中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030416

推〃倒〃費馬

學校名稱：高雄縣立前峰國民中學

作者：	指導老師：
國二 呂冠嫻	林育竹
國二 吳郁婷	蘇小惠

關鍵詞：　費馬定理、立方體、平方差

摘要：

本研究從『連續的立方和等於某一個數的平方』的推導過程開始，藉由學生不同的解題方式，而發現許多奇妙的事情。學生們用其對數學的直覺採用『立方體』轉換成『平面的 L 型面積』來解題。而後有學生發現此題與費馬定理的關聯性，加以進行研究與討論，最後與老師們的一同努力研究，嘗試證明這百年來的難題。

壹、研究動機

由一個規律數列開始我們的想像：『連續的立方和等於某一個數的平方』推導其規律。老師給我們這道問題讓我們思考，最後她用等差數列的方式解題；但不同於老師的作法，我們採用『立方體』的想像結合剛學不久的『平方差』概念來解題，雖然這個作法沒有老師利用數的等差性質來的簡易，似乎繞了一大圈，但老師也很訝異有這麼特別的想法，因此把我們的想法呈現在這個作品裡。之後偶然在一本書上看到一個關於費馬的故事，書中寫到當 $x^n + y^n = z^n$ ， $n \geq 3$ 則 x, y, z 沒有正整數解。而且 n=3 的情形在西元 972 年以被阿拉拍數學家胡堅迪證明，但他證明是有缺陷的，而 1770 年歐拉提出了一個新證明；但書中卻沒寫出證明方式，這也讓我似乎感覺到這個問題與之前推導的級數中，好像有點關聯性，只是無法描述那種感覺，隔天拿書去問數學老師，是否可以用這個數列所得到的規律，去推導費馬猜想；於是開始了我們的另一個研究。

貳、研究目的

一、推導『連續自然數的立方和等於某自然數的平方』，以『立方體』化成『L 型拼塊』進行面積的拼合，並利用代數推論其正確性。

二、利用之前定理的推論，轉個彎得到『自然數的立方等於兩個自然數的平方差』，以此去證明費馬定理中，當 $x^3 + y^3 = z^3$ ， x, y, z 沒有正整數解，嘗試推導這百年來的難題。

