

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

第三名

030414

求過任意點作多邊形面積平分線

學校名稱：臺北市立龍山國民中學

作者： 國二 華祥志 國二 吳祐德 國二 蔡承儒	指導老師： 陳宏清
---	------------------

關鍵詞：面積平方線、平分、尺規作圖

摘要

運用中線性質、平行線交換面積、等角面積比定理和作相似形、作三點共圓等，求出「過三角形邊上、內部、外部任意點」的三角形面積平分線。再探討出過三角形內部點的位置和面積平分線的數目關係。並擴大解出「過四邊形至 N 邊形邊上、內部、外部任意點」的 N 邊形面積平分線。

壹、研究動機

在八下我們學到尺規作圖，看到一道數學題：「求過三角形邊上一點的面積平分線」，引起我們的興趣，所以我們便著手去研究「過任意點的三角形面積平分線」，進而深入探討「求過任意點作四邊形、五邊形至 N 邊形的面積平分線」。我們先自行研究後，再比較參考相關的研究資料。發現對三角形我們有不同的作圖解法，以及對「四邊形至 N 邊形，過內部、外部任意點作面積平分線」的問題，我們也研究出解法。於是把我們的研究過程整理出來作為報告。

貳、研究目的

- 一、求過任意點，作三角形面積平分線。
- 二、求過任意點，作四邊形面積平分線。
- 三、求過任意點，作 N 邊形面積平分線。

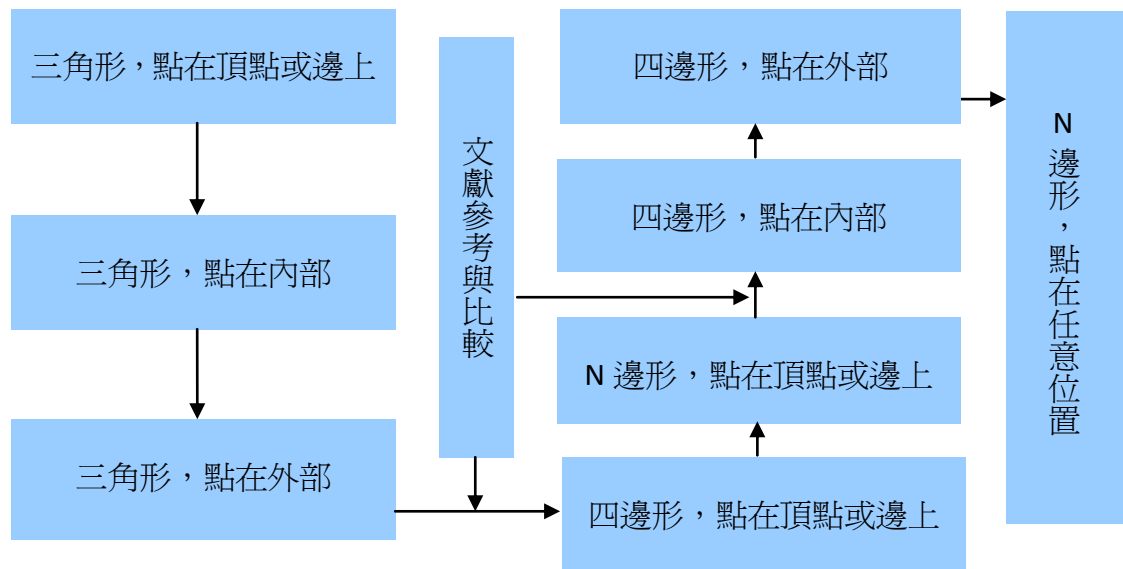
參、研究器材

圓規、直尺、三角板、*The Geometer's Sketchpad V4* (電腦作圖軟體)

肆、文獻探討

- 一、多邊形面積平分線的參考文獻中，大都是探討過邊上一點的面積平分線。由三角形、四邊形、五邊形，先求出過頂點的面積平分線，再推展至過邊上任意點的面積平分線。至於多邊形，則先分割成好幾個三角形、四邊形、五邊形，再進一步解決，方法較繁複。而我們利用平行線交換面積法，先將多邊形轉換成等面積之三角形，然後以三角形中線來平分面積。必要時，再利用平行線交換面積法修正，解出所求正確的面積平分線。
- 二、過任意點作「邊數大於 3 的多邊形」面積平分線的問題，除了過邊上之點作平分線之外並無發現相關文獻，而我們自行研究出一套解法。
- 三、作三角形內或外任意點的面積平分線，一般文獻是用兩次相似形的解法。而我們不同的作法是僅用一次相似形。
- 四、台中一中以線性變換、基本偏微分及坐標平面系統，求出三角形分割線形成的包絡線，並證明此分割線之中點連線為雙曲線。再延伸至任意等分分割線的存在性，與無解區存在的範圍。
- 五、北縣福和國中建立坐標系統，利用方程式導出面積平分線，再算出點在多邊形何處有幾條面積平分線，並算出多邊形的面積平分線數量。
- 六、「多邊形形上點面積等分線探討」此作品主要研究為多邊形邊上一點作兩等分分割線，再延伸至任意等分分割線作圖法之研究。並討論到凹多邊形之分割作法，但若凹多邊形分割成 3 個以上之區域，則算無解。

伍、研究方法及過程



一、求過任意點，作三角形面積平分線。

問題一：過 $\triangle ABC$ 之頂點 A 作面積平分線

作法：(如圖 1)

1. 取 $\overline{BC}$ 之中點 P

2. 連中線 $\overline{AP}$ ，即為所求面積平分線

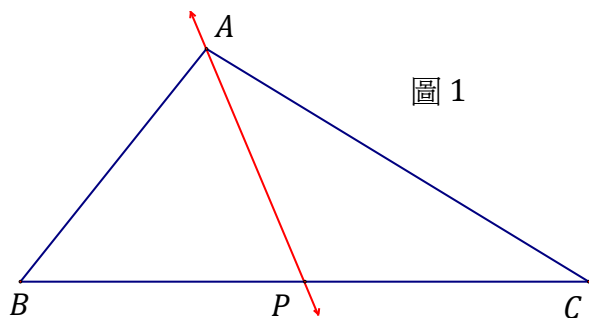


圖 1

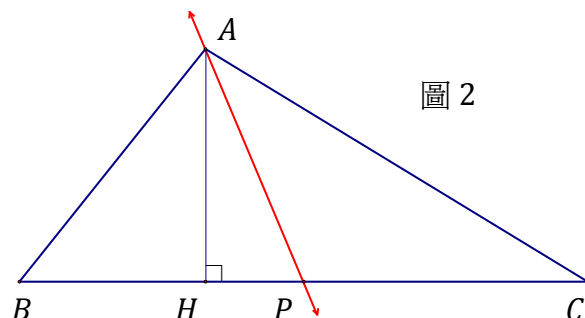


圖 2

證明：(如圖 2)

1. 作 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 交 $\overline{BC}$ 於 H

2. $\triangle ABP$ 面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{BP} \times \overline{AH}$ ， $\triangle ACP$ 面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{CP} \times \overline{AH}$

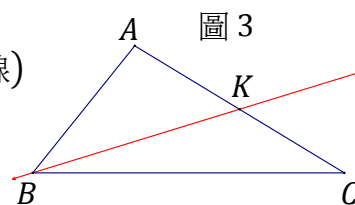
$\because \overline{BP} = \overline{CP} \therefore \triangle ABP$ 面積 $= \triangle ACP$ 面積 (等底同高)

故三角形中線 $\overline{AP}$ 為面積平分線，得證

問題二：過 $\triangle ABC$ 邊上一點 K 作面積平分線

(一) K 在 $\overline{AC}$ 邊上，且不為 $\overline{AC}$ 中點

(如圖 3，若 K 為中點，則連 $\overline{BK}$ 中線，即為面積平分線)



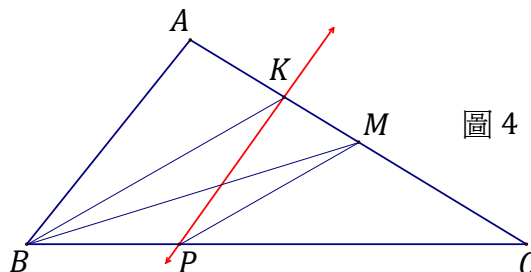
作法：(如圖 4 和圖 5)

1. 連 $\overline{BK}$

2. 取 $\overline{AC}$ 中點 M

3. 作 $\overline{MP} \parallel \overline{BK}$ 交 $\overline{BC}$ 或 $\overline{AB}$ 於 P

4. 連 $\overline{KP}$ ，即為所求面積平分線



證明：(如圖 4，交 $\overline{BC}$ 於 P)

1. 連 $\overline{BM}$

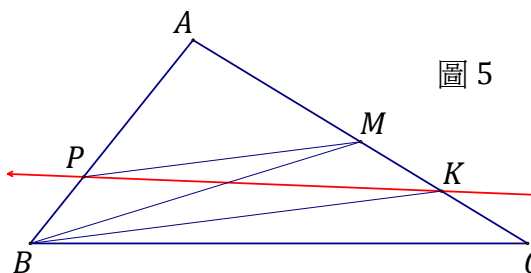
2. $\because \overline{MP} \parallel \overline{BK} \therefore \triangle BPM$ 面積 = $\triangle KPM$ 面積 (同底等高)

3. $\triangle KPC$ 面積 = $\triangle MPC$ 面積 + $\triangle KPM$ 面積

= $\triangle MPC$ 面積 + $\triangle BPM$ 面積

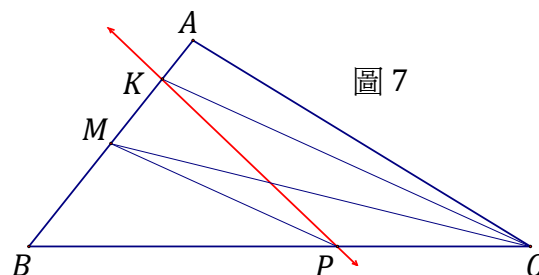
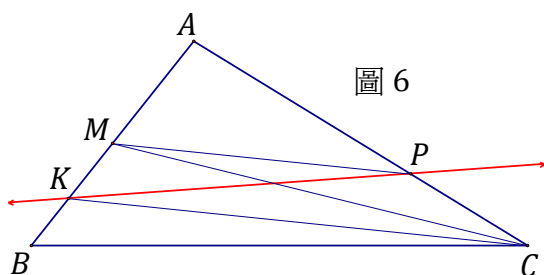
= $\triangle MBC$ 面積 = $\frac{1}{2} \triangle ABC$ 面積

