

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030422

利用回復路徑追蹤費馬點

學校名稱：臺北縣立福和國民中學

作者：

國二 李文展

國二 洪翊琇

國二 陳怡方

國二 林冠妤

指導老師：

洪駿源

鄭釗鋒

關鍵詞： 費馬點、位能

作品名稱：利用回復路徑追蹤費馬點

摘要

一、本研究先證出：

(一)、 n 邊形的費馬點即本文所稱 n 孔系統的平衡中心。

(二)、 n 邊形($n \geq 3$)的費馬點唯一。

二、利用 GSP 軟體，以物理方法我們研究出「回復路徑逼近法」，利用此法可求得任意多邊形的費馬點。

三、以數學方法導出 $n = 2$ 的真正回復路徑方程式，接著證出等距線與回復路徑所在的方程式，其圖形為共焦點的橢圓與雙曲線，並形成「正交曲線」。

四、對於 $n \geq 3$ ，我們猜測等距線 α 與回復路徑 β 為「正交曲線」，並以「等距線逼近法」作出的圖形驗證得證之。

五、因此，理論上要求得 n 孔系統的回復路徑方程式，只要先寫出等距線方程式，並利用其為「正交」關係即可得。最後，只要作出兩條回復路徑之圖形，由其交點可得此 n 邊形的費馬點。

壹、研究動機

在資優營隊的學習裡，老師提到任意五邊形以上的費馬點，文獻上似乎沒有用數學的方式求出，你們可試著搜尋相關資料，看是否可用其他方法來解答？之後，我們在數學教育月刊上看到一篇文章，提到可以利用懸掛砝碼的重力平衡實驗找到三角形的費馬點，於是我們好奇的開始做了此實作，然而過程中每次結果都不盡相同。因此，我們想是否可找到其它方法，更有效率更精準的解決多邊形的費馬點問題。

貳、研究器材

電腦、紙、色砂、筆、壓克力板、魚線繩、20 克重砝碼 10 個

參、研究目的

- 一、探討物理上平衡中心與數學上費馬點的關係。
- 二、探討 n 孔系統的平衡中心是否唯一？也就是 n 邊形的費馬點是否唯一？
- 三、使用 GSP 軟體模擬回復路徑並簡易地追蹤多邊形的費馬點。
- 四、尋找 n 孔系統理論的回復路徑與相關性質。

肆、研究過程

一、名詞解釋

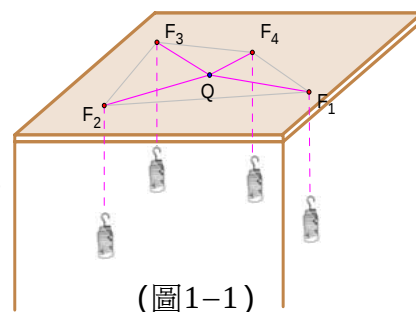
(一)、 n 孔系統

當具備下列條件，本研究稱之為「 n 孔系統」。

- 1、在桌面上有 n 個大小相同的小圓孔，分別命名為 F_1 、 F_2 、...、 F_n ，如圖1-1。
- 2、取 n 條適當長的細繩，分別穿過小圓孔，並將此 n 條繩子置於桌面上的部分連接於「 Q 點」(註一)，繩子的另一端各掛等重的砝碼。

註一：(1)本研究將上述細繩連接處，稱為「 Q 點」。
(2)繩子連接於「 Q 點」所用掉的部分，長度不計。

- 3、摩擦力不計。
- 4、繩子重量不計。



(二)、平衡中心： n 孔系統中「 Q 點」的移動僅受重力影響，因此系統靜止時，「 Q 點」於桌面所在位置的點為 P_m ，則稱 P_m 為 n 孔系統的「平衡中心」。(註二)

註二：1、本研究稱 P_m 為 n 孔系統的平衡中心。

2、特別注意：當系統靜止時，合力不一定為 0，亦可能為合力最小時。

(三)、回復路徑：在「 n 孔系統」中，將「 Q 點」移往桌面的一點 P_1 處作釋放，由於系統僅受重力影響，所以「 Q 點」最後會靜止於平衡中心 P_m 。我們將「 Q 點」自 P_1 處移往 P_m 處的過程所形成的路徑軌跡，本研究稱之為「回復路徑」。

二、文獻探討【費馬點的意義與幾何作圖】

“一家公司要設立辦公室(P)，讓這個辦公室 P 到這三個城鎮(A 、 B 、 C)的距離總和是最短，那麼辦公室的位置該設立於何處呢？”

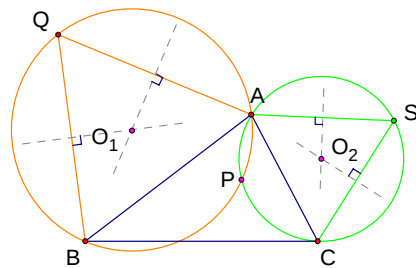
以幾何學而言，即是 $\triangle ABC$ 所在平面，尋找一點使得此點至三頂點的距離和為最小，此點稱為「費馬點」。其作圖方法與證明過程如下：

(一) $\triangle ABC$ 中：

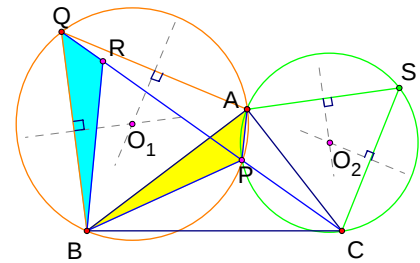
1、作圖方法：(1)以任意兩邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 為邊長作正 $\triangle ABQ$ 與正 $\triangle ACS$ ，如圖2-1。

(2)作正 $\triangle ABQ$ 與正 $\triangle ACS$ 的外接圓，則兩外接圓的交點 P 即為 $\triangle ABC$

的費馬點。



(圖2-1)



(圖2-2)

2、證明過程：(1)連 $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 、 $\overline{PC}$

因為 P 、 A 、 Q 、 B 四點共圓， P 、 A 、 S 、 C 四點共圓

所以 $\angle APB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ； $\angle APC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

推得 $\angle BPC = 120^\circ$

(2)以 $\overline{PB}$ 為邊作正 $\triangle PBR$ ，連 $\overline{PQ}$ ，如圖2-2。

因為 $\overline{AB} = \overline{BQ}$ ， $\angle ABP = 60^\circ - \angle ABR = \angle QBR$

所以 $\triangle ABP \cong \triangle QBR$ (SAS 全等性質)

可得 $\angle BRQ = \angle APB = 120^\circ$ ， $\overline{PA} = \overline{QR}$

(3)因為 $\angle BRQ + \angle BRP = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

$\angle BPR + \angle BPC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

所以 B 、 R 、 P 、 C 四點共線

可得 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{QR} + \overline{RP} + \overline{PC} = \overline{QC}$ 為最小值，

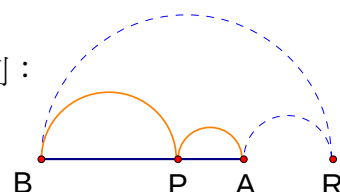
即 P 點為 $\triangle ABC$ 之費馬點。

特別地，當 $\angle BAC \geq 120^\circ$ ，則 A 點為 $\triangle ABC$ 的費馬點。

(二)、平面上，若 P 點到 A 、 B 兩點的距離和為最短，則費馬點 P 為 $\overline{AB}$ 上任意一點：

如圖 2-3，在 $\overline{AB}$ 上任取一點 P ， $\overline{AB}$ 外任取一點 R ，則：

$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{AB} < \overline{RA} + \overline{RB}$ ，故得證。



(三)、四邊形費馬點即是四邊形對角線的交點 P ：

(圖 2-3)

如圖 2-4，四邊形 $ABCD$ 中， P 為對角線的交點， Q 為異於 P 的任一點。

1、若 Q 不在對角線上，則在 $\triangle ACQ$ 與 $\triangle BQD$ 中，

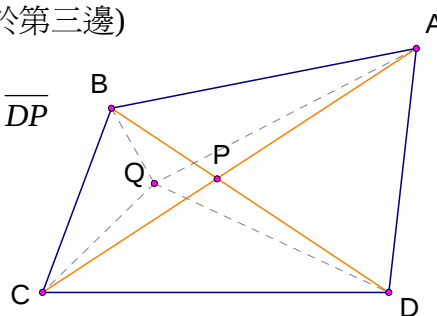
$\therefore \overline{AQ} + \overline{CQ} > \overline{AC}$ ， $\overline{BQ} + \overline{DQ} > \overline{BD}$ (任意兩邊和大於第三邊)