參、研究設備及器材

一、筆、紙、橡皮擦

二、腦汁

肆、研究過程或方法

一、從老師給的一個問題開始「連續自然數的立方和是某個自然數的平方」

(一)從小的數字開始列出其方程式，觀察每個級數和的變化

(二)從數字的三次方聯想到立方體的體積，從數字的平方聯想到正方形的面積

(三)猜測可不可以將立方體壓成平面，用拼圖的方式拼成正方形

(四)將猜測以手寫畫圖確定其可行性

(五)以代數方式證明之

二、利用上題與『費馬猜想』進行碰撞

(一)在此只討論費馬問題中次方 n=3 時，利用上題的結論進行思考

(二)將上題轉個彎『任何大於 1 的自然數之立方等於兩個自然數的平方差』

(三)再加上級數的規律性得知兩個自然數之間的關聯，進而作技巧性的假設

(四)利用反證法進行證明

伍、研究結果

一、踏出第一步：一一列出級數和，觀察其變化

$$1^3 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$

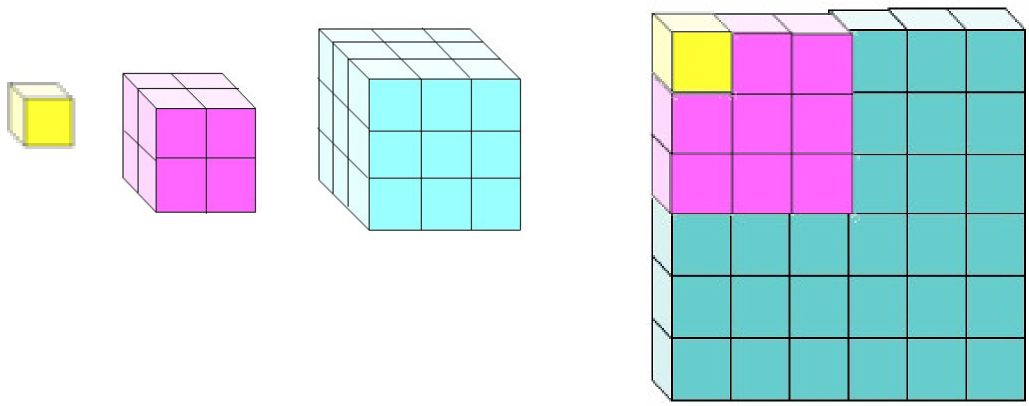
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 21^2$$

二、將數字具體化，聯想到立方體體積及正方形面積

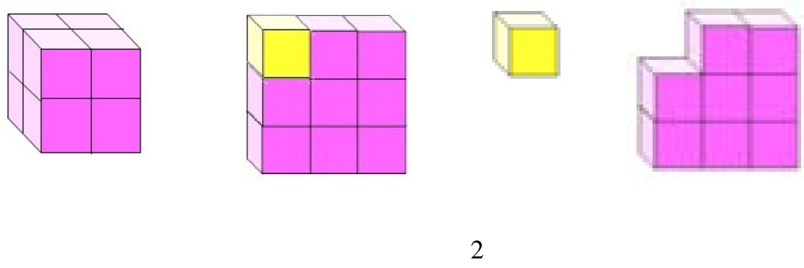
$$1^3 \quad + \quad 2^3 \quad + \quad 3^3 \quad = \quad 6^2$$



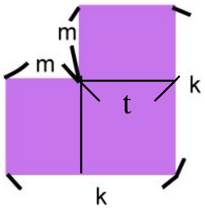
三、將立方體壓成平面 L 型拼圖，且利用『平方差』概念，了解每塊拼圖塊共同的特點

(一)以數列先確定想法的可行性

$$2^3 \quad = \quad 3^2 \quad - \quad 1^2 \quad = L\text{型拼塊}$$



(二)證明t^3的立方體皆可化為 L 型拼塊



$t,m,k \in \mathrm{N}$

$t^3 = k^2 - m^2 = (k+m)(k-m)$

當$t^2 \cdot t = (k+m)(k-m)$ (利用因式分解拆開，因與 t 有關，所以拆成 $t^2 \times t$)

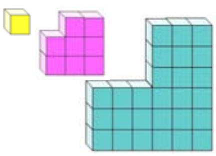
配對得$\begin{cases} k+m = t^2 \\ k-m = t \end{cases}$

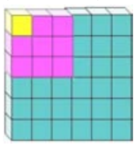
$\therefore k = \dfrac{t^2+t}{2}$ (k 為 L 型拼塊的外緣邊長)

結論：任何自然數 t 為邊長的立方體，皆可化成 L 型拼塊，且 L 型拼塊的外緣可用立方體邊長表示 $\dfrac{t^2+t}{2}$ 。

四、利用三的結論可得知此級數的一般性

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots\dots\dots + \mathrm{n}^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$$

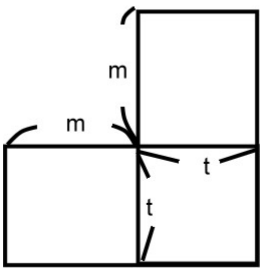




只要知道最後一個 L 型外緣的邊長，即為對應到拼合出來的正方形之邊長。

五、作技巧性的假設，並用反證法進行證明『費馬猜想』

(一) 察覺立方體邊長與 L 型邊長的關係(將用此關係證明費馬猜想)



$2^3 = 3^2 - 1^2$

$3^3 = 6^2 - 3^2$

$4^3 = 10^2 - 6^2$

結論：依數列的規律可以推測其關係(從圖形中也不難察覺)