故 $\overline{KP}$ 為面積平分線，得證

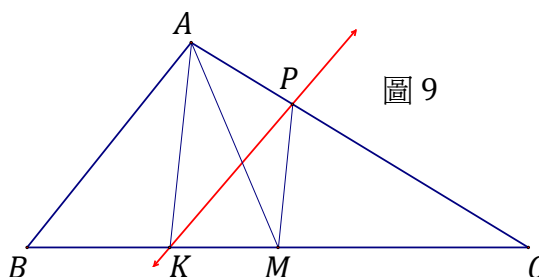
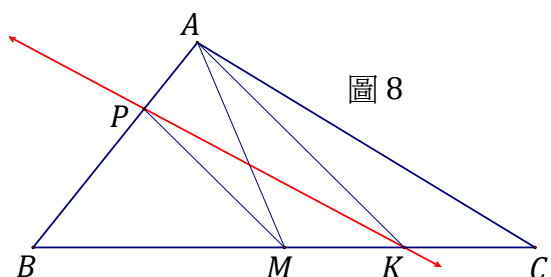


證明：(如圖 5，交 $\overline{AB}$ 於 P) 略

(二) K 在 $\overline{AB}$ 邊上(如圖 6 和圖 7)



(三) K 在 $\overline{BC}$ 邊上(如圖 8 和圖 9)



問題三：過 $\triangle ABC$ 內一點 K 作面積平分線

構想：（如圖 10）

1. 能利用的是 $\overline{AK}$ ，所以先在 $\overline{AB}$ 上取 K' 使 $\overline{AK'} = \overline{AK}$ ，再作出面積平分線 $\overline{K'E'}$ ，以取得 $\overline{AE'}$ 。
2. 因 $\overline{PQ}$ 即為所求面積平分線，故利用等角面積比定理，得到 $\overline{AP} \times \overline{AQ} = \overline{AK'} \times \overline{AE'}$ 。
3. 因而設計 $\triangle APE \sim \triangle AKQ$ ，其中 $\overline{AE} = \overline{AE'}$ （如圖所示）。
4. 又過 K 點作 $\overline{AC}$ 平行線交 $\overline{AE}$ 延長線於 F ，形成 P, K, E, F 四點共圓，最後利用 K, E, F 共圓，在 $\overline{AB}$ 上取得 P 點。

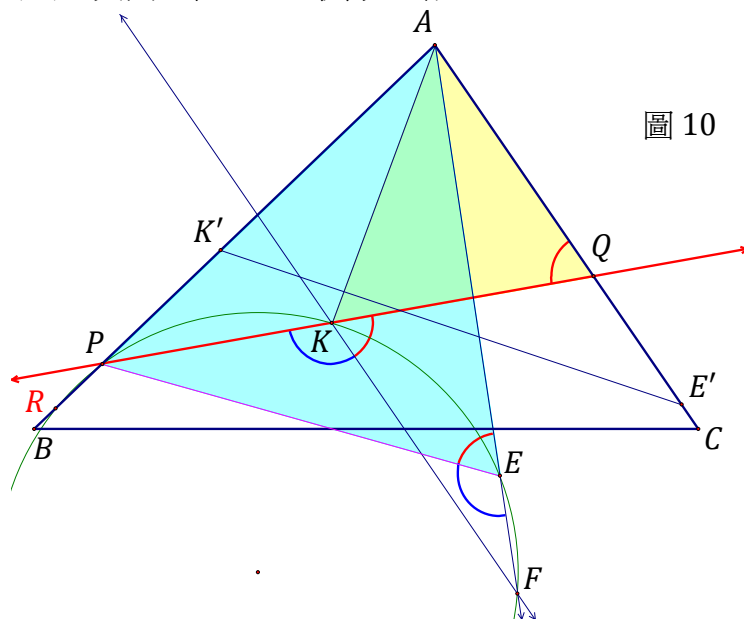


圖 10

※等角面積比定理：兩三角形面積比 = 等角兩邊乘積比

$\angle B = \angle E$ ， $\triangle ABC$ 面積： $\triangle DEF$ 面積 = $(\overline{AB} \times \overline{BC}) : (\overline{DE} \times \overline{EF})$

證明：（如圖 11）

$$1. \triangle ABH \sim \triangle DEI (AA), \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DI}}$$

2. $\triangle ABC$ 面積： $\triangle DEF$ 面積

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} \right) : \left(\frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{DI} \right) \\ &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} \left(\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} \right) : \frac{\overline{DE}}{\overline{DI}} \left(\frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{DI} \right) \\ &= (\overline{AB} \times \overline{BC}) : (\overline{DE} \times \overline{EF}), \text{得證} \end{aligned}$$

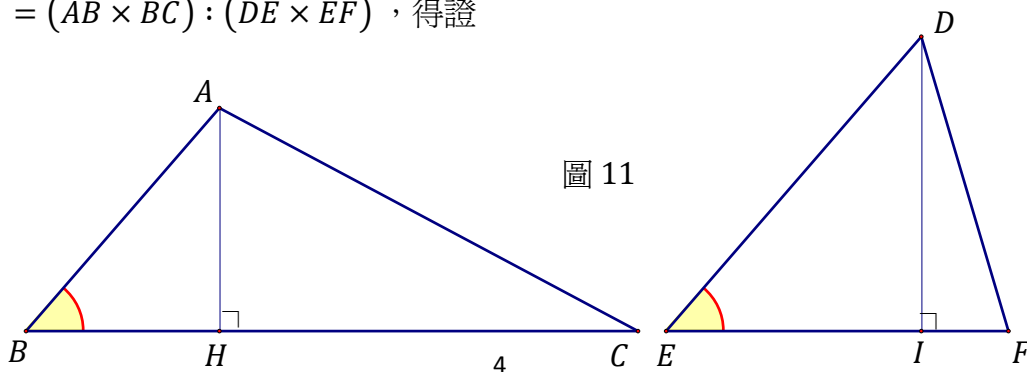


圖 11

作法：(如圖 12)

1. 連 $\overline{AK}$ ，並在 $\overline{AB}$ 上取 K' 使 $\overline{AK'} = \overline{AK}$
2. 作過 K' 之面積平分線交 $\overline{AC}$ 於 E' (作法見問題二)
3. 在 $\triangle ABC$ 內作 $\angle K'AE = \angle KAE'$ ，並使 $\overline{AE} = \overline{AE'}$
4. 作 $\overline{KF} \parallel \overline{AC}$ 交 $\overline{AE}$ 延長線於 F
5. 作過 K, E, F 三點的圓交 $\overline{AB}$ 於 P
6. 連 $\overline{KP}$ 交 $\overline{AC}$ 於 Q ， $\overline{KP}$ 即為所求面積平分線

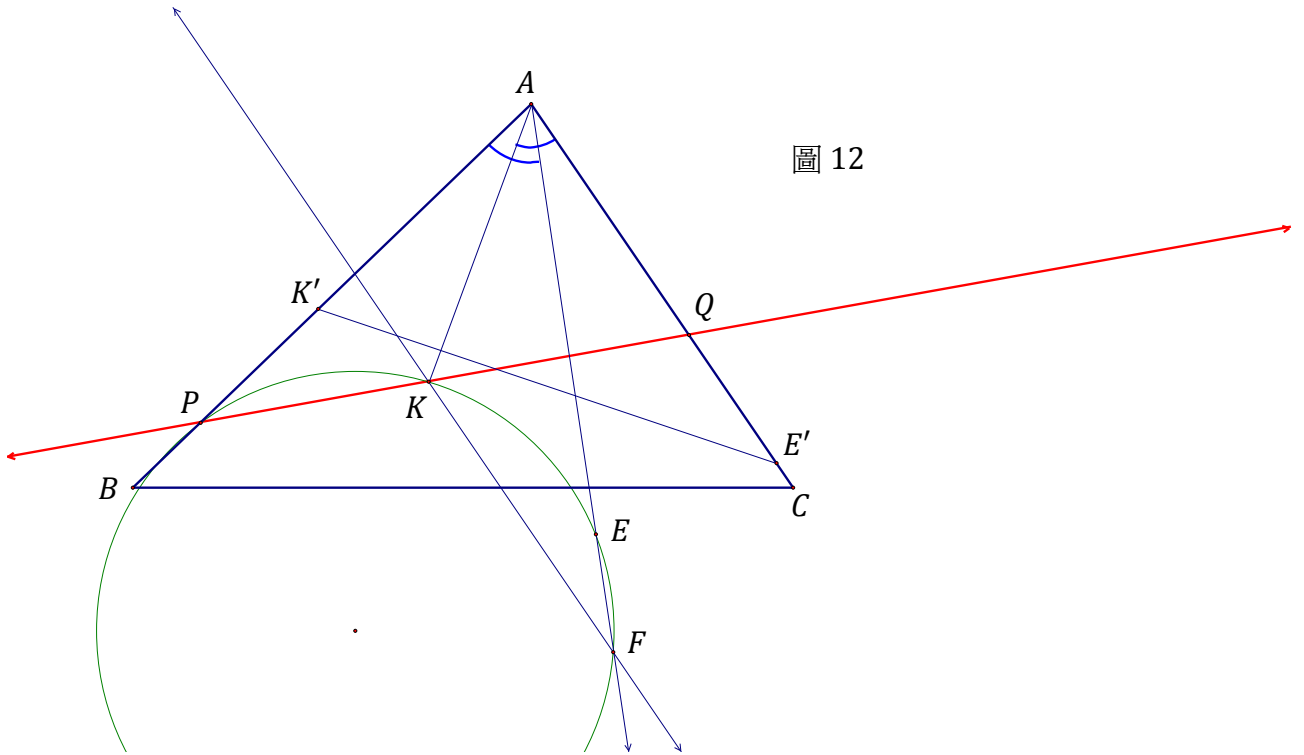


圖 12

證明：(如圖 13)

1. 連 $\overline{PE}$
2. $\because P, K, E, F$ 共圓 $\therefore \angle PKF = \angle PEF$ (等弧對等角)
3. 又 $\overline{KF} \parallel \overline{AC}$ ， $\therefore \angle KQA = \angle FKQ = 180^\circ - \angle PKF = 180^\circ - \angle PEF = \angle PEA$
4. $\angle PAE = \angle K'AE = \angle KAE' = \angle KAQ$

5. 在 $\triangle APE$ 與 $\triangle AKQ$ 中

$$\begin{cases} \angle KQA = \angle PEA \\ \angle PAE = \angle KAQ \end{cases} \Rightarrow \triangle APE \sim \triangle AKQ \text{ (AA)} \Rightarrow \overline{AP} : \overline{AE} = \overline{AK} : \overline{AQ}$$

$$\therefore \overline{AP} \times \overline{AQ} = \overline{AK} \times \overline{AE} = \overline{AK'} \times \overline{AE'}$$