$\therefore \overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ} + \overline{DQ} > \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP}$

2、若 Q 在 $\overline{BD}$ (或在 $\overline{AC}$ 上)，則

$\therefore \overline{BQ} + \overline{DQ} = \overline{BD}$ (或 $\overline{AQ} + \overline{CQ} = \overline{AC}$)

$\therefore \overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ} + \overline{DQ} > \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP}$



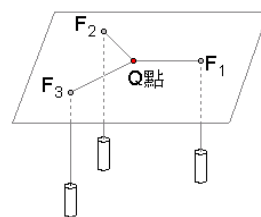
(圖 2-4)

3、由 1、2 可得證對角線的交點 P 到四頂點的距離和為最小，即 P 為四邊形費馬點。

然而，文獻上對於五邊形以上費馬點的尋找都僅止於探討“正 n 邊形的費馬點即是其中心”，至於其他任意 n 邊形的費馬點並未有一般化的結果，實在可惜！我們試著尋找是否有其他解決任意 n 邊形的費馬點之辦法，很高興地在數學教育月刊第十七期、第 26 及 41 屆中華民國中小學科展作品(見附錄一)中得到：可利用如圖 3-1 的「三孔系統」重力平衡實驗，借助物理中“力的平衡原理”和“最小位能原理”，求得最後達到重力平衡的點，就是此三角形的費馬點。在得到這樣的發現之下，我們迫不及待地做了相關的實驗。

三、使用 n 孔系統重力平衡實驗尋找費馬點的實作與深入探討

我們使用壓克力板、魚線繩、20 克重砝碼 10 個，設計了如圖 3-1 的三孔系統重力平衡實驗。於實驗過程中將 Q 點拉至桌面任意處釋放，發現系統最後靜止的平衡中心位置並不固定，其變因可能為(1).繩子與桌面產生的摩擦力；(2).繩子的重量。另外，我們亦產生”三孔系統是否存在多個系統平衡中心”？



(圖 3-1)

前頁所提及的文獻中，未能清楚的解釋上述疑問也未能將此重力平衡實驗做更一般化的探討，僅簡略說明「三孔系統中的平衡中心就是費馬點」，那麼四邊形的費馬點是否也能利用四孔系統的重力實驗來求得，甚至能否推論到一般化 n 孔系統的平衡中心就是費馬點？以下，我們提出兩個問題：

問題一： n 孔系統的平衡中心就是此 n 孔所形成多邊形的費馬點？

(一)、 n ($n \geq 3$) 孔系統的平衡中心就是費馬點

由物理觀點，我們知道「 Q 點」的移動是由高位能移動至低位能，也就是系統平衡時的平衡中心，即為位能最低時。因此，我們試著由總位能公式 $E = mgh$ 來推導，過程如下：

在 n 孔系統中如圖 3-2，若桌面高度為 h 、每個砝碼為 M 克重及 l_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 為「 Q 點」通過 F_j 孔至懸掛砝碼處的繩長。今將 n 條繩子連接處「 Q 點」移往桌面上一點

P_i ($i = 1, 2, \dots, m$)，則此時系統總位能為

$$E_i = Mg[h - (l_1 - \overline{P_i F_1})] + Mg[h - (l_2 - \overline{P_i F_2})] + \dots + Mg[h - (l_n - \overline{P_i F_n})] \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$= Mg[nh - (l_1 + l_2 + \dots + l_n) + (\overline{P_i F_1} + \overline{P_i F_2} + \dots + \overline{P_i F_n})]$$

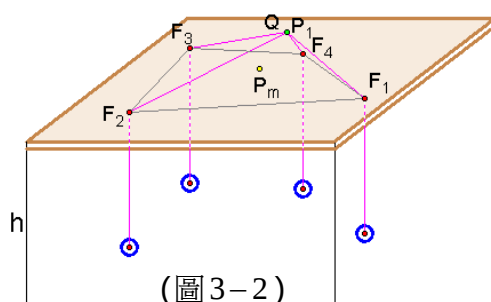
$$= \underline{Mg(nh - l)} + L_i$$

3-1式

其中總繩子長 $l = l_1 + l_2 + \dots + l_n$

$$L_i = \overline{P_i F_1} + \overline{P_i F_2} + \dots + \overline{P_i F_n} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

3-2式



(圖 3-2)

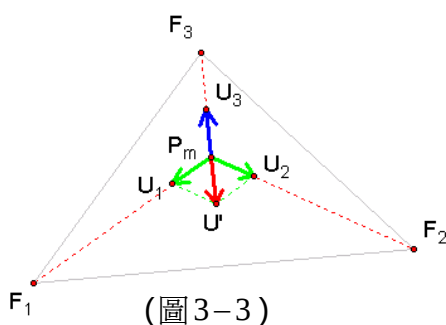
當 Q 點由 $P_1 \rightarrow P_2$ 最後移動到 P_m 時(此時系統處於平衡狀態), 系統總位能 $E_i = E_m$ 為最小, 由 3-1 式可知 $nh - l$ 為定值, 因此可得知此時 L_m 值為最小。若以數學觀點, 因為 $L_m = \overline{P_m F_1} + \overline{P_m F_2} + \cdots + \overline{P_m F_n}$ 為平面上 P_m 與各頂點 F_1 、 F_2 、 $\cdots$ 、 F_n 之距離和為最小, 故平衡中心 P_m 就是以 F_1 、 F_2 、 $\cdots$ 、 F_n 這 n 個圓孔連線形成的 n 邊形之「費馬點」。我們將此推導結果, 寫成下面【定理一】:

【定理一】 n 孔系統的平衡中心, 即是 n 孔(n 個點)所形成的多邊形之費馬點。

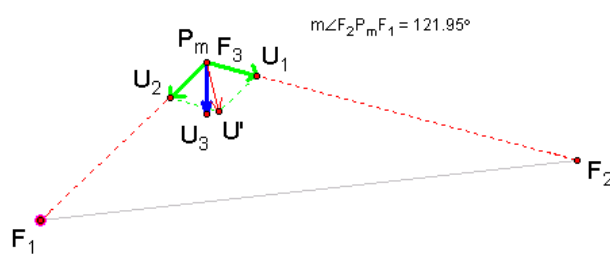
(二)、檢視文獻上三角形與四邊形的費馬點就是此三孔系統與四孔系統的平衡中心

1、在 $\Delta F_1 F_2 F_3$ 中, 如圖 3-3, 若所有內角皆小於 120° , 由文獻探討(見 P_3)可知若滿足 $\angle F_1 P_m F_2 = \angle F_2 P_m F_3 = \angle F_3 P_m F_1 = 120^\circ$, 此時 P_m 至三頂點距離和為最小, 即 P_m 點為費馬點。由物理力學的平衡觀點, 此時 $\overrightarrow{P_m U_1} + \overrightarrow{P_m U_2} + \overrightarrow{P_m U_3} = \overrightarrow{P_m U'} + \overrightarrow{P_m U_3} = \vec{0}$, 所以費馬點所在的位置 P_m 為系統的平衡中心。

2、在 $\Delta F_1 F_2 F_3$ 中, 如圖 3-4, 若 $\angle F_1 F_3 F_2 \geq 120^\circ$, 由文獻探討(見 P_3)可知 $\Delta F_1 F_2 F_3$ 的費馬點為頂點 F_3 。由物理力學的平衡觀點, 此時 $\overrightarrow{P_m U_1} + \overrightarrow{P_m U_2} = \overrightarrow{P_m U'} \leq \overrightarrow{P_m U_3}$, 即「 Q 點」受到來自 F_3 孔鉛直方向的拉力會大於桌面上 $\overrightarrow{P_m U_1}$ 與 $\overrightarrow{P_m U_2}$ 的合力, 而卡在 F_3 洞口, 所以費馬點所在的位置(頂點 F_3)為系統的平衡中心。



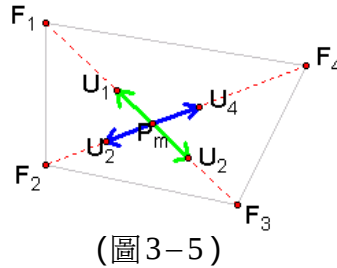
(圖 3-3)



(圖 3-4)

3、在四邊形 $F_1F_2F_3F_4$ 中，由文獻探討(見 P_4)可知四邊形的費馬點就是對角線的交點。

由物理力學的平衡觀點，如圖 3-5，此時合力 $\overrightarrow{P_m U_1} + \overrightarrow{P_m U_2} + \overrightarrow{P_m U_3} + \overrightarrow{P_m U_4} = \vec{0}$ ，也就是費馬點所在的位置(對角線的交點 P_m)為系統的平衡中心。



