中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030421

國王的地毯

學校名稱：臺北縣立江翠國民中學

作者：	指導老師：
國二 王愷 國二 葉家宏	蘇正林

關鍵詞：　最少刀數、切割線焦點

摘要

求出長方形切割的最少刀數判別方法：$K^2+1<N\leqq(K+1)^2+1$，需要 K+2 刀。再從長方形推廣到平行四邊形，找出已切割線之交點數。而梯形主要為平行四邊形之應用，最後再用目前我們已經發現的方法來區分三角形的種類，找出部分三角形的切法。

壹、研究動機

在上數學課時，探討幾何問題時，老師提到有關長方形的切割成正方形的可能性，叫同學們回家查資料，找找看兩刀切成正方形的方法，而我們怎麼想都認為不可能只需兩刀，於是和同學一起討論相關的問題。

貳、研究目的

依研究動機，將研究目的臚列如下

1. 探討長方形切割成正方形所需之最少刀數。
2. 探討平行四邊形切割成正方形所需之最少刀數。
3. 探討梯形切割成正方形所需之最少刀數。
4. 探討三角形切割成正方形所需之最少刀數。

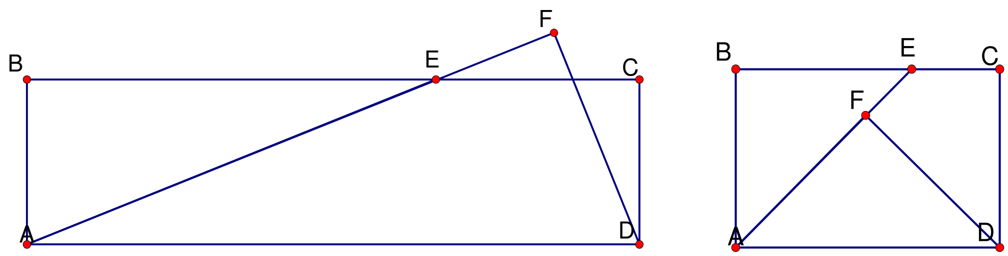
並找出其他圖形切割成正方形的可能性。

參、研究設備與器材

筆、紙、電腦 GSP 軟體。

同時本研究探討的過程必須使用到以下數學定理：

1. 子母相似性質
2. 商高定理
3. 全等形(ASA.SAS……)
4. 所發現之性質，如下圖；其中長方形面積為 $\overline{AE}\times\overline{FD}$ 。(證明如附錄)



肆、研究過程與方法

本部份分為四點討論：

一、長方形切割成正方形所需之最少刀數的討論。

二、平行四邊形切割成正方形所需之最少刀數的討論。

三、梯形切割成正方形所需之最少刀數的討論。

四、三角形切割成正方形所需之最少刀數的討論。

五、其他圖形切割成正方形的討論。

一、 長方形切割成正方形所需之最少刀數的討論

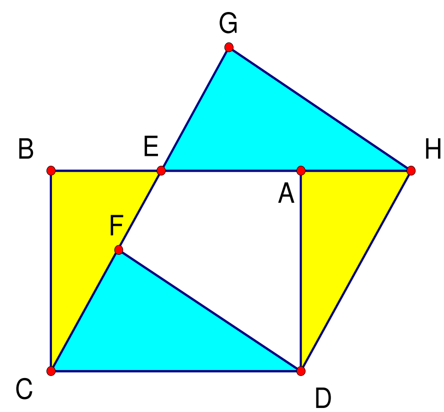
分 **$1<N\leqq 2$** 及 **$2<N\leqq 5$ (不包含 4)** 來討論，並討論 N 的臨界，如下：

(一)$1<N\leqq 2$ 時

即 $\overline{AB}$ 為 N ，$\overline{BC}$ 為 1 (如圖)

1.步驟

可知 $\overline{CE}\times\overline{DF}$ ＝長方形面積＝N
1. 以 C 為圓心，$\sqrt{N}$ 為半徑畫弧，交 $\overline{AB}$ 於 E
2.做 $\overline{CE}$ 之垂線 $\overline{DF}$
可得右圖之正方形，顏色相同者為全等。



2.證明全等

若 FGHD 為已知正方形，並連 $\overline{AH}$ 和 $\overline{EG}$ ，可得以下證明：
(1)證明△BEC≅△AHD
∠EBC＝∠HAD＝90 度，又 $\overline{BC}=\overline{AD}$ ； $\overline{BE}=\overline{AH}$ ，則△BEC≅△HAD (SAS)。
而由此可知 EAH 三點共線。
(2)證明△EGH≅△CFD
因 $\overline{BH}$ 平行 $\overline{CD}$ ，且 $\overline{GC}$ 為截線，則∠GEH 和∠FCD 為同位角，故∠GEH＝∠FCD。
且 $\overline{FG}=\overline{CE}$ ，故 $\overline{CF}=\overline{EG}$ ； $\overline{CD}=\overline{EH}$ ，則△CFD≅△EGH (SAS)。故得知 $1<N\leqq 2$ 時僅需要兩刀即可完成。

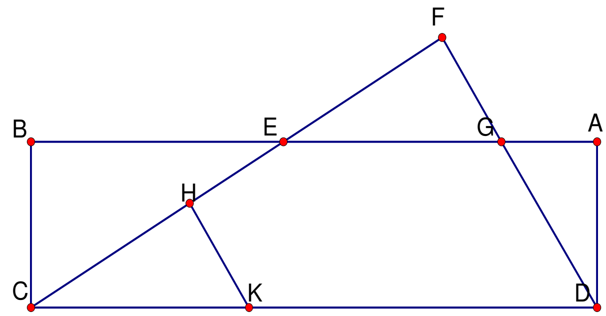
(二)2＜N≦5 時(不包含 4)

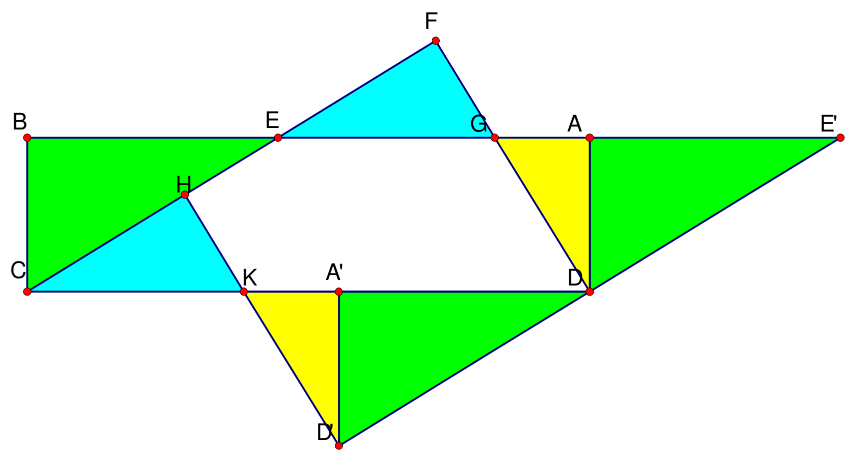
1.步驟

同理$\overline{CE}\times\overline{DF}=N$

1. 以 C 為圓心，$\sqrt{N}$ 為半徑畫弧。
2. 交$\overline{AB}$於 E，將其延長。
3. 做$\overline{CE}$之延長線的垂線$\overline{DF}$，交$\overline{AB}$於 G。
4. 取$\overline{CH}=\overline{EF}$。
5. 做$\overline{CE}$之垂線$\overline{HK}$。

同樣經由重組後可得如下之正方形，同樣顏色的即為全等。





2.證明全等

由$\overline{FH}=\overline{FD}=\sqrt{N}$，且$\overline{FH}$垂直$\overline{FD}$，可知$\overline{FH}$、$\overline{FD}$為正方形之兩邊，所以假想 HFDD’為所求之正方形。

(1)證明綠色部分全等

因$\overline{HD'}$垂直$\overline{CE}$，所以 K 在$\overline{HD'}$之上，且由上個證明可知 EGE’三點共線。

因為$\overline{BE}=\overline{AE'}$　$\overline{BC}=\overline{AD}$，且∠EBC＝∠E’AD＝90°

則△BCE≅△ADE’(SAS)。

(2)同理可證藍色部分全等

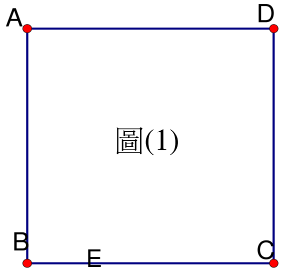
(3)證明黃色＋綠色部分全等

因 GE’＝AB－EG＝CD－CK＝KD’，又∠GE’D＝∠KDD’，∠E’GD＝∠DKD’，則△E’GD≅△DKD’(ASA)。

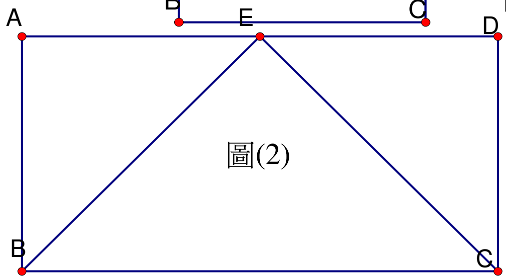
則可以證明 2＜N≦5 時可以在三刀之內切成正方形。

(三)長方形切割概論

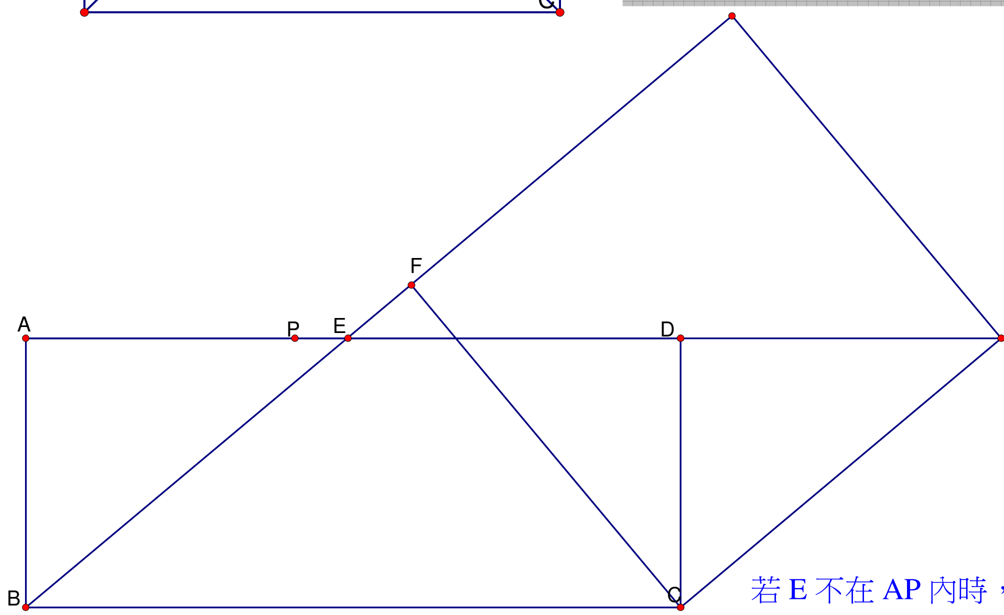
根據以上的切割方式，長方形的切法：先切一刀$\sqrt{N}$ (製作正方形的邊)，再做垂線(製作正方形的角)，根據此概念，得知最少刀數為 2 刀。



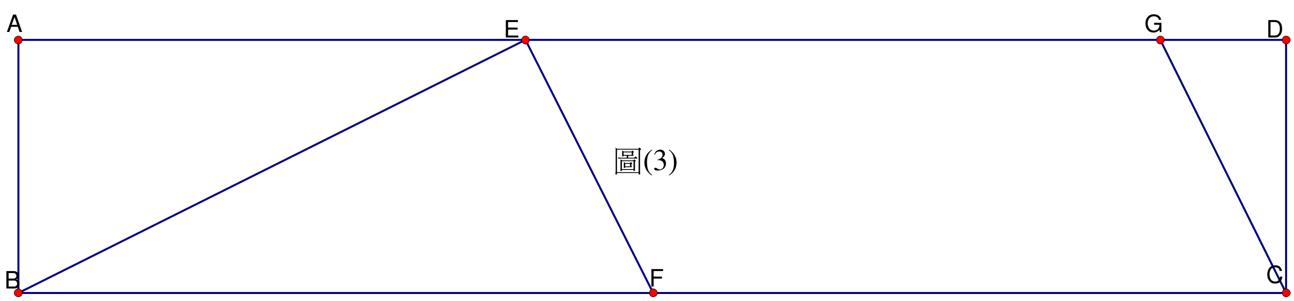
圖(1)為長：寬＝1：1 的長方形，也就是正方形，因為是特殊形狀(N 為完全平方數)，所以只需要 1－1＝0 刀即可完成，也就是不用切。



圖(2)為長：寬＝2：1 的長方形，由以上的切法可知只需兩刀就可以完成，實際作法為：取 $\sqrt{N}$ 為半徑，即為，以 B 為圓心畫弧，交於 AD 於 E，做 BE 之垂線，已知 EC＝2，可得 BE 之垂線通過 C 點。



