中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030415

從力學觀點發現三角形延伸到四面體的幾何性質

（重心、槓桿平衡）

學校名稱：臺北市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國三 范庭堅	顏國禎
國三 曹元	梅期光

關鍵詞：　重心、槓桿平衡、四面體

摘要

我們經常利用笛卡兒和費馬提出的坐標法解決各種幾何問題，或由平面鏡的光學性質處理最短路徑問題，……。但我們希望暫時擱置傳統的幾何證明方法，改由力學的觀點出發，將兩質點系統的重（質）心關係與槓桿平衡的概念推展成為一種**有效的方法**，藉由調整系統中各個質點的位置來導出各質點分布平面三角形的幾何性質。目前我們已能解釋：三角形的三中線交於一點 M(重心)、三角形的三內角平分線交於一點 M(內心)、三線共點(西瓦定理)、三點共線(孟氏定理)、黃金分割、……等幾何定理。

對於空間中的四面體，我們也同樣**利用兩質點系統的重（質）心關係與槓桿平衡的概念導出了十幾個類似於三角形的西瓦定理、孟氏定理那樣的性質，暫且將之稱為**凸四面體小定理（1）~（10）。

壹、研究動機

物理課上槓桿平衡原理時，老師說：「給定一個質料均勻的三角板，把三頂點與所對邊的中點連線，三中線會交於一點，如果用一根針頂住這個點，三角板會保持水平狀態，這個點可視為三角板重量的集中點，稱這個點為三角板的重心(或質心)。有興趣的同學可以去研究看看!」而老師教到第三冊的相似三角形之後，我們對幾何又有更深入的了解，之後，我們去找孫老師問三角形的重心，老師給我們一份力學與幾何的資料。研讀後，我們用槓桿平衡原理導出了三角形的三中線會交於一點，三角形的三內角平分線會交於一點，老師看了我們的作法後，鼓勵我們做下去。

貳、研究目的

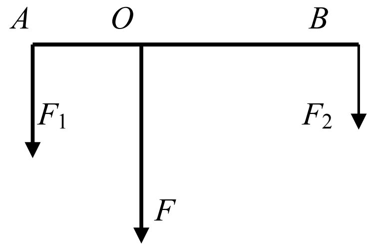
我們要研究的是：由三角形推廣至四面體的各種幾何性質，能否暫時擱置傳統的幾何方法，而從力學觀點找到一些**有效的方法**。我們打算**利用兩質點系統的重（質）心關係與槓桿平衡的概念在凸四面體中得到類似於三角形的西瓦定理、孟氏定理那樣的幾何性質。**

參、研究設備及器材

紙筆若干、竹筷、毛線、熱熔膠、電腦

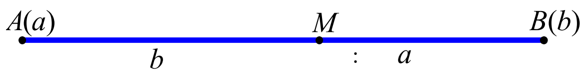
肆、研究過程或方法

一、槓桿平衡原理



在物理的力學中，**槓桿平衡**的條件是支點兩側的力矩相等，而**力矩 = 力 × 力臂**，所以 $F_1 \times \overline{OA} = F_2 \times \overline{OB}$ ……(1)此時支點 O 所受的合力 $F = F_1 + F_2$，各分力對於以合力作用點 O 為支點的合力矩 $= 0$。

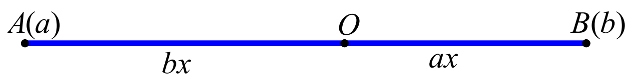
二、兩質點系統的重（質）心關係



若一個系統只有兩個質點 A、B，其質量分別為 a、b，則這兩個質點 A、B 的重心就在 A、B 的連線上，

即相對某參考點，A、B 兩質點所產生的合力與合力矩，與重心所產生的合力與合力矩相等。或由槓桿平衡原理可知，如圖示以 M 為支點時，A、B 兩質點所產生之力矩相等，即 $\overline{AM} : \overline{MB} = \boldsymbol{b : a}$……(2) ，且 M 的質量為 $a + b$……(3)

三、黃金分割



若一個系統只有兩個質點 A、B，

其質量分別為 a、b，

則∵由槓桿平衡原理知 $\overline{AO} : \overline{OB} = b : a$

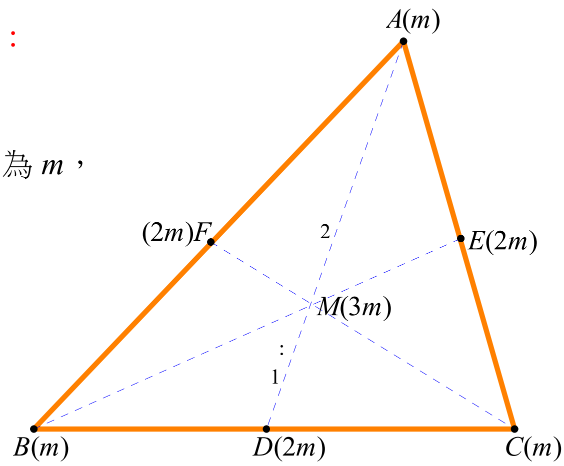
$$\therefore \overline{AO} \overset{令}{=} bx，\overline{OB} \overset{令}{=} ax \quad \Rightarrow ax : bx = bx : (ax + bx)$$

$$\Rightarrow a : b = b : (a + b) \quad \Rightarrow \frac{a}{b} : 1 = 1 : (\frac{a}{b} + 1)，\frac{a}{b} \overset{令}{=} z \quad \Rightarrow z : 1 = 1 : (z + 1)$$

$$\Rightarrow z^2 + z = 1 \Rightarrow z = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

我們先從力學觀點來探討**三角形的幾何性質**：

四、三角形的三中線交於一點



若一個系統有三個質點 A、B、C，其質量均為 m，則由槓桿平衡原理知質點 B、C 的重心 D 在 $\overline{BC}$ 中點，D 的質量為 $2m$。同理，質點 A、D 的重心 M 在 $\overline{AD}$ 上，且 $\overline{AM} : \overline{MD} = 2m : m = 2 : 1$。即質點 A、B、C 的重心 M 在中線 $\overline{AD}$ 上，

且 $\overline{AM} : \overline{MD} = 2m : m = 2 : 1$ 同理，重心 M 在中線 $\overline{BE}$ 上，且 $\overline{BM} : \overline{ME} = 2m : m = 2 : 1$ 重心 M 在中線 $\overline{CF}$ 上，且 $\overline{CM} : \overline{MF} = 2m : m = 2 : 1$

即三角形的三中線交於一點 (**M**：重心)。

五、三角形的三內角平分線交於一點

已知三個質點 A、B、C，設 A 的質量為 a，
B 的質量為 b，C 的質量為 c。則
由槓桿平衡原理知系統(BC)的重心 D 在

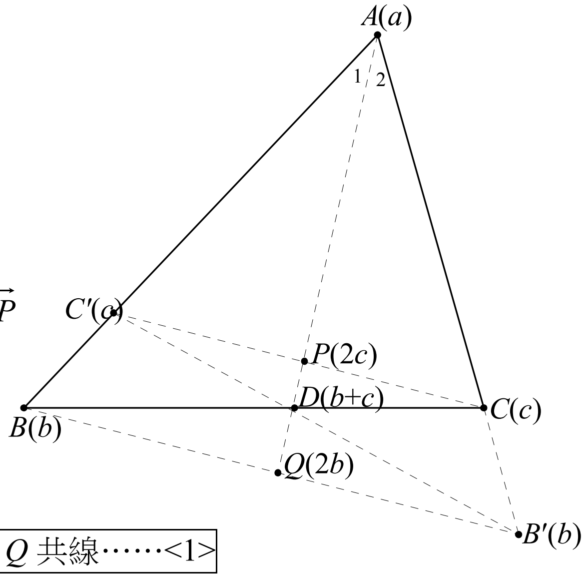
$\overline{BC}$ 上(此時 D 之質量為 $b+c$)。固定 A，

將系統(ABC)翻轉 180°可得系統$(AB'C')$，
設 P、Q 分別表系統(CC')、(BB')的重心，

則 P 之質量為 $2c$、Q 之質量為 $2b$。連接 $\overrightarrow{AP}$

$\because$ 系統(APC)與(APC')質量分布完全相同，

$\therefore \angle 1 = \angle 2 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AP}$ 是$\angle BAC$ 的平分線。

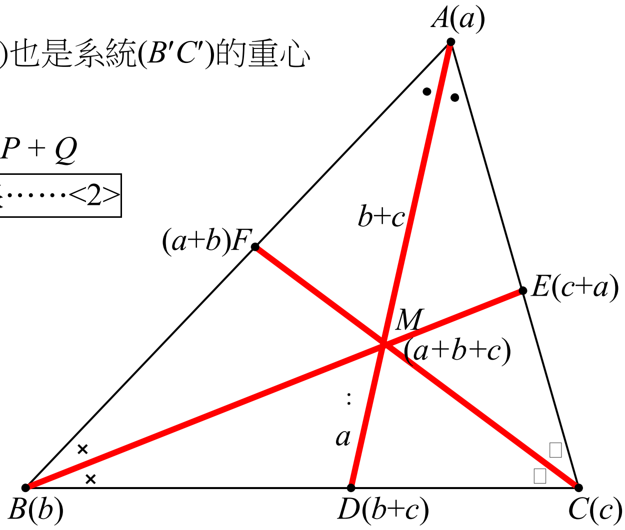


同理，$\overrightarrow{AQ}$ 也是$\angle BAC$ 的平分線 $\Rightarrow$ $\boxed{A、P、Q \text{ 共線}\cdots\cdots\lt 1\gt}$

(BC)的質心為 D_1，質量為 $b+c$
$(B'C')$的質心為 D_2，質量為 $b+c$
把(BC)、$(B'C')$合成系統$(BB'C'C)$
(BB')的質心為 Q，Q 之質量為 $2b$
(CC')的質心為 P，P 之質量為 $2c$
$\because(D_1D_2)$之質心 $X\,(2b+2c)$ 與系統(PQ)之質心 $D\,(2b+2c)$
均為系統$(BB'C'C)$之質心($\because$質心的唯一性)
$\Rightarrow X$ 與 D 重合
$\because$ $D(b+c)$是系統(BC)的重心，同理，$D(b+c)$也是系統$(B'C')$的重心
$\Rightarrow D$ 是系統$(BB'C'C)$的重心。
對系統$(BB'C'C)$而言 D 之質量為$(2b + 2c) = P + Q$
$\Rightarrow D$ 是系統(PQ)的重心 $\quad\therefore$ $\boxed{P、D、Q \text{ 共線}\cdots\cdots\lt 2\gt}$
由<1><2>知 A、P、D、Q 共線

$\Rightarrow$ $\boxed{\overline{AD} \text{ 是} \angle BAC \text{ 的平分線}\ldots\ldots\ldots\lt 3\gt}$

設 E、F 分別表系統(AC)、(AB)的重心，
則 E 之質量為$(c + a)$、F 之質量為$(a + b)$。
與<3>同理可知：



$\overline{BE}$ 是$\angle ABC$ 的平分線、$\overline{CF}$ 是$\angle ACB$ 的平分線。

$\because$ 系統(ABC)的重心 M 之質量為 $a + b + c \quad \therefore$ M 亦為系統(AD)的重心

$\Rightarrow M$ 在 $\overline{AD}$ 上。同理，M 在 $\overline{BE}$ 上，M 在 $\overline{CF}$ 上。即

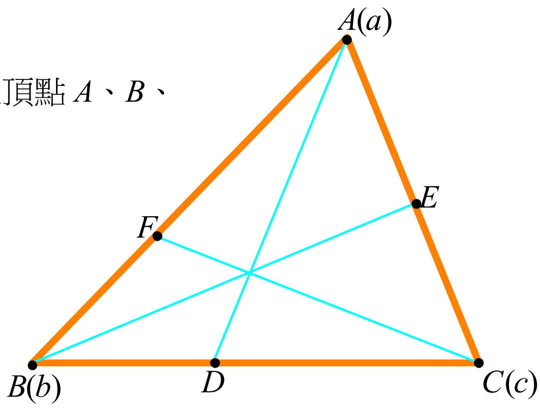
三角形的三內角平分線交於一點 (M：內心)。

六、西瓦定理與逆定理

已知ΔABC，D、E、F 分別在$\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 、$\overline{AB}$ 上(且均非頂點)，

試證：$\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ 交於一點 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$

證：



($\Rightarrow$)$\because$ $\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ 共點於 P，在三頂點 A、B、

C 構成的系統中，取 A 的質量為 a

B 的質量為 b，C 的質量為 c。使

F 為系統 A、B 的重心，

E 為系統 C、A 的重心，

即 $b：a=\gamma$ ， $a：c=\beta$

$\therefore$系統 A、B、C 的重心應在$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ 之交點 P 處，

而$\overline{AD}$ 也通過重心 P $\therefore D$ 必為系統 B、C 的重心 $\Rightarrow c：b=\alpha$，

$$\therefore \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \frac{c}{b} \times \frac{a}{c} \times \frac{b}{a} = 1$$

($\Leftarrow$)若$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$，我們可以選擇適當的 a、b、c 做為三頂點 A、B、C 的質量，

使 B、C 的重心在 D，C、A 的重心在 E，A、B 的重心在 F。

(例如：取 $a = 1$、$b = \gamma$、$c = \dfrac{1}{\beta}$ 。)

由於系統 A、B、C 的重心應同時在$\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ 上，

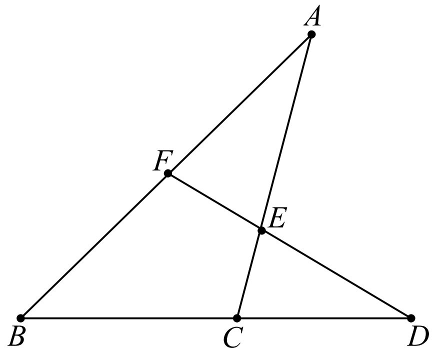
$\therefore$ $\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ 必交於一點。

於是，我們就導出了三角形的西瓦定理：

$\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ 交於一點 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$

七、孟氏定理與逆定理

已知ΔABC，如圖，試證：



若一直線 L 分別截 $\overrightarrow{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 於

D、E、F 三點$\Leftrightarrow$ $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$

證：

$(\Rightarrow)\because$ $\overline{AC}$ 、 $\overline{DF}$ 共點於 E，在系統 A、B、D 中

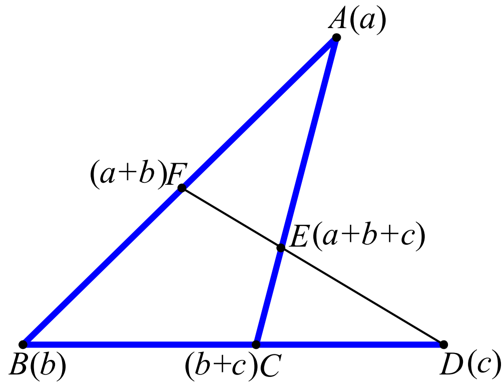
，設 A 的質量為 a，B 的質量為 b，

D 的質量為 c。使 F 為 A、B 的重心，C 為 B、D 的重心，則

F、C 之位置會隨著 a、b、c 之改變而分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BD}$ 上移動。

