤 k 次

⇒ 得 $n=\frac{3^{k+1}-1}{2}$ 至少秤 $(k+1)$ 次

成立！

(1) 利用實驗2的臨界點

$1,\ 4,\ 13,\ 40\ \ldots\ldots$

$3^1 \quad 3^2 \quad 3^3$

我的方法

(2)

$$n=\frac{3^{k+1}-1}{2}=\frac{3\times 3^k-1}{2}$$
$$=\frac{2\times 3^k+3^k-1}{2}$$
$$=\frac{2\times 3^k}{2}+\frac{3^k-1}{2}$$

討論之後

圖 4-20：甲同學證明出**實驗二**的公式（即研究問題 4）

伍、研究結果

研究結果顯示：

（一）有關**實驗一**的部份

（1）**研究問題 1 的公式**：n 枚硬幣中有一枚劣幣，已知劣幣較輕。當 $n=3^k$ 時，利用天平，最少須量測 k 次，才可以找出劣品。

（2）**研究問題 2 的公式證明**：

由「數學歸納法」知：當 $n=3^k$ 時，找出劣幣的最少次數爲 k 次。

（二）有關**實驗二**的部份

（1）**研究問題 3 的公式**：n 枚硬幣中有一枚劣幣，另提供足夠數量的完好備品。利用天平量測，當 $n=\frac{3^k-1}{2}$ 時，最少須量測 k 次可找出劣幣，並知其輕重。

（2）**研究問題 4 的公式證明**：

由「數學歸納法」知：$n=\frac{3^k-1}{2}$ 時，最少量測 k 次可找出劣幣，並知其輕重。

陸、討論與結論

許多數學上的重大發現，事實上都是數學家們從最簡單的想法著手，接著是長期地嘗試與觀察，再透過經驗的累積，慢慢察覺到背後隱藏的規律，最後再用數學方法加以證明。

做完本次數學科展後，我們深深覺得這次科展的研究過程，就像是一部小型的數學發展史。在這裡面，我們用最笨的方法（從n＝1起逐項做）去尋找研究問題背後隱藏的規律。過程中，我們透過討論，逐漸修改操作的技巧：知道如何分堆比較省時；如何記錄比較快速又明瞭。在累積一定的經驗後，我們慢慢獲得了一些關鍵的數據與規律，如：等比數列、臨界點、「最少次數」以及「快速獲得下一個臨界點的方法」...等等。最後藉由這些關鍵的數據與規律，歸納出公式，再透過「數學歸納法」加以證明成功。無疑地，我們感覺到就好像和許多偉大的數學家們一樣，在做同一件事。難道這就是「做數學」嗎？和「解數學」的感覺差好多。其實，我們也常在想：數學背後的意義到底爲何？是不是就是如我們這般地進行著「察覺規律」的工作？

這次數學科展所經歷的研究過程，讓我們漸漸覺得，數學研究的目的就是探究在生活週遭的各個領域中無所不在的規律，而它也是所有科學發展的原動力。事實上，所有知識的形成都必須經過「察覺規律」的過程，所以「規律察覺的能力」也可以說是所有科學發展的能力。而數學本身就是一門尋求規律的學科，這也是「數學爲科學之母」的主要原因。

柒、參考資料及其他

1. 黃敏晃（2003）：**人間處處有數學**。台北市：天下遠見出版社。
2. 曹亮吉（2003）：**阿草的數學聖杯**。台北市：天下遠見出版社。
3. 郭國清、謝淡宜（2006）：**以八十二年國小數學課程的精神對國小五年級學童實施小班數形規律單元教學及學童學習歷程之研究**。國立台南大學應用數學研究所碩士論文。

【評語】030423

這其實是一個古老的問題，在已知偽幣較輕的前提下，問題其實是比較容易解決的，解決的方法其實也很單純。也因此，問題的趣味程度大大的降低了，關於不知偽幣輕重的問題其實也早有結果，比較可能的進一步的討論或許可放在不只一個偽幣的問題上（可分成偽幣個數確定與不確定），對這類型問題的討論說不定更有趣味。