6. 由等角面積比定理 (見※)

$$\text{得 } \triangle APQ \text{ 面積} : \triangle AK'E' \text{ 面積} = (\overline{AP} \times \overline{AQ}) : (\overline{AK'} \times \overline{AE'}) = 1 : 1$$

$$\text{又 } \overline{K'E'} \text{ 爲 } \triangle ABC \text{ 面積平分線，} \therefore \triangle APQ \text{ 面積} = \triangle AK'E' \text{ 面積} = \frac{1}{2} \triangle ABC \text{ 面積}$$

故 $\overrightarrow{KP}$ 為面積平分線，得證

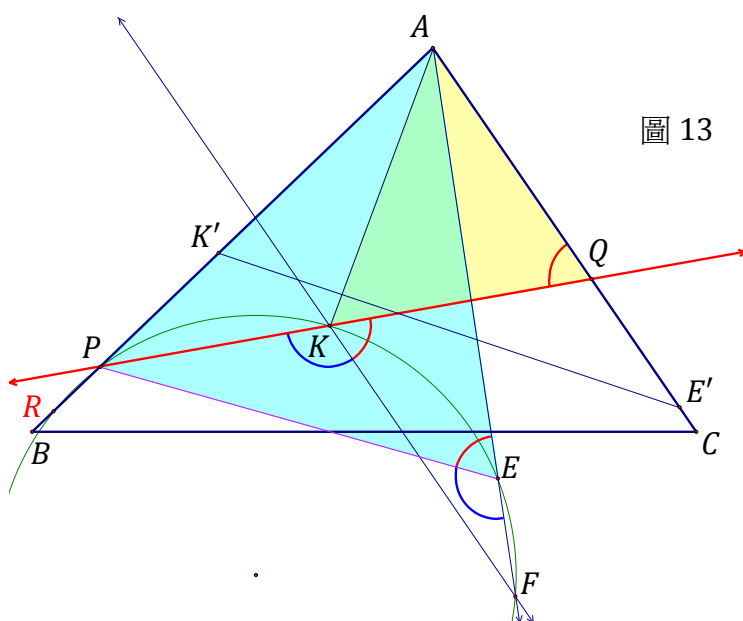


圖 13

說明：

本題作法 5.，作過 K, E, F 三點的圓交 $\overline{AB}$ 於 P 還交於 R (如圖 11)
連 $\overrightarrow{KR}$ ，亦為另一條面積平分線，證明略

※等角面積比定理：兩三角形面積比 = 等角兩邊乘積比

$$\angle B = \angle E, \Delta ABC \text{ 面積} : \Delta DEF \text{ 面積} = (\overline{AB} \times \overline{BC}) : (\overline{DE} \times \overline{EF})$$

問題四：過 ΔABC 外一點 K 作面積平分線

作法：(如圖 14)

1. 連 $\overline{AK}$ ，在 $\overline{AB}$ 上取 K' 使 $\overline{AK'} = \overline{AK}$
2. 作過 K' 之面積平分線交 $\overline{AC}$ 於 E' (作法見問題二)
3. 在 ΔABC 外作 $\angle K'AE = \angle KAE'$ ，並使 $\overline{AE} = \overline{AE'}$
4. 作 $\overline{KF} \parallel \overline{AC}$ 交 $\overline{AE}$ 延長線於 F
5. 作過 K, E, F 三點的圓交 $\overline{AB}$ 於 P
6. 連 $\overrightarrow{KP}$ 交 $\overline{AC}$ 於 Q ， $\overrightarrow{KP}$ 即為所求面積平分線

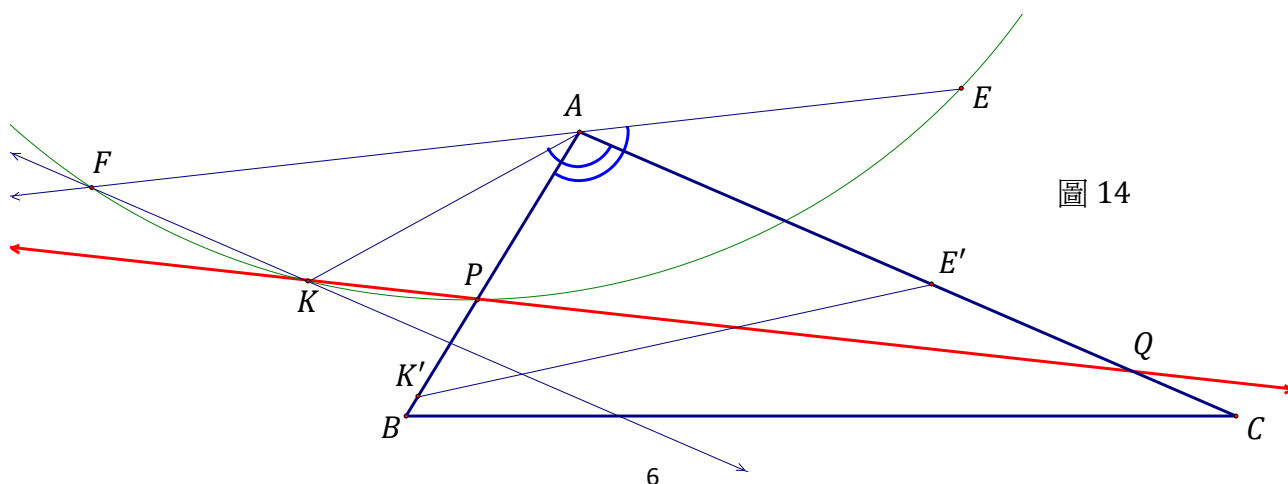


圖 14

證明：(如圖 15)

1. 連 $\overline{PE}$

2. $\because$ 四邊形 $PKFE$ 為圓內接四邊形 $\therefore \angle PKF + \angle PEF = 180^\circ$

3. 又 $\overline{KF} \parallel \overline{AC}$, $\therefore \angle KQA = \angle K'KQ = 180^\circ - \angle PKF = \angle PEA$

4. $\angle PAE = \angle K'AE = \angle KAE' = \angle KAQ$

5. 在 $\triangle APE$ 與 $\triangle AKQ$ 中

$$\begin{cases} \angle KQA = \angle PEA \\ \angle PAE = \angle KAQ \end{cases} \Rightarrow \triangle APE \sim \triangle AKQ (AA) \Rightarrow \overline{AP} : \overline{AE} = \overline{AK} : \overline{AQ}$$

$$\therefore \overline{AP} \times \overline{AQ} = \overline{AK} \times \overline{AE} = \overline{AK'} \times \overline{AE'}$$

6. 由等角面積比得 $\triangle APQ$ 面積 : $\triangle AK'E'$ 面積 = $(\overline{AP} \times \overline{AQ}) : (\overline{AK'} \times \overline{AE'}) = 1 : 1$

又 $\overline{K'E'}$ 為 $\triangle ABC$ 面積平分線, $\therefore \triangle APQ$ 面積 = $\triangle AK'E'$ 面積 = $\frac{1}{2} \triangle ABC$ 面積

故 $\overline{KP}$ 為面積平分線, 得證

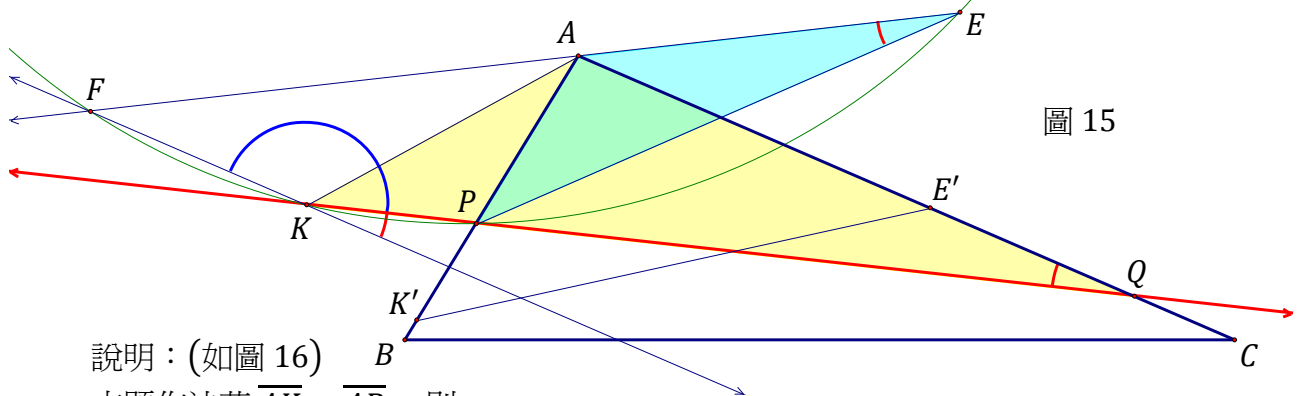


圖 15

說明：(如圖 16)

本題作法若 $\overline{AK} > \overline{AB}$, 則

1. 連 $\overline{AK}$, 在 $\overline{AB}$ 延長線上取 K' 使 $\overline{AK'} = \overline{AK}$

2. 取 $\overline{AC}$ 之中點 M , 連 $\overline{K'M}$, 並作 $\overline{BE'} \parallel \overline{AC}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E' , 再連 $\overline{K'E'}$

(目的使 $\triangle AK'E'$ 面積 = $\frac{1}{2} \triangle ABC$ 面積)

3. 在 $\triangle ABC$ 外作 $\angle K'AE = \angle KAE'$, 並使 $\overline{AE} = \overline{AE'}$