若 E 不在 AP 內時，無法以切兩刀後拼成正方形



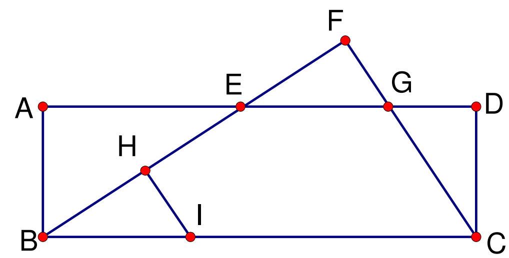
圖(3)為長：寬＝5：1 之長方形，則 $\sqrt{N}$ 為 $\sqrt{5}$，詳細作圖方法請參考上面介紹。先按照切四刀的情形。做圖完成不難發現會有些點是重合的，可知：因 AB＝1 則 AE＝2，所以可知 BF＝2.5，也就是說有些點重合，即得到上圖。也就是說只需要用到三刀，即此為切三刀的臨界點。

(四)N 的臨界點與小結

由以上推論可知 N 為某個範圍時，即可判斷其所需之刀數。

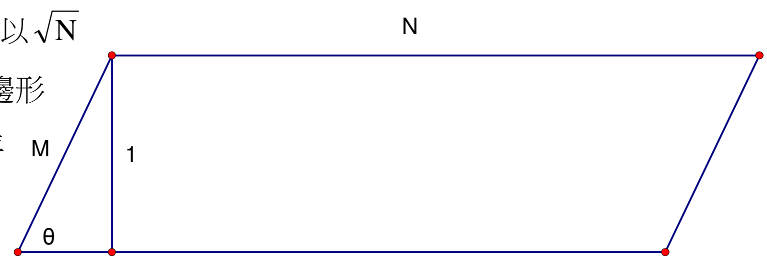
此即為 **$K^2+1^2<N\leqq(K+1)^2+1^2$，就需要 $K+2$ 刀**，在此以下列之圖片來解釋

從以上之結果歸納出每次切的第一刀必是 $\sqrt{N}$，而切第一刀時所造成一個三角形，可知其三邊分別是 $\sqrt{N}$、1、$\sqrt{N-1}$，而由相似形可知 BF＝$\sqrt{N}\times\sqrt{N-1}$，而只有當 $\sqrt{N-1}$ 為正整數，才會使最後一刀的垂足與 E 重疊。因此當 $\sqrt{N-1}$＝正整數時，即 N＝K^2+1^2 時為各個最少刀數之臨界點。

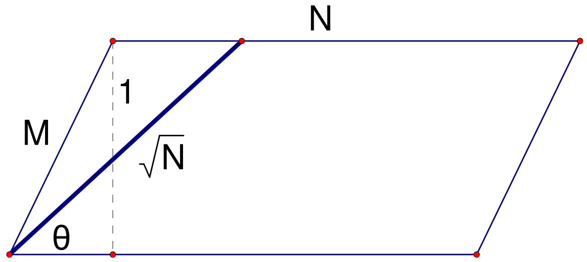


二、　平行四邊形切割成正方形所需之最少刀數的討論

因任何平行四邊形的底比高皆可表示為 N：1（N>1），故對所有平行四邊形高為 1 時的情況討論，但多了一個變數－*斜邊*，我們設斜邊為 M（M>1），且設斜邊和底所形成的銳角為 θ。在長方形的切割方法已知：第一刀以 $\sqrt{N}$ 為長度切下，但是我們發現在平行四邊形中，當 θ 很小時第一刀切下去卻不在平行四邊形之內，跑到了四邊形之外，那這樣切的不就變的沒有意義了嗎？於是必須分三種情況來討論，分 $\sin\theta>\frac{1}{\sqrt{N}}$，$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{N}}$，及 $\sin\theta<\frac{1}{\sqrt{N}}$ 三項加以討論。如下：



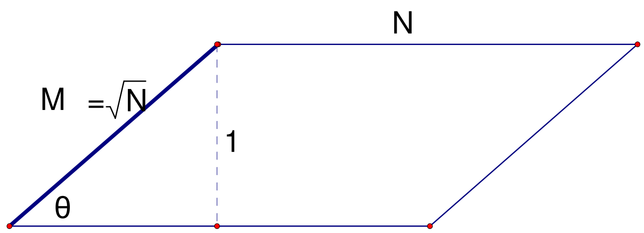
(一) $\sin\theta > \frac{1}{\sqrt{N}}$ 即 $M < \sqrt{N}$



第 1 種情況

第一刀切在平行四邊形內，有意義。此種情況為最好辦的，切法和長方形完全一樣，由於長方形的切割原理是切出所求之正方形邊長，再將第一刀切下的那塊平移到右邊，在不會被影響到刀數的情況下，切其他地方，而第 1 種情況正好符合這一個條件，因此平行四邊形 $\sin\theta > \frac{1}{\sqrt{N}}$ 時和長方形之判斷方法一模一樣，都是 $K^2+1^2 < N \leqq (K+1)^2+1^2$ 就需要 $K+2$ 刀。

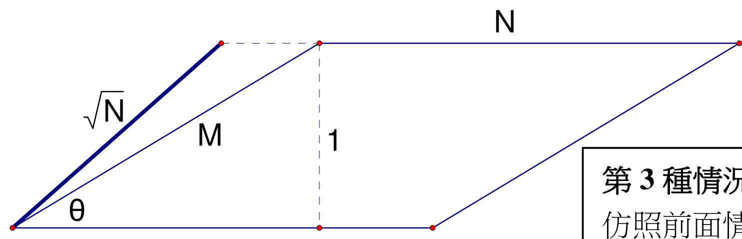
(二) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{N}}$，即 $M = \sqrt{N}$



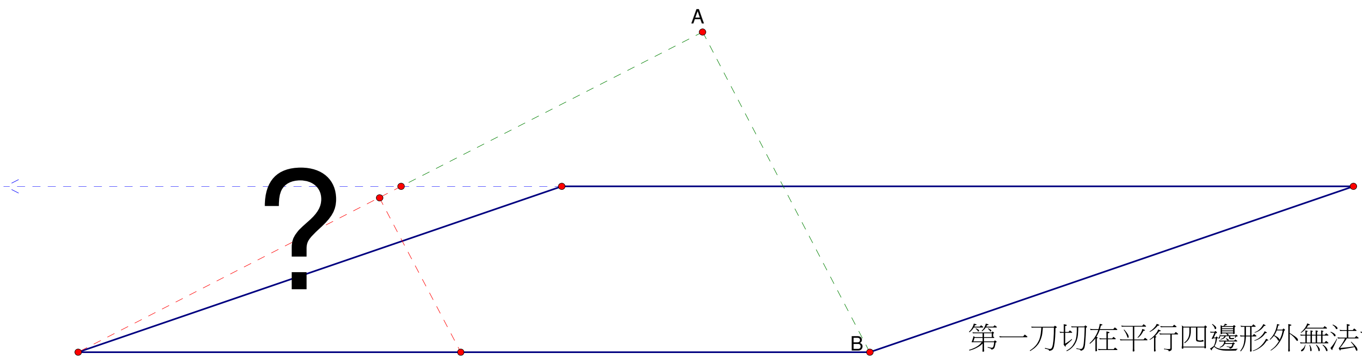
第 2 種情況

第一刀切在平行四邊形的邊上，無意義，多切了一刀。和第 1 種情況之切法相同，但第一刀 $\sqrt{N}$ 為平行四邊形之斜邊了，故比第 1 種情況少 1 刀。所需之刀數為：$K^2+1^2 < N \leqq (K+1)^2+1^2$ 就需要 $K+1$ 刀。

(三) **$\sin\theta < \frac{1}{\sqrt{N}}$　　即 $M > \sqrt{N}$**

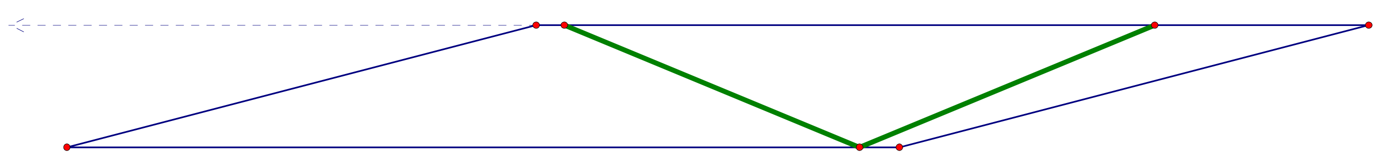


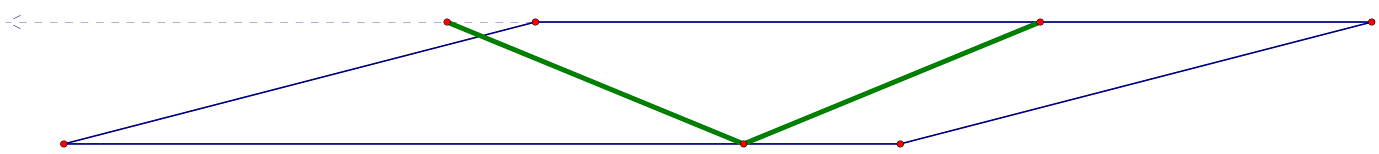
第 3 種情況
仿照前面情況之切法，發現居然第一刀跑出去了(如下圖)。



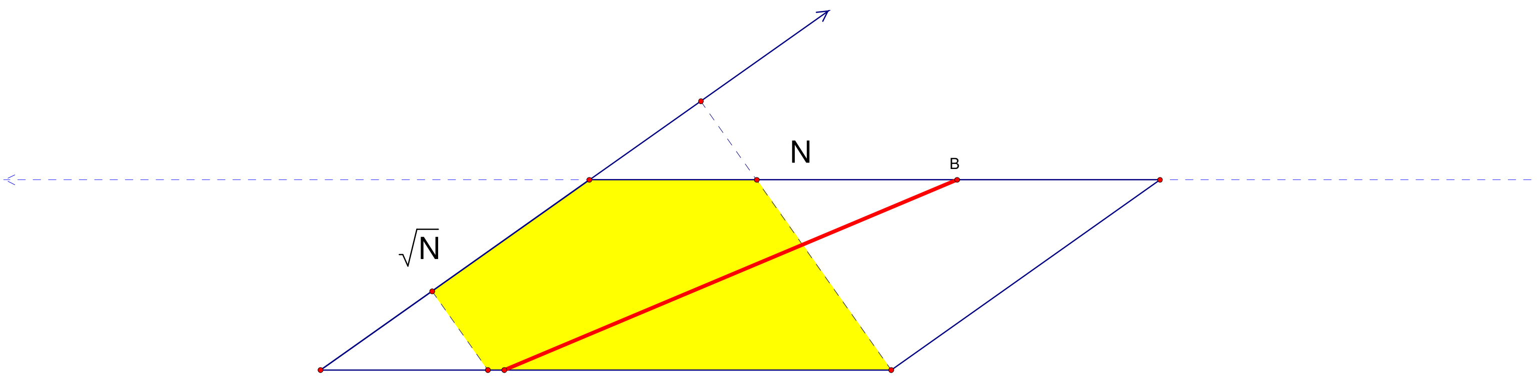
第一刀切在平行四邊形外無法切。

藍色虛線為延長線，綠色和紅色為需要切割的部份，這便是仿照正方形的切法，但是，仔細觀察紅色虛線之部分，發現它所切的部份是在平行四邊形之外。於是考慮此第一刀並非在頂點上的情況，也就是第一刀一樣是切 $\sqrt{N}$ ，但是只要切的起始點和結束點在平行四邊形上端和下端，如下圖。

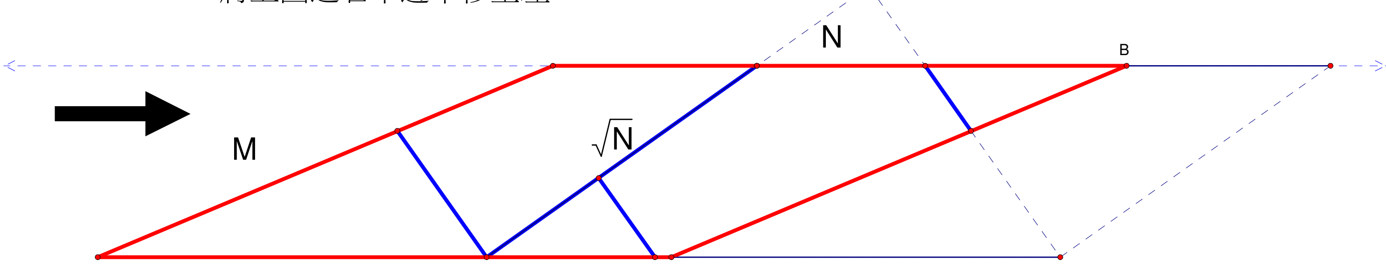




因此，我們採用**逆推**的方式，假設已將 M＞$\sqrt{N}$ 的平行四邊形，經由一刀，變成 M = $\sqrt{N}$ 的情形，再照第二種情況切割，最後將原先的 M 放入平行四邊形並討論刀數，如下頁圖，是一個 M = $\sqrt{N}$ 的平行四邊形，紅線為 M。討論如下：



將上圖之右半邊平移至左

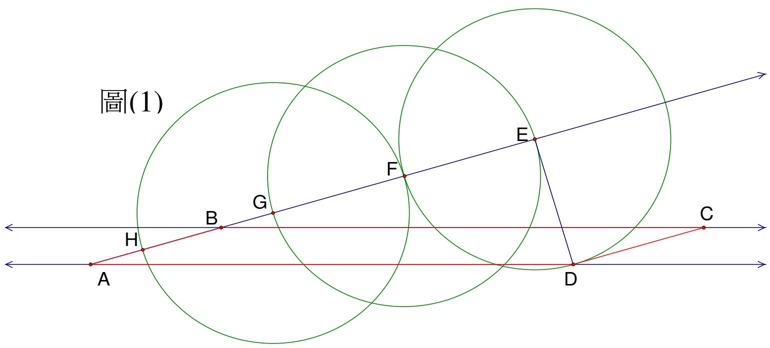


圖中，紅色粗線代表長為 N，斜邊為 M 的平行四邊形(原題設)，藍色粗線則代表所需切割之處。

至於最少刀數確必須取決於上圖的選取線段要訣：必須選取與底為 N，斜邊為 $\sqrt{N}$ 的平行四邊形的切割線和斜邊與長所形成之最少交點且連接上下邊的 M，因為交於一個交點，便會在還原時多出一刀，亦即，此圖形之最少刀數即為：M 和線段的最少交點數＋1(切 M 這一刀)＋N 和 $\sqrt{N}$ 之平行四邊形的切割刀數。