$\because$系統 A、B、D 的重心在 $\overline{CA}$ 上，也在 $\overline{DF}$ 上

$\therefore$其位置就在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{DF}$ 之交點 E 處。



$\Rightarrow$ $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \dfrac{b}{a}\times\dfrac{b+c}{b}\times\dfrac{a}{b+c} =1$

$(\Leftarrow)$若$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$，我們可以選擇

適當的 a、b、c 做為三頂點

A、B、D 的質量，使 A、B 的重心在 F，B、D 的重心在 C，

此時系統 A、B、D 的重心在 $\overline{CA}$ 上，也在 $\overline{DF}$ 上

$\therefore$其位置就在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{DF}$ 之交點 E 處。即 $A-E-C$ 且 $D-E-F$。

至此，我們就導出了三角形的孟氏定理：

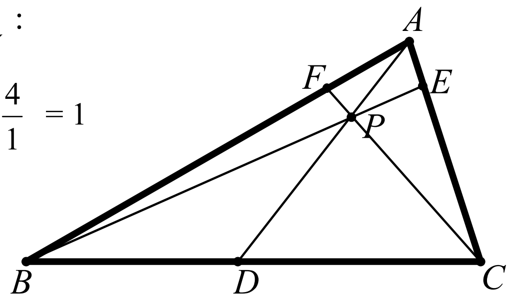
$A-E-C$ 且 $D-E-F\Leftrightarrow$ $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$

八、用槓桿平衡解題

已知ΔABC中，$\overline{BD}:\overline{DC}=3:4$，$\overline{AP}:\overline{PD}=1:4$，

連接$\overrightarrow{CP}$交$\overline{AB}$於F，如圖，試求$\overline{AF}:\overline{FB}=$？

解：這個問題在幾何中常以孟氏定理解之：



$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\times\frac{\overline{DP}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{7}{4}\times\frac{4}{1}=1$$

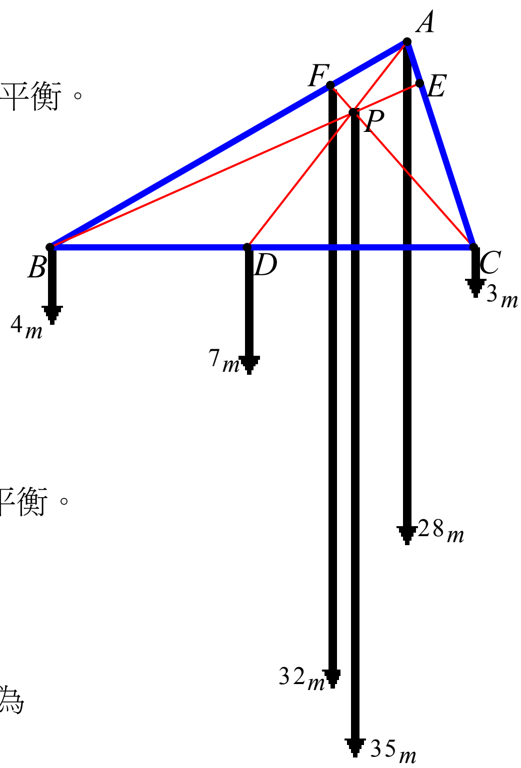
$\Rightarrow\overline{AF}:\overline{FB}=1:7$。

現在改由槓桿平衡的概念來處理：

觀察以D為支點的系統BDC

在B點受力$4m$，C點受力$3m$，則

支點D點受力$7m$可使系統BDC達到平衡。



觀察以P為支點的系統APD

在D點受力$7m$，已知

$\overline{AP}:\overline{PD}=1:4$

由槓桿平衡原理得 $7m\times4=A\times1$

$\Rightarrow A=28m$，即A點受力$28m$，

故P點受力$35\ m$可使系統APD達到平衡。

觀察以P為支點的系統CPF，

因為P點受力$35\ m$，C點受力$3m$，

要使系統APD達到平衡，F點受力應為

$35m-3m=32m$。

觀察以F為支點的系AFB，

因為A點受力$28m$，B點受力$4m$，F點受力應為$32m$，

由槓桿平衡原理知系統AFB達到平衡，

此時$\overline{AF}:\overline{FB}=4m:28m=1:7$。

接下來，我們想進入三度空間探討凸四面體的幾何性質，就先從凸四面體的重心找起吧!

九、凸四面體的重心

如果凸四面體的四個頂點 A、B、C、D 有相等的質量(m)，

N、Z、Y、L、M、X 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{BC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 之中點。則由槓桿平衡原理知

系統 $A(m)$、$B(m)$的重心在 $\overline{AB}$ 中點 $N(2m)$，

系統 $C(m)$、$D(m)$的重心在 $\overline{CD}$ 中點 $Z(2m)$，

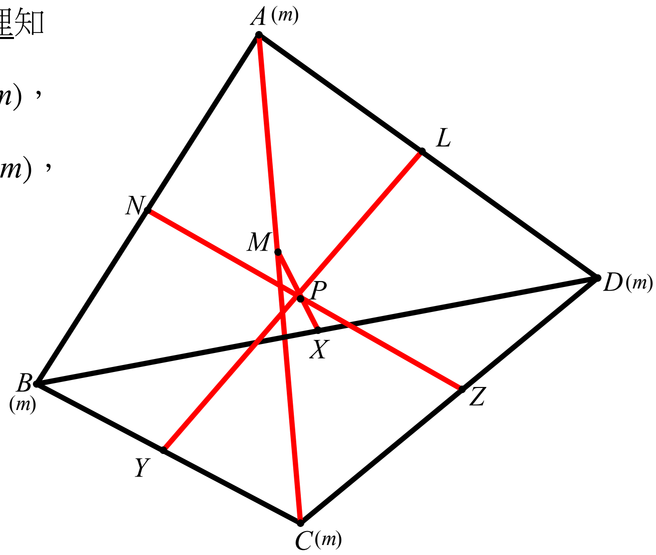
故系統 $N(2m)$、$Z(2m)$的重心 P

(也就是系統 $ABCD$ 的重心)

應在 $\overline{NZ}$ 之中點處。同理

系統 $ABCD$ 的重心應在

$\overline{LY}$ 之中點處，也應在 $\overline{XM}$ 之中點處。



即四面體 $ABCD$ 的三組歪斜邊($\overline{AB}$、$\overline{CD}$)、($\overline{BC}$、$\overline{AD}$)、($\overline{AC}$、$\overline{BD}$)之中點連線段 $\overline{LY}$、$\overline{NZ}$、$\overline{XM}$ 會交於一點 P，且 P 就是系統 $ABCD$ 的重心。

還有另一種處理方法：

設 E、F、G、H 分別為ΔBCD、ΔACD、ΔABD、ΔABC 的重心(三中線之交點)，則

由槓桿平衡原理知系統 BCD 之重心 $E(3m)$與 $A(m)$的重心 P，其位置就在 $\overline{AE}$ 上，滿足

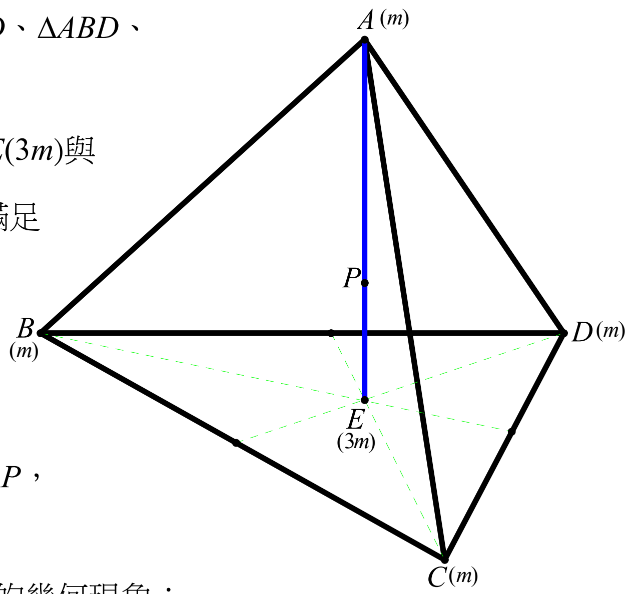
$\overline{AP}:\overline{PE}=3:1$ 處。同理

系統 $ABCD$ 的重心也在

$\overline{BF}$、$\overline{CG}$、$\overline{DH}$ 上。

即 $\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CG}$、$\overline{DH}$ 會交於一點 P，

且 P 就是系統 $ABCD$ 的重心。



以上兩種解法讓我們發現了一個有趣的幾何現象：

凸四面體中的七條特定線段 $\overline{LY}$、$\overline{NZ}$、$\overline{XM}$、$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CG}$、$\overline{DH}$ 會交於一點 M，且 M 就是系統 $ABCD$ 的重心。

如果在四面體的四個頂點 A、B、C、D 置質量 a、b、c、d，
設 N、M、L、Y、Z、X 分別為系統$(A$、$B)$、$(A$、$C)$、$(A$、$D)$、$(B$、$C)$、$(C$、$D)$、$(D$、$B)$之重心。則由槓桿平衡原理知
系統 N、M、L、Y、Z、X 之質量分別為$(a+b)$、$(a+c)$、$(a+d)$、$(b+c)$、$(c+d)$、$(d+b)$。
設 H、F、G、E 分別為系統$(A$、B、$C)$、$(A$、C、$D)$、$(A$、B、$D)$、$(B$、C、$D)$之重心。則由槓桿平衡原理知
系統 H、F、G、E 之質量分別為$(a+b+c)$、$(a+c+d)$、$(a+b+d)$、$(b+c+d)$。

設 $\overline{XY}$ 交 $\overline{BZ}$ 於 I，$\overline{YZ}$ 交 $\overline{CX}$ 於 J，$\overline{DY}$ 交 $\overline{XZ}$ 於 K，
$\overline{BL}$ 交 $\overline{NX}$ 於 Q，$\overline{DN}$ 交 $\overline{LX}$ 於 T，$\overline{LN}$ 交 $\overline{AX}$ 於 S，
$\overline{LM}$ 交 $\overline{AZ}$ 於 O，$\overline{DM}$ 交 $\overline{LZ}$ 於 R，$\overline{CL}$ 交 $\overline{MZ}$ 於 U，
$\overline{MN}$ 交 $\overline{AY}$ 於 W，$\overline{BM}$ 交 $\overline{NY}$ 於 W'，$\overline{CN}$ 交 $\overline{MY}$ 於 V，

系統 BCD 可視為五個系統：(一)由$(D$、$Y)$構成　(二)由$(X$、$C)$構成
(三)由$(B$、$Z)$構成　(四)由$(B$、C、$D)$構成　(五)由$(X$、Y、$Z)$構成
系統(一)(二)(三)之質心皆為 E，大小為$(b+c+d)$，
將此三系統併成一個系統，則質心位置仍為 E，大小為 $3(b+c+d)$。
系統(四)BCD 之質心位置為 E，大小為$(b+d+c)$。
系統(五)XYZ 之質心位置亦為 E，大小為 $2(b+c+d)$。
即 E 為系統$(D$、$Y)$、$(X$、$C)$、$(B$、$Z)$、$(B$、C、$D)$、$(X$、Y、$Z)$之共同質心。

∵E 為系統$(X$、Y、$Z)$之重心，此時 E 之質量為$(2b+2c+2d)$

而 $E(2b+2c+2d)=I(2b+c+d)+Z(c+d)$

∴在 $\overrightarrow{ZE}$ 上可以找到異於 B 之一點 I，使 E 為$(I$、$Z)$之重心，

∵$I(2b+c+d)=X(b+d)+Y(b+c)$　∴ I 為$(X$、$Y)$之重心　∴ B—I—E—Z

同理 D—K—E—Y，C—J—E—X。

同理

系統 ABC 中　⇒ H 為系統$(A$、B、$C)$、$(A$、$Y)$、$(B$、$M)$、$(C$、$N)$、
$(M$、N、$Y)$之共同重心。且
A—W—H—Y，B—W'—H—M，C—V—H—N。

系統 ABD 中　⇒ G 分別為系統$(A$、B、$D)$、$(A$、$X)$、$(B$、$N)$、$(D$、$N)$、
$(L$、N、$X)$之共同重心。且
A—S—G—X，B—Q—G—L，D—T—G—N。

系統 ACD 中 $\Rightarrow F$ 分別為系統$(A、C、D)$、$(A、Z)$、$(C、L)$、$(D、M)$、

$(L、M、Z)$之共同重心。且

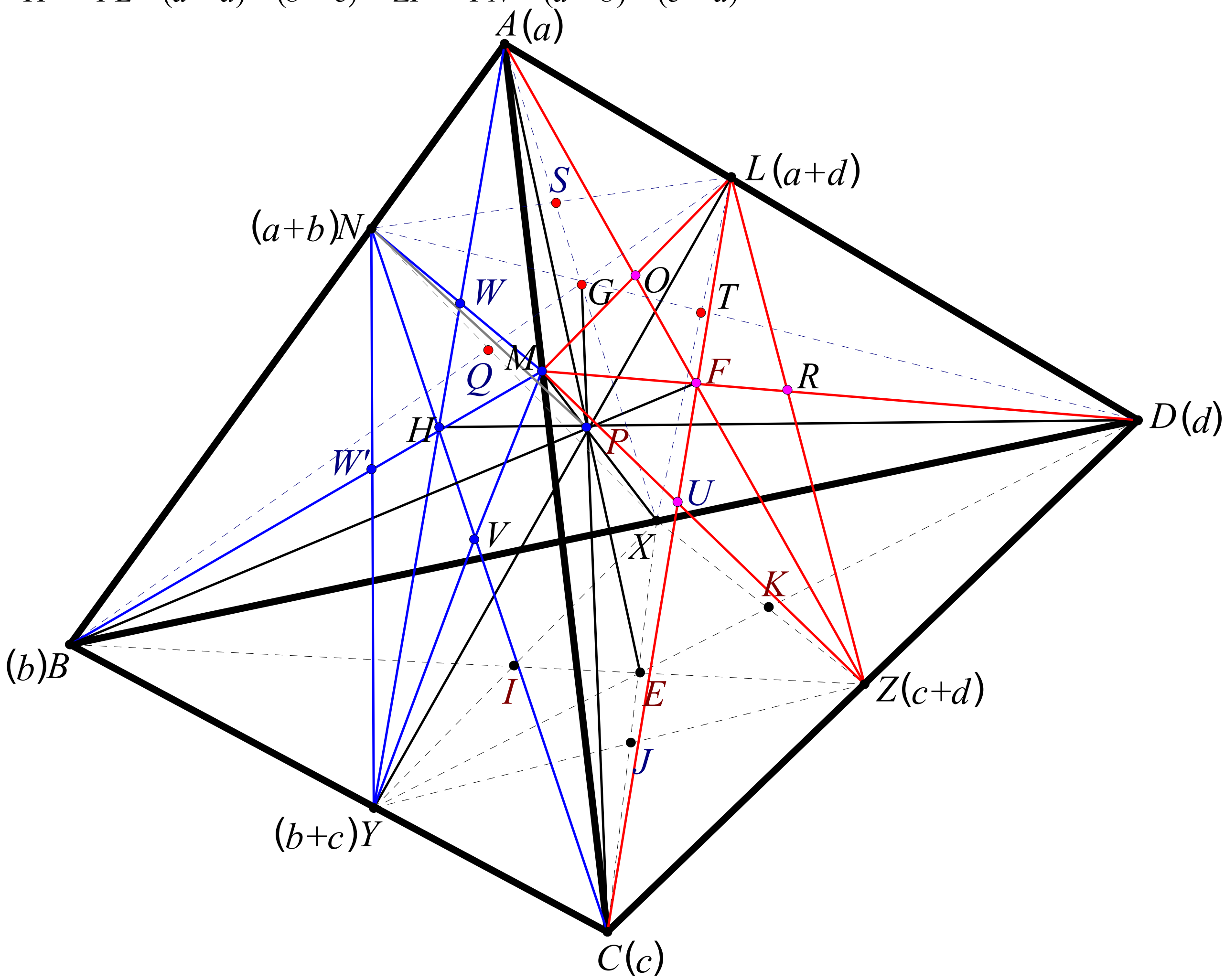
$A—O—F—Z$，$C—U—F—L$，$D—R—F—M$。

$\therefore W、W'、V、O、R、U、I、J、K、Q、T、S$ 分別為系統
$(M、N)$、$(N、Y)$、$(M、Y)$、$(L、M)$、$(L、Z)$、$(C、L)$、
$(X、Y)$、$(Y、Z)$、$(Z、X)$、$(B、L)$、$(D、N)$、$(L、N)$之重心。