$t^3 = (m+t)^2 - m^2$ ， $t,m \in \mathrm{N}, t > 1$

(二)費馬的猜想：只要 n 是比 2 大的自然數，方程式$x^n + y^n = z^n$沒有正整數解(此處只證明當 n=3 時沒有正整數解)。利用(一)的結論(任何大於 1 的自然數三次方皆可用兩個自然數的平方差表示)，來作巧妙的假設。

假設 $x^3 = (a+x)^2 - a^2$ ， $x,y,z,a,b,c \in \mathrm{N}$ 且 $x,y,z > 1$

$y^3 = (b+y)^2 - b^2$

$z^3 = (c+z)^2 - c^2$

反證法：若 x, y, z 皆爲正整數則 $x^3 + y^3 \neq z^3$；

也就是代入 $x^3 + y^3 = z^3$ 使其產生矛盾。

假設 $x^3 = (a+x)^2 - a^2$ ，$x, y, z, a, b, c \in \mathrm{N}$ 且 $x, y, z > 1$

$y^3 = (b+y)^2 - b^2$

$z^3 = (c+z)^2 - c^2$

當 $x^3 + y^3 = z^3$

代入假設得 $\left[(a+x)^2 - a^2\right] + \left[(b+y)^2 - b^2\right] = (c+z)^2 - c^2$

將前多項式進行分組，拆成兩組與後多項式配對，

$$\begin{cases} \left[(a+x)^2 - b^2\right] - \left[a^2 - (b+y)^2\right] = (c+z)^2 - c^2 \text{......}(1) \\ \left[(b+y)^2 - a^2\right] - \left[b^2 - (a+x)^2\right] = (c+z)^2 - c^2 \text{......}(2) \\ \left[(a+x)^2 + (b+y)^2 - b^2\right] - \left[a^2\right] = (c+z)^2 - c^2 \text{......}(3) \\ \left[(a+x)^2 + (b+y)^2 - a^2\right] - \left[b^2\right] = (c+z)^2 - c^2 \text{......}(4) \\ \left[(a+x)^2 + (b+y)^2\right] - \left[a^2 + b^2\right] = (c+z)^2 - c^2 \text{......}(5) \end{cases}$$

(1)與(2)的分組不可能：原因是 x^3, y^3, z^3 皆代表立方體的體積，而 $(a+x), (b+y), (c+z)$ 分別爲 L 型的外緣邊長，當體積愈大相對 L 型的外緣邊長也就愈大，$\Theta\ z^3 > x^3 \geq y^3\ \therefore c+z > a+x \geq b+y$ ，因此 $(a+x)^2 - b^2 < (c+z)^2$ 且 $(b+y)^2 - a^2 < (c+z)^2$ 。

(3)與(4)的分組不可能：原因是 $x^3 + y^3 = z^3$ 則 $z > x \geq y$ ，而立方體的邊長愈大則拼出 L 型面積就愈大，相對其 L 型的缺口也愈大 $\therefore c > a \geq b$ ，因此 $a^2 < c^2$ 且 $b^2 < c^2$ 。

由上可知配對只有(5)成立，唯有將加數與減數分組配對

$\left[(a+x)^2 + (b+y)^2\right] - \left[a^2 + b^2\right] = (c+z)^2 - c^2 \text{......}(5)$

配對得到 $\begin{cases} (a+x)^2 + (b+y)^2 = (c+z)^2 & ① \\ a^2 + b^2 = c^2 & ② \end{cases}$

①②再利用畢氏定理，經過『陸、討論』後，找出同時滿足①②的正整數，但所有可能都產生矛盾因而證明我們的推導成功。

陸、討論

一、推測兩組有整數解的畢氏定理是成比例的

若 $\dfrac{a+x}{a} = \dfrac{b+y}{b} = \dfrac{c+z}{c} = k \in \mathrm{N}$ 或 $\dfrac{a+x}{b} = \dfrac{b+y}{a} = \dfrac{c+z}{c} = k \in \mathrm{N}$