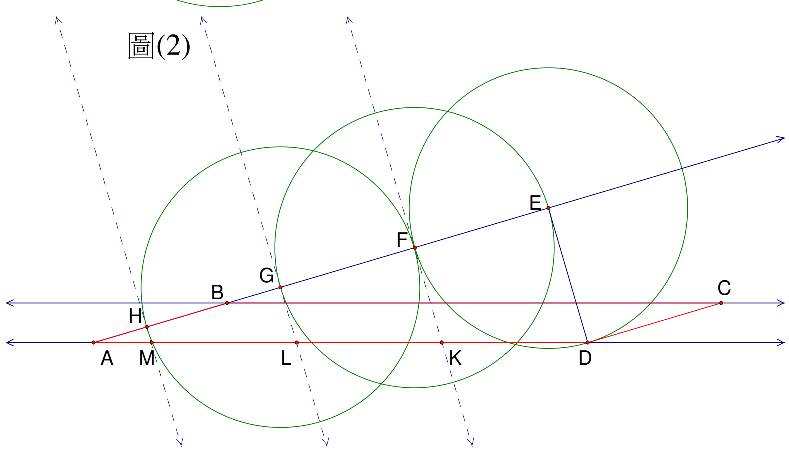
M＞$\sqrt{N}$ 時最少刀數概論

圖(1)



圖(1)紅色的邊為以 N 為長 $\sqrt{N}$ 為斜邊的平行四邊形的長與斜邊，做圖方法請參見長方形之方法。在此為已做到了做 AB 延長線再與平行四邊形之點 D 做垂足，此垂足為 E，接下來便是做以 $\sqrt{N}$ 為半徑 E 為圓心所畫一圓，且與 AB 延長線交於 F，再以 $\sqrt{N}$ 為半徑 F 為圓心所畫一圓，以此類推。可知 EF＝FG＝GH。

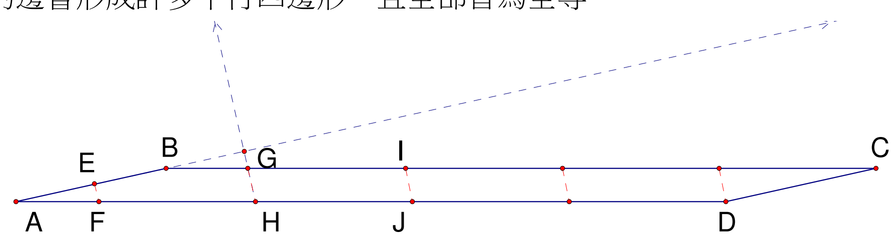
圖(2)



再做 F、G、H 之垂線，分別交 AD 於 K、L、M(如圖 2)，易知 DK＝KL＝LM。此三個和原平行四邊形邊所形成的平行四邊形皆為全等(除了有一個不完整)，這些全等平行四邊形個數(含不完整的)即為以 $\sqrt{N}$ 及 N 為邊長的平行四邊形所需之刀數。(假設此個數為 T)。

當 N 趨近於無限大時，此時 sinθ 會趨近於 0，而且在底為 N 斜邊為 $\sqrt{N}$ 時的平行四邊形，所需要的切割線和平行四邊形的邊會形成許多平行四邊形，且全部皆為全等。

此以以下之圖做解釋。

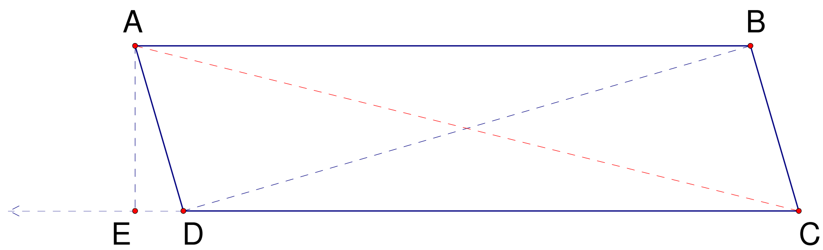


連 GF，則由做圖中的步驟可知∠FGH＝90°，則 AB 平行 FG，則可知∠GFH＝∠BAH＝θ，且 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}$，又 FG＝AB＝$\sqrt{N}$，則 $FH=\dfrac{AB}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{N}}{\dfrac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}}=\dfrac{N}{\sqrt{N-1}}$＝HJ……(所有相鄰的上下相連之切割線的端點的長度皆為此)，又因∠GFH＝θ，且∠FGH＝90°，則可得∠GHF＝90°－θ。

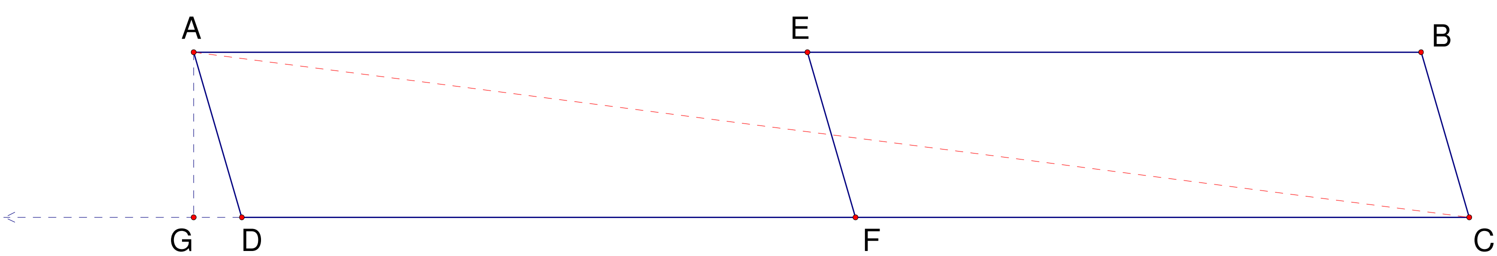
1.無相交

我們直接以所分割出的平行四邊形來做討論。

假設此平行四邊形 ABCD 為切割線和邊長所構成的平行四邊形之一，則 DC＝$\frac{N}{\sqrt{N-1}}$……(1)，作 CD 延長線，做 AE 垂直 CD，E 為垂足，則 AE＝1(由原圖形得知)，又 sin∠ADE＝cosθ，則 AD＝$\frac{\overline{AE}}{\sin\angle ADE}=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}}$ (2)，則 $AC^2=AD^2+DC^2-2AD\times DC\times\cos ADC=(1)^2+(2)^2-2(1)(2)\cos(90°+\theta)=\frac{N^2+3N}{N-1}$ (可以商高定理求)，將其開根號即可得 AC 的長度了，但是此種情況必須要在 N≧5 時(也就是 T≧2)才可成立，因為當 N＜5 時，根本無法構成一個完整的平行四邊形。因此在此所說的這種情況，即當 M≦ AC 時，必可以放入此平行四邊形，所以已經找出了不會相交的情況，即為 M 的一個界限。



2.相交於一點



要得到以下的結論，必須先符合 N≧10(也就是 T≧3)。已知 DF 的長度為：$\frac{N}{\sqrt{N-1}}$……(1)且 AD 長度為：$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}}$……(2)，則 DC＝$\frac{2N}{\sqrt{N-1}}$，cos∠ADE＝cos(90°＋θ)＝－sinθ，則依然可以用餘弦定理求，即 $AC^2=AD^2+DC^2-2\times AD\times DC\times\cos 90°+\theta=(2\times\frac{N}{\sqrt{N-1}})^2+(\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}})^2-2\times2\frac{N}{\sqrt{N-1}}(\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}})(-\sin\theta)=\frac{4N^2+5N}{N-1}$。

交於兩點、三點……等同上。

3.M 的界限一般化

假設此為交於 L－1 點時 M 的界限，且符合要求 $N\geqq(L+2)^2+1$，由上方的式子可知：$AC^2=$

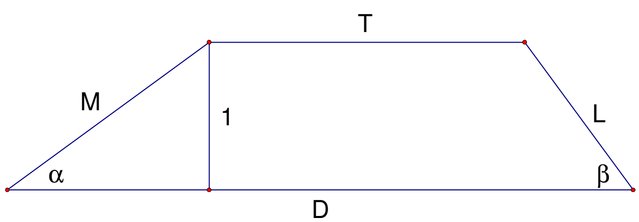
$(L\times\frac{N}{\sqrt{N-1}})^2+(\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}})^2+L(\frac{N}{\sqrt{N-1}})(\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}})\sin\theta$，此為已經化簡過的了，代入(1)＝ $\frac{N}{\sqrt{N-1}}$，(2)＝ $\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}}$，可以得到：$AC^2=\frac{L^2N^2}{N-1}+\frac{N}{N-1}+2\times L\times N\times\sqrt{N}\times\frac{\sin\theta}{N-1}=\frac{L^2N^2+2LN+N}{N-1}$ 此即為 M^2 的界限之一般式。

因為已知 M^2 的界限了，因此平行四邊形的最少刀數判斷變的更加容易了。即將 M^2 之區間在 $\frac{(L-1)^2N^2+2(L-1)N+N}{N-1}$ 與 $\frac{L^2N^2+2LN+N}{N-1}$ 之間時，便由長方形之判別方式的刀數再加上 L 即為最少刀數。

三、　梯形切割成正方形所需之最少刀數的討論。

為了方便計算，所以令面積為 N，高為 1，而從簡易的推斷可知 M≧1，L≧1，T＋D＝2N，所以在此仍然是以正方形的邊長 $\sqrt{N}$ 為討論。

考慮 M＝ $\sqrt{N}$，且 β＝90°，且 N≧1 時。



(一)M＝ $\sqrt{N}$，且 β＝90°，N≧1 時的梯形

1.做圖方法

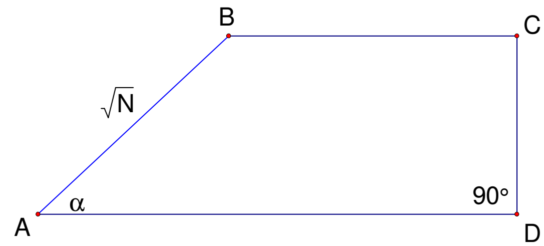
(1)作 DH 垂直 AB，H 為垂足。

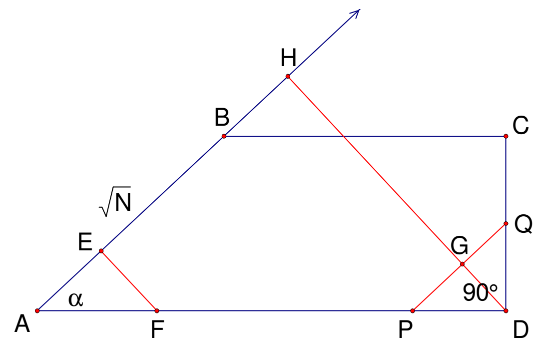
(2)以 $\sqrt{N}$ 為半徑，H 為圓心畫弧，交 AB 於 E。

(3)做 EF 垂直 AB，且 F 在 AD 上。

(4)以 $\sqrt{N}$ 為半徑，H 為圓心畫弧交 HD 於 G。

(5)做 HD 的垂直線 PQ，PQ 過 G，且 P 在 AD 上，Q 在 DC 上。
如圖上的紅色線即為所求。





2.證明全等

(1)因為∠RHB＝90°＝∠FEA，又 AB＝EH，BE＝BE，則 BH＝AE，且因 AD 平行 BC，所以∠HBR＝∠EAF，則得△BHR≅△AEF。

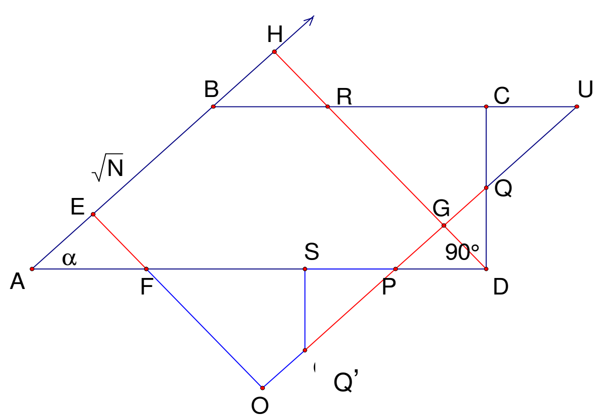
(2)分別延長 EF、GP 交於 O，因 HG＝HE＝ $\sqrt{N}$ ，且∠EHG＝∠HGO＝∠HEO＝90°，則可知道 HEOG 為正方形。

(3)因為 HG＝ $\sqrt{N}$ ，則 AB 和 PU 的距離為 $\sqrt{N}$，則平行四邊形 ABUP 的面積＝梯形 ABCD 的面積，則 $S_{\triangle PQD}$＝$S_{\triangle CQU}$，又因 CU 平行 PD，則可知兩三角形相似，而面積又相等，則△PQD≅△UQC，則可將△PQD 旋轉至△UQC。