由【定理一】與上述三點說明可得知：數學上多邊形費馬點的尋找，即是物理學的「平衡中心」尋求。換言之，透過 n 孔系統重力平衡實驗所得到的平衡中心，就能找到此 n 孔所連成 n 邊形的「費馬點」。如此一來，文獻上找不到任意 n 邊形的費馬點之困境，便能有所突破！不過，由於實驗過程中，我們無法克服影響準確度的變因，以致於平衡中心的落點產生不確定性，如同前述，讓我們產生“ n 孔系統的平衡中心是否唯一？”的疑慮。

問題二： n 孔系統的平衡中心是否唯一？即此 n 孔所形成多邊形的費馬點是否唯一？

我們將問題轉化成具一般化的問題，並寫成【定理二】如下：

【定理二】 平面上有 n 個相異點 $F_1、F_2、\dots、F_n$ ，若存在 $P、Q$ 兩點，使得

$$\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2} + \dots + \overrightarrow{PF_n} = \overrightarrow{QF_1} + \overrightarrow{QF_2} + \dots + \overrightarrow{QF_n}$$

則 P 與 Q 重合。

【證明】 $\because \overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2} + \dots + \overrightarrow{PF_n} = \overrightarrow{QF_1} + \overrightarrow{QF_2} + \dots + \overrightarrow{QF_n}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{PF_1} - \overrightarrow{QF_1}) + (\overrightarrow{PF_2} - \overrightarrow{QF_2}) + \dots + (\overrightarrow{PF_n} - \overrightarrow{QF_n}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} + \dots + \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$$

$$\therefore P = Q$$

從【定理二】可證得 n 孔系統的平衡中心必然唯一，即 n 孔所形成 n 邊形的費馬點只有一點。

從上述兩個問題的解答可以說明：理論上，透過 n 孔系統重力平衡實驗尋找費馬點的實作是可行的，且在 $n \geq 3$ 時必然只有一點。但有兩個缺點：

- 1、影響實驗準確度變因無法克服，多次實驗所得系統的平衡中心並不固定，具有**不確定性**。
- 2、每探討一個圖形則需另外再製作新實驗模型，顯然耗時與費工，**缺乏效率與實用性**。

針對上述的缺點，我們想到在做重力平衡的實驗過程中，「 Q 點」(其名稱意義見 P_2) 不管置於何處做釋放，最後會回到平衡中心 P_m (實際上會有誤差)。為了方便，我們將實驗過程中，「 Q 點」回到 P_m 的路徑軌跡稱為「**回復路徑**」。因此，只要我們能找出「回復路徑」，那麼平衡中心即可求得。

四、利用回復路徑追蹤費馬點

(一)、回復路徑逼近法

「在 n 孔系統中，「 Q 點」的移動，永遠朝著系統合力的方向前進」。利用這個結論，本研究提出下面操作步驟，並以 GSP 來呈現結果：

【步驟 1】作出「 Q 點」在 P_1 處時所受到來自 n 孔等重拉力的合力向量 $\overrightarrow{P_1R_1}$ ，並在 $\overline{P_1R_1}$

上取 P_2 ，使得 $\overline{P_1P_2} = k\overline{P_1R_1}$ 。(註四)

【步驟 2】作出「 Q 點」在 P_2 處時，所受到來自 n 孔等重拉力的合力向量 $\overrightarrow{P_2R_2}$ ，並

在 $\overline{P_2R_2}$ 上取 P_3 ，使得 $\overline{P_2P_3} = k\overline{P_2R_2}$ 。

【步驟 3】重複上述步驟，經過第 $m'-1$ 次的操作可得 $\overline{P_{m'-1}P_{m'}} = k\overline{P_{m'-1}R_{m'-1}}$ 。

則「 Q 點」的移動路徑軌跡，即是 $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow \dots \rightarrow P_{m'}$ 。(註四)

註四：(1)當 k 愈小，其回復路徑越準確。

(2)當 m' 值夠大，僅利用一條回復路徑，即可得近似「費馬點」。

我們將上述操作法，稱為『回復路徑逼近法』。所得到的 $P_{m'}$ 為 n 孔系統的「逼近平衡中心」，即 $P_{m'}$ 為 n 孔所形成 n 邊形的「逼近費馬點」。