(兩組成比例的證明相同，如以下所述)

則 $\begin{cases} x = ak - a \\ y = bk - b \\ z = ck - c \end{cases}$

將 z 代入原假設方程 $z^3 = (c+z)^2 - c^2 = (ck)^2 - c^2 = c^2(k^2 - 1)$

$\because z^3=c^2(k^2-1)$ 利用因式分解可知(一) $k^2-1=c$ 或(二) $k^2-1=cm^3\,(m\in \mathrm{N})$

(一)若 $k^2-1=c$

則 $z^3=c^2(k^2-1)$

$\Rightarrow k^2-1=c$ 且 $z=c$

$\Rightarrow k=\dfrac{c+z}{c}=\dfrac{c+c}{c}=2$

$\Rightarrow c=k^2-1=3$

又因 $a^2+b^2=c^2$ ， $c=3$ 時，a、b 無正整數解(矛盾)。

(二)若 $k^2-1=cm^3\,(m\in \mathrm{N})$

則 $\because z^3=c^2(k^2-1)=c^2\cdot cm^3$

$\therefore z=cm$

$\Rightarrow k=\dfrac{c+z}{c}=\dfrac{c+cm}{c}=1+m$

又 $k^2-1=cm^3$

代入 $(1+m)^2-1=cm^3$

$\Rightarrow m^2+2m=cm^3$ ($\because m\in$ ，同除 m)

$\Rightarrow m+2=cm^2$

$\Rightarrow m(cm-1)=2$

利用因式分解可知 $m(cm-1)=2$ 有二種可能：1. $\begin{cases} m=2 \\ cm-1=1 \end{cases}$ ，2. $\begin{cases} m=1 \\ cm-1=2 \end{cases}$

1. $\begin{cases} m=2 \\ cm-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ c=1 \end{cases}$ 又因 $a^2+b^2=c^2$，$c=1$ 時，a、b 無正整數解(矛盾)。

2. $\begin{cases} m=1 \\ cm-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ c=3 \end{cases}$ 又因 $a^2+b^2=c^2$，$c=3$ 時，a、b 無正整數解(矛盾)。

二、推測兩組為不同比例

若 $\dfrac{a+x}{a}\neq\dfrac{b+y}{b}\neq\dfrac{c+z}{c}$

則 $x^3=(a+x)^2-a^2$

$a=\dfrac{x(x-1)}{2}$

$(a+x)^2=\left[\dfrac{x^2-x}{2}+x\right]^2=\dfrac{(x^2+x)^2}{4}$

同理可推出 $\begin{cases} (a+x)^2 = \dfrac{(x^2+x)^2}{4} \\ (b+y)^2 = \dfrac{(y^2+y)^2}{4} \\ (c+z)^2 = \dfrac{(z^2+z)^2}{4} \end{cases}$

由②可得 $\dfrac{(x^2+x)^2}{4} + \dfrac{(y^2+y)^2}{4} = \dfrac{(z^2+z)^2}{4}$

$(x^2+x)^2 + (y^2+y)^2 = (z^2+z)^2$

$(z^2+z)^2 - (y^2+y)^2 = (x^2+x)^2$

$(z^2+z+y^2+y)(z^2+z-y^2-y) = (x)^2(x+1)^2$

$(z^2+z+y^2+y)(z-y)(z+y+1) = (x)^2(x+1)^2$

將上述方程式利用因式分解拆開再作分組討論

$(z-y)(z+y+1)(z^2+z+y^2+y) = 1\cdot(x)^2\cdot(x+1)^2$.........(1)

$(z-y)(z+y+1)(z^2+z+y^2+y) = 1\cdot[(x)]\cdot[(x)(x+1)^2]$........(2)

$(z-y)(z+y+1)(z^2+z+y^2+y) = 1\cdot(x+1)\cdot[(x)^2(x+1)]$......(3)