由槓桿平衡原理知：$\overline{NW'}:\overline{W'Y}=(b+c):(a+b)$，$\overline{MW}:\overline{WN}=(a+b):(a+c)$。

$\overline{AH}:\overline{HY}=(b+c):(a)$，$\overline{NH}:\overline{HC}=(c):(a+b)$。$\overline{XP}:\overline{PM}=(a+c):(b+d)$，

$\overline{YP}:\overline{PL}=(a+d):(b+c)$，$\overline{ZP}:\overline{PN}=(a+b):(c+d)$。



以此圖為**基本圖形**，接著是我們發現的幾個**凸四面體中類似西瓦定理的性質**
、凸四面體中類似孟氏定理的性質與**凸四面體的幾何性質**。
我們以槓桿平衡原理依次證明如下：

十、凸四面體的小定理(1)

在凸四面體的四個頂點

A、B、C、D 分別置質點

a、b、c、d

承第 10 頁之**基本圖形**，

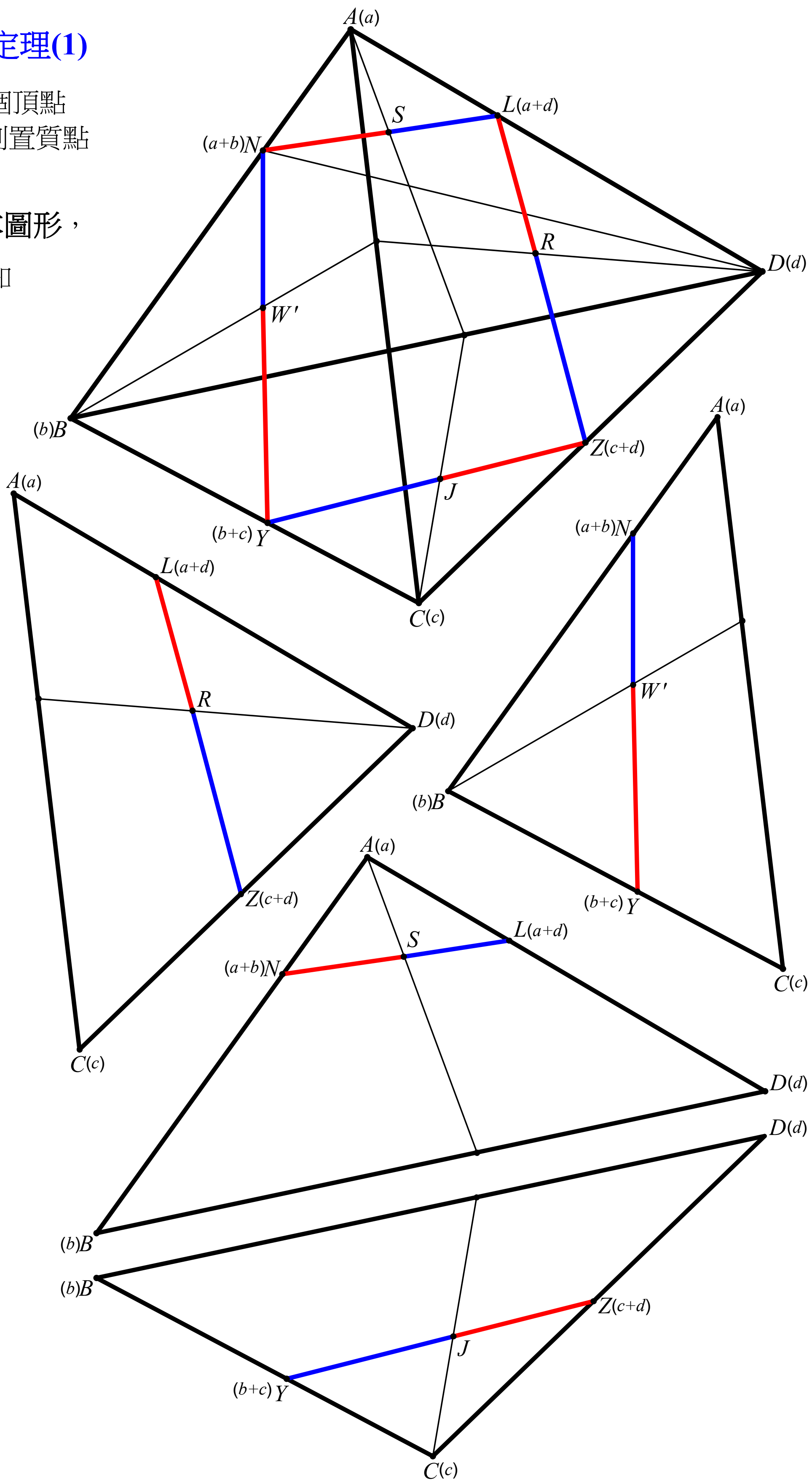
由槓桿平衡原理知

L 之質量為($a+d$)

N 之質量為($a+b$)

Y 之質量為($b+c$)

Z 之質量為($c+d$)



$\overline{YJ}$ ： $\overline{JZ}$ $=$

$(d+c)$：$(b+c)$

$\overline{LR}$ ： $\overline{RZ}$ $=$

$(d+c)$：$(a+d)$

$\overline{LS}$ ： $\overline{SN}$ $=$

$(a+b)$：$(a+d)$

$\overline{NW'}$ ： $\overline{W'Y}$ $=$

$(b+c)$：$(a+b)$

$$\Rightarrow \frac{\overline{NW'}}{\overline{W'Y}} \times \frac{\overline{YJ}}{\overline{JZ}} \times \frac{\overline{ZR}}{\overline{RL}} \times \frac{\overline{LS}}{\overline{SN}} = \frac{b+c}{a+b} \times \frac{c+d}{b+c} \times \frac{a+d}{c+d} \times \frac{a+b}{a+d} = 1$$

十一、凸四面體的小定理(2)

在凸四面體的四個頂點 A、B、C、D 分別置質點 a、b、c、d。

承第 10 頁之**基本圖形**，

由槓桿平衡原理知

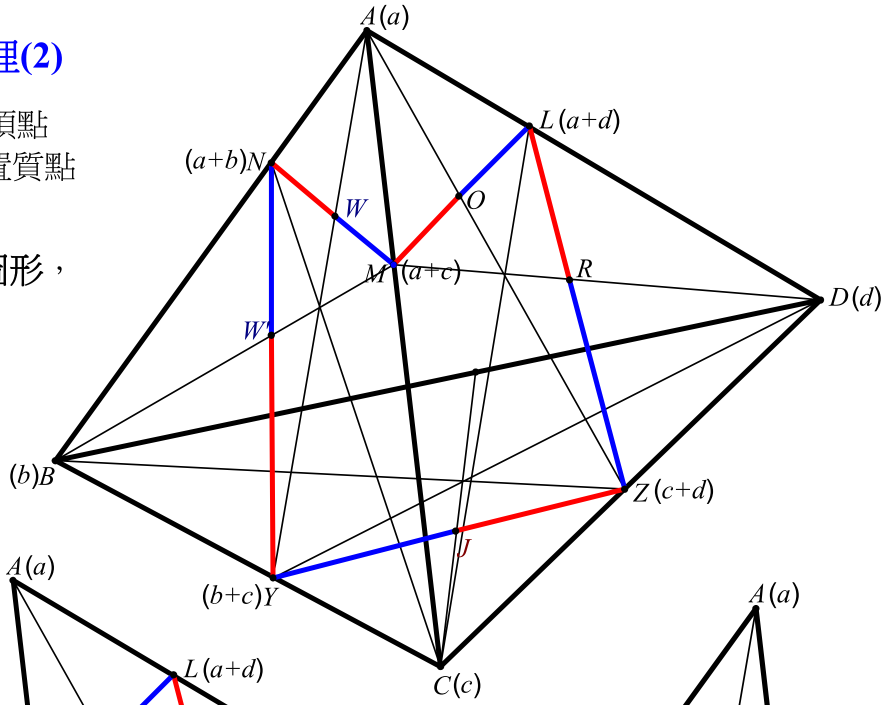
L 之質量為($a+d$)

M 之質量為($a+c$)

N 之質量為($a+b$)

Y 之質量為($b+c$)

Z 之質量為($c+d$)



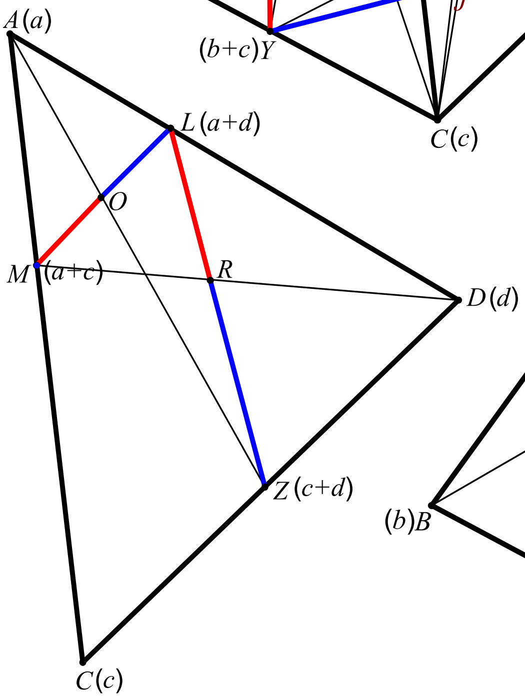
$\overline{NW'}:\overline{W'Y}$
$=(b+c):(a+b)$

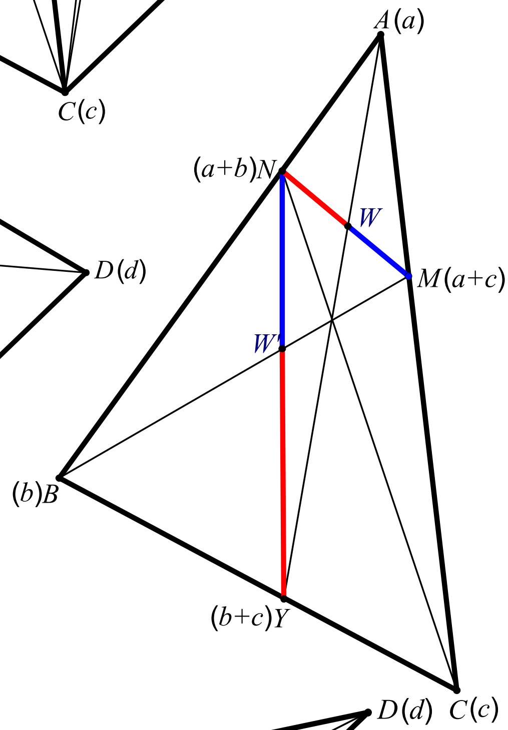
$\overline{YJ}:\overline{JZ}$
$=(c+d):(b+c)$

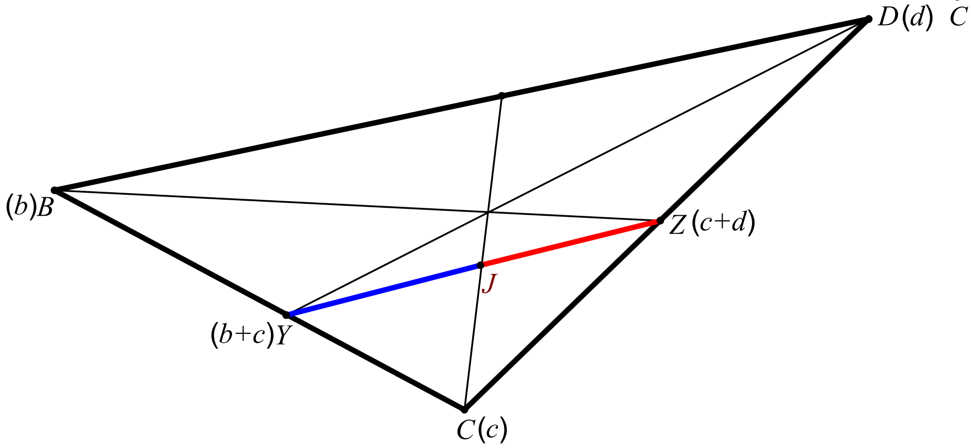
$\overline{ZR}:\overline{RL}$
$=(a+d):(c+d)$

$\overline{LO}:\overline{OM}$
$=(a+c):(a+d)$

$\overline{MW}:\overline{WN}$
$=(a+b):(a+c)$







$$\Rightarrow \frac{\overline{NW'}}{\overline{W'Y}}\times\frac{\overline{YJ}}{\overline{JZ}}\times\frac{\overline{ZR}}{\overline{RL}}\times\frac{\overline{LO}}{\overline{OM}}\times\frac{\overline{MW}}{\overline{WN}}=\frac{b+c}{a+b}\times\frac{c+d}{b+c}\times\frac{a+d}{c+d}\times\frac{a+c}{a+d}\times\frac{a+b}{a+c}=1$$