(4)因為 ABUP 為平行四邊形，則 AB

＝PU，BU＝AP，又△BHR≅△AEF

則 BR＝AF，則 RU＝FP，且 PU＝AB＝HE＝OG，PG＝PG，則 GU＝OP，∠RGU＝∠Q＝90°，則



3.一般式

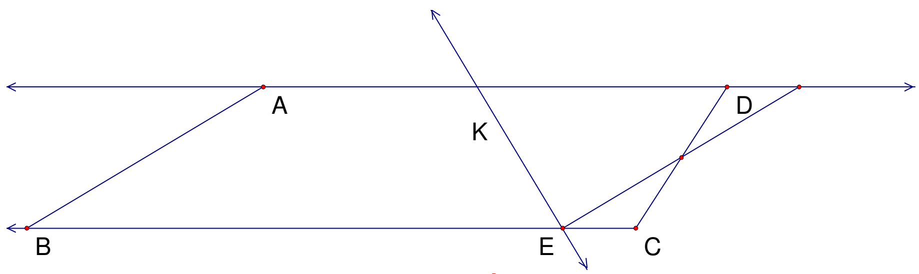
而在這種情況下，可發現 GD 為一多出來的切割線，只是因為剛好切到，所以不切 GD 也是沒有關係的，所以將其以平行四邊形 $\sqrt{N}$ 和 N 的情況討論，因為 M＝ $\sqrt{N}$ ，所以一條邊已經出來了，再取 CD 中點 Q，做 AB 的平行線過 Q 點，分別交 BC、AD 的延長線於 U、P，於是可得平行四邊形的圖形，又此圖形的切割刀數在之前已討論過了，即當為 $\sqrt{N}$ 和 N 時，

且 $K^2+1^2<N\leqq(K+1)^2+1^2$ 就需要 $K+1$ 刀。

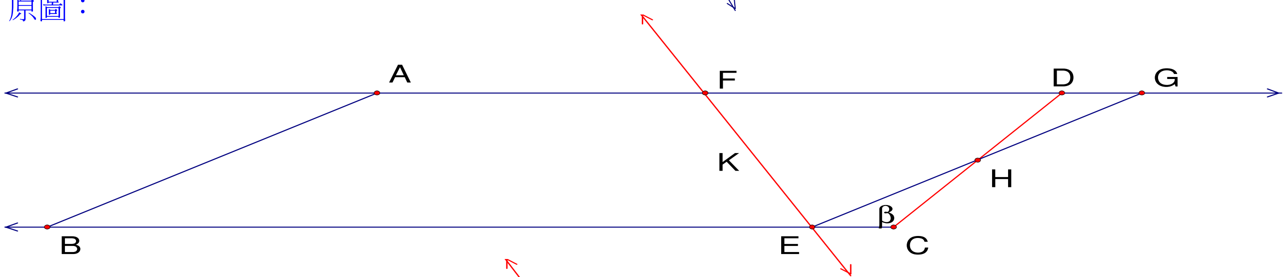
又因梯形需要切一刀變成平行四邊形，所以需要再多加一刀得 $K^2+1^2<N\leqq(K+1)^2+1^2$ 就需要 $K+2$ 刀。

(二)$M=\sqrt{N}$，且 $\beta\neq 90°$，$N\geqq 1$ 時

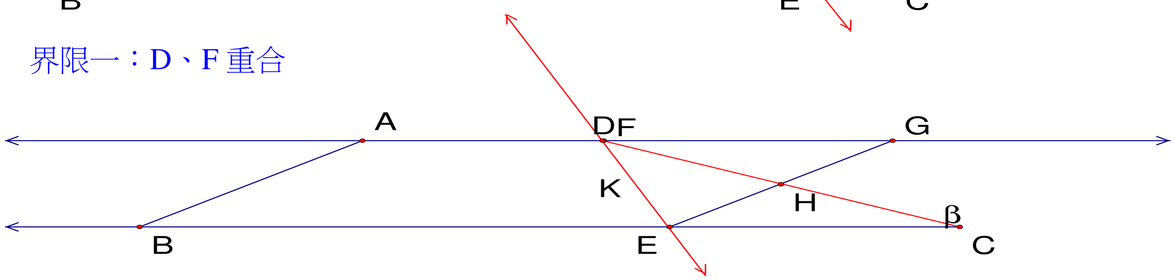
我們發現當 β 在某個界限之內，則可直接切成平行四邊形來討論，而在此就是要將界限求出來。



原圖：



界限一：D、F 重合



界限一：當 D 在 F 的左端，此時必會產生交點，而導致刀數多了 1 刀以上，所以找出此界限的範圍。

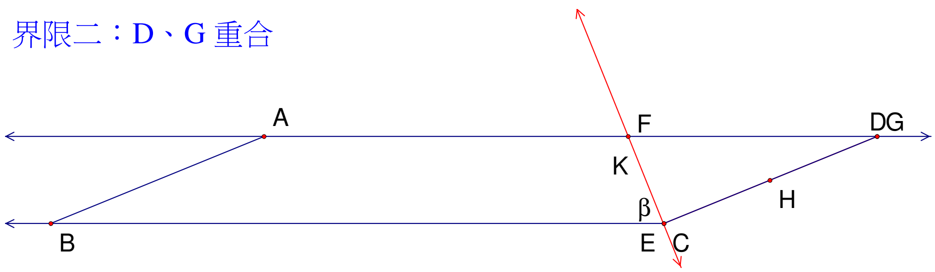
當 F、D 重合時，取 AG 垂線過 F，交 BC 於 O，從做圖方法可知：$\angle FEO=90°-\alpha=\angle EGF$，可知：$OE=\dfrac{1}{\sqrt{N-1}}$，$OD=1$，$FG=\sqrt{N-1}+\dfrac{1}{\sqrt{N-1}}=EC$，則 $OC=\sqrt{N-1}+\dfrac{2}{\sqrt{N-1}}$，得

$FC=\sqrt{N+\dfrac{4}{N-1}+4}$，$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{N-1}+\dfrac{2}{\sqrt{N-1}}}{\sqrt{N+\dfrac{4}{N-1}+4}}$，經化簡可得 $\cos\beta=\dfrac{N+1}{\sqrt{N^2+3N}}$。

當 $\dfrac{N+1}{\sqrt{N^2+3N}}\geqq\cos\beta>-\dfrac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}$ $\left(\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}\text{ 為特例}\right)$時，切完後再以平行四邊形判斷法

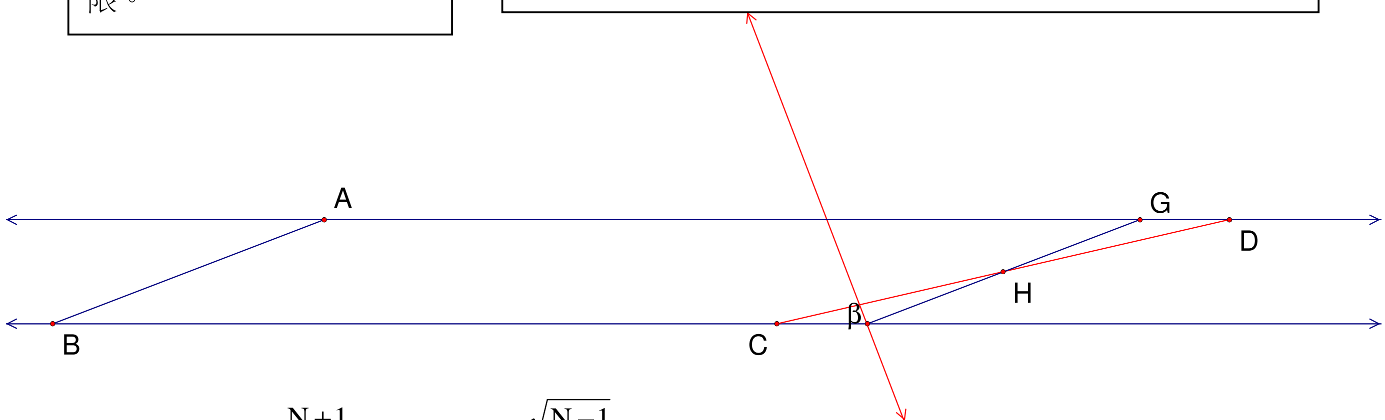
去求其所需刀數，得到和 $\beta=90°$時同樣的解 $K^2+1^2<N\leqq(K+1)^2+1^2$ 就需要 $K+2$ 刀。

界限二：D、G 重合



界限二：當 D 在 G 的右端時，兩紅色線必會在長方形內相交，因此而會多一刀，所以亦需找出其的界限。

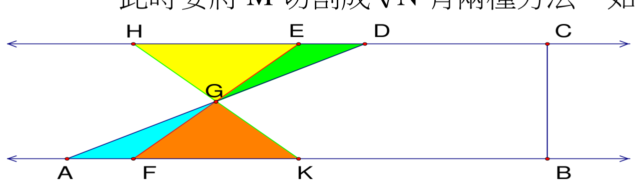
當 D、G 重合時，這便是一個平行四邊形($\sqrt{N}$ 和 N)，此時 $\beta=180-\alpha$，$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}$，這即為界限二的臨界值。



當 β 不滿足 $\dfrac{N+1}{\sqrt{N^2+3N}}\geqq\cos\beta\geqq-\dfrac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}$ 時，即有可能增加刀數。

(三)$M\neq\sqrt{N}$，且 $\beta=90°$，$N\geqq1$ 時，且令 $\alpha<90°$

此時要將 M 切割成 $\sqrt{N}$ 有兩種方法，如下圖。原梯形為 ABCD。$EF=HK=\sqrt{N}$。

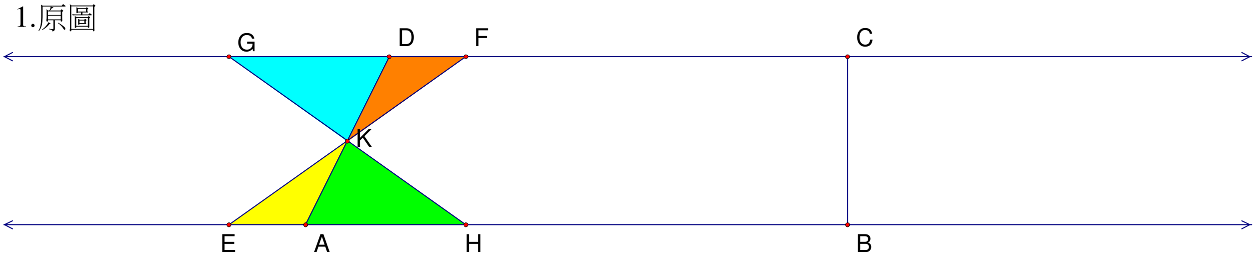


第一種方法，切 EF，因△AGF≅△DGE，則將△AGF 搬至△DGE 使成為一個 $M=\sqrt{N}$ 的梯形，即按照前述說法所切割，則可判斷。第二種方法，切 HK，因△HGE≅△KGF，則將△HGE 搬至△KGF 使成為一個 $M=\sqrt{N}$ 的梯形，接下來同上。

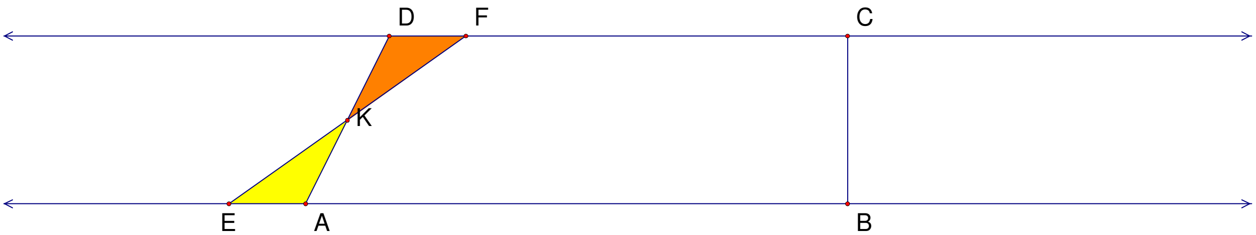
因為當這兩種方法不同時，已切割線不同而有可能影響到的交點數有可能不同。

如下三圖。原梯形為 ABCD。EF＝GH＝$\sqrt{N}$ 。

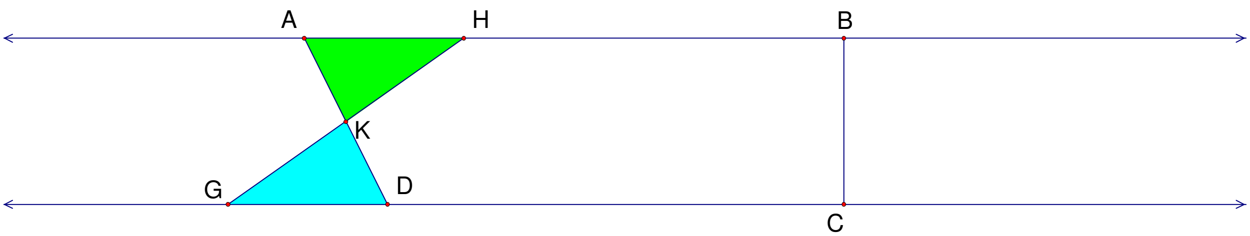
1.原圖



2.分割一



3.分割二(鏡射後)