4. 作 $\overline{KF} \parallel \overline{AC}$ 交 $\overline{AE}$ 延長線於 F

5. 作過 K, E, F 三點的圓交 $\overline{AB}$ 於 P

6. 連 $\overline{KP}$ 交 $\overline{AC}$ 於 Q , $\overline{KP}$ 即為所求面積平分線

證明 (同圖 15 證明) 略

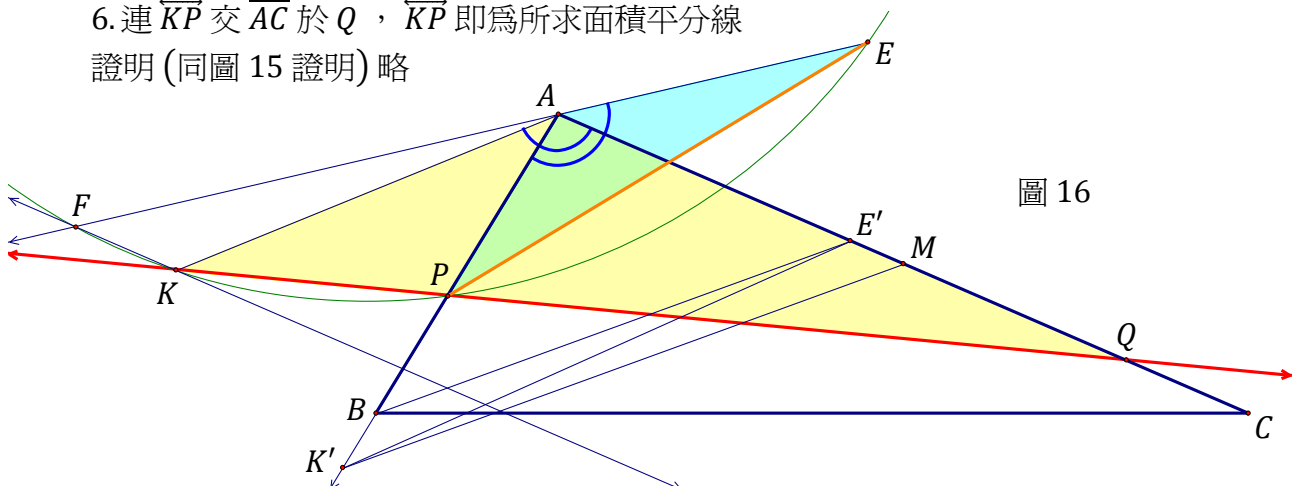


圖 16

討論一：

1. 透過 *GSP* 作出三角形所有面積平分線，如圖 17。我們發現三角形三條中線(紅線)的延長線，將面積平分線大致分成如圖中黃綠藍三個區域。

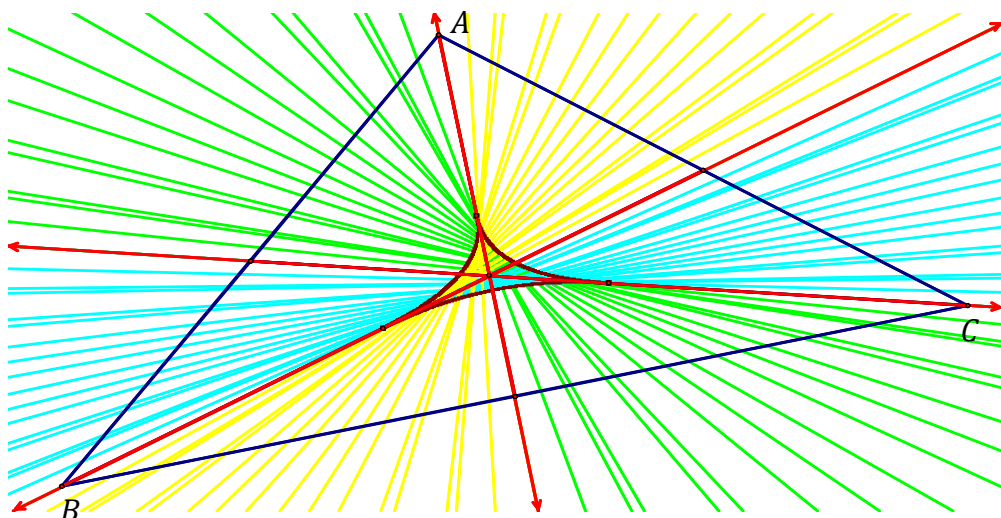


圖 17

2. 過任意點 K 求作面積平分線，若 K 在藍色區域內(其所夾的邊為 $\overline{AB}$ 或 $\overline{AC}$)，則 K' 點可在 $\overline{AB}$ 或 $\overline{AC}$ 邊上取得 $\overline{AK'} = \overline{AK}$ ；若 K 在綠色區域內，則 K' 點可在 $\overline{AB}$ 或 $\overline{BC}$ 邊上取得 $\overline{BK'} = \overline{BK}$ ；若 K 在黃色區域內，則 K' 點可在 $\overline{AC}$ 或 $\overline{BC}$ 邊上取得 $\overline{CK'} = \overline{CK}$ 。
3. 在重心附近，面積平分線會交疊形成三條曲線。三曲線所圍成的「重心區」內的點都可作出三條面積平分線；過曲線上的點則可作出二條面積平分線；過曲線的交點或重心區外的點就只能作出一條面積平分線。
4. 當兩條面積平分線的兩端點愈靠近，其交點則愈接近面積平分線的中點。因此，重心區的「曲線」是由所有面積平分線的中點所形成。曲線的交點分別為三中線的中點。
5. 如圖 18，重心為三中線交點，而過重心區內藍色區內的點，所作出的三條面積平分線，是兩條藍色及一條綠色；過藍色區曲線上的點，所作出的二條面積平分線，是一條藍色及一條綠色。

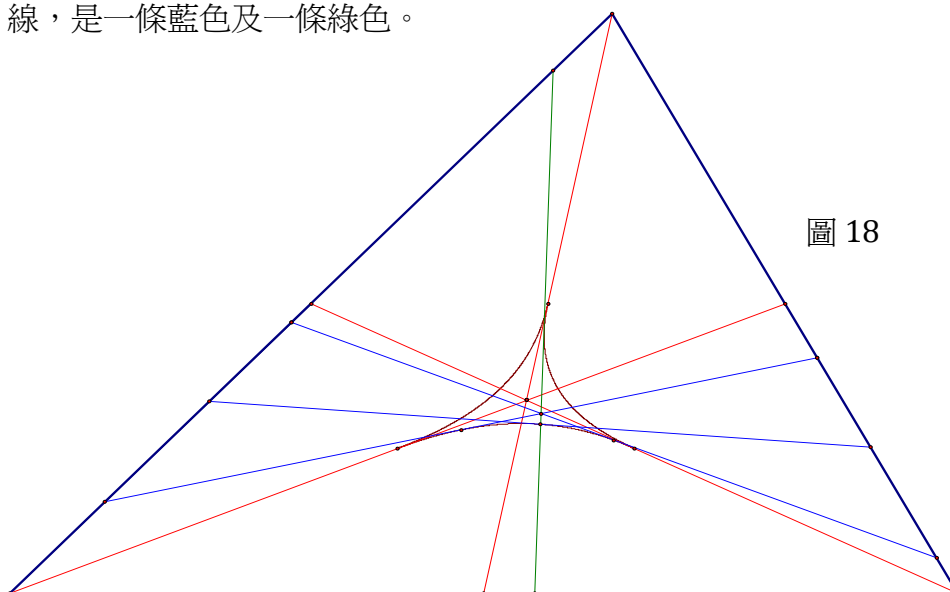


圖 18

二、求過任意點，作四邊形面積平分線。

問題五：過四邊形 $ABCD$ 之頂點 A 作面積平分線

作法：

1. 連 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 交於 E 點

2. 比較 $\overline{BE}, \overline{DE}$ 之大小

(目的使所求出的面積平分線不須再作修正)

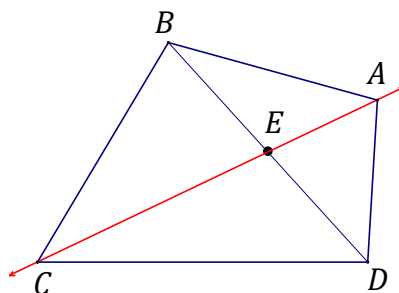


圖 19

(1) 若 $\overline{BE} = \overline{DE}$ (如圖 19)，則 $\overline{AC}$ 即為所求之面積平分線

證明：(如圖 20)

1. 作 $\overline{BH}, \overline{DI} \perp \overline{AC}$

2. $\triangle BEH \cong \triangle DEI$ (ASA) $\Rightarrow \overline{BH} = \overline{DI}$

$\Rightarrow \triangle ABC$ 面積 = $\triangle ADC$ 面積 (同底等高)

故 $\overline{AC}$ 為面積平分線，得證

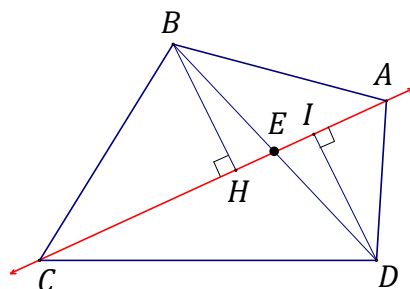


圖 20

(2) 若 $\overline{BE} < \overline{DE}$ (如圖 21)，則作 $\overline{BF} \parallel \overline{AC}$ 交 $\overline{CD}$ 延長線於 F ，再取 $\overline{DF}$ 之中點 P 連 $\overline{AP}$ ，即為所求之面積平分線

證明：

1. 連 $\overline{AF}$

2. $\because \overline{BF} \parallel \overline{AC} \therefore \triangle ABC$ 面積 = $\triangle AFC$ 面積 (同底等高)

$\Rightarrow \triangle AFD$ 面積 = $\triangle ACD$ 面積 + $\triangle AFC$ 面積
 $= \triangle ACD$ 面積 + $\triangle ABC$ 面積
 $=$ 四邊形 $ABCD$ 面積

3. 又 $\overline{AP}$ 為 $\triangle AFD$ 中線

$\Rightarrow \triangle APD$ 面積 = $\frac{1}{2} \triangle AFD$ 面積 = $\frac{1}{2}$ 四邊形 $ABCD$ 面積

故 $\overline{AP}$ 為面積平分線，得證

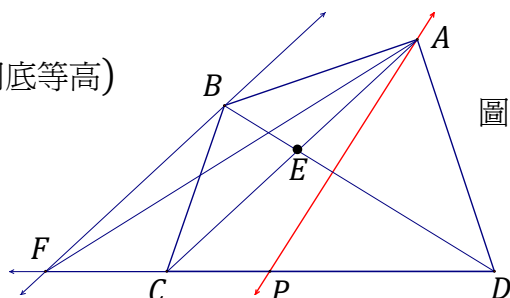


圖 21

(3) 若 $\overline{BE} > \overline{DE}$ (如圖 22)，則作 $\overline{DG} \parallel \overline{AC}$ 交 $\overline{BC}$ 延長線於 G ，再取 $\overline{BG}$ 之中點 Q 連 $\overline{AQ}$ ，即為所求之面積平分線

證明：由(2)之證明，同理可證得 $\overline{AQ}$ 為面積平分線

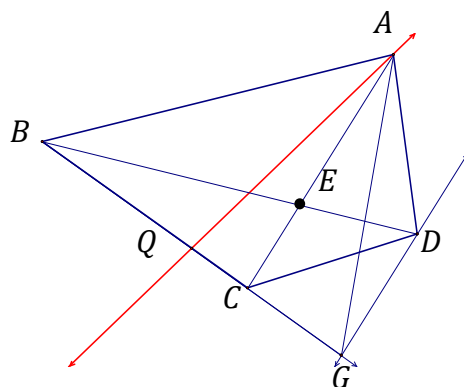


圖 22

問題六：過四邊形 $ABCD$ 邊上一點 K 作面積平分線， K 在 $\overline{AB}$ 邊上， M 為 $\overline{AB}$ 中點

(一) 若 $\overline{AK} \leq \overline{BK}$

作法：(如圖 23)