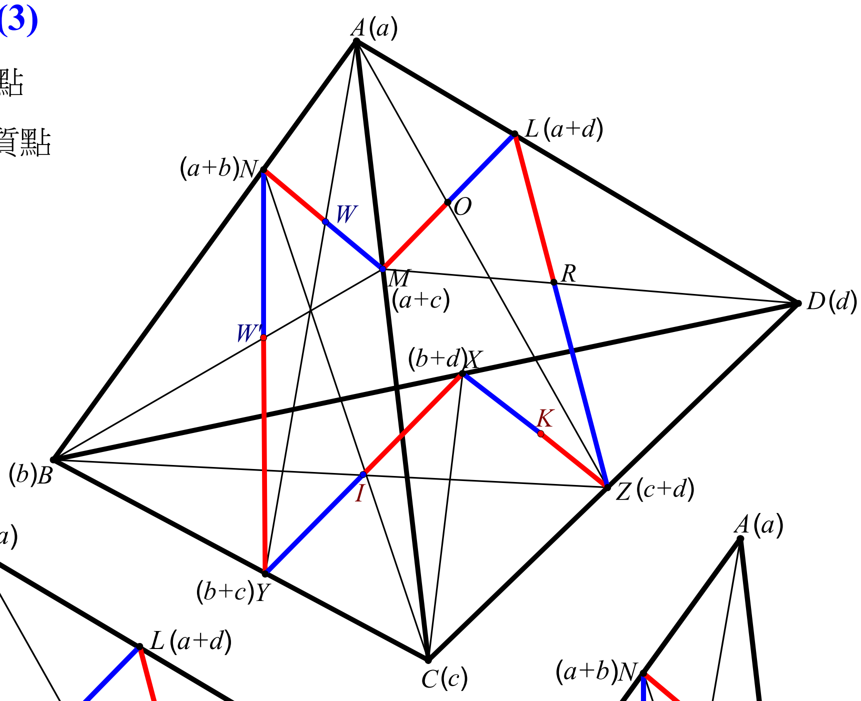
十二、凸四面體的小定理(3)

在凸四面體的四個頂點 A、B、C、D 分別置質點 a、b、c、d。

設 P 為其內部任意給定一點。

承第 10 頁之

基本圖形



由槓桿平衡原理知

$\overline{LO}:\overline{OM}$

$=(a+c):(a+d)$

$\overline{MW}:\overline{WN}$

$=(a+b):(a+c)$

$\overline{NW'}:\overline{W'Y}$

$=(b+c):(a+b)$

$\overline{YI}:\overline{IX}$

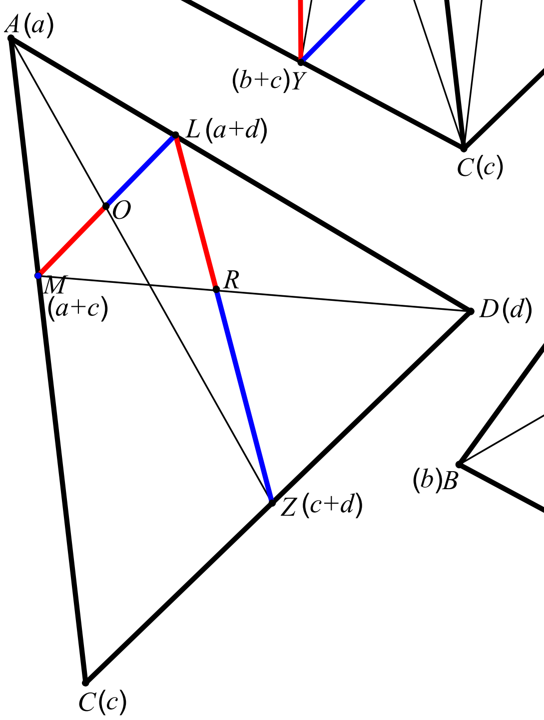
$=(b+d):(b+c)$

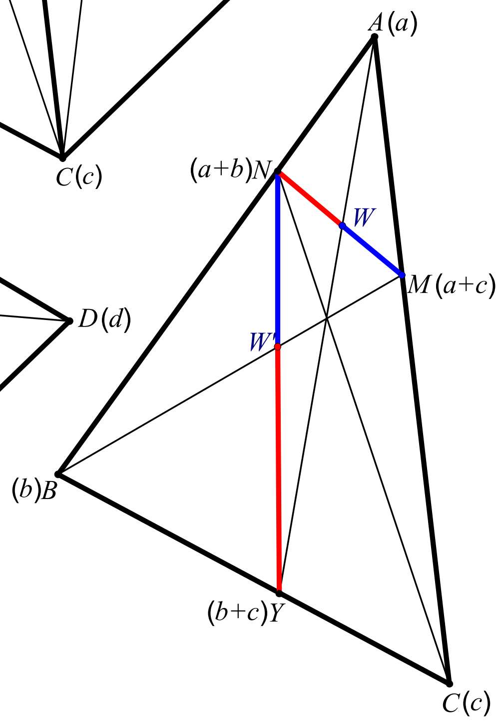
$\overline{XK}:\overline{KZ}$

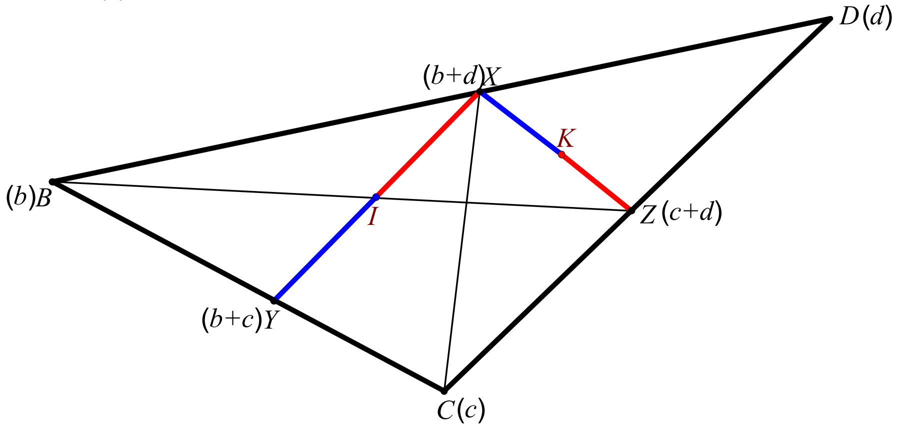
$=(c+d):(b+d)$

$\overline{ZR}:\overline{RL}$

$=(a+d):(c+d)$







$$\Rightarrow \frac{\overline{LO}}{\overline{OM}}\times\frac{\overline{MW}}{\overline{WN}}\times\frac{\overline{NW'}}{\overline{W'Y}}\times\frac{\overline{YI}}{\overline{IX}}\times\frac{\overline{XK}}{\overline{KZ}}\times\frac{\overline{ZR}}{\overline{RL}}=\frac{a+c}{a+d}\times\frac{a+b}{a+c}\times\frac{b+c}{a+b}\times\frac{b+d}{b+c}\times\frac{c+d}{b+d}\times\frac{a+d}{c+d}=1$$

十三、凸四面體的小定理(4)

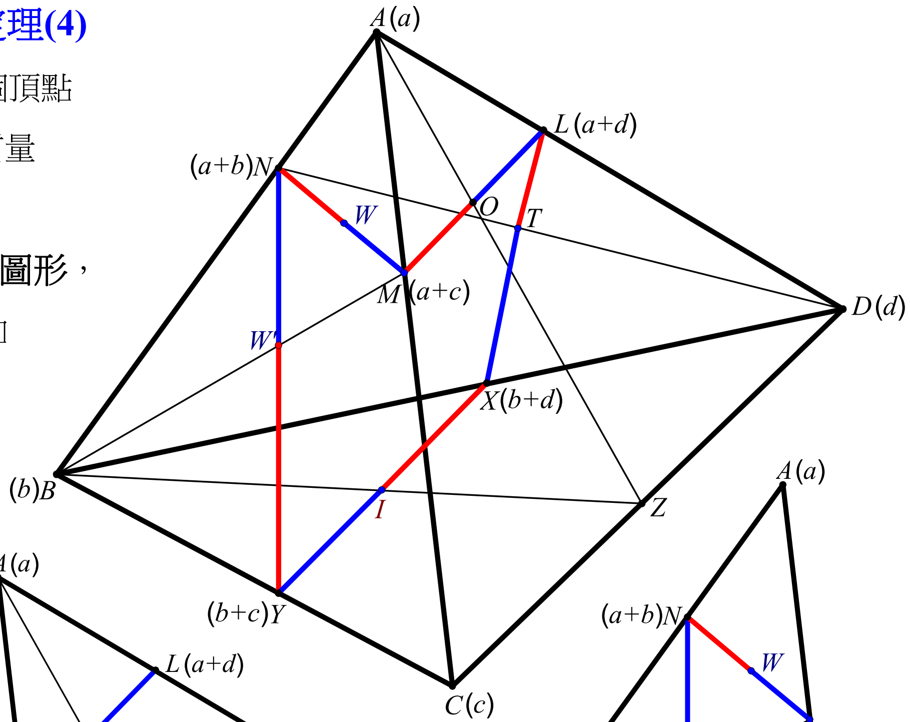
在凸四面體的四個頂點

A、B、C、D 置質量

a、b、c、d。

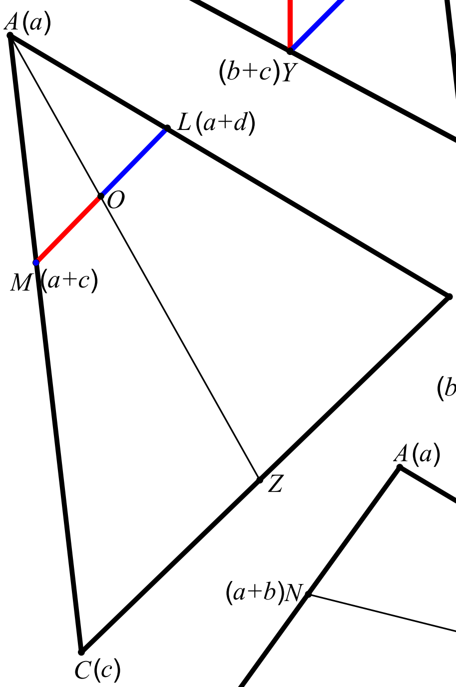
承第 10 頁之**基本圖形**，

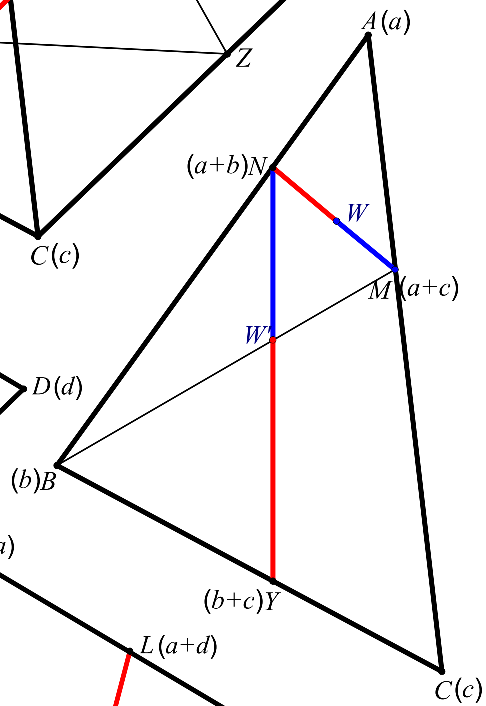
由槓桿平衡原理知



$\overline{NW'}：\overline{W'Y}=$

$(b+c)：(a+b)$





$\overline{YI}：\overline{IX}=$

$(b+d)：(b+c)$

$\overline{XT}：\overline{TL}=$

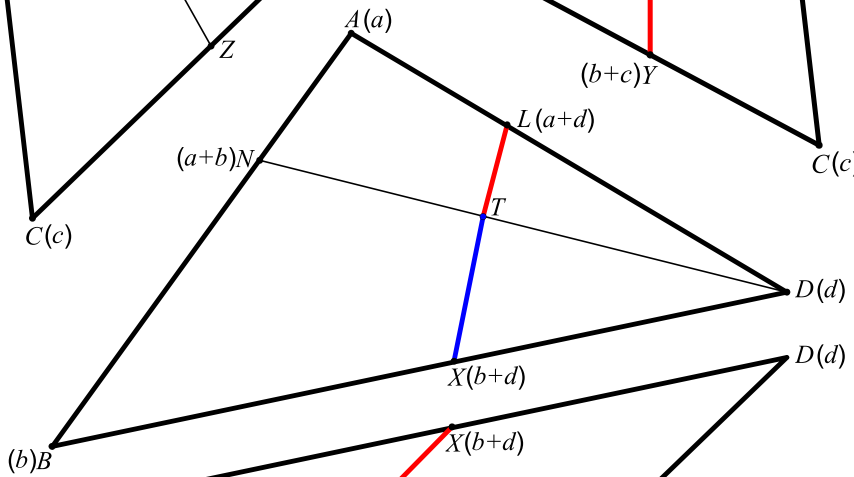
$(a+d)：(b+d)$

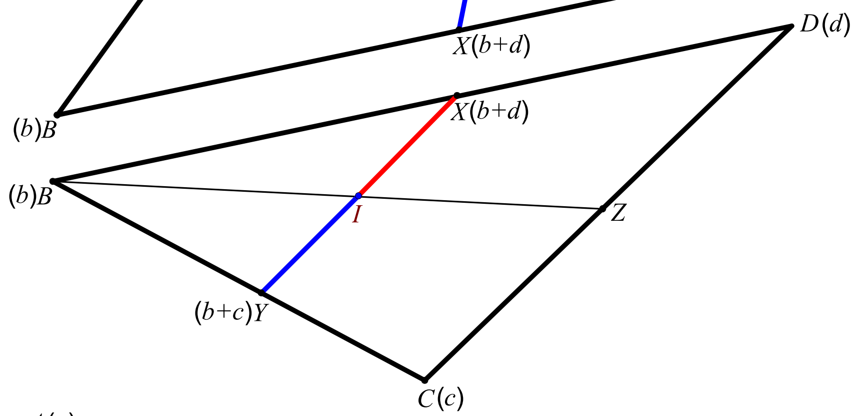
$\overline{LO}：\overline{OM}=$

$(a+c)：(a+d)$

$\overline{MW}：\overline{WN}=$

$(a+b)：(a+c)$





$A(a)$

$$\Rightarrow \frac{\overline{NW'}}{\overline{W'Y}}\times\frac{\overline{YI}}{\overline{IX}}\times\frac{\overline{XT}}{\overline{TL}}\times\frac{\overline{LO}}{\overline{OM}}\times\frac{\overline{MW}}{\overline{WN}}=\frac{b+c}{a+b}\times\frac{b+d}{b+c}\times\frac{a+d}{b+d}\times\frac{a+c}{a+d}\times\frac{a+b}{a+c}=1$$