2.3.的情況，視與切割線的交點數，因此兩種情況皆必須討論。

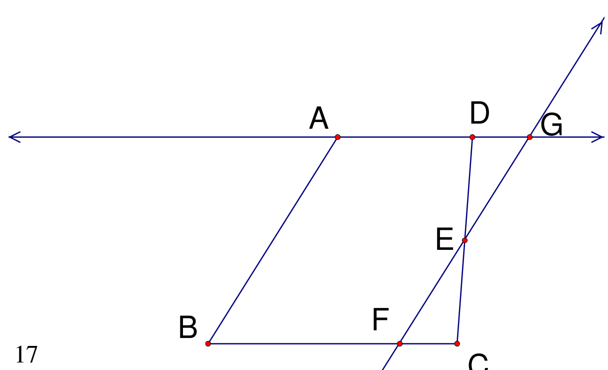
討論完後依舊使用 M＝$\sqrt{N}$ ，且 β＝90°，N≧1 時的判斷式來判斷到底需要用多少刀。

(四)M≠$\sqrt{N}$ ，且 β≠90°，N≧1 時

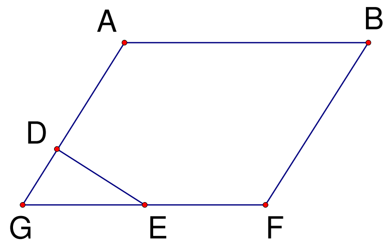
和 M≠$\sqrt{N}$，且 β＝90°，N≧1 時的判斷是相似的，一開始先將 M 切成$\sqrt{N}$，有兩種切法(在此不多加說明)，再以 M＝$\sqrt{N}$ ，且 β≠90°，N≧1 時的判斷式來判斷，或者在切割的過程中自行判斷，因為變數太多，所以在此不多加解釋。

(五)N＜1 時

當 N＜1 時，因為我們必須切成$\sqrt{N}$ ＝M＞1 的圖形，但當 N 小於 1 時，此條件卻不合了，所以我們發現以上方法皆不能用了，只好另尋新路。



當這種情況發生時，就該換個方向想想看，第一部仍以切割成平行四邊形為主，而切成平行四邊形又有兩種情況，兩種都以以下方法試試看，找出最少的刀數。



1.步驟(原梯形 ABCD)

(1)作 DC 中點 E，過 E 做 AB 平行線，分別交 AD、BC 於 G、F。
(2)取出其中的 ABFG，將其旋轉再鏡射，得到左圖。

此圖中的 AG＝原本的 N，AB＝原本的 M，此時將 M、N 立場倒過來，因為 M＞1，又面積 N＜1，則代表 M＞M 上的高 M_h，而得到這個式子時，再將 M_h 放大為 1，M、N 跟著放大，這就是一個平行四邊形了。
但須注意的是 DE 線段，因為 DE 是已切割線，所以被切到時必須要再多加一刀，但有時也會因為和必須切割的線段重合，而少一刀，這些也因為變數太多，所以只講解作法，不多加說明一般式。

(六)補充說明：

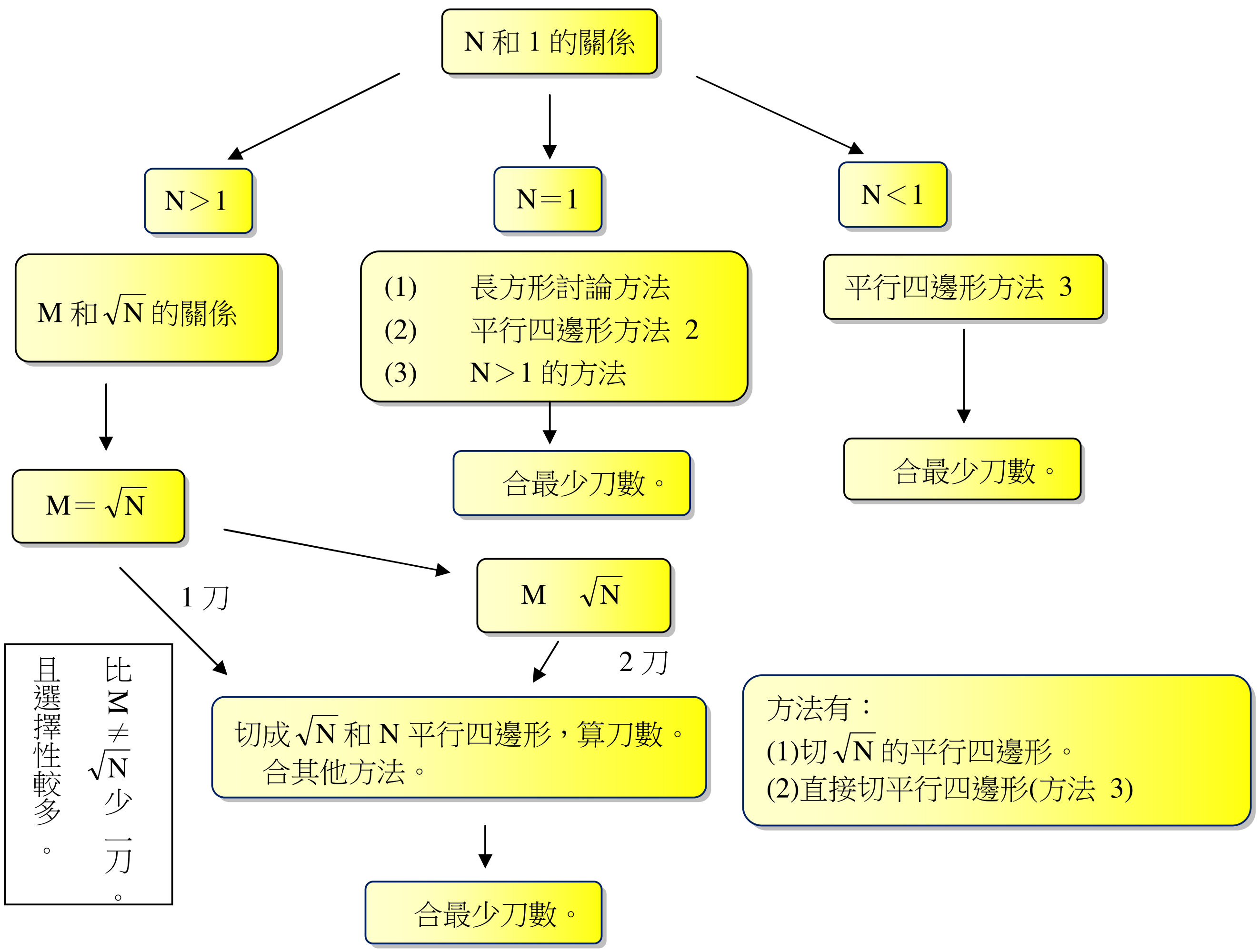
(1) 當 N＝1 時可以將梯形切成長方形加以討論。

(2) 當 N≧1 時亦可以參照 N＜1 的方式：直接切成平行四邊形，因為有兩種情況所以分別討論，將所有方法總合後得到最少刀數。

(3) 特殊情況在此不討論，這邊所討論的皆為通解。所以有些情況的切法並非最少刀數。當然也有可能有更好的方法。

(4) 梯形 N＜1 亦可先切兩腰的中點連線，使之移動變成平行四邊形，再加以討論。

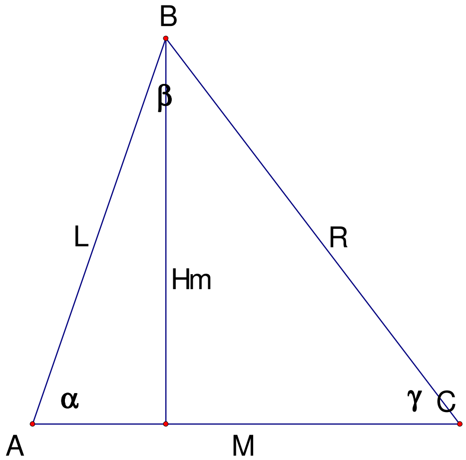
( )討論 程圖：



(八)平行四邊形相交太多時可採用的另一方法

當在切 $\sqrt{N}$ ＜M 的平行四邊形時，發現相交的點很多時，可以採用另一種方法來 證看看是 有更少的刀數，即直接算出 $\sqrt{N}$ 是多少，以兩刀將左右兩邊皆切成 $\sqrt{N}$ ，再去討論會交到幾點。

四、 三角形切割成正方形所需之最少刀數的討論



定義

原三角形 放為△ABC，AC＝M，CB＝R，BA＝L 而 M、L、R 上的高分別為 H_m、H_l、H_r，∠ABC＝β，∠BCA＝γ，∠CAB＝α。令 H_m＝2，且定義面積為 N，則可得 M＝N。而由直角三角形可知 R≧2，L≧2(兩個等號不會同時出現)。

(一)考慮 N＝1(三角形底：高＝1：2)且 α、γ＜90°

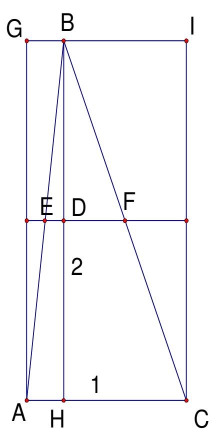
如下圖，原三角形 ABC。底 N＝1，高＝2，且∠BAC＜90°，∠BCA＜90°。

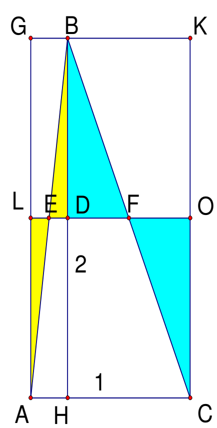
1.方法

(1)分別取 AB、BC 中點 E、F，連 EF。

(2)做過 B 之 AC 垂直線 BM，M 為垂足，令 BM 交 EF 於 D。

(3)EF、BD 兩線即為所求之切割線，最少刀數為 2 刀。





2.證明全等

如圖，同色部份全等。

黃色：∵BE＝EA，BD＝DH，則得到 ED＝$\dfrac{\overline{AH}}{2}$＝$\dfrac{\overline{GB}}{2}$＝LE，則得到△LEA≅△DEB。

藍色部份同樣也可以相同方式得到全等。

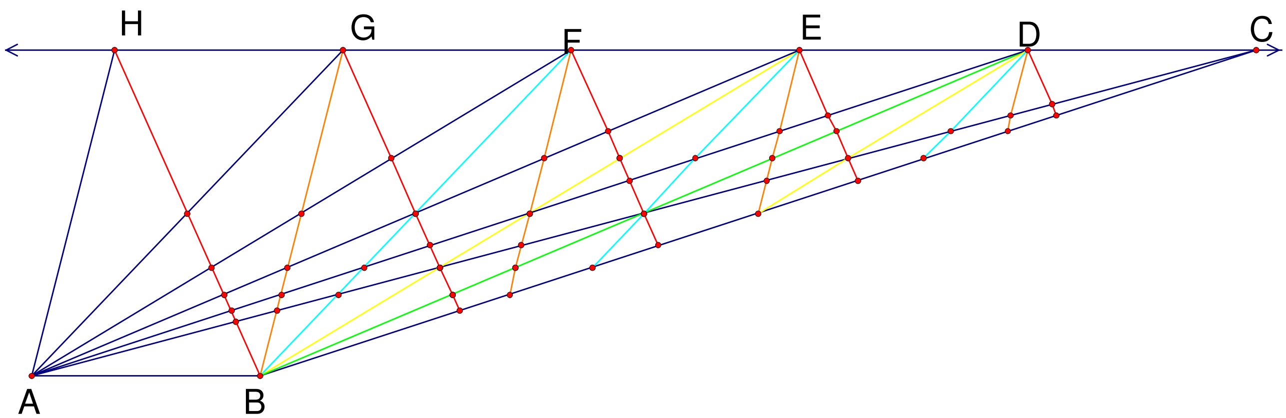
因此可以 由兩刀將原本的三角形切割移動至 LOCA。

∵BH 為底上的高，又 LO 平行 AC，則可得 BH⊥LO，且由 E、F 皆為中點，可知 D 也為 BH 的中點，則 BD＝BH＝1，又因∠ALD＝∠LAH＝∠AHD＝∠HDL＝90°，則 LAHD 為長方形，同理 DOHC 也為長方形，則 LA＝OC＝1＝LO＝AC，且∠OLA＝90°，則 LOCA 為正方形。此正方形即為所求。

三角形的切割平移

1.切割刀數一般式

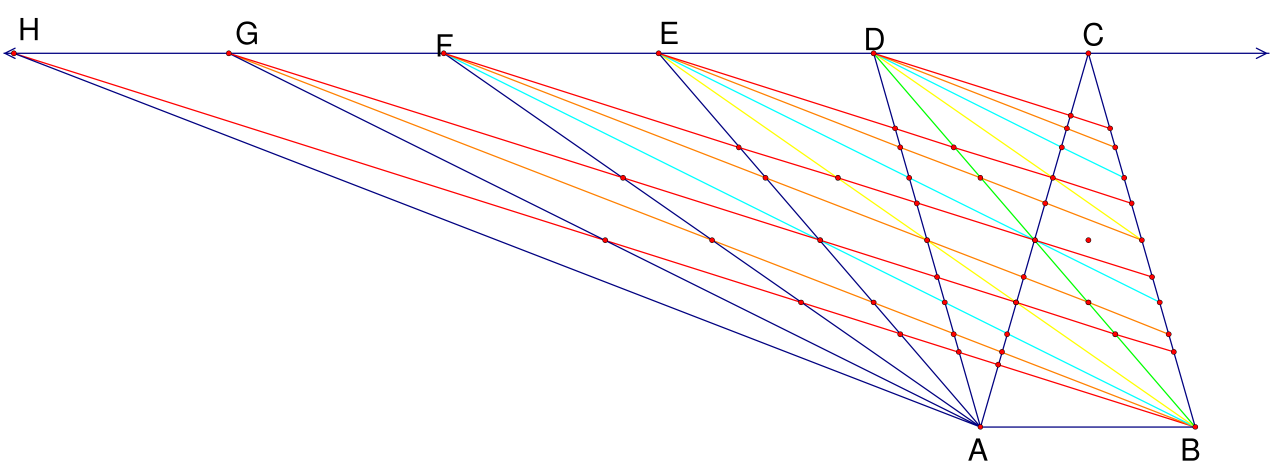
如圖，原三角形為△ABC，經由 B 連過 AC 的中點(令此為 K)，交於過 C 點的 AB 的平行線於 D，易得△BKC≅△DKA，所以可以將△ABC 切成△ABD，而 D 是 C 位移了 AB 的長度的一個點。