1. 連 $\overline{KD}$ ，作 $\overline{AE} // \overline{KD}$ 交 $\overline{CD}$ 延長線於 E

2. 連 $\overline{KE}$ ，作過四邊形 $KBCE$ 頂點 K 之面積平分線 $\overline{KP}$ 交 $\overline{BC}$ 或 $\overline{CD}$ 於 P (作法見問題五)

$\overline{KP}$ 即為所求四邊形 $ABCD$ 之面積平分線

證明：(如圖 23)

1. $\because \overline{AE} // \overline{KD} \therefore \Delta AKD$ 面積 = ΔEKD 面積 (同底等高)

$\Rightarrow$ 四邊形 $KBCE$ 面積 = 四邊形 $KBCD$ 面積 + ΔEKD 面積
 = 四邊形 $KBCD$ 面積 + ΔAKD 面積
 = 四邊形 $ABCD$ 面積

2. 又 $\overline{KP}$ 為四邊形 $KBCE$ 之面積平分線

故 $\overline{KP}$ 亦為四邊形 $ABCD$ 之面積平分線，得證

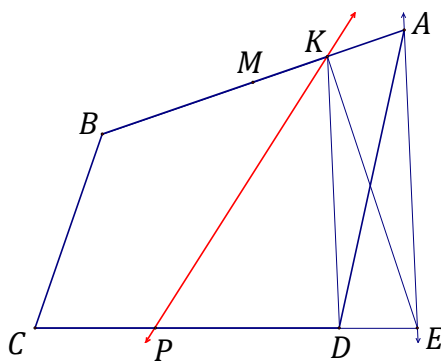


圖 23

(二) 若 $\overline{AK} \geq \overline{BK}$

作法：(如圖 24)

1. 連 $\overline{KC}$ ，作 $\overline{BF} // \overline{KC}$ 交 $\overline{CD}$ 延長線於 F

2. 連 $\overline{KF}$ ，作過四邊形 $KCDA$ 頂點 K 之面積平分線 $\overline{KQ}$ 交 $\overline{AD}$ 或 $\overline{CD}$ 於 Q (作法見問題五)

$\overline{KQ}$ 即為所求四邊形 $ABCD$ 之面積平分線

證明：由 (一) 之證明，同理可證得 $\overline{KQ}$ 為面積平分線

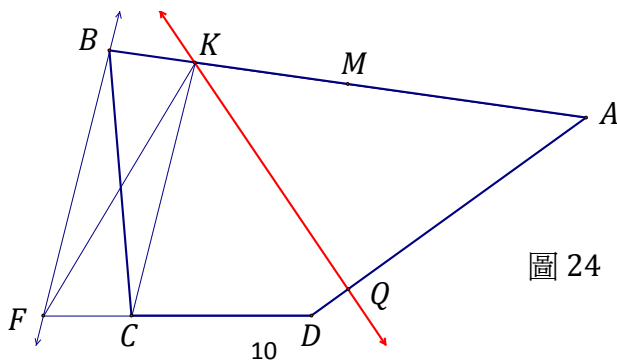


圖 24

問題七：過四邊形 $ABCD$ 內一點 K 作面積平分線

作法：(如圖 25)

1. 過頂點 C 作面積平分線 $\overline{CE}$ (作法見問題六)
2. 延長 $\overline{AD}, \overline{BC}$ 交於 F
3. 連 $\overline{FK}$ ，並在 $\overline{FC}$ 上取 K' 使 $\overline{FK'} = \overline{FK}$
4. 連 $\overline{K'E}$ ，作 $\overline{CG'}$ 平行 $\overline{K'E}$ 交 $\overline{FD}$ 於 G' ，並連 $\overline{K'G'}$
5. 在 $\triangle FCD$ 內作 $\angle K'FG = \angle KFG'$ ，並使 $\overline{FG} = \overline{FG'}$
6. 作 $\overline{KH}$ 平行 $\overline{FD}$ 交 $\overline{FG}$ 延長線於 H
7. 作過 K, G, H 三點的圓交 $\overline{FC}$ 於 P
8. 連 $\overline{KP}$ 交 $\overline{FD}$ 於 Q ， $\overline{KP}$ 即為所求面積平分線

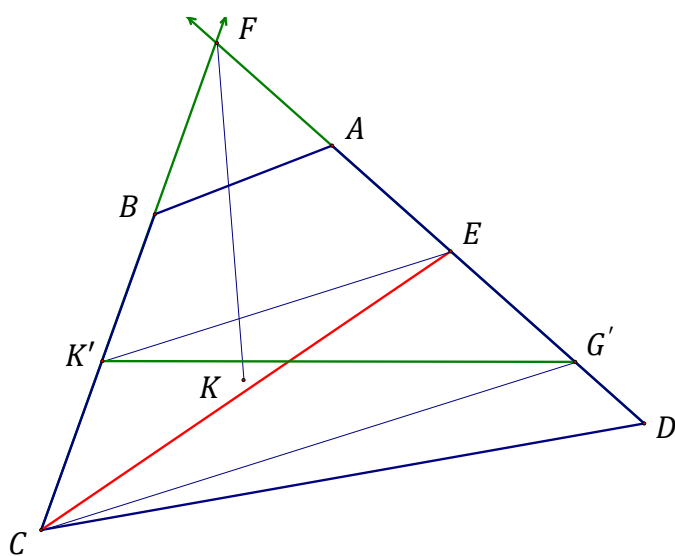
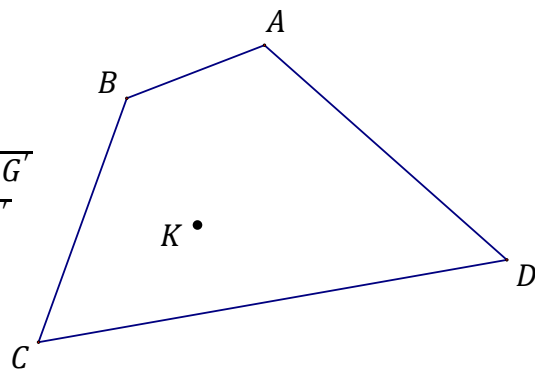
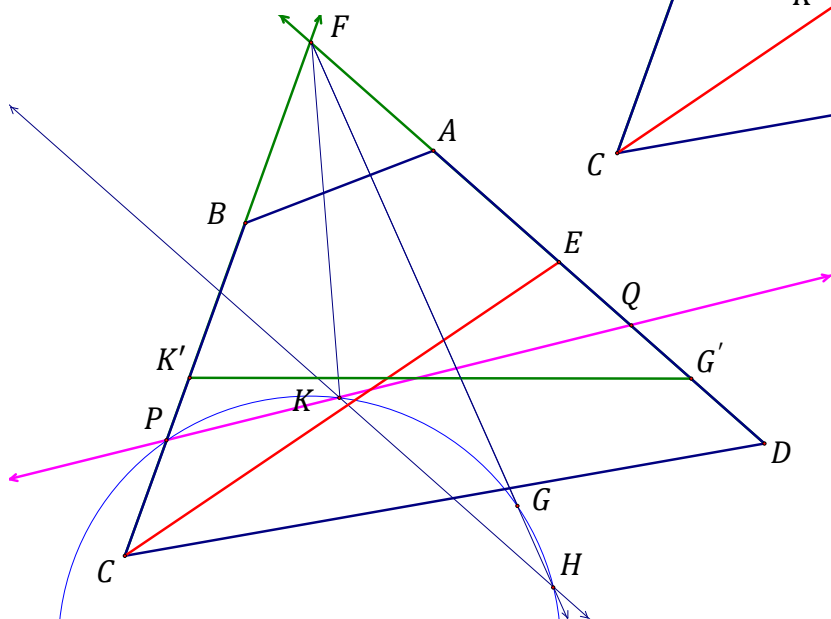
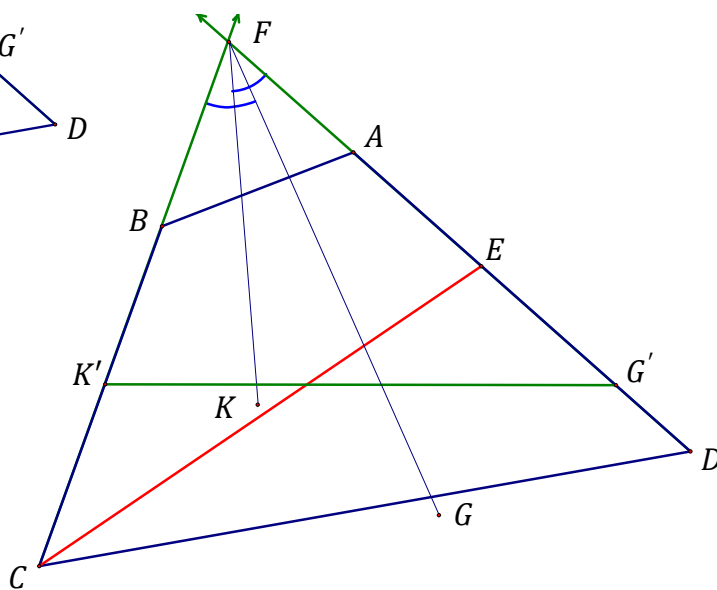


圖 25



證明：(如圖 26)

1. $\because \overline{CG'} \parallel \overline{KE} \therefore \Delta K'EC$ 面積 $= \Delta K'EG'$ 面積 (同底等高)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta FK'G' \text{ 面積} &= \Delta FK'E \text{ 面積} + \Delta K'EG' \text{ 面積} \\ &= \Delta FK'E \text{ 面積} + \Delta K'EC \text{ 面積} \\ &= \Delta FCE \text{ 面積} \end{aligned}$$

2. 連 $\overline{PG}$

3. $\because P, K, G, H$ 共圓 $\therefore \angle PKH = \angle PGH$ (等弧對等角)

4. 又 $\overline{KH} \parallel \overline{FD}$, $\therefore \angle KQF = \angle HKQ = 180^\circ - \angle PKH = 180^\circ - \angle PGH = \angle PGF$

5. $\angle PFG = \angle K'FG = \angle KFG' = \angle KFQ$

6. 在 ΔFPG 與 ΔFKQ 中

$$\begin{cases} \angle KQF = \angle PGF \\ \angle PFG = \angle KFQ \end{cases} \Rightarrow \Delta FPG \sim \Delta FKQ \text{ (AA)} \Rightarrow \overline{FP} : \overline{FG} = \overline{FK} : \overline{FQ}$$

$$\therefore \overline{FP} \times \overline{FQ} = \overline{FK} \times \overline{FG} = \overline{FK'} \times \overline{FG'}$$

7. 由等角面積比得 ΔFPQ 面積 : $\Delta FK'G'$ 面積 $= (\overline{FP} \times \overline{FQ}) : (\overline{FK'} \times \overline{FG'}) = 1 : 1$