十四、凸四面體的小定理(5)

在凸四面體的四個頂點 A、B、C、D 置質量 a、b、c、d。

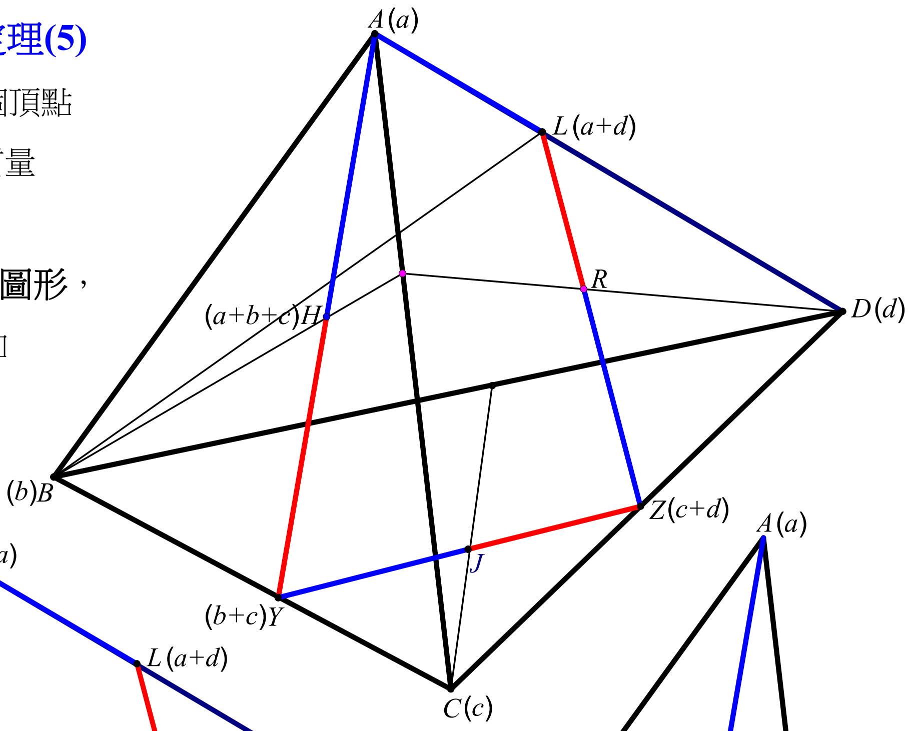
承第 10 頁之**基本圖形**，由槓桿平衡原理知

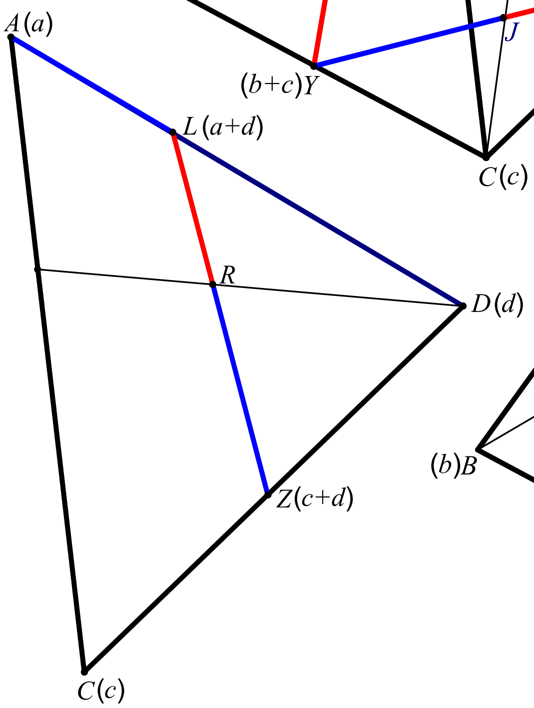
$\overline{AH}:\overline{HY}=(b+c):(a)$

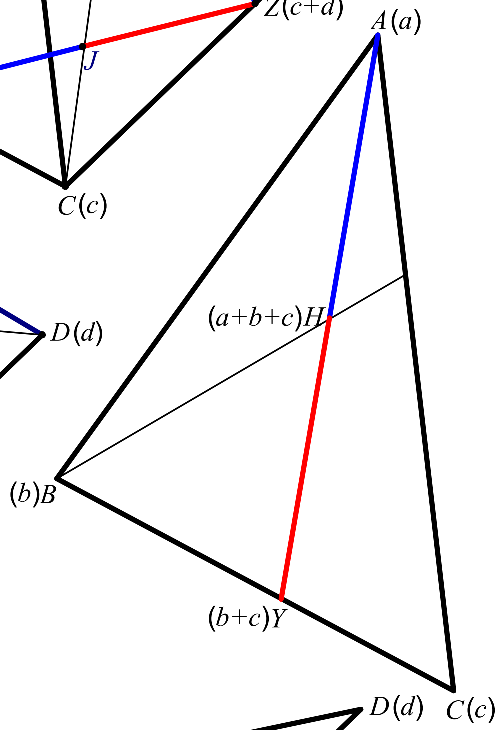
$\overline{YJ}:\overline{JZ}=(c+d):(b+c)$

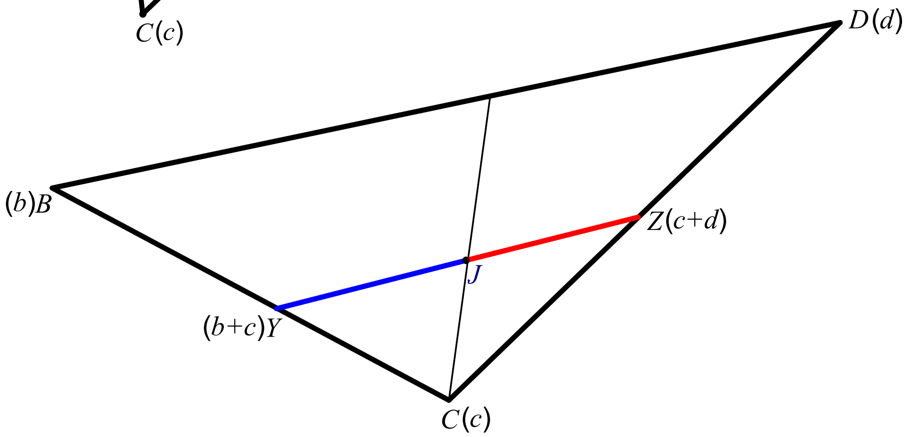
$\overline{ZR}:\overline{RL}=(a+d):(c+d)$

$\overline{LD}:\overline{DA}=(a):(a+d)$









$$\Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{HY}}\times\frac{\overline{YJ}}{\overline{JZ}}\times\frac{\overline{ZR}}{\overline{RL}}\times\frac{\overline{LD}}{\overline{DA}}=\frac{b+c}{a}\times\frac{c+d}{b+c}\times\frac{a+d}{c+d}\times\frac{a}{a+d}=1$$

十五、凸四面體的小定理(6)

在凸四面體的四個頂點 A、B、C、D 置質量 a、b、c、d，

承第 10 頁之**基本圖形**，

由槓桿平衡原理知

$\overline{AH}:\overline{HY}=(b+c):(a)$

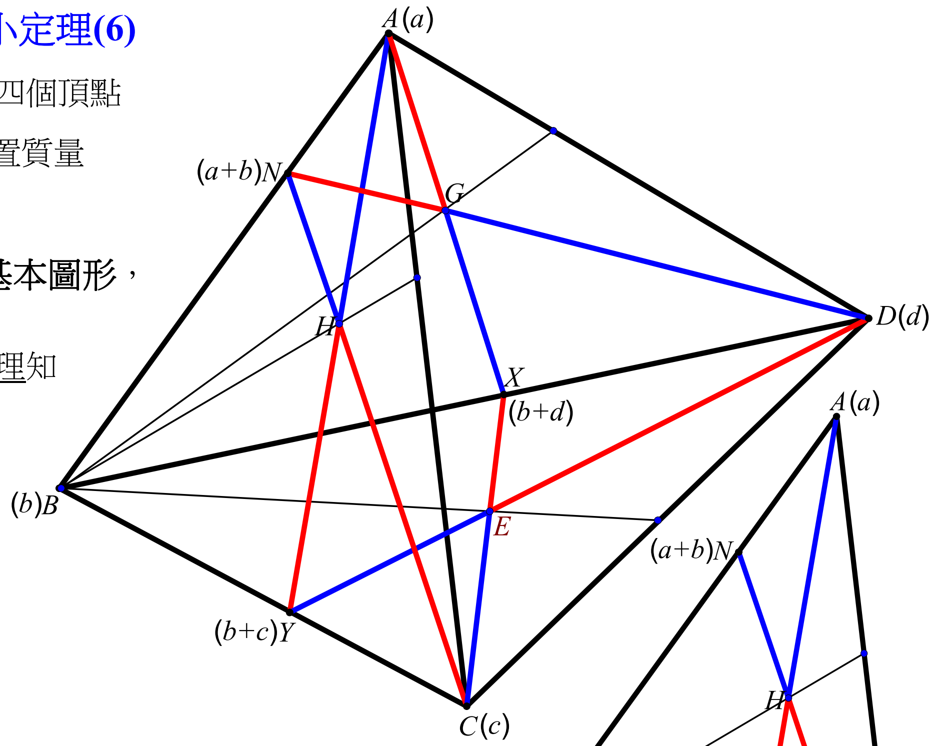
$\overline{YE}:\overline{ED}=(d):(b+c)$

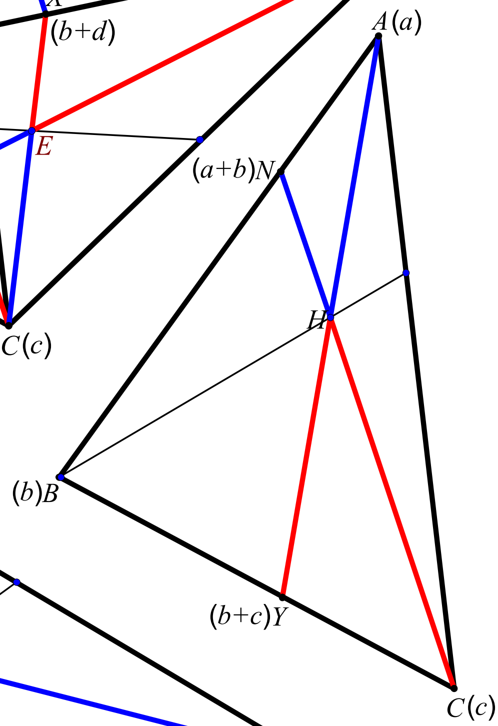
$\overline{DG}:\overline{GN}=(a+b):(d)$

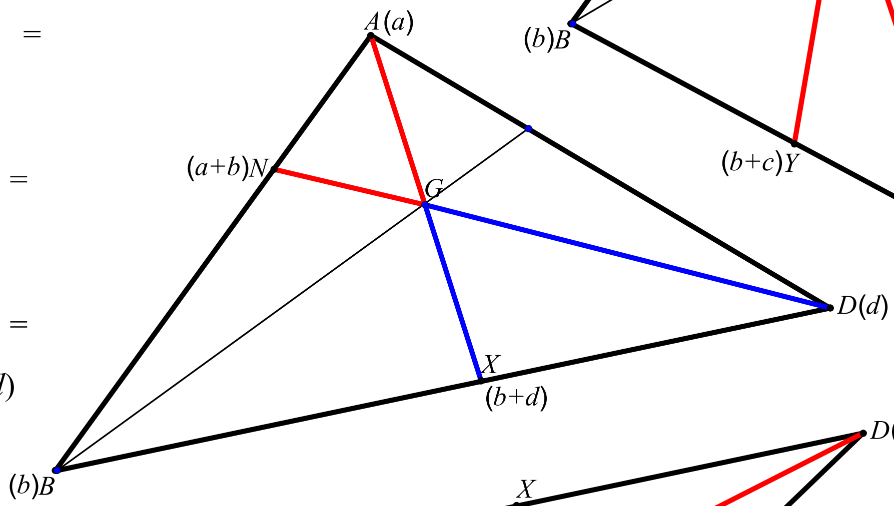
$\overline{NH}:\overline{HC}=(c):(a+b)$

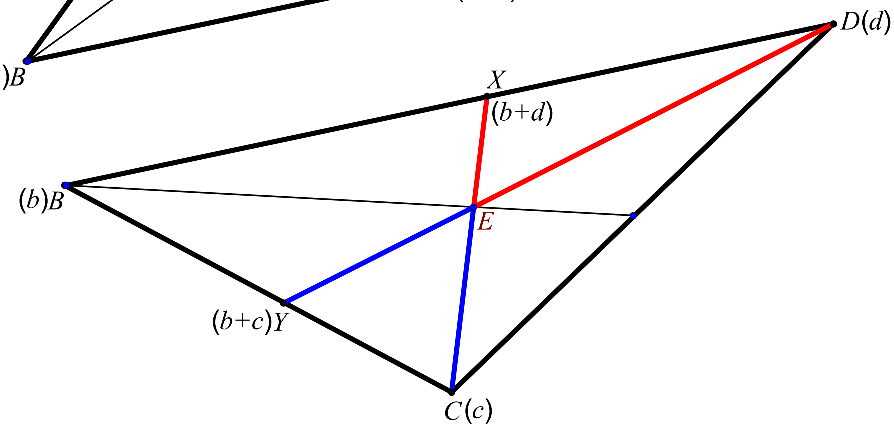
$\overline{CE}:\overline{EX}=(b+d):(c)$

$\overline{XG}:\overline{GA}=(a):(b+d)$









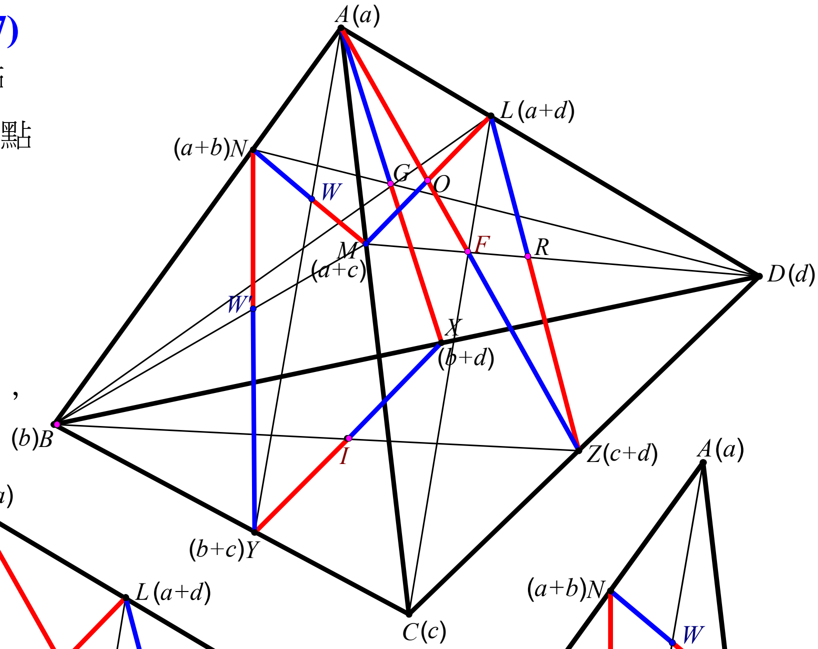
$$\Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{HY}}\times\frac{\overline{YE}}{\overline{ED}}\times\frac{\overline{DG}}{\overline{GN}}\times\frac{\overline{NH}}{\overline{HC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EX}}\times\frac{\overline{XG}}{\overline{GA}}=\frac{b+c}{a}\times\frac{d}{b+c}\times\frac{a+b}{d}\times\frac{c}{a+b}\times\frac{b+d}{c}\times\frac{a}{b+d}=1$$