(二)、比較「逼近費馬點」與「實際費馬點」

1、 $\Delta F_1F_2F_3$ 中，三內角皆小於 120°

$$m\angle F_3F_1F_2 = 78.18^\circ$$

$$m\angle F_2P_mF_3 = 120.00^\circ$$

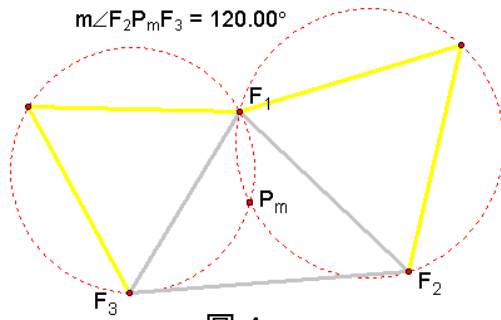


圖 A

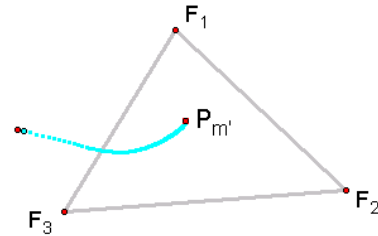


圖 B

其中圖 A 為多邊形理論費馬點；

圖 B 為本研究提出的「回復路逕逼近法」所得「逼近費馬點」；

圖 C 為合併圖 A 與圖 B 作比較；

圖 D 為結論。

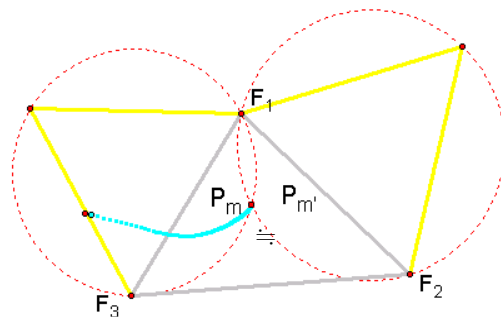


圖 C

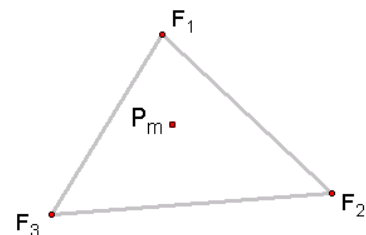


圖 D

我們將圖 C 中 $\Delta F_1F_2F_3$ 任意做改變(三內角仍小於 120°)，發現 P_m 與 $P_{m'}$ 仍為相同一點。

點。以下亦做相同步驟的比較：

2、 $\Delta F_1F_2F_3$ 中， $\angle F_1 > 120^\circ$ 時

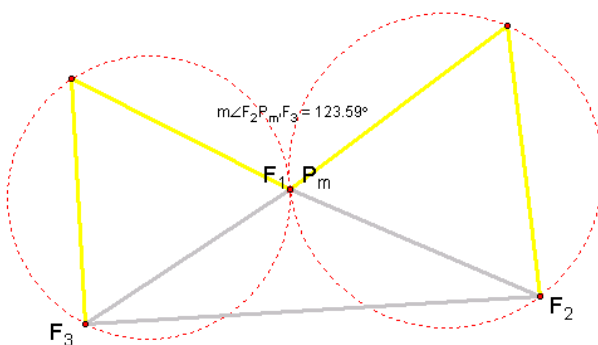


圖 A

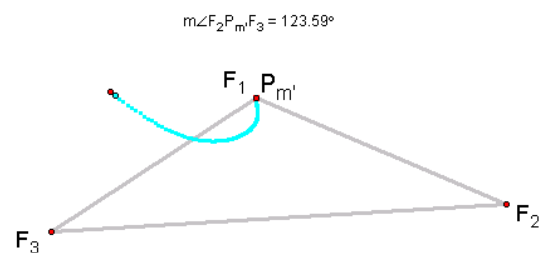
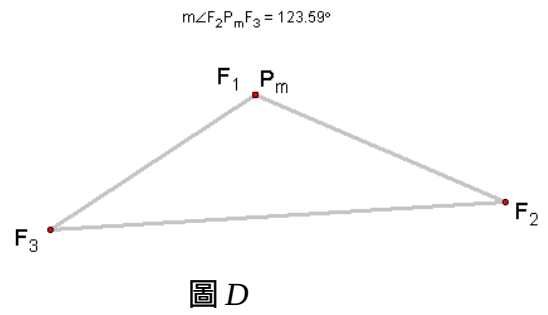
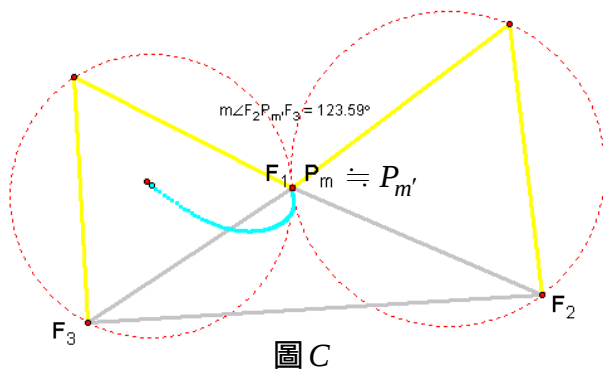
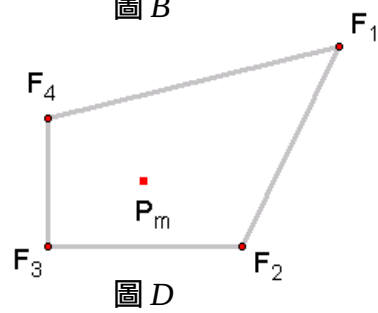
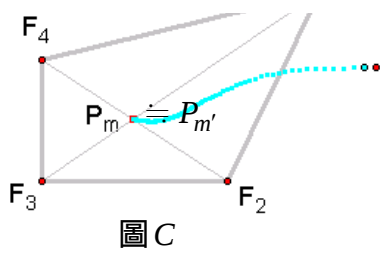
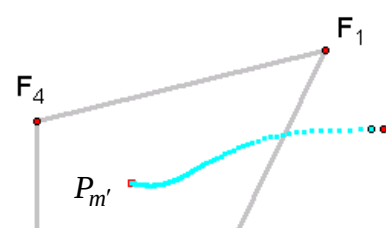
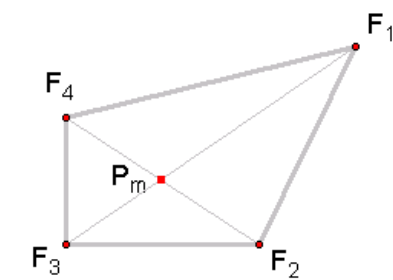


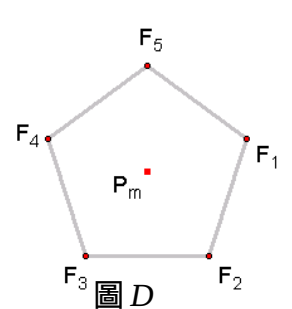
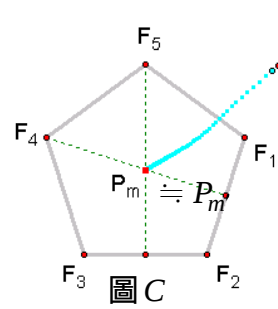
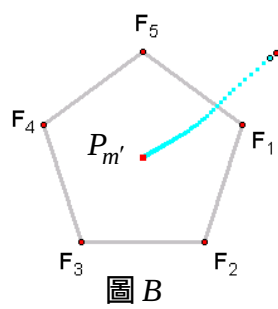
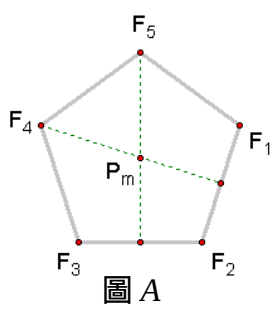
圖 B



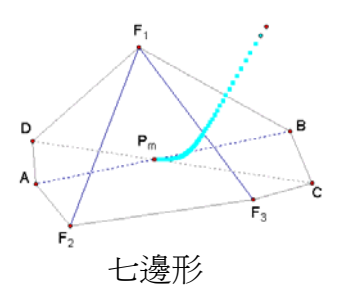
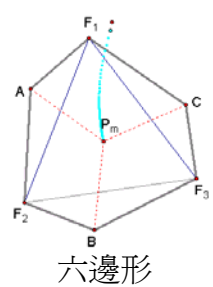
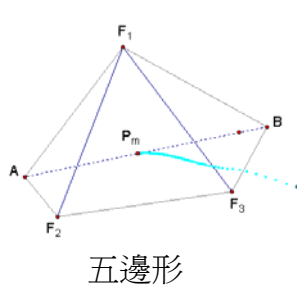
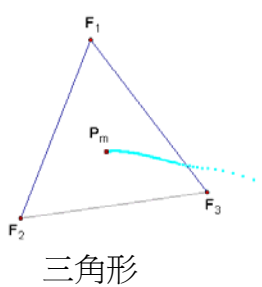
3、



4、正五邊形



5、給定三角形，尋找與此三角形具有共費馬點的任何 n 邊形圖形



【討論】(1).作出 $\Delta F_1F_2F_3$ 的費馬點 P_m ，並過 P_m 作 $\overline{AB}$ 且分別在 $\overline{AB}$ 上過 P_m 的兩側任取兩點

A 、 B ，則五邊形 $F_1AF_2F_3B$ 的費馬點亦為 P_m 。其理由是 P_m 為 $\Delta F_1F_2F_3$ 中平衡中心，今於 P_m 兩端加入兩拉力，在合力抵消下，則新的平衡中心亦為 P_m 。

(2).同理可得五邊形擴增至七邊形 $F_1DAF_2F_3CB$ 的費馬點亦為 P_m ，所以 n 邊形擴展至 $(n+2)$ 邊形亦同此法。

(3).作 $\angle AP_mB = \angle BP_mC = \angle AP_mC = 120^\circ$ ，則 $\overrightarrow{P_mA} + \overrightarrow{P_mB} + \overrightarrow{P_mC} = \vec{0}$ ，故六邊形

$F_1AF_2CF_3B$ 的費馬點亦為 P_m ，所以 n 邊形擴展至 $(n+3)$ 多邊形亦同此法。

從上述的比較，幾乎可以確定以「回復路徑逼近法」所得到的「逼近費馬點」即為費馬點。為什麼會如此神奇呢？檢視「回復路徑逼近法」的操作步驟，我們發現：

- 1、當 k 值越小，其回復路徑越逼真，實際上仍然為有誤差。因為在【步驟 1】，就已經離開過 P_1 點的實際回復路徑，即 $P_1 \rightarrow P_2$ 。
- 2、雖然回復路徑有誤差，但每 $P_i \rightarrow P_{i+1}$ 的步驟，我們皆重新找出「 Q 點」所在位置的合力，所以其合力方向永遠朝著平衡中心。如此操作下去，自然 $P_{m'}$ 會越靠近 P_m 。若 m' 夠大，則 $P_{m'}$ 與 P_m 可視為相同點。

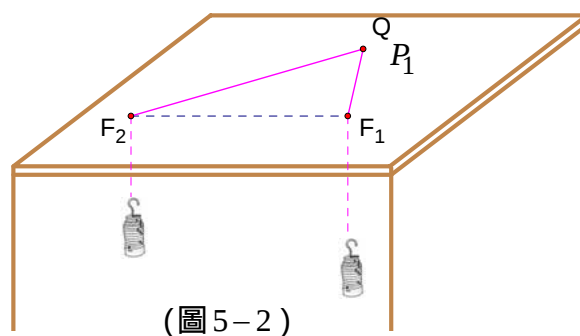
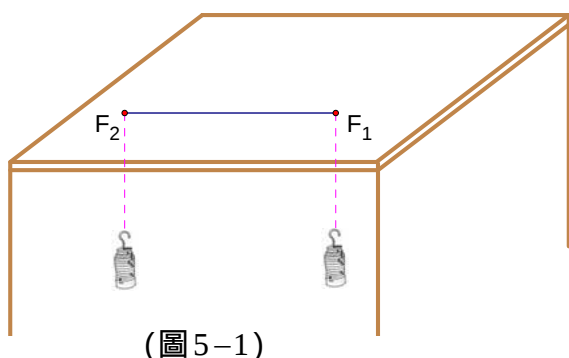
因此，要找尋 n 邊形的費馬點，以我們研究出的「回復路徑逼近法」配合 GSP 作圖即可得到。顯然比「重力平衡實驗－尋找費馬點」更容易、更準確、更經濟及更一般化。