又 $\Delta FK'G'$ 面積 $= \Delta FCE$ 面積, $\therefore \Delta FPQ$ 面積 $= \Delta FK'G'$ 面積 $= \Delta FCE$ 面積

8. 又 $\overline{CE}$ 為四邊形 $ABCD$ 面積平分線

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{四邊形 } QPCD \text{ 面積} &= \Delta FCD \text{ 面積} - \Delta FPQ \text{ 面積} \\ &= \Delta FCD \text{ 面積} - \Delta FCE \text{ 面積} \\ &= \Delta ECD \text{ 面積} \\ &= \frac{1}{2} \text{ 四邊形 } ABCD \text{ 面積} \end{aligned}$$

故 $\overline{KP}$ 為面積平分線, 得證

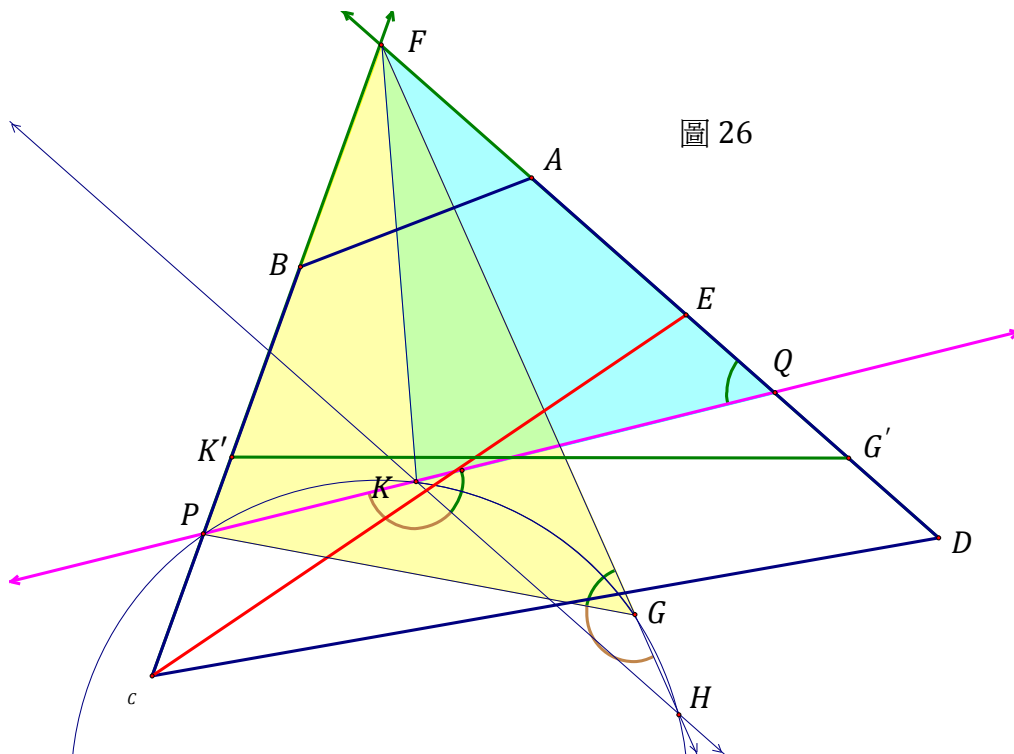


圖 26

問題八：過四邊形 $ABCD$ 外一點 K 作面積平分線

作法：(如圖 27)

1. 過頂點 C 作面積平分線 $\overline{CE}$ (作法見問題六)
2. 延長 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 交於 F
3. 連 $\overline{FK}$ ，並在 $\overline{FC}$ 上取 K' 使 $\overline{FK'} = \overline{FK}$
4. 連 $\overline{K'E}$ ，作 $\overline{CG'}$ 平行 $\overline{K'E}$ 交 $\overline{FD}$ 於 G' ，並連 $\overline{K'G'}$
5. 在 $\triangle FCD$ 外作 $\angle K'FG = \angle KFG'$ ，並使 $\overline{FG} = \overline{FG'}$
6. 作 $\overline{KH}$ 平行 $\overline{FD}$ 交 $\overline{FG}$ 延長線於 H
7. 作過 K, G, H 三點的圓交 $\overline{FC}$ 於 P
8. 連 $\overline{KP}$ 交 $\overline{FD}$ 於 Q ， $\overline{KP}$ 即為所求面積平分線

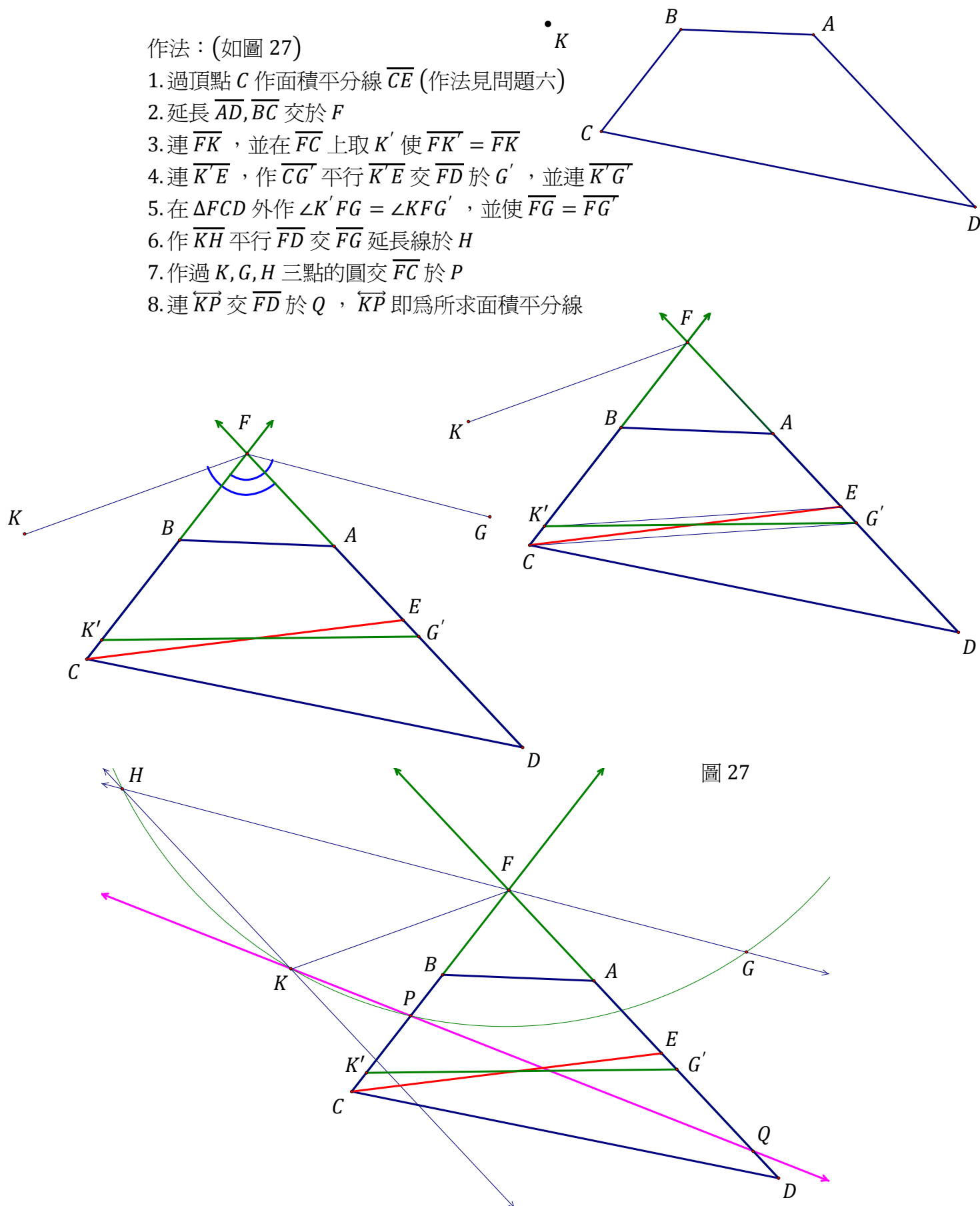


圖 27

證明：(如圖 28)

1. $\because \overline{CG'} \parallel \overline{K'E} \therefore \Delta K'EC$ 面積 $= \Delta K'EG'$ 面積 (同底等高)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta FK'G' \text{ 面積} &= \Delta FK'E \text{ 面積} + \Delta K'EG' \text{ 面積} \\ &= \Delta FK'E \text{ 面積} + \Delta K'EC \text{ 面積} \\ &= \Delta FCE \text{ 面積} \end{aligned}$$

2. 連 $\overline{PG}$

3. $\because$ 四邊形 $HKPG$ 為圓內接四邊形 $\therefore \angle PKH + \angle PGH = 180^\circ$

4. 又 $\overline{KH} \parallel \overline{FD}$, $\therefore \angle KQF = \angle K'KQ = 180^\circ - \angle PKH = \angle PGH$

5. $\angle PFG = \angle K'FG = \angle KFG' = \angle KFQ$

6. 在 ΔFPG 與 ΔFKQ 中

$$\begin{cases} \angle KQF = \angle PGH \\ \angle PFG = \angle KFQ \end{cases} \Rightarrow \Delta FPG \sim \Delta FKQ (AA) \Rightarrow \overline{FP} : \overline{FG} = \overline{FK} : \overline{FQ}$$

$$\therefore \overline{FP} \times \overline{FQ} = \overline{FK} \times \overline{FG} = \overline{FK'} \times \overline{FG'}$$

7. 由等角面積比得 ΔFPQ 面積 $: \Delta FK'G'$ 面積 $= (\overline{FP} \times \overline{FQ}) : (\overline{FK'} \times \overline{FG'}) = 1 : 1$

又 $\Delta FK'G'$ 面積 $= \Delta FCE$ 面積, $\therefore \Delta FPQ$ 面積 $= \Delta FK'G'$ 面積 $= \Delta FCE$ 面積

8. 又 $\overline{CE}$ 為四邊形 $ABCD$ 面積平分線

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{四邊形 } QPCD \text{ 面積} &= \Delta FCD \text{ 面積} - \Delta FPQ \text{ 面積} \\ &= \Delta FCD \text{ 面積} - \Delta FCE \text{ 面積} \\ &= \Delta ECD \text{ 面積} \\ &= \frac{1}{2} \text{ 四邊形 } ABCD \text{ 面積} \end{aligned}$$