十六、凸四面體的小定理(7)

在凸四面體的四個頂點 A、B、C、D 分別置質點 a、b、c、d。

設 P 為其內部任意給定一點

承第 10 頁之**基本圖形**，



由槓桿平衡原理知

$\overline{LO}:\overline{OM}$

$=(a+c):(a+d)$

$\overline{MW}:\overline{WN}$

$=(a+b):(a+c)$

$\overline{NW'}:\overline{W'Y}$

$=(b+c):(a+b)$

$\overline{YI}:\overline{IX}=$

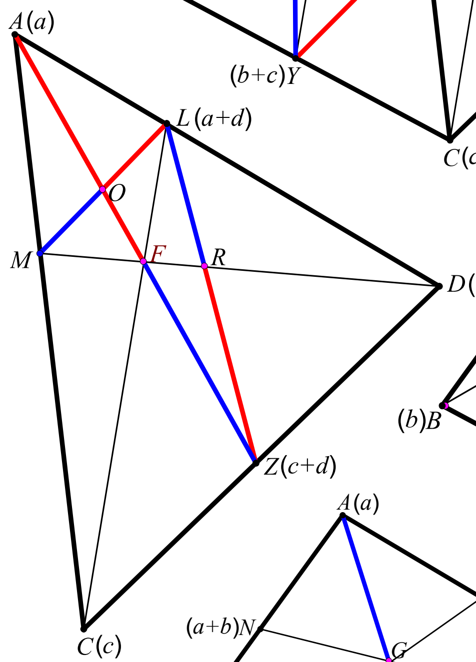
$(b+d):(b+c)$

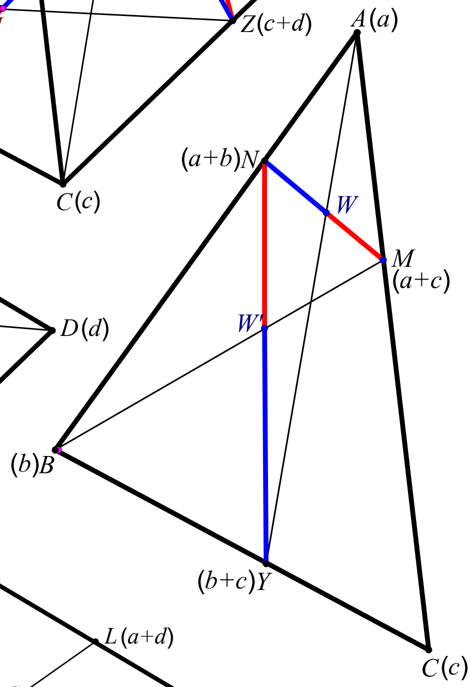
$\overline{ZR}:\overline{RL}=$

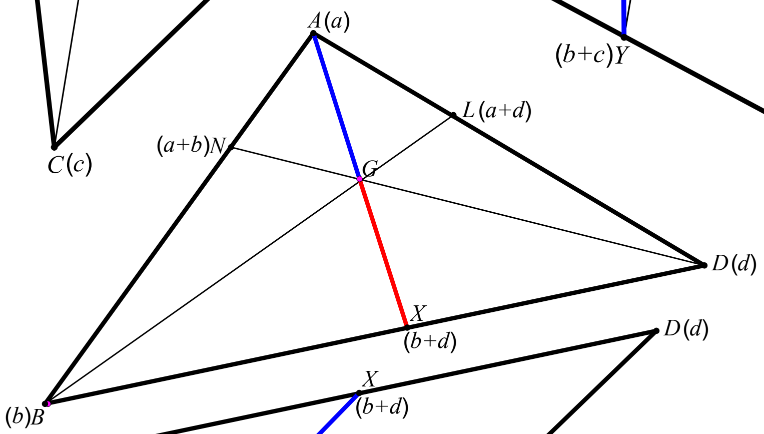
$(a+d):(c+d)$

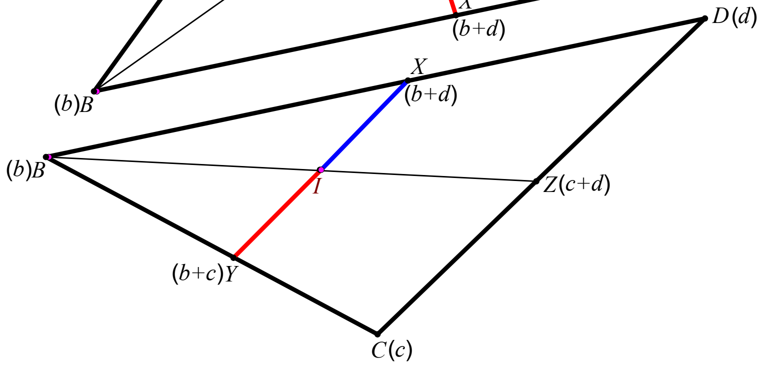
$\overline{ZF}:\overline{FA}=$

$(a):(c+d)$









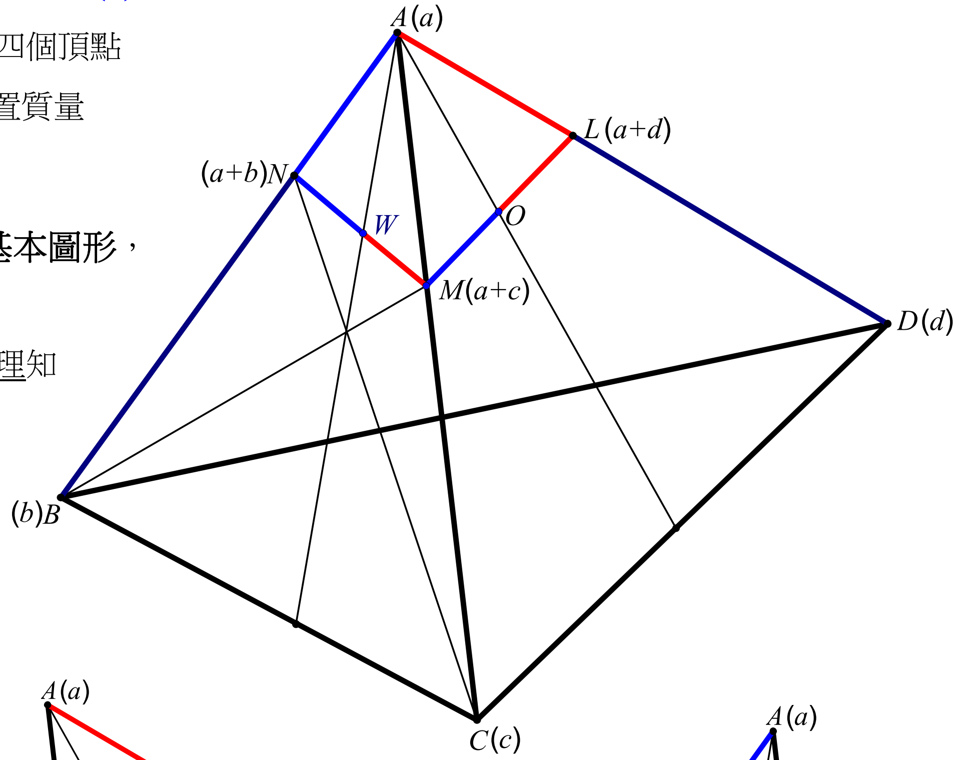
$$\Rightarrow \frac{\overline{AG}}{\overline{GX}}\times\frac{\overline{XI}}{\overline{IY}}\times\frac{\overline{YW'}}{\overline{W'N}}\times\frac{\overline{NW}}{\overline{WM}}\times\frac{\overline{MO}}{\overline{OL}}\times\frac{\overline{LR}}{\overline{RZ}}\times\frac{\overline{ZF}}{\overline{FA}}$$

$$=\frac{b+d}{a}\times\frac{b+c}{b+d}\times\frac{a+b}{b+c}\times\frac{a+c}{a+b}\times\frac{a+d}{a+c}\times\frac{c+d}{a+d}\times\frac{a}{c+d}=1$$

十七、凸四面體的小定理(8)