至於真正回復路徑的面貌是什麼？相信是很多人想要了解的，以下是我們的探討：

五、 n 孔系統實際的回復路徑探討？

首先，我們做出兩孔的實驗：

(一)在兩孔系統中，如圖 5-1 將「 Q 點」移往桌面上 P_1 處如圖 5-2 釋放，其回復路徑為如何？





(圖 5-3)



(圖 5-4)

經由上面圖 5-3 及圖 5-4 簡易的實驗，發現「Q 點」移動過程的路徑軌跡像是一條彎曲的曲線。至於為何種曲線？則是我們想瞭解的。

首先，針對圖 5-2 作分析，我們將「Q 點」拉動至 P_1 處，此時：

1、如圖 5-5，由於「Q 點」受到來自 F_1 、 F_2 兩方向等重砝碼產生的拉力，

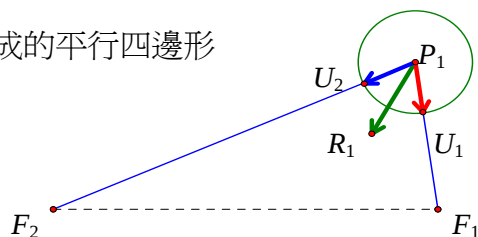
$$\text{即 } |\overrightarrow{P_1U_1}| = |\overrightarrow{P_1U_2}|。$$

2、因為 $|\overrightarrow{P_1U_1}| = |\overrightarrow{P_1U_2}|$ ，所以由 $\overrightarrow{P_1U_1}$ 、 $\overrightarrow{P_1U_2}$ 所形成的平行四邊形

$P_1U_1R_1U_2$ 為一菱形，可得

(1). $\overrightarrow{P_1R_1}$ 為 $\overrightarrow{P_1U_1}$ 、 $\overrightarrow{P_1U_2}$ 的合力。

(2). $\overrightarrow{P_1R_1}$ 平分 $\angle U_1P_1U_2$ 。

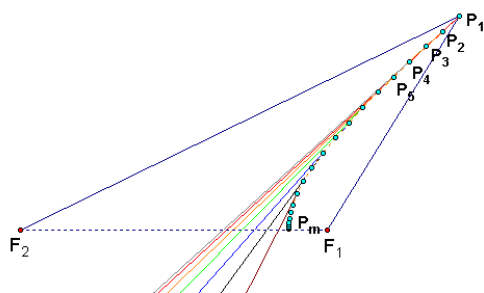


(圖 5-5)

因此，當「Q 點」自 P_1 處釋放，則「Q 點」的移動路徑必定永遠沿著 $\angle F_1QF_2$ 之角平分線方向做移動，直到 $\angle F_1QF_2 = 180^\circ$ ，即系統達到平衡為止。現在我們用前面分析結果：

合力的方向就是角平分線的方向。並按照「回復路徑逼近法」的【步驟 1】、【步驟 2】重

複操作下去，則「Q 點」的移動路徑，是由 $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_m$ 直到 P_m 落在 $\overline{F_1F_2}$ 上(實際上 P_m 只是很接近 $\overline{F_1F_2}$ 上)，透過 GSP 繪圖可得圖形，如圖 5-6。



(圖 5-6)

由圖5-6我們大膽做出猜測：

- 1、當上述操作過程的 k 值取儘量小，圖中的逼近回復路徑為一條曲線。
- 2、過 $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 上的合力方向，其所在的射線為 $\overline{P_i R_i}$ (其中 $\overline{P_i R_i}$ 平分 $\angle F_1 P_i F_2$)，

則 $\overline{P_i R_i}$ 恰為回復路徑所形成曲線的切線。

至於具備這樣結果的曲線到底為何種曲線？老師建議我們上網搜尋或到圖書館尋找相關資料。最後，我們在幾何學辭典中找到下面【定理三】：

【定理三】 $\angle F_1 P F_2$ 角平分線為過 P 點以 F_1 、 F_2 為焦點的雙曲線之切線。

【證明】1、在 $\angle F_1 P F_2$ 上作角平分線 L ，並於 L 上取一點 R 異於 P

2、連接 $\overline{R F_1}$ 、 $\overline{R F_2}$ ，且在 $\overline{P F_2}$ 上取一點 S 使得 $\overline{P S} = \overline{P F_1}$ ，

3、在 $\triangle P S R$ 與 $\triangle P F_1 R$ 中，

$$\because \overline{P S} = \overline{P F_1} \text{ (已知)}$$

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ (} \overline{P R} \text{ 為 } \angle F_1 P F_2 \text{ 的角平分線)}$$

$$\overline{P R} = \overline{P R} \text{ (共用邊)}$$

$$\triangle P R S \cong \triangle P R F_1 \text{ (SAS 全等)}$$

$$\text{則 } \overline{R S} = \overline{R F_1}$$

$$\text{又 } |\overline{P F_2} - \overline{P F_1}| = \overline{F_2 S} > |\overline{R F_2} - \overline{R S}| = |\overline{R F_2} - \overline{R F_1}|$$

可得 R 不在雙曲線上。

即 $\angle F_1 P F_2$ 角平分線與雙曲線僅有一個交點，也就是

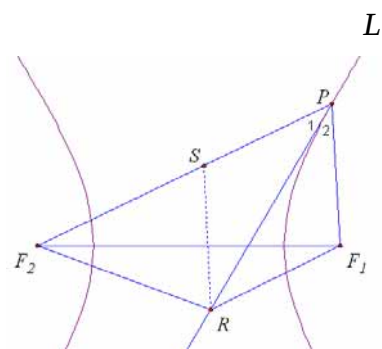
$\angle F_1 P F_2$ 的角平分線為雙曲線過 P 點之切線。(註五)

註五：過 P 以 F_1 、 F_2 為焦點之雙曲線若存在，則此雙曲線必唯一，其理由

是 $|\overline{P F_1} - \overline{P F_2}|$ 為定值。

根據上述【定理三】的結論： $\angle F_1 P F_2$ 角平分線為以 F_1 及 F_2 為焦點的雙曲線之切線。

我們試著導出兩孔系統的「回復路徑方程式」：



(圖5-7)

兩孔系統回復路徑方程式推導：

首先，將兩孔系統坐標化，令 $F_1(c,0)$ 、 $F_2(-c,0)$ 、 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $Q(x, y)$ 及平衡中心 P_m (註六)。

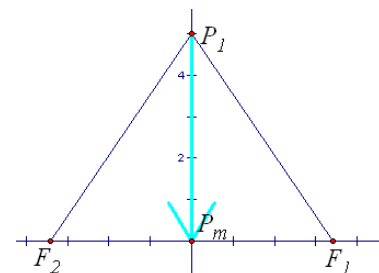
註六：根據力的平衡，可知 $\overline{F_1F_2}$ 上的每一點皆可為兩孔系統的平衡中心。

假設 $|\overline{P_1F_1} - \overline{P_1F_2}| = 2a$ ，則：

1、當 $x_1 = 0$ (即「Q點」於 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線上釋放)，則 $a = 0$

可得「Q點」的「回復路徑」為 $\overline{P_1P_m}$ ，此時 P_m 為原點，

即 $\overline{F_1F_2}$ 的中點。



(圖 5-8)

理由：因為 $\overline{P_1P_m}$ 為 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線，所以當「Q點」在 $\overline{P_1P_m}$ 上， $\overline{QP_m}$ 平分 $\angle F_1QF_2$ 。

即合力方向永遠朝向 $\overline{QP_m}$ ，直到「Q點」靜止於 P_m ，所以 $\overline{P_1P_m}$ 為「Q點」的回復路徑。

2、當 $x_1 \neq 0$ (即「Q點」在 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線外一點釋放)，則