注意各種顏色線段的數 ，綠色 1 條，黃色 2 條，藍色 3 條， 色 4 條，紅色 5 條，且各條同顏色的皆 相平行。

若 將其切割成△ABD 則需要如圖中的綠色線段;若 將其切割成△ABE 則需要如圖中的綠色和黃色線段；若 將其切割成△ABF 則需要如圖中的綠色、黃色、藍色線段；依此類推。(在此所說的圖中的線段皆 在△ABC)

然已經會將△ABC 切成任意的△ABT(T 為過 C 點的 AB 平行線上 C 位移 W×AB，W 於任意整數)，而此切割刀數為 $1+2+\ldots\ldots+W=(1+W)\frac{W}{2}$ ，而當然我們也可以推導出這些切割線在△ABT 上的已切割線，而這個只需將 AB 移動一下，即可知道其的已切割線。如下圖。

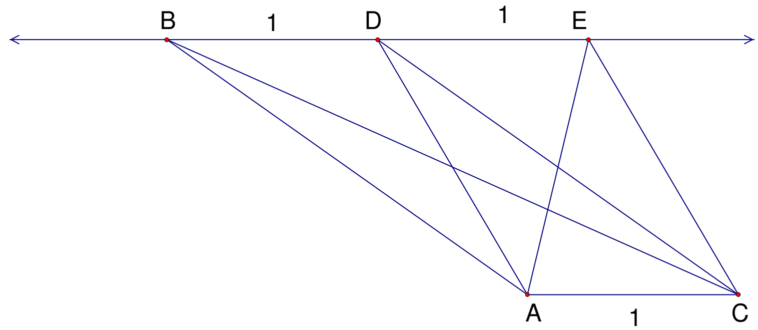


(二)考慮 N＝1(及三角形底：高＝1：2)且 α＞90°

1.切割方法

因為對圖形而　，α、γ 是對　的，所以只討論 α＞90°

已經知道三角形平移所需的刀數了，所以可將原三角形 ABC 的 B 點經由平移，移到 B’使得∠CAB’＜90°，且∠ACB’＜90°，這個 B’點是找的到的，因為每次只平移 AC(長度 1)，所以一定有一點 B’使得其在此平行線且在過 A、C 之 AC 垂線之間。

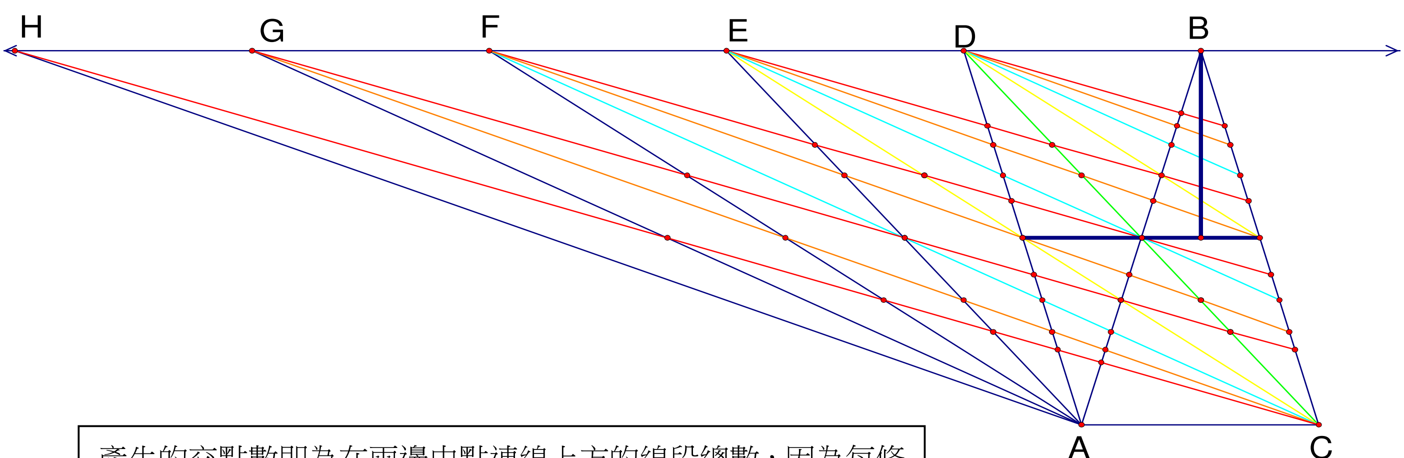


2.切割刀數

而 B’這點就可　用 N＝1 且 α、γ＜90°來考慮，但是有已切割線，所以會有增加刀數的情況。

而交點總數可由圖形中觀察出來(粗線即為切割處，　色線為已切割處)，交點總數 S：當 W 為　數時，$S_{2n+1}=2(1+2+3+\ldots\ldots+\frac{W-1}{2})$；當 W 為　數時，$S_{2n}=2(1+2+3+\ldots\ldots+\frac{W-2}{2})+\frac{W}{2}$；$S_{2n+1}=\frac{W^2-1}{4}$，$S_{2n}=\frac{W^2}{4}-\frac{W}{2}+\frac{W}{2}=\frac{W^2}{4}$。

以這些交點數加上原本平移三角形所需之刀數即為此圖形所需刀數。即當 W 為　數時總刀數為 $S+1+2+3+\ldots\ldots+W=(W^2-1)/4+(W+1)W/2=3W^2/4+W/2-4$，當 W 為　數時總刀數為 $S+1+2+3+\ldots\ldots+W=W^2/4+W^2/2+W/2=3W^2/4+W/2$。

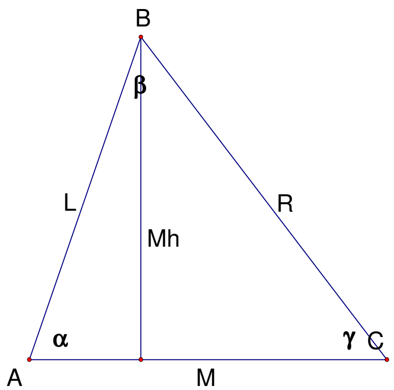


產生的交點數即為在兩邊中點連線上方的線段總數，因為每條線段皆為左右兩邊的連線，所以只要考慮兩邊中點連線上方的線段總數再加上原始的切割刀數。

如果平移所需刀數過多，可以換個方向或切一刀(中點連線)使其成為平行四邊形討論。

(三)其他種類三角形

此時依然需要以 $\sqrt{N}$ 為主，但如果用之前的定義，不容易推導，且由於這是在找切法，所以等比例　放皆沒關係，因此可以　變之前所做的定義，而且當出現和之前情況相似的圖形，依然可以用之前所討論出的切法。



新定義

原三角形　放為△ABC，AC＝M，CB＝R，BA＝L 而 M、L、R 上的高分別為 H_m、H_l、H_r，∠ABC＝β，∠BCA＝γ，∠CAB＝α，而 $M_h=1$，且定義面積為 N，則可得 M＝2N。

(四)分類

以 B 為圓心，$\sqrt{N}$ 為半徑畫弧

1.和 AC 有交點				
(1-1) 線段內有兩個交點。	(1-2) 與線段相切。	(1-3) 與延長線相切。	(1-4) 交線段一點，交延長線一點。	(1-5) 交於延長線上兩點。
2.和 AC 沒有交點				

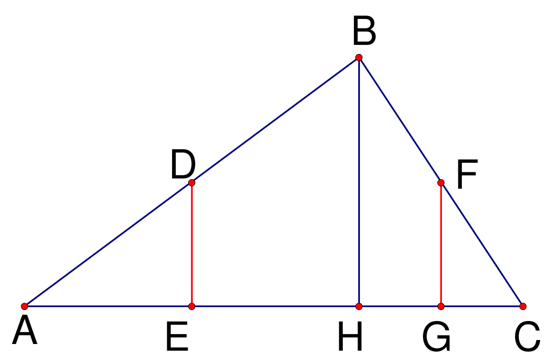
符合(1)的充要條件為 $\sqrt{N}$　1，符合(2)的充要條件為 $\sqrt{N}<1$，符合(1－2)的充要條件為 $\sqrt{N}=1$ 且 α、　≦90。

(五)與線段相切

1.做圖

此時 N＝1，M＝2，即可畫出如右之圖，且 α、γ＜90°。

D、E、F、G 分別為 AB、AH、BC、CH 的中點，連 DE、FG 即為所求。



2.切割刀數

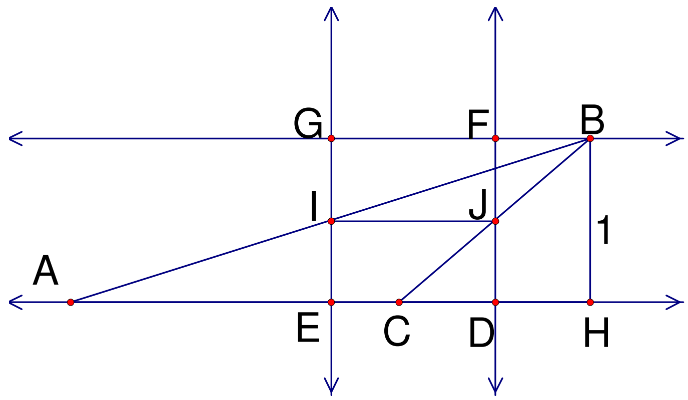
因為 E、G 皆分別為中點，所以 EG＝1，又因為△ABH、△CBH 皆可分別切割成長方形而拼在一起，則可以以兩刀切割拼成正方形。

當 α 或 γ＝90°時，只需要切一刀即可。

(六)與延長線相切

符合這種情況的充要條件為 $\sqrt{\mathrm{N}}=1$ 且 α 或 γ＞90°。

因為有一個角度大於 90°，所以此為　角三角形，則此　角所對之邊必定大於此　角所對之高的兩　，所以必可以將此三角形　轉，得到另外一個(1－1)的情況(三角形的多方向性)，但在此不以　轉的方法為主，在此直接討論這個方向的情況。



解釋圖的代號，△ABC 為原三角形，H 為 B 和 AC 的垂足，分別取 AH、CH 的中點 E、D，由 $\mathrm{EH}=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{2}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2}+\frac{\overline{\mathrm{CH}}}{2}$，$\mathrm{DH}=\frac{\overline{\mathrm{CH}}}{2}$，則 $\mathrm{ED}=\mathrm{EH}-\mathrm{DH}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2}=1$，做 E、D 垂線，分別與和 AH 平行且過 B 的平行線交於 G、F。

1.方法

不　一般性的，假設∠BCA＝γ＞90°。則 C 必在 D 的左方，所以討論 C、D、E 的位　，又因 DE 為定值，所以只考慮 C 和 DE 的關係。

(1)C 在 DE 內，此時可將△AIE　轉至△BIG，再將△BFJ　轉至△CDJ，即可以將原本的三角形切成正方形了，但因為有影響到切割線，所以所切刀數要加 1。即總刀數為 1＋2＝3 刀。

(2)當 2DE≧CD＞DE，此時需要　轉 3 次，而第一次沒有影響到切割線，第二和三次皆影響到 1 條切割線。所以總刀數為 1＋2×2＝5。

2.界線

考慮界限問題，因為主要是已　轉為主，而每一次　轉的三角形的底邊皆比前一次的　1，所以考慮 CD 的大小，因為每次都　少 1，而最後又是 0，所以皆考慮當 CD 為整數時。

CD	0	1	2	3	4	5	6	7	8
刀數	1	3	5	7	9	11	13	15	17
－tanγ	無意義	1/2	1/4	1/6	1/8	1/10	1/12	1/14	1/16

3.整數時的一般式

因為都是以　轉為　　，而且皆為將其　轉之後，所得到之　出部分　　做　轉之動作。而每次所做的切割，因為都是上一次所　下的部分圖形，並沒有增加，所以除了第一次　轉只需要 1 刀以外，其餘皆需 2 刀，因為會有已切割線 1 條。所以當 CD＝0 時，只需　轉一次，所以刀數為 1，當 CD＝3 時，需　轉 4 次，所以刀數即為 1＋3×2＝7，因此可以列出一般式當 CD 為整數時，刀數為 CD×2＋1。

4.一般式

當 CD 為 0 和 1 之間的數時，此時需　轉兩次，和 CD＝1 時是一樣的；當 CD 為 3 和 4 之間

的數時，此時需 轉五次，和 CD＝4 時是一樣的……
所以將全部正實數的一般式列出 CD ×2＋1 (： 為取其個位數無條件 位之值)。

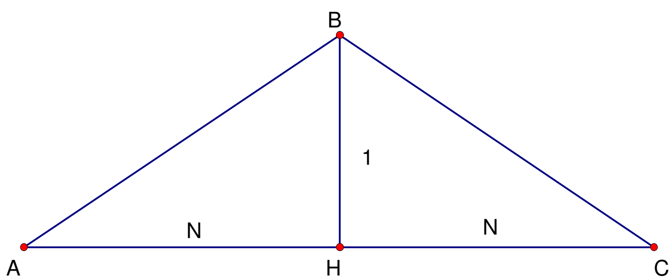
( )和 AC 沒有交點

目前 找到很好的方法，因此還是依照原本先切成平行四邊形的方式來做。

(八)交於延長線上兩點

1.方法

考慮這種情況，滿足此條件的充要條件為另外兩邊皆小於 $\sqrt{N}$ ，如此才有可能使兩個 $\sqrt{N}$ 皆 在延長線上，因此先畫一個三角形，底為 2N，且過 B 做 AC 垂直線，H 為垂足，且 AH＝CH，此時可以商高定理求出 AB＝BC＝ $\sqrt{N^2+1} > \sqrt{N}$ 。