在凸四面體的四個頂點 A、B、C、D 置質量 a、b、c、d。

承第 10 頁之**基本圖形**，



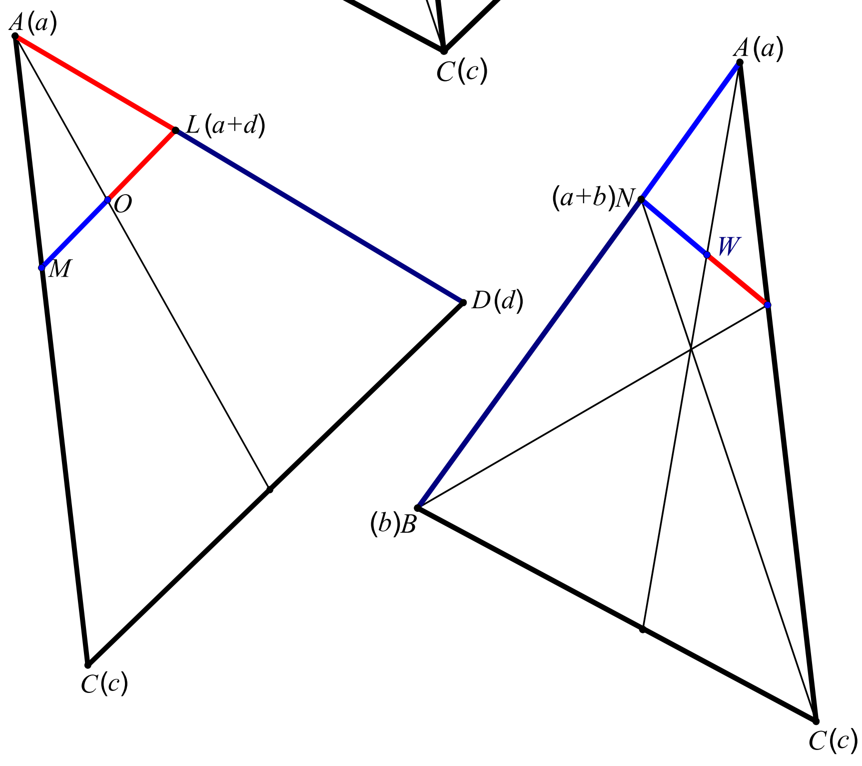
由槓桿平衡原理知

$\overline{AB}:\overline{BN}=(a+b):a$

$\overline{NW}:\overline{WM}=(a+c):(a+b)$

$\overline{MO}:\overline{OL}=(a+d):(a+c)$

$\overline{LD}:\overline{DA}=a:(a+d)$

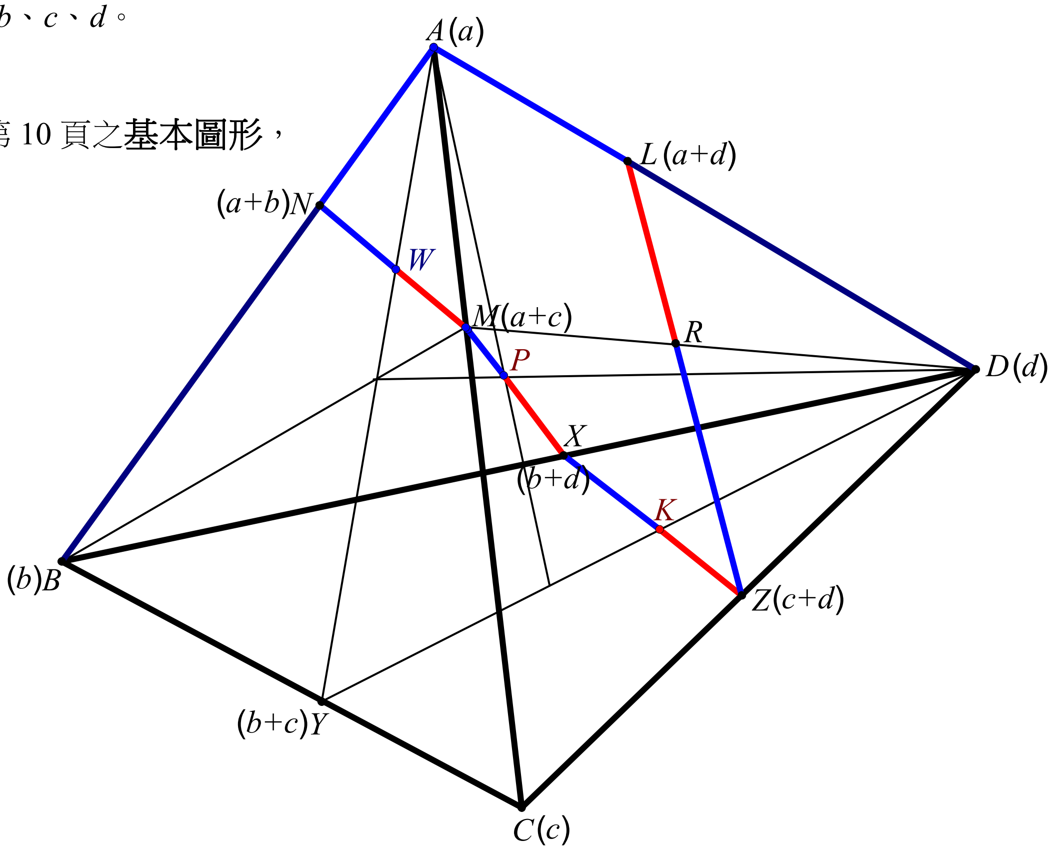


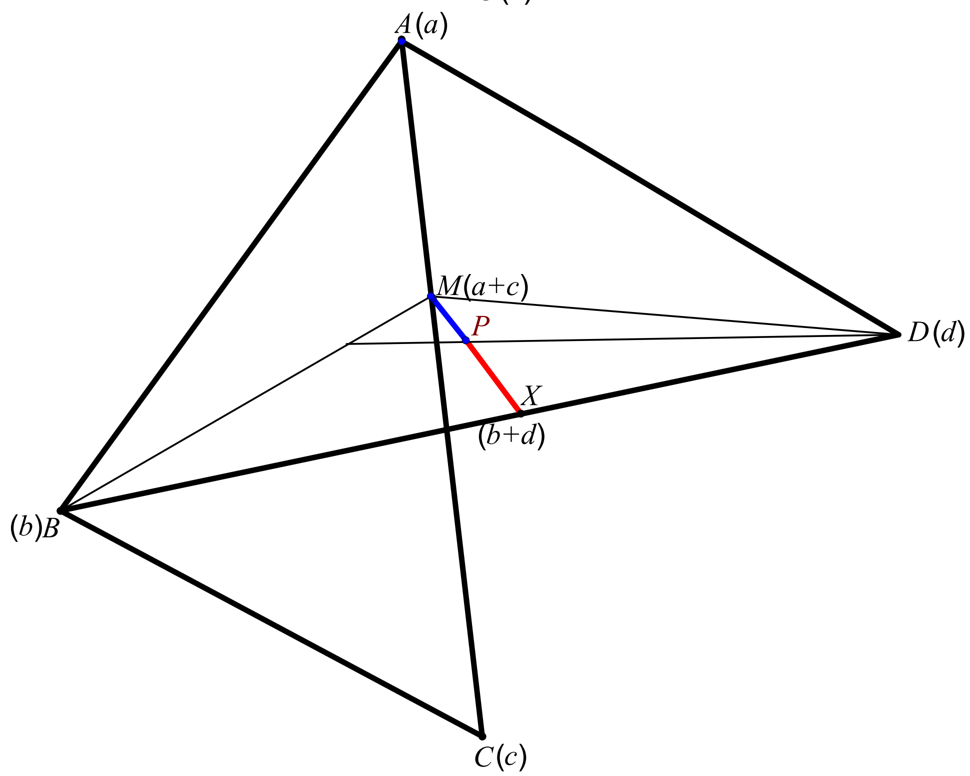
$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BN}}\times\frac{\overline{NW}}{\overline{WM}}\times\frac{\overline{MO}}{\overline{OL}}\times\frac{\overline{LD}}{\overline{DA}}=\frac{a+b}{a}\times\frac{a+c}{a+b}\times\frac{a+d}{a+c}\times\frac{a}{a+d}=1$$

十八、凸四面體的小定理(9)

在凸四面體的四個頂點 A、B、C、D 置質量 a、b、c、d。

承第 10 頁之**基本圖形**，

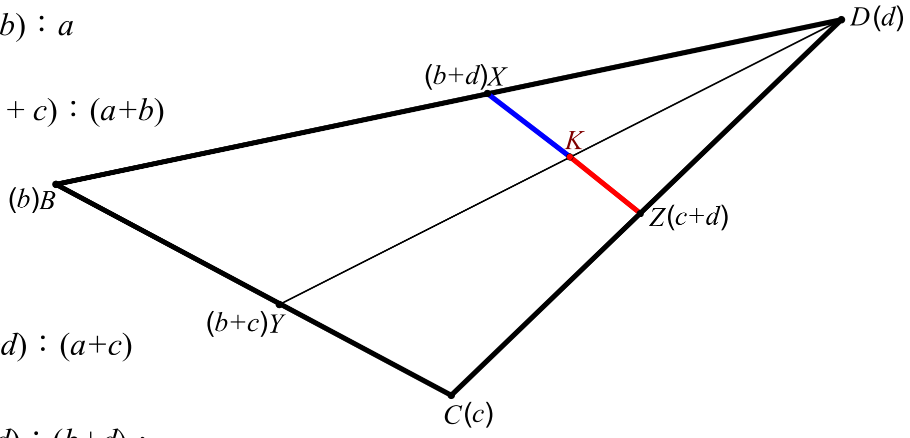




由槓桿平衡原理知

$\overline{AB}$ ： $\overline{BN}$ $=(a+b)$ ∶ a

$\overline{NW}$ ： $\overline{WM}$ $=(a+c)$ ∶ $(a+b)$

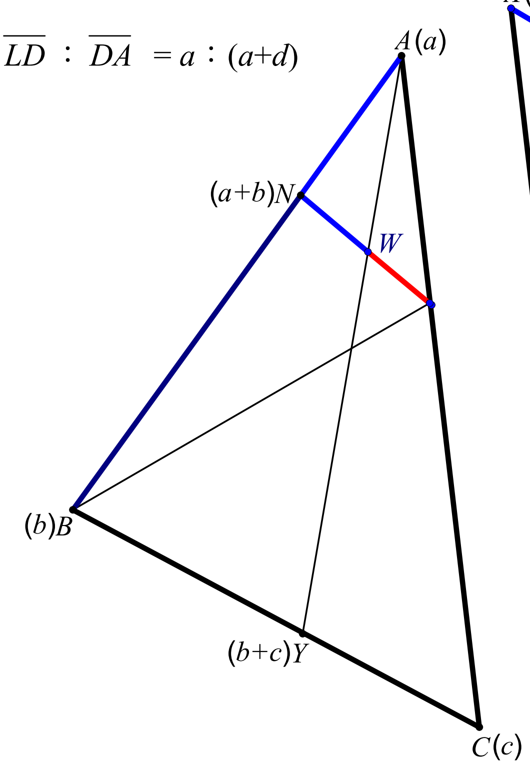


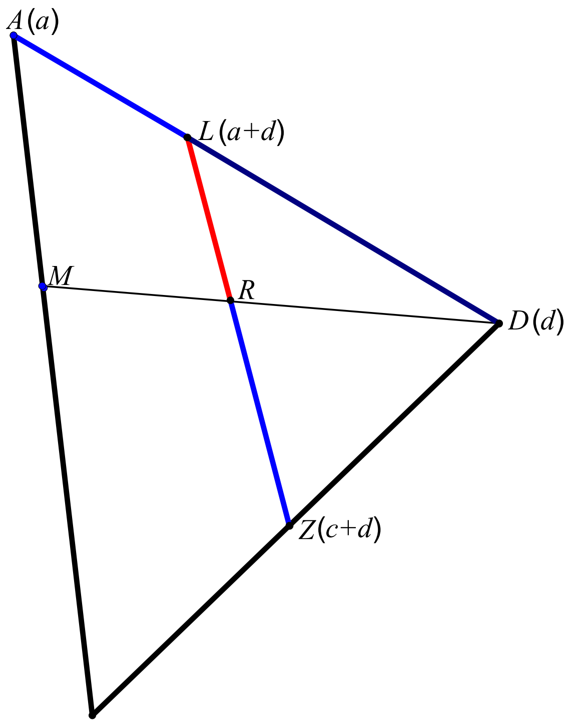
$\overline{MP}$ ： $\overline{PX}$ $=(b+d)$ ∶ $(a+c)$

$\overline{XK}$ ： $\overline{KZ}$ $=(c+d)$ ∶ $(b+d)$，

$\overline{ZR}$ ： $\overline{RL}$ $=(a+d)$ ∶ $(c+d)$，

$\overline{LD}$ ： $\overline{DA}$ $=a$ ∶ $(a+d)$



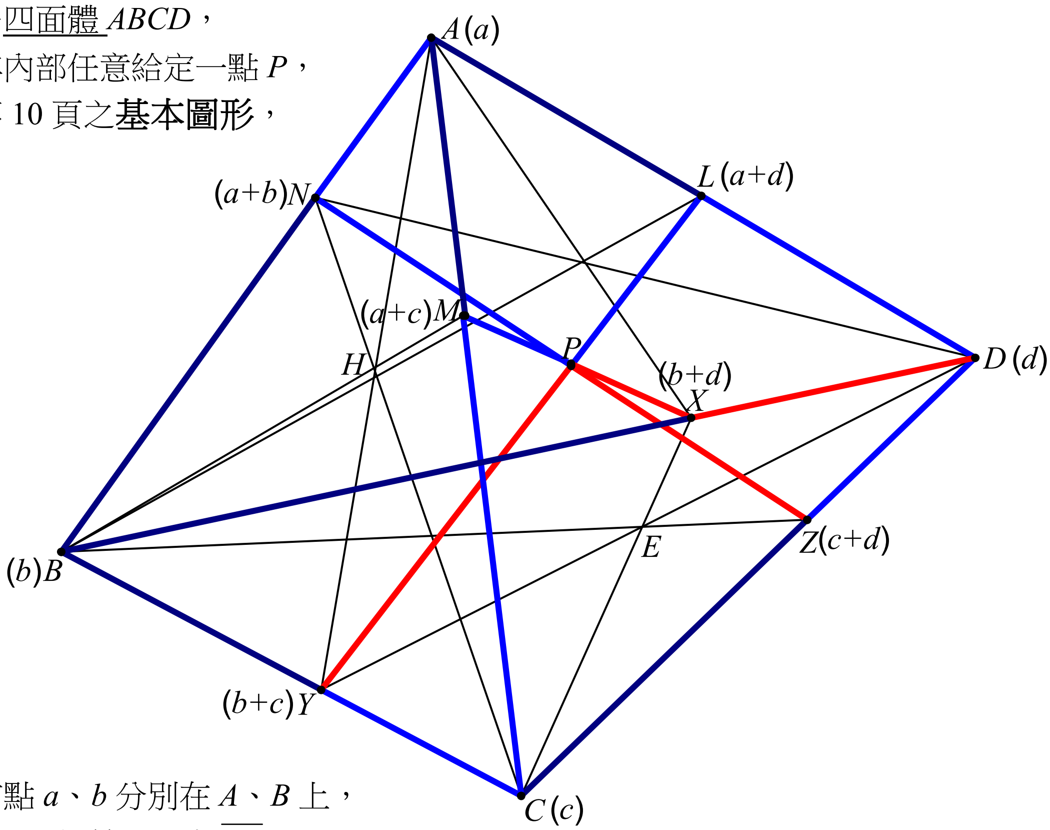


$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BN}} \times \frac{\overline{NW}}{\overline{WM}} \times \frac{\overline{MP}}{\overline{PX}} \times \frac{\overline{XK}}{\overline{KZ}} \times \frac{\overline{ZR}}{\overline{RL}} \times \frac{\overline{LD}}{\overline{DA}}$$

$$= \frac{a+b}{a} \times \frac{a+c}{a+b} \times \frac{b+d}{a+c} \times \frac{c+d}{b+d} \times \frac{a+d}{c+d} \times \frac{a}{a+d} = 1$$

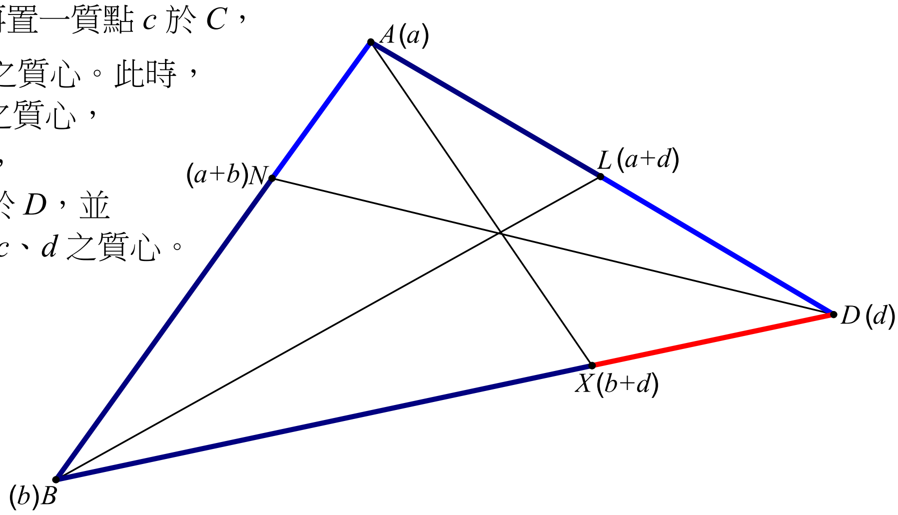
十九、凸四面體的小定理(10)

對凸四面體 $ABCD$，
在其內部任意給定一點 P，
承第 10 頁之**基本圖形**，



設質點 a、b 分別在 A、B 上，
則 a、b 之質心 N 在 $\overline{AB}$ 上。

可視 N 為一動點﹝a、b 任取﹞，
使 $\overline{NC}$ 過 H，再置一質點 c 於 C，
使 H 為 N、C 之質心。此時，
H 為 a、b、c 之質心，
又 P 在 $\overline{DH}$ 上，
可置一質點 d 於 D，並
使 P 為 a、b、c、d 之質心。



所以我們必可以取四質點 a、b、c、d 分別在 A、B、C、D 上，
使點 P 為此質點系統之重心。故取 a、b、c、d 分別在 A、B、C、D，
且 P 為 a、b、c、d 之質心。