故 $\overline{KP}$ 為面積平分線, 得證

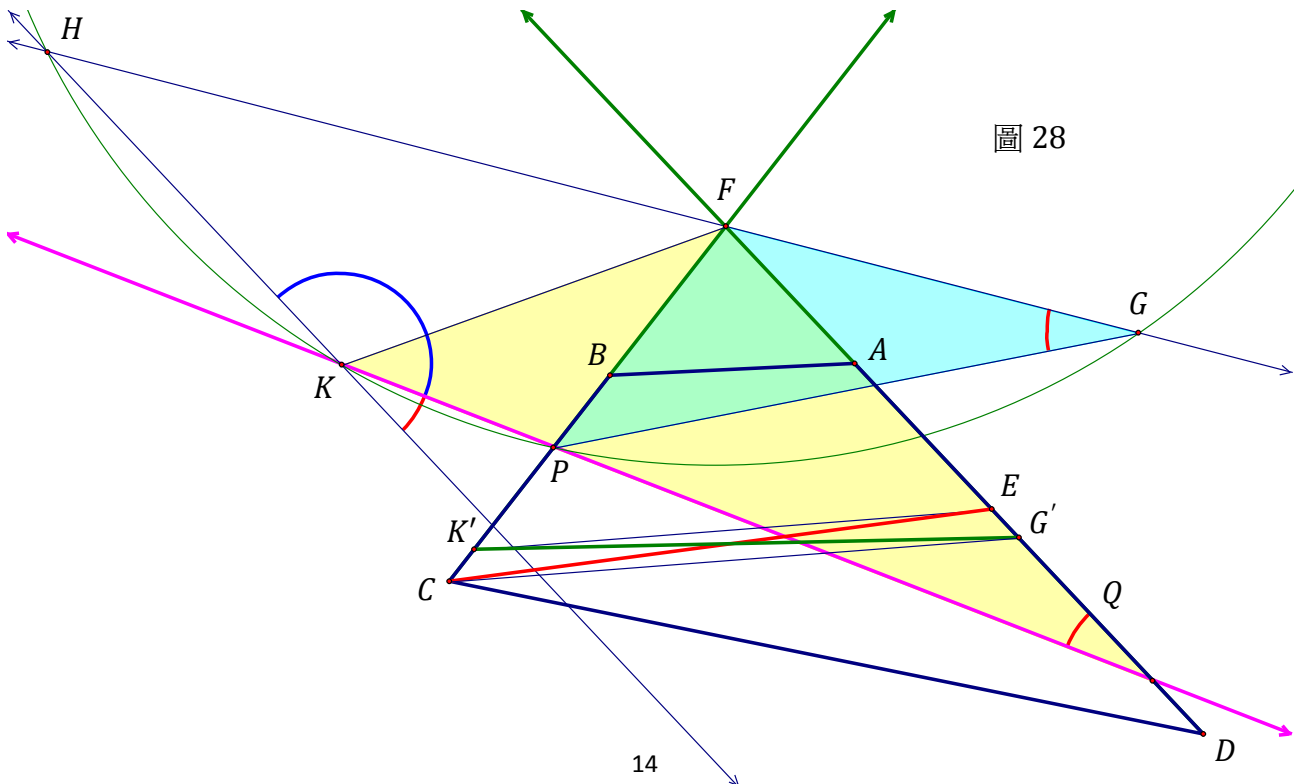


圖 28

討論二：(除梯形及平行四邊形外之一般四邊形)

1. 透過 *GSP* 作出四邊形所有面積平分線，如圖 29。我們發現四邊形四條過頂點面積平分線(紅線)，將面積平分線大致分成如圖中黃橘綠藍四個區域。

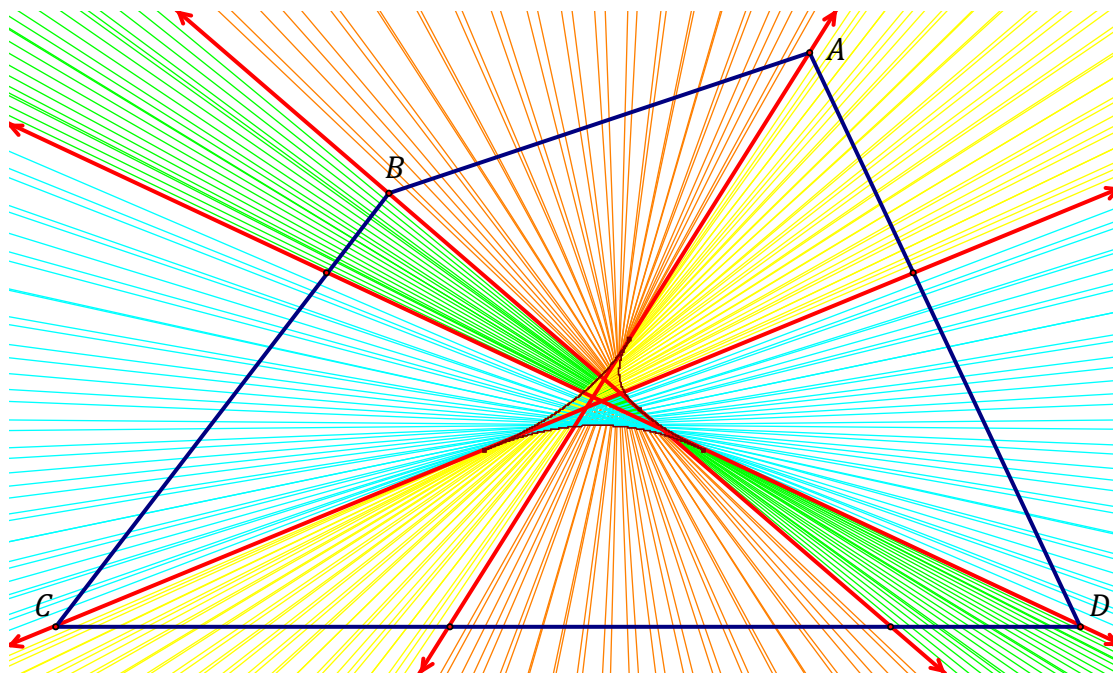


圖 29

2. 過任意點 K 求作面積平分線，若 K 在橘色區域內，則延長兩夾邊 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 交於 F ，在 $\overline{FA}$ 或 $\overline{FD}$ 上取得 $\overline{FK'} = \overline{FK}$ ；若 K 在黃色區域內，即可直接在 $\overline{DA}$ 或 $\overline{DC}$ 上取得 $\overline{DK'} = \overline{DK}$ ；若 K 在藍色區域內，則延長 $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ 交於 F ，在 $\overline{FC}$ 或 $\overline{FD}$ 上取得 $\overline{FK'} = \overline{FK}$ ；若 K 在綠色區域內，即可直接在 $\overline{CB}$ 或 $\overline{CD}$ 上取得 $\overline{CK'} = \overline{CK}$ 。
3. 在中央附近，面積平分線會交疊形成四條曲線。四曲線所圍成的「中央區」內的點都可作出三條面積平分線；過曲線上的點則可作出二條面積平分線；過曲線的交點或中央區外的點就只能作出一條面積平分線。
4. 如圖 30，過中央區內藍色區內的點，所作出的三條面積平分線，是兩條藍色及一條橘色；過藍色區曲線上的點，所作出的二條面積平分線，是一條藍色及一條橘色。

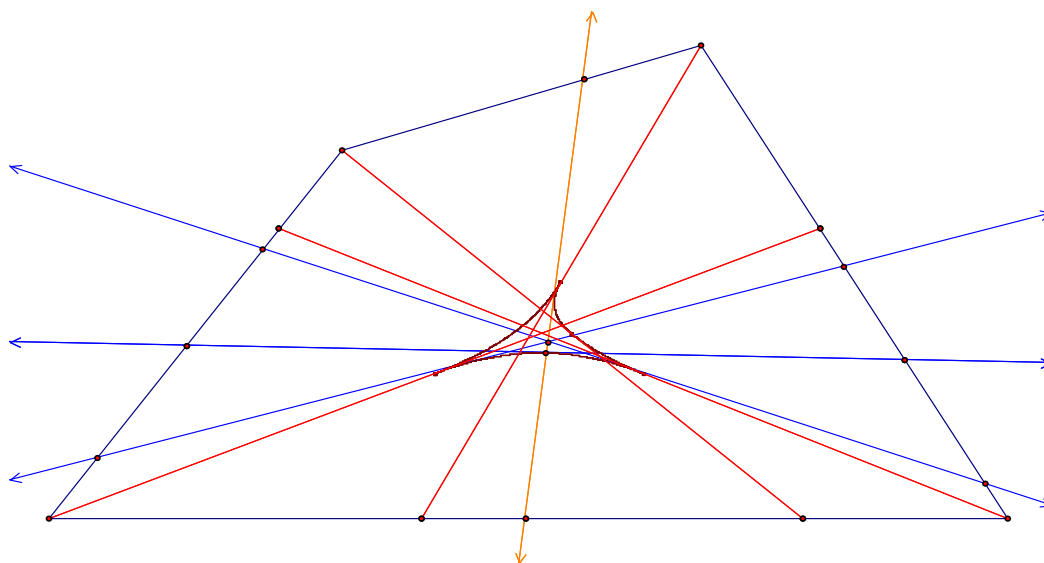


圖 30

討論三：(梯形及平行四邊形)

1. 求過任意點作梯形面積平分線，也是先以四頂點面積平分線來畫分四個區域(如圖 31)。若 K 點在白色區域，則依討論二之方法處理。

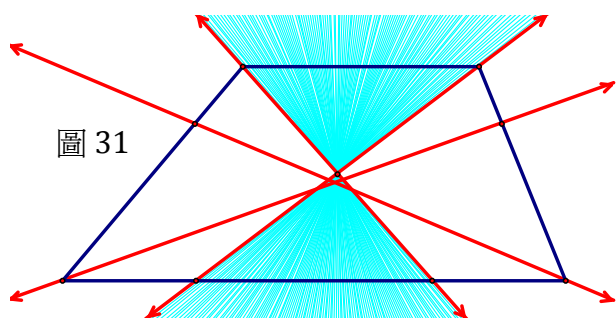


圖 31

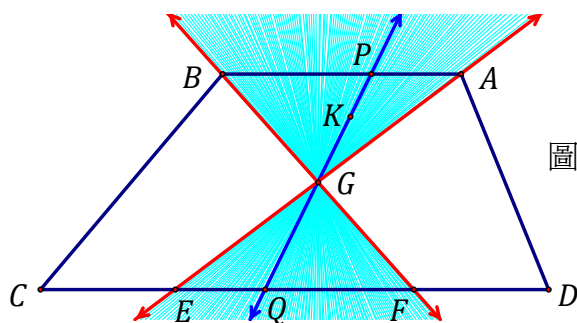


圖 32

2. 若 K 點在藍色區域，兩夾邊平行，則求過 K 點作梯形面積平分線，如下之作法：

作法：(如圖 32)