因回復路徑所在的雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

當 $y = 0 \Rightarrow x = \pm a$ ，所以

(1).若 $x_1 > 0$ ，則 $P_m(a,0)$

(2).若 $x_1 < 0$ ，則 $P_m(-a,0)$

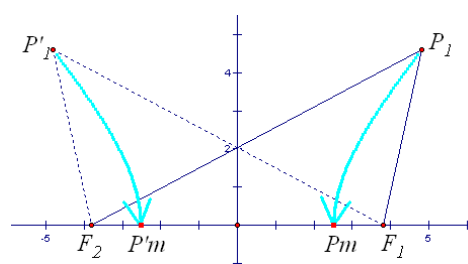
即回復路徑為雙曲線上 $P_1 - P_m$ 的曲線段。

因此可得兩孔系統結論如下：

1、回復路徑為雙曲線上 $P_1 - P_m$ 的曲線段。

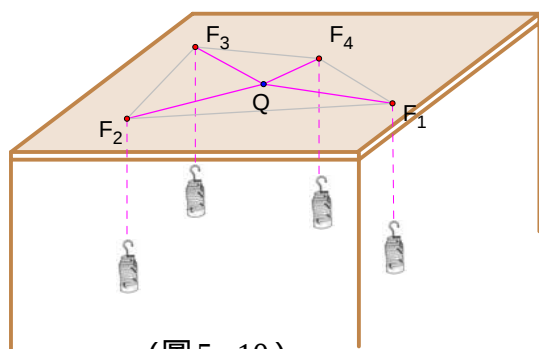
2、合力方向所在直線，為回復路徑的切線。

3、平衡中心 P_m 為 $\overline{F_1F_2}$ 的費馬點。

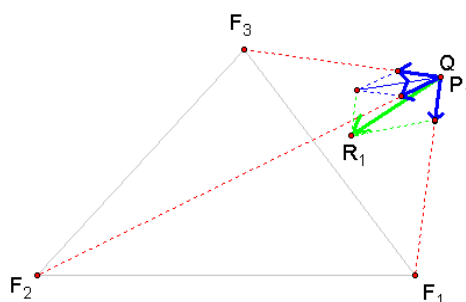


(圖 5-9)

(二) $n(n \geq 3)$ 孔系統中，如圖 5-10。將「 Q 點」移至各頂點 F_i 處釋放，其回復收斂至何處？



(圖 5-10)



(圖 5-11)



(實驗 5-A)



(實驗 5-B)

由圖 5-11 我們無法直接找到類似圖 5-5 中，兩孔系統「角平分線與合力方向」的關係，因此我們試著從物理觀點「 Q 點」的移動是由高位能移動至低位能來著手。在前面總位能關係式(3-1式)，見 P_5 。

$$E_i = Mg[nh - (l_1 + l_2 + \dots + l_n) + (\overline{P_i F_1} + \overline{P_i F_2} + \dots + \overline{P_i F_n})], \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

其中 $nh - (l_1 + l_2 + \dots + l_n)$ 為定值，所以各點 P_i ， $i = 1, 2, 3, \dots, m$ 的總位能 E_i 之大小決定於

$L_i = \overline{P_i F_1} + \overline{P_i F_2} + \dots + \overline{P_i F_n}$ ， $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ，可得「 Q 點」的移動過程當中 $L_1 > L_2 > \dots > L_m$ 。

因此將系統坐標化表示，則平面上 $P_i(x, y)$ 點至各頂點 $F_1(x_1, y_1)$ 、 $F_2(x_2, y_2)$ 、 $\dots$ $F_n(x_n, y_n)$ 的距離總和 L_i ，便可以下列 5-1 式表示：

$$L_i = f(x, y) = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} + \dots + \sqrt{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2}$$

---5-1 式

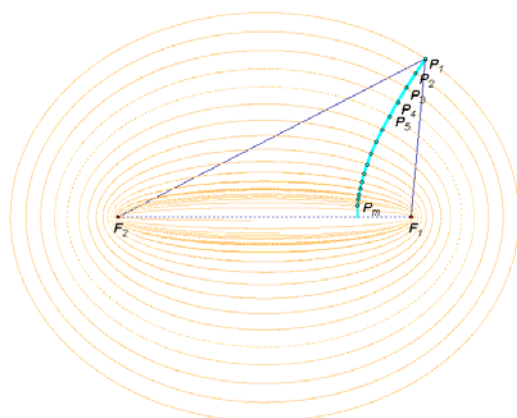
從數學的距離和來看，我們稱之為「等距線方程式」；若由物理的位能來看，等距線方程式亦可稱為「等位能方程式」。

在此發現之下，我們試著重新檢視兩孔系統的等距線方程式。當 $n = 2$ 、兩孔 F_1 及 F_2 在坐標平面上分別位於 X 軸上，令為 $F_1(c,0)$ 與 $F_2(-c,0)$ ，代入等距線方程式 5-1 式可得

$$L_i = f(x, y) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

令 L_i 為一固定值 $2a$ ，依數學上定義可得兩孔系統的等距線方程式的圖形即為橢圓。將

上式經過整理並令 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ，則 $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ (註六)，其等距線圖形與回復路徑如下：



(圖 5-12)

註六：隨著「 Q 點」移動至 P_1 、 P_2 、 $\dots$ 、 P_m 會產生 L_1 、 L_2 、 $\dots$ 、 L_m 的方程式，而這些等距線方程式中的 a 、 b 值事實上是隨著「 Q 點」的移動而作改變，唯一不變的是兩孔至中點的距離 c 值。

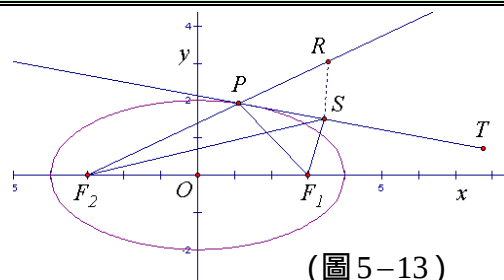
在兩孔系統的探討中很明確知道：對於平面上任意一點 P ，則

- 1、 P 點所受兩端拉力的合力方向就是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分線方向。
- 2、 $\angle F_1PF_2$ 的角平分線就是回復路徑曲線的切線。

那麼現在我們想瞭解回復路徑的切線與等距線方程式是否有數學上的關係？也就是如果能得到其相關性，也許能試著找到 $n \geq 3$ 時的回復路徑。我們在幾何學辭典一書中找到【定理四】，如下：

【定理四】設以 F_1 、 F_2 為焦點橢圓上的任意點 P ，則 $\angle F_1PF_2$ 的內角平分線即為橢圓上過 P 点的法線。

【證明】此證明可以轉化為 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分線為橢圓上過 P 点的切線。



(圖 5-13)

1、設 ΔF_1PF_2 頂點 P 的外角平分線 $\overline{PT}$ 上的任意點為 S ，

2、連結 $\overline{SF_1}$ 、 $\overline{SF_2}$ ，在 $\overline{F_2P}$ 的延長線上取 $\overline{PR} = \overline{PF_1}$

$$\text{因為 } \overline{PF_2} + \overline{PF_1} = \overline{PF_2} + \overline{PR} = \overline{F_2R} < \overline{SF_2} + \overline{SR} = \overline{SF_2} + \overline{SF_1}$$

$$\text{因而 } \overline{PF_2} + \overline{PF_1} < \overline{SF_2} + \overline{SF_1}$$

故點 S 不在橢圓上。

也就是說，在 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分線 $\overline{PT}$ 上，除 P 以外的任意點 S 都不在橢圓上，及 $\overline{PT}$ 和橢圓只有一個交點，所以 $\overline{PT}$ 是橢圓過點 P 的切線，故 $\angle F_1PF_2$ 的內角平分線即為等距線上過點 P 的法線方程式。

綜合上面的推論可得兩孔系統下，若 P 所在的等距線為 α ，其回復路徑為 β ，則：

【結論】

1、等距線 α 與回復路徑 β 分別為共焦點(F_1 、 F_2)的橢圓與雙曲線方程式之圖形。

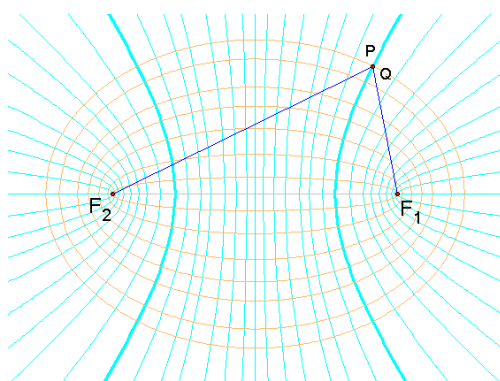
2、過 P 點之等距線 α 的法線恰好為回復路徑曲線 β 的切線；

等距線 α 的切線恰好為回復路徑曲線 β 的法線。

即等距線 α 與回復路徑曲線 β 為「正交曲線」。(註七)

註七：過兩個曲線的任一交點之切線夾角都是 90° ，則稱此兩個曲線互為「正交曲線」。

為了將兩孔系統等距線(橘色)與回復路徑(藍色)關係更清楚的呈現，我們繪圖 5-14：



(圖 5-14)