$\because P\in\overline{AE}$，$E$ 在 BCD 平面上，且 P 為質點 a、b、c、d 之質心

$\therefore E$ 為 BCD 平面之質心，即 b、c、d 之質心為 E，又 $E\in\overline{BZ}$，故 Z 為 c、d 之質心。

由槓桿平衡原理知

$\overline{CZ}$ ： $\overline{ZD}$ =d：c

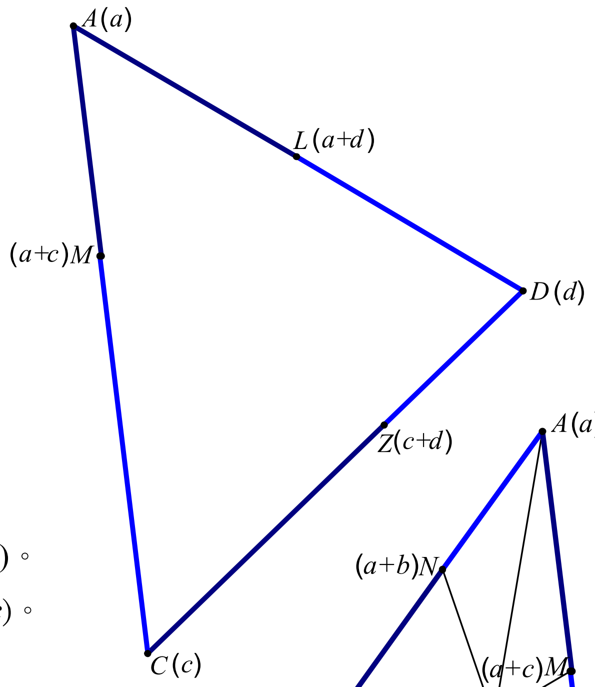
$\overline{DX}$ ： $\overline{XB}$ =b：d

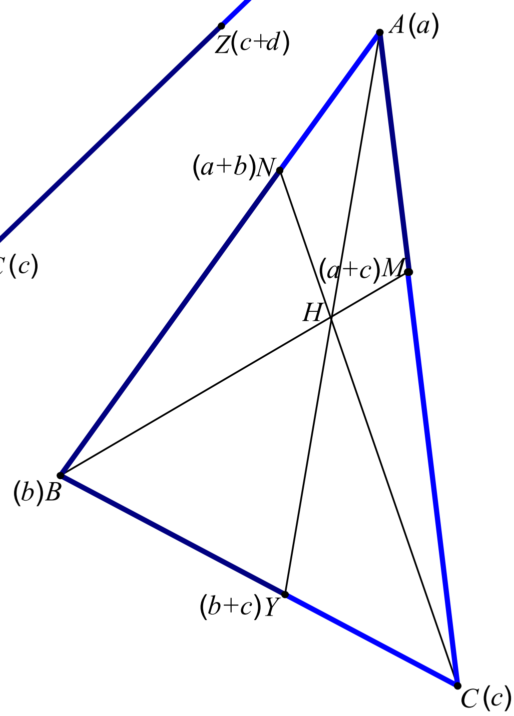
$\overline{BY}$ ： $\overline{YC}$ =c：b。

$\overline{AM}$ ： $\overline{MC}$ =c：a

$\overline{AL}$ ： $\overline{LD}$ =d：a

$\overline{AN}$ ： $\overline{NB}$ = b：a，





X 為 b、d 之質心，大小為(b+d)。

M 為 a、c 之質心，大小為(a+c)。

又 $ABCD$ 之質心，

大小為(a+ b+c+d) $\Rightarrow$ $\overline{XM}$ 必過 P，

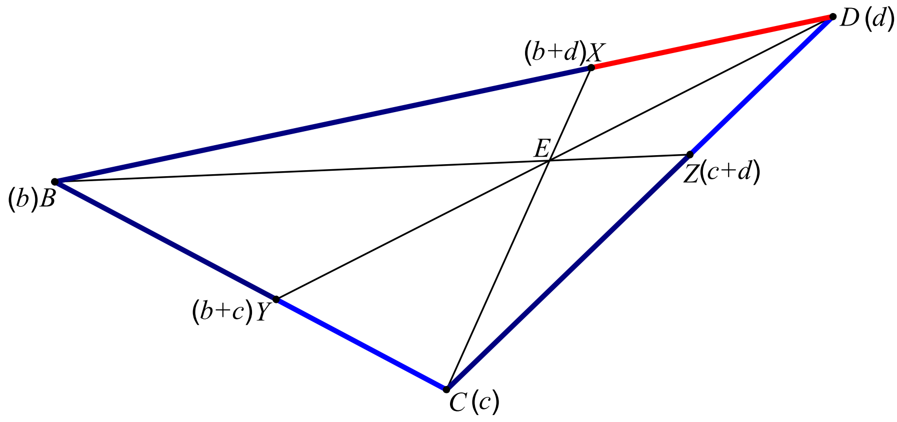
同理 $\overline{YL}$ 必過 P，$\overline{ZN}$ 必過 P

$\therefore$ $\overline{XM}$ 、$\overline{YL}$ 、$\overline{ZN}$ 共點於 P。

且 $\overline{XP}$ ： $\overline{PM}$ = $(a+c)$：$(b+d)$

$\overline{YP}$ ： $\overline{PL}$ = $(a+d)$：$(b+c)$

$\overline{ZP}$ ： $\overline{PN}$ = $(a+b)$：$(c+d)$



$$\Rightarrow \frac{\overline{BA}}{\overline{AN}} \times \frac{\overline{NP}}{\overline{PZ}} \times \frac{\overline{ZD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{AM}} \times \frac{\overline{MP}}{\overline{PX}} \times \frac{\overline{XB}}{\overline{BD}} \times \frac{\overline{DA}}{\overline{AL}} \times \frac{\overline{LP}}{\overline{PY}} \times \frac{\overline{YC}}{\overline{CB}}$$

$$= \frac{a+b}{b} \times \frac{c+d}{a+b} \times \frac{c}{c+d} \times \frac{a+c}{c} \times \frac{b+d}{a+c} \times \frac{d}{b+d} \times \frac{a+d}{d} \times \frac{b+c}{a+d} \times \frac{b}{b+c} = 1$$

伍、研究結果

一、槓桿平衡原理
二、兩質點系統的重（質）心關係
三、黃金分割
四、三角形的三中線交於一點
五、三角形的三內角平分線交於一點
六、三角形的西瓦定理與逆定理
七、三角形的孟氏定理與逆定理
八、用槓桿平衡解題
九、凸四面體的重心
十、凸四面體的小定理(1)
十一、凸四面體的小定理(2)
十二、凸四面體的小定理(3)
十三、凸四面體的小定理(4)
十四、凸四面體的小定理(5)
十五、凸四面體的小定理(6)
十六、凸四面體的小定理(7)
十七、凸四面體的小定理(8)
十八、凸四面體的小定理(9)
十九、凸四面體的小定理(10)

陸、討論

使用兩質點系統的重（質）心關係與槓桿平衡原理證明性質(一)~(十九)的過程中，我們發現：

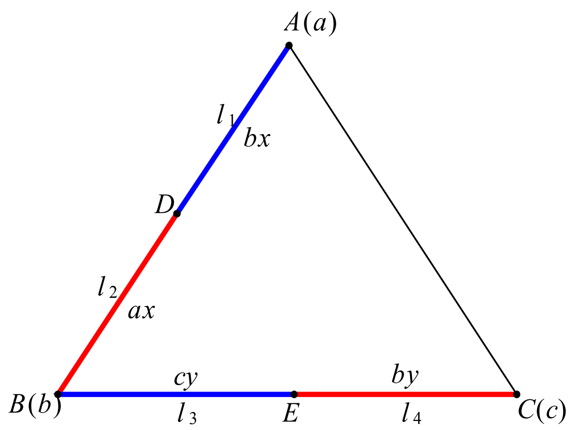
一、藉由改變系統中各頂點的質量，可以調整(質)重心的位置，即系統之(質)重心可以是系統中的任何一個點的位置。

二、凸四面體的小定理(1)~(10)之上似乎有一個**更一般性的定理(基本圖形可視為多個系統重疊在一起，從某一個系統的重心出發回到原出發點的封閉路徑中，若將經過各系統的重心連線段之比依序相乘，其乘積必為一個常數)**也就是說，在這定理之下，當條件改變時就可以導出凸四面體的小定理(1)~(10)。

目前這只是一個猜測，我們需要更多的時間來研究才能確定**!**

三、類似孟氏與西瓦的立體定理

(一)類似平面西瓦的性質：



設 A、B、C 三質點的質量分別為 a、b、c，

由槓桿平衡原理得知 $\overline{AD}$ ： $\overline{DB}$

$= b：a$，

$\overline{BE}$ ： $\overline{EC} = c：b$，則 $\overline{AD} = bx$，$\overline{DB} = ax$，

$\overline{BE} = cy$， $\overline{EC} = by$，

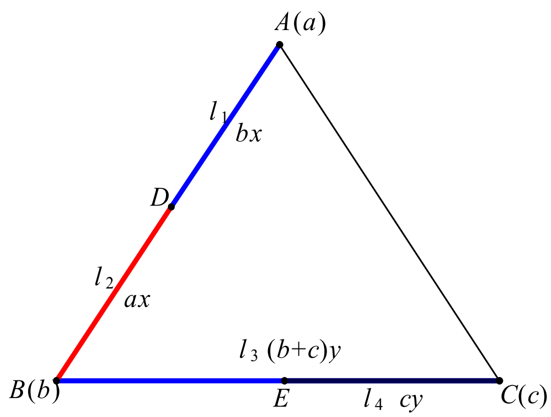
把 $\overline{AD}$ 編號為 l_1，$\overline{DB}$ 編號為 l_2，$\overline{BE}$ 編號為 l_3，$\overline{EC}$ 編號為 l_4，

則 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \times \dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \dfrac{l_1}{l_2} \times \dfrac{l_3}{l_4} = \dfrac{bx}{ax} \times \dfrac{cy}{by} = \dfrac{b}{a} \times \dfrac{c}{b}$

$\Rightarrow l_1$、l_4 經化簡後可對消

$\Rightarrow l_n$、l_{n+3} 經化簡後可對消(性質一)

(二)類似平面孟氏的性質：



設 A、B、C 三質點的質量分別為 a、b、c，

由槓桿平衡原理得知 $\overline{AD}$ ： $\overline{DB}$

$= b：a$，

$\overline{BC}$ ： $\overline{EC}$ $= b+c：b$，則 $\overline{AD} = bx$，$\overline{DB} = ax$，

$\overline{BC} = (b+c)y$， $\overline{EC} = cy$，

把 $\overline{AD}$ 編號為 l_1，$\overline{DB}$ 編號為 l_2，$\overline{BC}$ 編號為 l_3，$\overline{EC}$ 編號為 l_4，

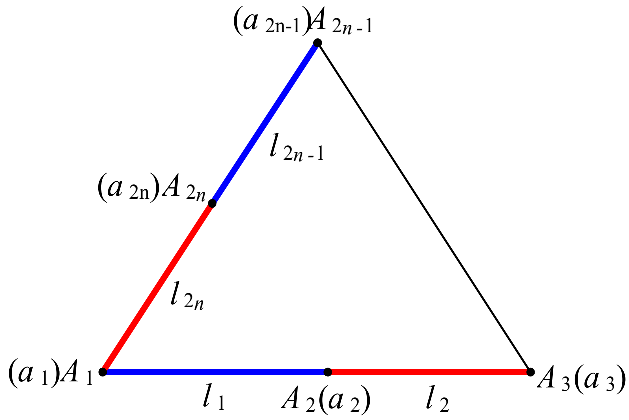
則 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \times \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \dfrac{l_1}{l_2} \times \dfrac{l_3}{l_4} = \dfrac{bx}{ax} \times \dfrac{by+cy}{by} = \dfrac{b}{a} \times \dfrac{b+c}{b}$

$\Rightarrow l_1$、l_4 經化簡後可對消

$\Rightarrow l_n$、l_{n+3} 經化簡後可對消(性質二)

(三)頭尾對消性質：

設 A_{2n-1}、A_1、A_3 三質點的質量分別為 a_{2n-1}、a_1、a_3 ，由槓桿平衡原理得知



$\overline{A_{2n-1}A_{2n}}：\overline{A_{2n}A_1}=a_1：a_{2n-1}$，

$\overline{A_1A_2}：\overline{A_2A_3}=a_3：a_1$，則

$\overline{A_{2n-1}A_{2n}}=a_1p_n$，$\overline{A_{2n}A_1}=a_{2n-1}p_n$

，$\overline{A_1A_2}=a_3p_1$， $\overline{A_2A_3}=a_1p_1$，把 $\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$ 編號為 l_{2n-1}，$\overline{A_{2n}A_1}$ 編號為 l_{2n}，$\overline{A_1A_2}$ 編號為 l_1，$\overline{A_2A_3}$ 編號為 l_2，則 $\dfrac{\overline{A_{2n-1}A_{2n}}}{\overline{A_{2n}A_1}}\times\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2A_3}}=\dfrac{l_{2n-1}}{l_{2n}}\times\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{a_1p_n}{a_{2n-1}p_n}\times\dfrac{a_3p_1}{a_1p_1}=\dfrac{a_1}{a_{2n-1}}\times\dfrac{a_3}{a_1}$

$\Rightarrow$ l_{2n-1}、l_2 經化簡後可對消(性質三)

(四)推論立體孟氏定理：

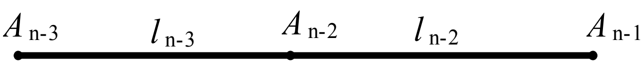
條件：A 線段須構成一封閉迴路

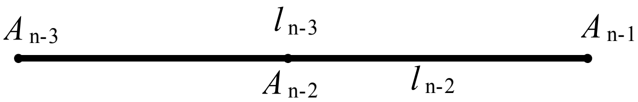
B 所取線段須為直線

C 所取線段之端點須為所屬線段上的質點

證明：將所取線段從四面體上拆下(有 n 組，n 屬於自然數)，

將每一線段分為兩小組，並編號(l_1、l_2、l_3、…… l_{2n})，有兩種選擇：

西瓦型：

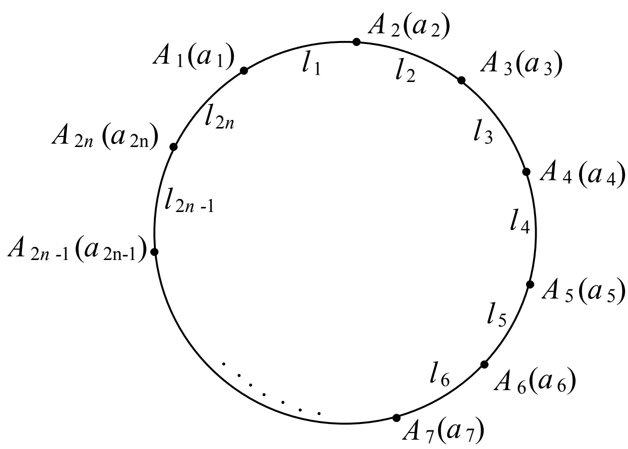
孟氏型：

由(性質一)、(性質二)、(性質三)

知$\Rightarrow$ $l_1=l_4$ ，$l_3=l_6$………，$l_{2n-3}=l_{2n}$ ，

$\dfrac{l_1}{l_2}\times\dfrac{l_3}{l_4}\times\dfrac{l_5}{l_6}\times$ ………$\dfrac{l_{2n-3}}{l_{2n-2}}\times\dfrac{l_{2n-1}}{l_{2n}}$

$=\dfrac{l_{2n-1}}{l_2}=1$



柒、結論

利用兩質點系統的重（質）心關係與槓桿平衡原理來處理幾何問題是一個很不錯的構想，我們打算以它來處理更多的問題，例如：費馬點問題、……。往後，我們將會學到更多數學、力學方面的知識，期望在解決這些問題後，能更進一步推廣到三度空間。

試想，如果在凸四面體內部四個三面角的三等分線的交點，能形成一個正四面體(也許是有條件的成立)，實在是令人興奮的事。

捌、參考資料及其他

一、孫文先 九章數學俱樂部講義 台北市 財團法人九章數學基金會 8 頁 95 年 5 月

二、林福來等　幾何學(上冊)　初版　台南市　南一書局　171 頁　92 年 2 月

三、今周刊　No.566　台北市　今周文化事業股份有限公司　192 頁　2007 年 10 月

【評語】030415

1. 將質量概念帶進平面幾何中”古老”且”常見”的均質定理，重新建構三角形的性質，利用拉桿原理、力矩等，與數學中的比值概念、比例式、解方程式的問題相對應，推廣至凸四面體，有系統地進行了聯繫與綜合。
2. 一開頭就導出的黃金分割比的比值，值得在後續問題中探究其發展性。
3. 圖形中指示點的符號與質量表示，可稍加調整，前後一致，以便讀者解讀，也展現數字之內容與形式的體表相依關係。