2.證明不 在

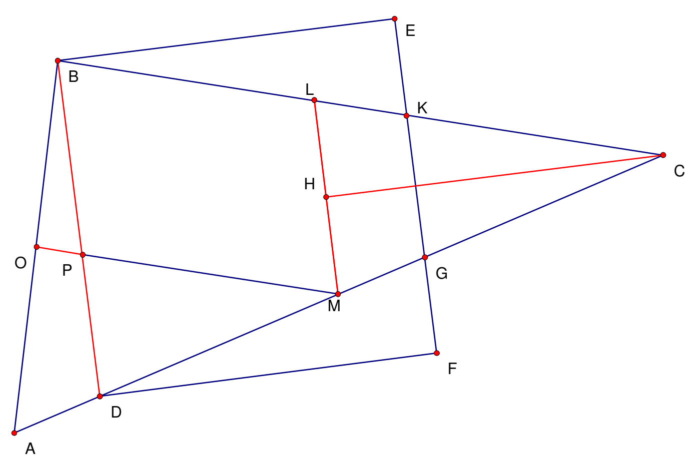
此時考慮當 B 右平移時(即高不變)，此時 BC 會變小後再變大，AB 會變大；當 B 左平移時，此時 AB 會變小後再變大，BC 會變大，這說明了不可能另外兩邊皆小於 $\sqrt{N}$ 。即不可能有(1－5)這種情況。

( )與線段有交點

符合這種情況的充要條件為 N＞1。

1.做圖方法

(1)在 AC 上取一點 D，使 BD＝ $\sqrt{N}$ 。
(2)考慮 DC 和 DA 的大小。取出大的(如果相等，則兩者皆考慮)，此 例為 DC＞AD。
(3)在 C 的方向，以 BD 為邊，做正方形 BDFE。
(4)EF 分別交 BC、AC 於 K、G。
(5)取 M 點在 CD 線段上，使 DG＝CM。
(6)過 M 做 BD 平行線，交 BC 於 L。
(7)過 M 做 BC 平行線，交 BA、BD 於 O、P。
(8)過 C 做 LM 垂線，垂足為 H。
(9)連 BD、OP、LM、CH 即為所求。



2.證明全等

證明(1)：$DG=\frac{1}{2}\overline{AC}$

過 B 做 AC 垂線，垂足為 R。

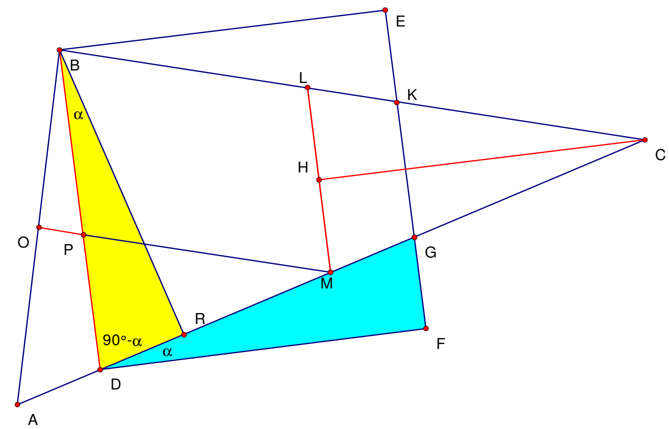
觀察△BDR 和△DGF。

∵∠BRD＝90°＝∠DFG

且∠BDF＝90°，令∠DBR＝α，則∠BDR＝90°－α，∠GDF＝α＝∠DBR。

∴△BDR≈△DGF

由於我們一開始令高為 1，則 BR＝1，且 $BD=\sqrt{N}$＝DF，則 $DG=N=\frac{2N}{2}=\frac{\overline{AC}}{2}$，證明完　。



證明(2)：△LCH≅△KBE，△MCH≅△GDF

△LCH≅△KBE：

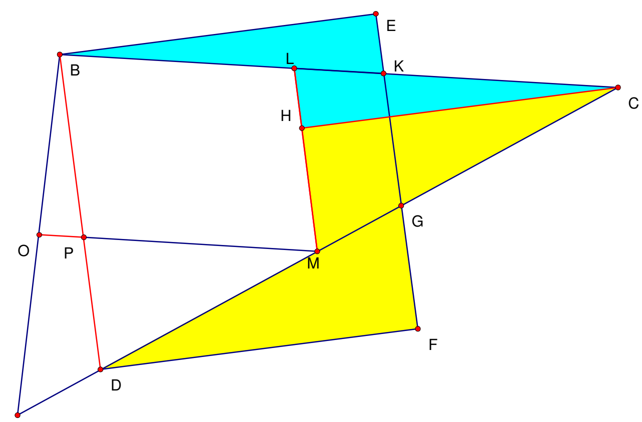
(1)∠LHC＝90°＝∠KEB。(A)

(2)LM 平行 EF，則∠CLH＝∠BKE。(A)

(3)∵GD＝CM，則 BK＝LC。(S)

則△LCH≅△KBE。

△MCH≅△GDF 同理可得。

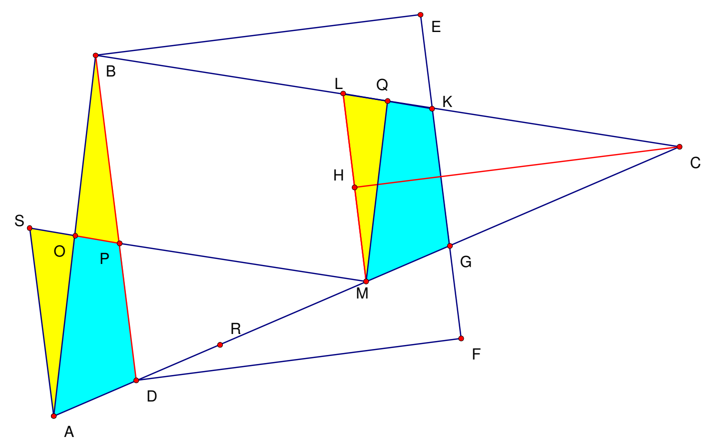


證明(3)：△ABD 可由切 OP 一刀，而經重組後與四邊形 MGLK 全等

重組後的圖形如右。

(1)因為 MO 平行 BC，又 M 為中點，則 O 亦為中點，所以將△BOP 旋轉 180°至△AOS。

(2)過 M 做 AB 平行線，交 BC 於 Q，因為 M 為中點，所以 Q 為 BC 中點。而 BL＝KC，所以 Q 亦為 LK 中點。



(3)∵BO 平行 QM，BQ 平行 OM，則 BO＝QM。

同理可得 LM＝BP。

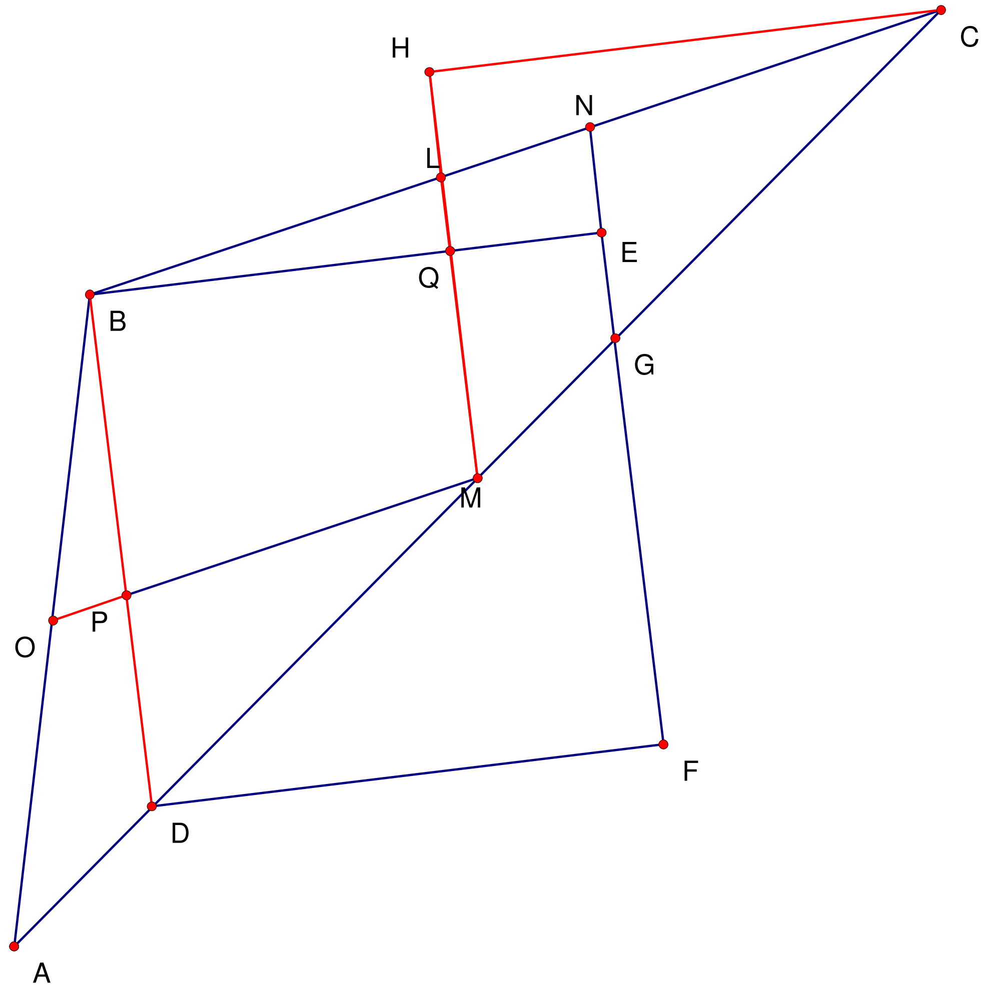
且∠OBP＝∠LMQ，則△OBP≅△QML。則得 OP＝LQ＝QK。得黃色部份全等。

(4)∠KQM＝∠KBA＝∠POA(A)，∠QKG＝∠BLM＝∠BPM＝∠OPD(A)，∠PDA＝∠KGM(A)，

且 OP＝QK，$QM=\frac{\overline{BA}}{2}$＝OA，則可得藍色部分全等(多邊形全等性質)。

所以可以在 4 刀內切完。

(十)與線段有交點(三角形部分在外面)



1.方法

如上圖，當三角形的底過大時，以上的切法就無法完全　用了。

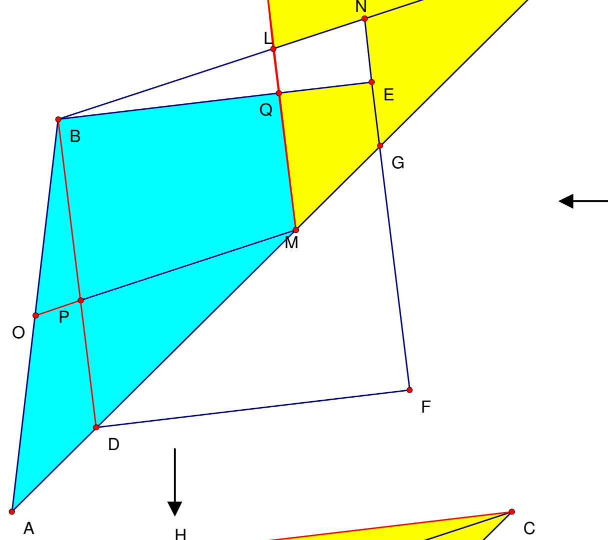
因此我們延　 GE 交 CB 於 N。

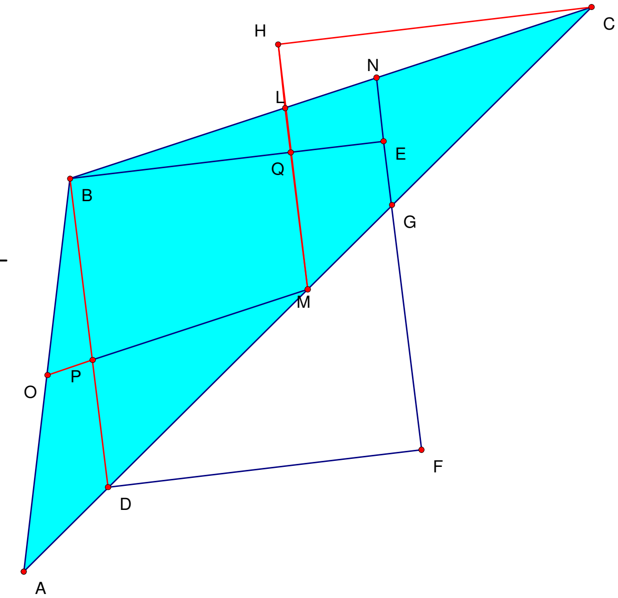
易知△CHL≅△BEN，△CHM≅△DFG，也就是要將△BEN 旋轉至△CHL，再將△CHM 旋轉至△DFG，但卻少了一塊四邊形 LNEQ，而這部份由△BAD 來補。