然而，在 n 孔系統下，過 P 點所在的等距線 α 與回復路徑所在的曲線 β 是否也形成「正交曲線」？

(三)、利用「等距線逼近法」證明等距線與回復路徑為正交曲線

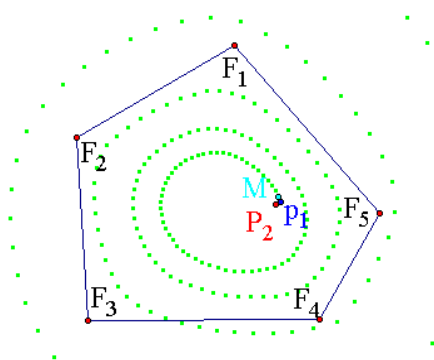
我們想不到一個好的方式來證明，查尋相關資料也未有所得。因此我們先做假設，令 P 點所在的等距線 α 與回復路徑所在的曲線 β 為正交曲線。利用假設結果，我們研究出「等距線逼近法」如下：

【步驟 1】在 n 孔系統下，於平面找任意一點 P_1 ，計算其單位合力方向 $\overrightarrow{P_1 R_1}$ ，並令

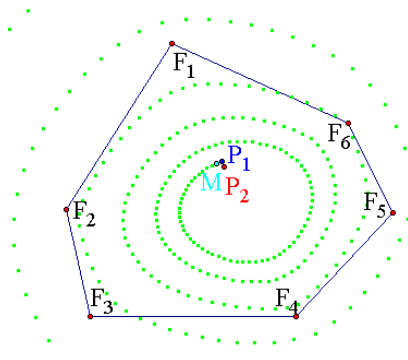
$$\overline{P_1 P_2} = k \overline{P_1 R_1}。$$

【步驟 2】以 P_1 為旋轉中心，將 P_2 順時針旋轉 90° 得到 $\overline{P_1 P_2} = \overline{P_1 M}$ 且 $\overline{P_1 P_2} \perp \overline{P_1 M}$ 。

假若令 k 值儘量的小，透過 GSP 繪圖軟體依上述方式以 P_1 迭代 M 可得曲線圖形如下(以五孔系統與六孔系統為例)



(圖 5-15)



(圖 5-16)

不難發現所得圖形並非等距線(註八)。

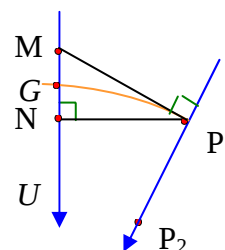
註八：因為以 P_1 為旋轉中心，並將 P_2 旋轉 90° 所得到的 M 點，不管 k 值再怎麼小， M 點勢必永遠落在等距線外側。重複上述【步驟 1】、【步驟 2】依序繪圖，所得圖形與實際等距線的誤差會越來越大。

【步驟 3】內插法修正

- (1)作過 M 的合力 $\overrightarrow{MU}$ 。
- (2)作 $P_1 \perp \overrightarrow{MU}$ 於 N 點。
- (3)令 L_{P_1} ：表示 P_1 至各頂點距離和；

L_M ：表示 M 至各頂點距離和；

L_N ：表示 N 至各頂點距離和。



(圖 5-17)

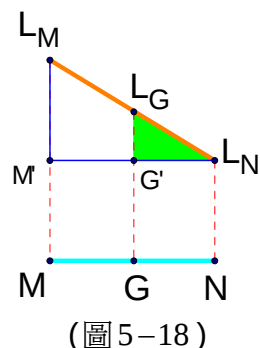
(4)令 $\overline{MN}$ 上一點 G 落在 P_1 所在的等距線上，則 G 至各頂點的距離和 $L_G = L_{P_1}$

(5)將 M 、 G 、 N 與三點所對應的 L_M 、 L_G 、 L_N 記成數對 (M, L_M) 、 (G, L_G) 、 (N, L_N) ，當【步驟 1】的 k 值取儘量小，則上述三個數對可視為共線。

(6)令 $\overline{MG} = x$ ，由(5)可將其關係繪圖如圖 5-18。

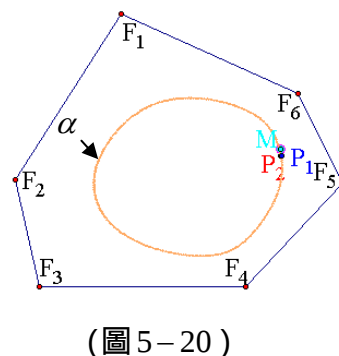
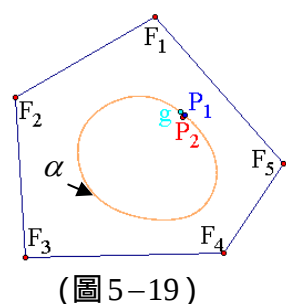
$$\text{則 } \frac{x}{\overline{MN}} = \frac{L_M - L_G}{L_M - L_N} = \frac{L_M - L_{P_1}}{L_M - L_N}, \text{ 可推得}$$

$$x = \frac{L_M - L_{P_1}}{L_M - L_N} \times \overline{MN}$$

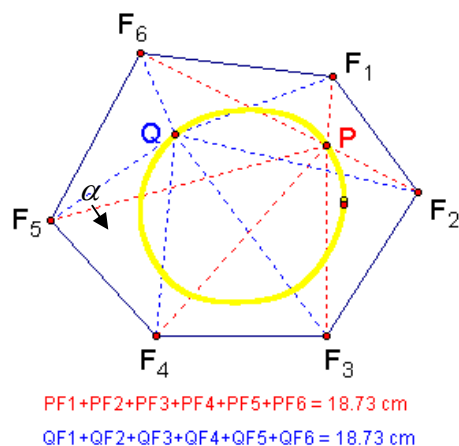


【步驟 4】以 M 點為圓心， x 長度為半徑作圓交 $\overline{MN}$ 於 G 點。接著利用 GSP 迭代功能，可得圖 5-19、圖 5-20。

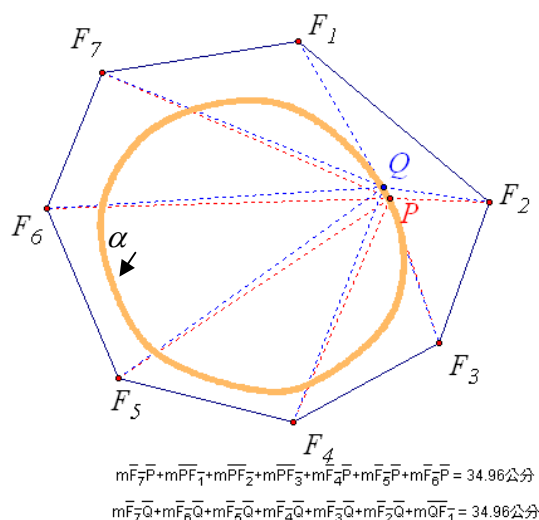
能，可得圖 5-19、圖 5-20。



上述「等距線逼近法」所得到的圖形 α 到底與實際等距線有多大差別？我們利用 GSP 的功能，得到 α 上動點 P 至各頂點之距離和皆為定值。任意改變 n 孔位置所得圖形，仍能有此結果。如(圖 5-21)、(圖 5-22)。



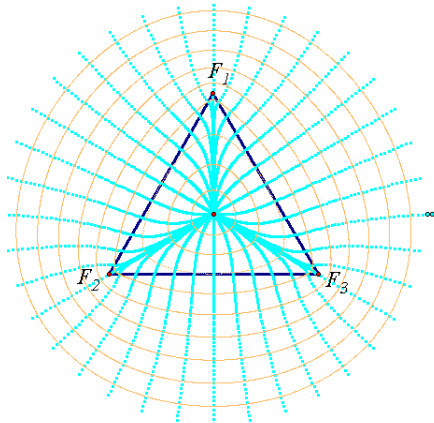
(圖 5-21)



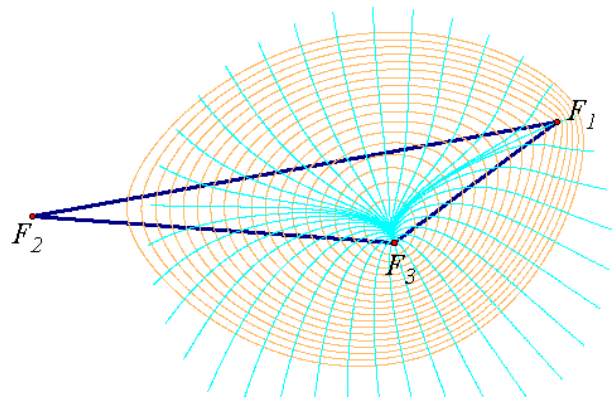
(圖 5-22)