$(z-y)(z+y+1)(z^2+z+y^2+y) = x\cdot[(x+1)]\cdot[(x)(x+1)]$.......(4)

1. $(z-y)(z+y+1)(z^2+z+y^2+y) = 1\cdot(x)^2\cdot(x+1)^2$.........(1)

$\begin{cases} z-y=1 \\ z+y+1=(x)^2 \\ z^2+z+y^2+y=(x+1)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow$由上二式代入最後一式得到

$z^2+z+(z-1)^2+(z-1)=(x+1)^2$

$2z^2=(x+1)^2$

Q $x,z\in \mathbf{N}$ $\therefore$ 矛盾

2. $(z-y)(z+y+1)(z^2+z+y^2+y) = 1\cdot[(x)]\cdot[(x)(x+1)^2]$........(2)

$\begin{cases} z-y=1 \\ z+y+1=(x) \\ z^2+z+y^2+y=(x)(x+1)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow$由前兩式整理得到 $\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}x \\ y=\dfrac{1}{2}x-1 \end{cases}$ 帶入最後一式

$\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}x\right) + \left(\dfrac{1}{2}x-1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}x-1\right) = x(x+1)^2$

$\Rightarrow x^2+\dfrac{3}{2}x+1=0$($D<0$ ，x無實數解)

Q $x,z\in \mathbf{N}$ $\therefore$ 矛盾

3. $(z-y)(z+y+1)(z^2+z+y^2+y)=1\cdot(x+1)\cdot[(x)^2(x+1)]\ldots\ldots.(3)$

$$\begin{cases} z-y=1 \\ z+y+1=x+1 \\ z^2+z+y^2+y=(x)^2(x+1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 由前兩式整理得到 $\begin{cases} z=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \end{cases}$ 帶入最後一式

$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)=(x)^2(x+1)$$

$\Rightarrow 2x^3+x^2-2x-1=0$

$\Rightarrow (2x+1)(x^2-1)=0$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ 或 ± 1

Q $x>1$ 且 $x\in$ N $\therefore$ 矛盾

4. $(z-y)(z+y+1)(z^2+z+y^2+y)=x\cdot\left[(x+1)\right]\cdot\left[(x)(x+1)\right]\ldots\ldots..(4)$

$$\begin{cases} z-y=x \\ z+y+1=x+1 \\ z^2+z+y^2+y=\left[(x)(x+1)\right] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 由前兩式整理得到 $2y=0,\ y=0$

Q $y\in$ N $\therefore$ 矛盾

結論：經由推測一與二分類討論所有可能後，卻都得到矛盾的結果；因此若 x,y,z 皆為正整數則 $x^3+y^3\neq z^3$。

柒、結論

一、以另一個角度推導『連續自然數的立方和等於某自然數的平方』，讓學生感受到級數排列上不僅可以用純數字的規律推理外也可以具像化：以『立方體』化成『L 型拼塊』進行面積的拼合。(也結合教學內容中的平方差、因式分解、判別式及等差數列…等知識運用)。

二、利用上個研究的命題轉個彎得到『自然數的立方等於兩個自然數的平方差』，進而推導費馬定理：當 $x^3+y^3=z^3$，x,y,z 沒有正整數解。雖然證明的過程不夠完善與嚴謹，但嘗試多次證明與討論後也得到不錯的成果；也從這短短幾句看似簡單的費馬定理中，更深度體認數學之深之廣。

捌、參考資料及其他

1.怎樣解題：G 波利亞著 閻育蘇譯 （1957），九章出版社。

2.改變世紀的數學故事：李毓佩、劉健飛著(2003)，豐閣出版社。

【評語】030416

1. 費瑪最後定理 $x^3+y^3=z^3$ 雖爲已知，以國中數學證明，努力值得肯定。
2. 論述不夠完備。
3. 證明不夠嚴密。