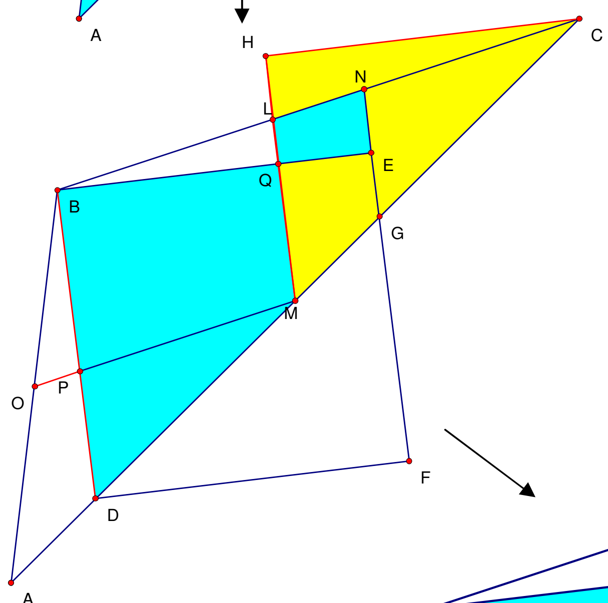
2.切割刀數

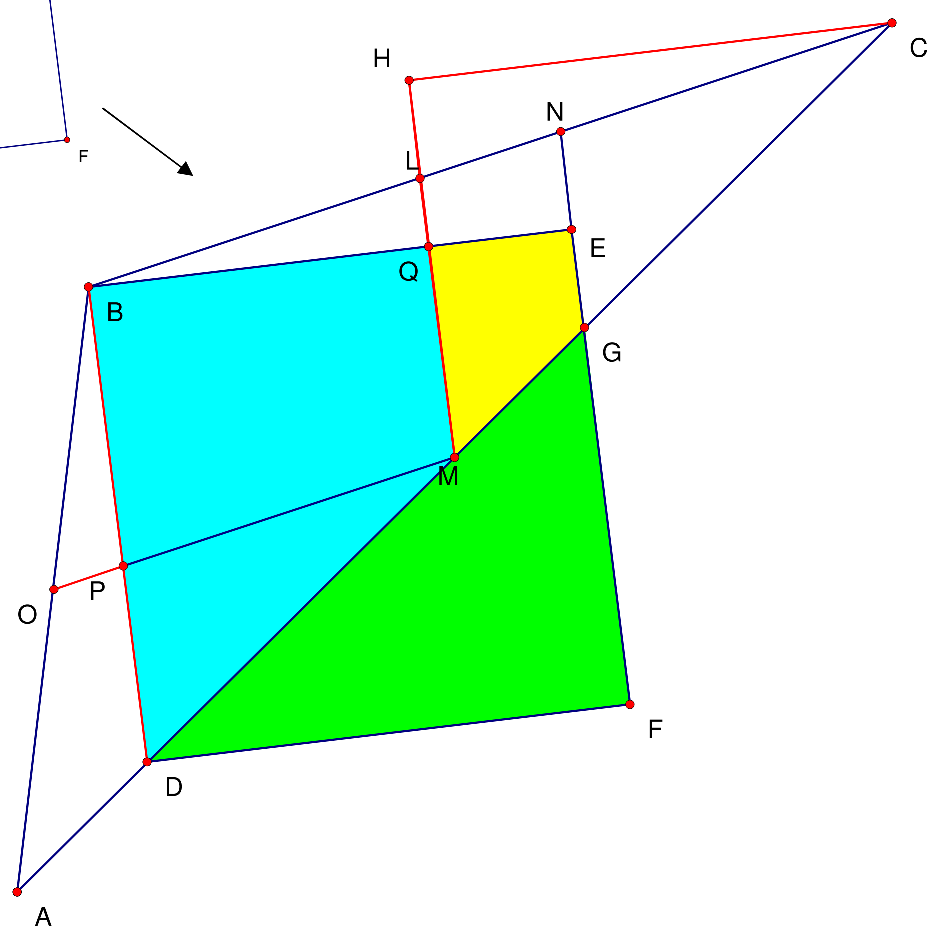
已知△BAD 可經由一刀切成四邊形 LNGM，然而四邊形 LNGM 並非全都在正方形之內，而多出的一塊四邊形 LNEQ 就可以　用在上述之　角，而這一步多了一刀且與切割線相交了一點，因此刀數再多兩刀，然而有一刀 CH 也沒切到，等於　　了，因此　一刀，所以這個總共需要 5 刀。

3.詳細圖解


H
C
N
L
E
Q
B
G
M
O
P
D
F
A


H
C
N
L
E
Q
B
G
M
O
P
D
F
A

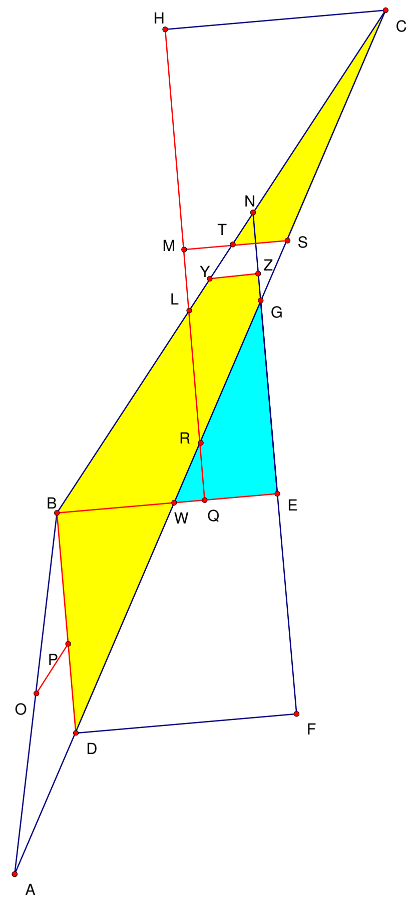

H
C
N
L
E
Q
B
G
M
O
P
D
F
A


H
C
N
L
E
Q
B
G
M
O
P
D
F
A

4.更　出去時

至於當上圖中之 M 也到正方形外面去的　，在此不詳細說明，只以下圖作為參考，而下圖之紅色線即為切割線，共需切 9 刀，有些切割線是以後來所切的為主，因此有些重疊。

而主要方式和上述的　不多，只是更　了一些，當然再　外推還會有更　的，然而因為　　找到　式，因此　不列出來，有顏色之區塊為三角形所變換出來的，而這為只　最後一個步驟的圖。



伍、研究結果

	變化因	方法	方法數	一般式
長方形	1 個，底與高的比值。	以平行四邊形 $\sqrt{N}$ 和 N 的情況為　　，因為不會有和已切割線相交的情況，所以可列出一定的一般式。	1 種	$\sqrt{N-1}$　+1 刀 (　:　　表示取無條件　位值)
平行四邊形	2 個，底與高的比值；底邊與斜邊的角度。	分為 $M<\sqrt{N}$，$M=\sqrt{N}$，$M>\sqrt{N}$ 三種情況討論，當 $M<\sqrt{N}$ 時和長方形一模一樣。 $M=\sqrt{N}$ 時，長方形的方法再　少一刀。 $M>\sqrt{N}$，如下。	加上以下之方法，至少 3 種(此作法和切一半後平移成另一種平行四邊形，還有 M、N　換)。	$M<\sqrt{N}$ 時，同上。 $M=\sqrt{N}$ 時，　$\sqrt{N-1}$　刀。 $M>\sqrt{N}$ 時，就需要： $\frac{\sqrt{(M^2-1)(N-1)}-1}{N}$ +　$\sqrt{N-1}$　刀。

M＞$\sqrt{N}$	同上。	考慮和 M＝$\sqrt{N}$ 時切法的相交點數，此數 U 可求出一般式，而確切方法請參見上方。		
梯形	3 個，底與高的比值；兩底邊與兩斜邊的 角角度。	請參見梯形的介紹，因為方法太多，太 ，所以不再多說明。	至少 4 種	，種類太多，且因 太多，所以沒有列一般式。
三角形	3 個，3 個角的角度。	種類太多，所以亦不多說明。請參見三角形部份。	至少 3 種。	，種類太多，一般式不只一種，所以不加以列出。

：特殊狀況不在此列出。

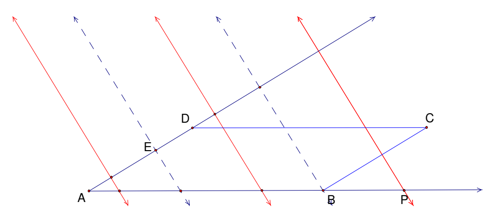
陸、討論

一、平行四邊形 個邊做 M 個邊做 N？

本上 N 必須大於高，所以在 N 比 M 大很多時，以 M 當 N 時，即不可能，因為 M 的高必定大於 M，所以只在討論當 N、M 很接近時。

在此必須兩個情況都討論，但只需算出 N 與 N 上的高的比值(此時設 N、M 皆大於其邊上的高)M 與 M 上的高的比值的大小，比值 小的就有 少的刀數。還有一個方法，如果已經確定不論以 N 或 M 為底皆可比高大，則取 N 或 M 其中之一比 小的即可。因為面積是個定值，又底都比高長，有 之底者必有 長的高，所以選 底的邊必比值 小。

二、平行四邊形切的第二條線可以移動



在討論中，發現了一個$\sqrt{N}$和 N 的平行四邊形，但垂線卻不是做在延長線和頂點之上，而是在頂點之外，所以 想此條垂線不一定要做在頂點上，可在邊的外面。

當 P 點移動時，仍然可依類似方法，使之可重組為一正方形。而最少的刀數在 D 和原始的切割線交於 AD 的那一點 E 之間，因為原始切法的最 近 A 點的那一條 的時 是在 D 點，而新切法最 近 C 的那一點 的時 是在 E 點；在 D 的右方皆會多出一條，E 左方亦皆會多出一條。所以是在 D 和 E 之間所得到的刀數即為最少刀數，而這 面的所有點的切法刀數亦皆都相同，所以我們可以只考慮最好的情況，當 P 在 B 上時，而此方法所得到之在 DE 中的那個點正好就在 E 上，所以可知此時 P 與 B 重合仍為最少刀數。

三、平行四邊形的相交太多時可採用的另一方法

當在切 M＞$\sqrt{N}$的平行四邊形時，發現相交的點很多時，可用梯形的類似方法去切割。

四、三角形的多方向性

三角形有三個方向，且皆有兩種不同的選 方法，所以會有不同的結果，因此必須每一種都試過才知道 個為最好的辦法。但也可以採用直接切成平行四邊形的方法，但不一定會比 少。

柒、結論

一、 長方形的長若為 N，且 $K^2+1^2 < N \leqq (K+1)^2+1^2$ 則切割刀數為 $K+2$ 刀。

二、 平行四邊形的底和切割刀數的關係

(一) 底若為 N，斜邊為 ，$M<\sqrt{N}$，且 $K^2+1^2 < N \leqq (K+1)^2+1^2$，則刀數為 $K+2$ 刀。

(二) 底若為 N，斜邊為 ，$M=\sqrt{N}$，且 $K^2+1^2 < N \leqq (K+1)^2+1^2$，則為 $K+1$ 刀。

(三) 底若為 N，斜邊為 ，$M>\sqrt{N}$，則切割刀數視情況而定。

三、 梯形的上底加下底為 2N，高為 1，兩底角分別為 、β，則切割刀數視情況而定。

四、 三角形切割刀數視情況而定。

一開始由長方形 N<2 的情況，推廣至 N 為任意實數，再來是平行四邊形等，而這 面最重要的就是 長方形的 定 考模式，而 立另外一個直角和 $\sqrt{N}$，三角形亦是如此， 立了另一個 $\sqrt{N}$ 和直角，才找出長方形的方法。以上的方法多是在特定位 立正方形 ，由分 與討論，找出可以切割成正方形的方法。而詳細的作法，本 亦有詳細之說明。

捌、參考資料

書

國民中學二 上學 數學課本

數學 一 程 出

高 中學 96 學 度一 下學 數學課本

附錄

長方形面積為 $\overline{AE}\times\overline{FD}$

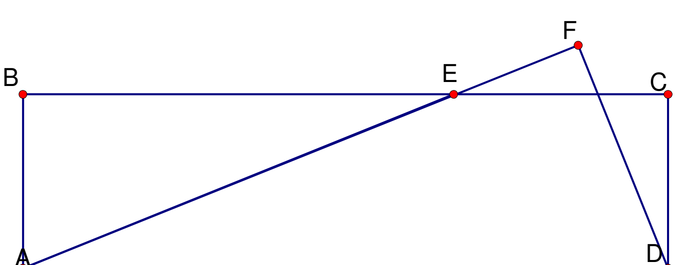
證明

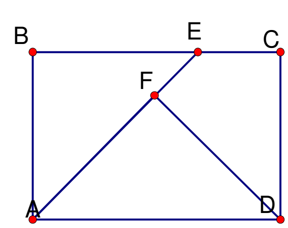
做一長方形，任意取一點 E 在 $\overline{BC}$ 上，連 $\overline{AE}$，再做 $\overline{AE}$ 之延長線，做 $\overline{AE}$ 垂線通過 D，F 為垂足。

AEB＝ DAF 又 EBA＝ AFD＝90°

ABE≈ DFA(AA 相似)

則 $\overline{BA}:\overline{AE}=\overline{FD}:\overline{AD}$ 移項得 $\overline{AE}\times\overline{FD}=\overline{AD}\times\overline{BA}$ 得證





【評語】030421

1. 取材有創意。
2. 說明清晰簡潔有力。
3. 能利用電腦繪圖，輔助說明，動畫展示效果佳。
4. 如能再找有關的子題更深入探討將更完美。