因此，我們相信 $n \geq 3$ 其等距線與回復路徑所在圖形，形成「正交曲線」之假設是正確的。

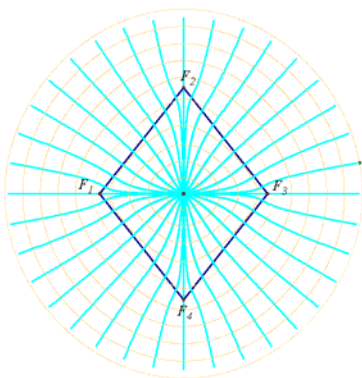
爲了將 n 孔系統等距線(橘色)與回復路徑(藍色)關係更清楚的呈現，我們繪出下列圖形：



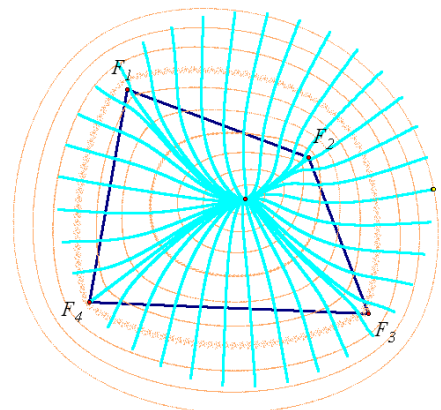
正三角形



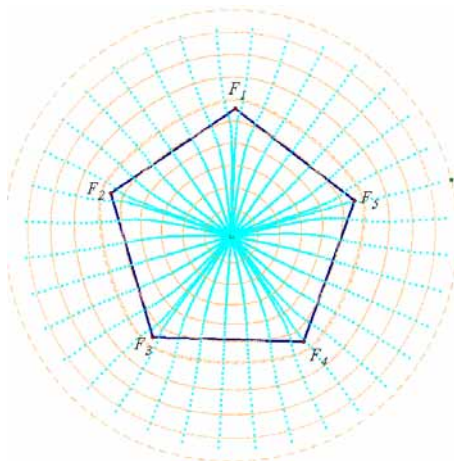
$\angle F_3 > 120^\circ$ 的三角形



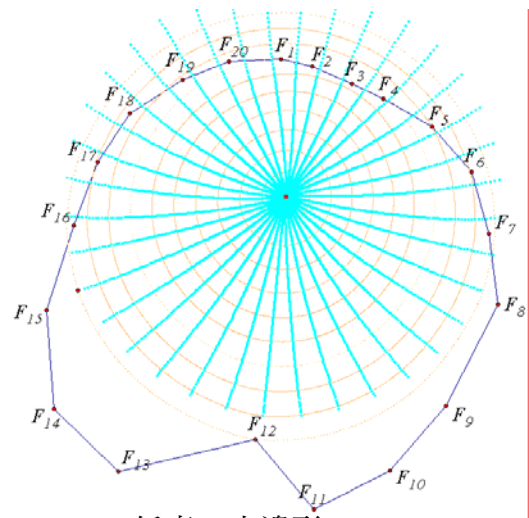
菱形



任意四邊形



正五邊形



任意二十邊形

所以，理論上 n ($n \geq 3$)孔系統的回復路徑所在的方程式，可先求得過 P 點的等距線方程式(5-1式，見 P_{15})，接著求出此等距線方程式的「正交曲線方程式」，並繪出其圖形。所以只要作出不同的兩條回復路徑所在的圖形，則由圖形的交點可得「費馬點」。

只是上述過程中，我們只能表示出 n 孔系統的等距線方程式，至於如何求出其正交曲線方程式？牽涉到高深數學知識，並不是我們能力所及，也許將來能再進一步研究。

伍、結論

一、 n 孔系統的平衡中心即為 n 孔所形成 n 多邊形的費馬點。因此，可透過 n 孔系統重力平衡實驗，尋找費馬點。但實驗誤差大且探討新圖形需再製作新模型，耗時與費工。

二、 $n(n \geq 3)$ 邊形的費馬點必為唯一。

三、 n 孔系統的回復路徑相關結論：

(一)、 $n = 2$ ，令 $F_1(c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ ，若「 Q 點」自 P_1 處作釋放，最後停於 P_m ，則：

1、「 Q 點」的移動方向必永遠沿著合力方向也就是 $\angle F_1 Q F_2$ 之分角線上作移動。

2、(1).當 P_1 在 $\overline{F_1 F_2}$ 的中垂線上，其回復路徑為 $\overline{P_1 P_m}$ ，此時 P_m 在 $\overline{F_1 F_2}$ 的中點。

(2).當 P_1 不在 $\overline{F_1 F_2}$ 的中垂線上，其回復路徑為以 F_1 、 F_2 為焦點，過 P_1 所在雙曲線的曲線段 $P_1 - P_m$ 上。

3、若 P_1 所在位置之等距線為 α 、自 P_1 釋放的回復路徑所在的曲線為 β ，則

(1). α 、 β 分別為共焦點(F_1 、 F_2)的橢圓與雙曲線方程式之圖形。

(2). α 、 β 為「正交曲線」。

4、 $\overline{F_1 F_2}$ 上的點皆為 $\overline{F_1 F_2}$ 的費馬點。

(二)、 $n \geq 3$

1、利用「等距線逼近法」可得出實際的等距線。

2、等距線與回復路徑所在的方程式圖形，會形成「正交曲線」。

3、理論上，利用等距線方程式與等距線與回復路徑的正交關係，可得出回復路徑的方程式，進一步利用兩條回復路徑可得出費馬點。

四、本研究利用「回復路徑逼近法」追蹤到的費馬點，可視為實際上費馬點。因此，以此方法，可簡易地解決任意多邊形的費馬點的尋找，為一大突破。

陸、參考文獻

- 一、高中數學課本第四冊
- 二、解析幾何辭典
- 三、數學教育研究月刊第十七期
- 三、鄭弘旻、林保良(1986)，數學的哈雷慧星—奇妙的費馬點，第二十六屆中華民國中小學科展作品
- 四、王聖麟、陳文玲、洪煒倫、張簡保昌(1996)，費馬點外又一章，第三十六屆中華民國中小學科展作品
- 五、蕭敦仁(2001)，費馬點的研究與應用，第四十一屆中華民國中小學科展作品
- 六、陳璽文、陳璽中、曾資晏(2003)，費馬點的剋星，第四十三屆中華民國中小學科展作品
- 七、鄭旻佳、張佑任(2005)，國家寶藏，第四十五屆中華民國中小學科展作品

附錄一、歷屆中華民國中小學科學覽會與「費馬點」有關的優勝作品之研究方法與結果：

屆別	作品名稱	作者(台北市立中正國中)	指導老師
26	數學的哈雷慧星—奇妙的費馬點	鄭弘旻 林保良	張吉生、林秀珍
1、文章內容主要是探討三角形費馬點的性質。 2、文末提供理論上可以物理方法求得一點至各頂點的距離和為最小值。			
屆別	作品名稱	作者(高雄縣立鳳山國中)	指導老師
36	費馬點外又一章	王聖麟、陳文玲、洪煒倫、張簡保昌	杜鴻祥
以 26 屆作品為基礎，改由相似三角形證明三角形費馬點的性質。			
屆別	作品名稱	作者(高雄市立五福國中)	指導老師
41	費馬點的研究與應用	蕭敦仁	張榮富、余尚芸
參考 26 屆以物理力的平衡及電流實驗尋找三角形與四邊形的費馬點，過程中利用一次函數輔助增加實驗準確度。			
屆別	作品名稱	作者(國立鳳山高級中學)	指導老師
43	費馬點的剋星	陳璽文、陳璽中、曾資晏	蘇武章、簡瑞仁
1、在四邊形內部取兩點 X 、 Y 兩點，使其到四頂點的距離和為最小。 2、在五邊形內部取 P 、 M 、 N 三點，使其到五頂點的距離和為最小。			
屆別	作品名稱	作者(高雄市瑞豐國民中學)	指導老師
45	國家寶藏	鄭旻佳、張佑任	林虹慶、潘怡勳
1、凸奇數邊形的費馬點，存在於內部一點 P 使得 P 與相鄰兩頂點連線夾角為 $\frac{360^\circ}{n}$ 。 2、凸偶數邊形的費馬點，僅討論邊數為 $3m$ (m 為正整數)可由三角形疊合方式尋找。 2、四面體內一點 P 到任兩個頂點連線夾角餘弦值為 $-\frac{1}{3}$ 點。			

【評語】 030422

1. 研究動機值得鼓勵。
2. 回復路徑逼近法，剖析深入討論詳實。
3. 多邊形費馬點的理論探求宜再深入。