- (1) 分別作過頂點 A, B 之面積平分線 $\overline{AE}, \overline{BF}$ ，相交於 G 點
- (2) 連 $\overline{KG}$ ，交 $\overline{AB}$ 於 P ，交 $\overline{CD}$ 於 Q ， $\overline{PQ}$ 即為所求面積平分線

證明：(如圖 32)

- (1) ΔAED 面積 = 四邊形 $ABFD$ 面積 ($\because \overline{AE}, \overline{BF}$ 均為面積平分線)
 $\Rightarrow \Delta ABG$ 面積 = ΔEFG 面積
- (2) 又 $\Delta ABG \sim \Delta EFG$ ($\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$)，故 $\Delta ABG \cong \Delta EFG$ ， $\Rightarrow \Delta APG \cong \Delta EQG$
- (3) 四邊形 $APQD$ 面積 = 四邊形 $AGQD$ 面積 + ΔAPG 面積
 $=$ 四邊形 $AGQD$ 面積 + ΔEQG 面積
 $= \Delta AED$ 面積
 $= \frac{1}{2}$ 四邊形 $ABCD$ 面積

故 $\overline{KG}$ 為梯形 $ABCD$ 面積平分線，得證

3. 求過任意點作平行四邊形面積平分線。因平行四邊形為點對稱圖形，故任意點 K 連對稱中心點即為面積平分線(因平分線兩邊為完全對稱圖形，如圖 33)。其他如正六邊形等點對稱圖形作法亦如此。
4. 過梯形 G 點或點對稱圖形的中心點，會有無限多條面積平分線。

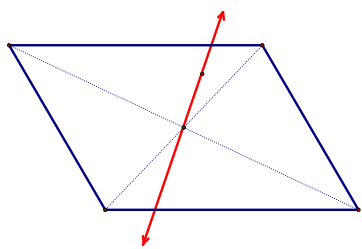
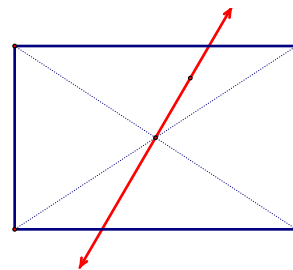
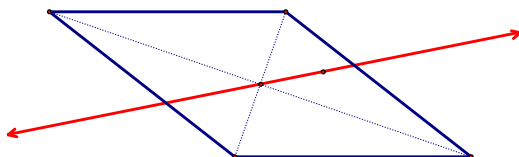


圖 33

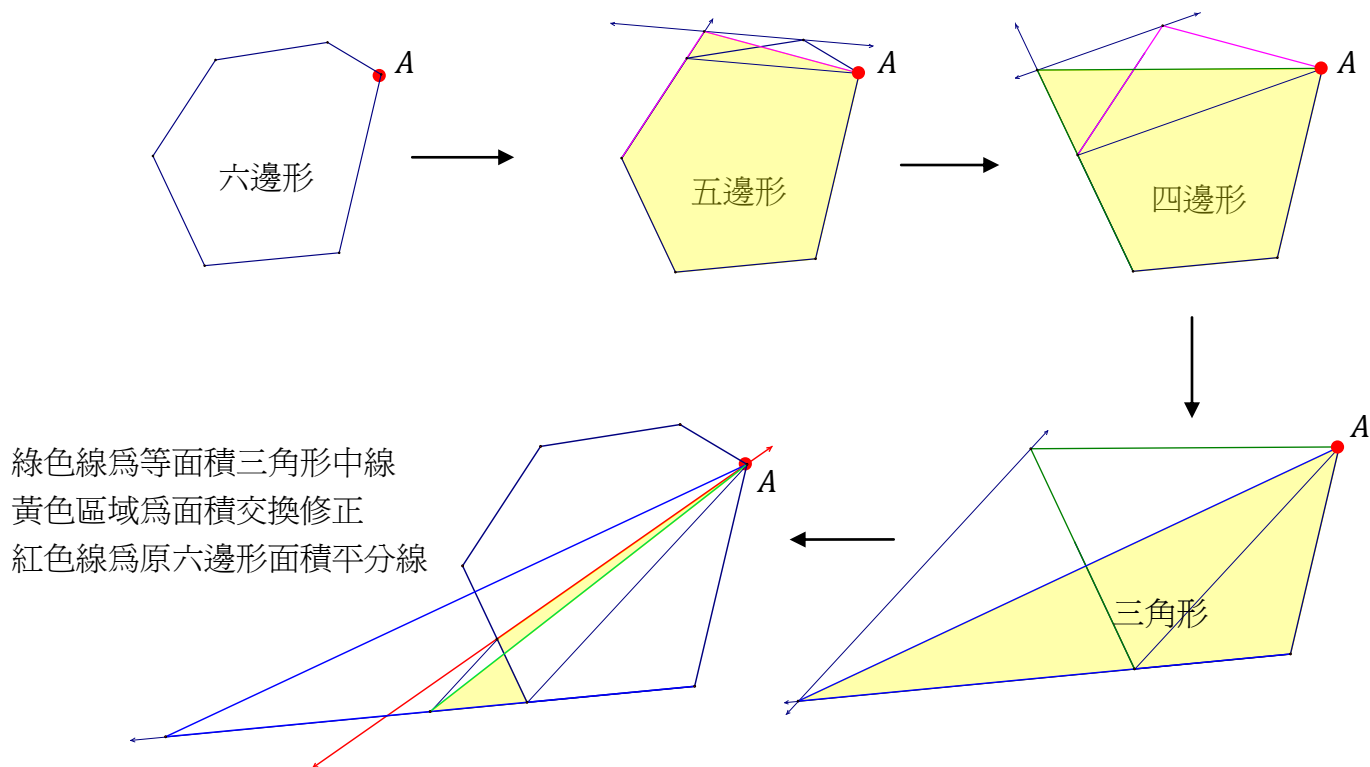


三、求過任意點，作 N 邊形面積平分線。

問題九：過 N 邊形頂點 A 作面積平分線

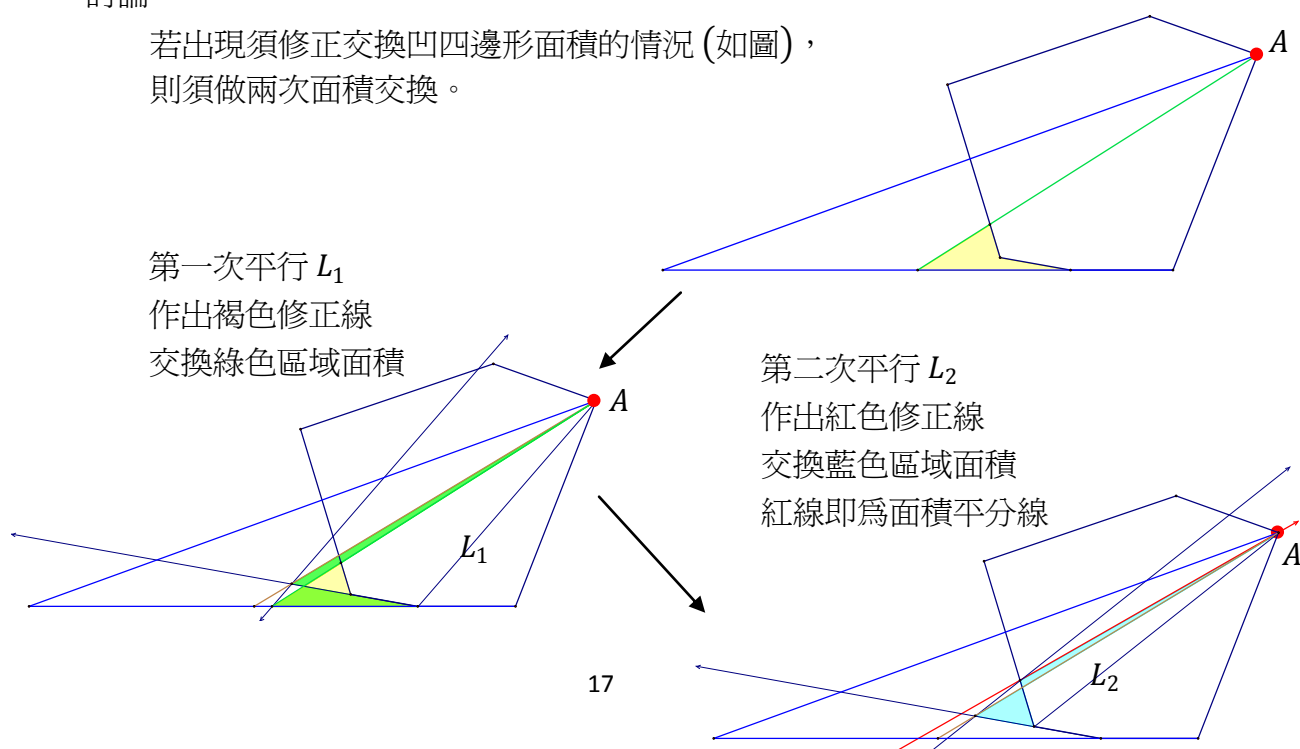
作法：

1. 先將 N 邊形逐步轉換為等面積之 $N - 1$ 邊形、 $N - 2$ 邊形、...、直至三角形
2. 取三角形中線平分三角形面積
3. 再以平行線作等面積交換修正，修正線即為面積平分線
(以六邊形為例，如說明圖示)



討論：

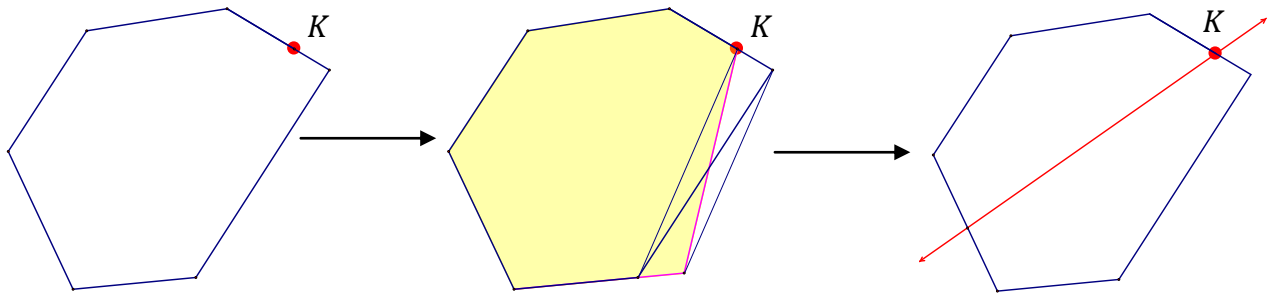
若出現須修正交換凹四邊形面積的情況 (如圖)，
則須做兩次面積交換。



問題十：過 N 邊形邊上一點 K 作面積平分線

作法：

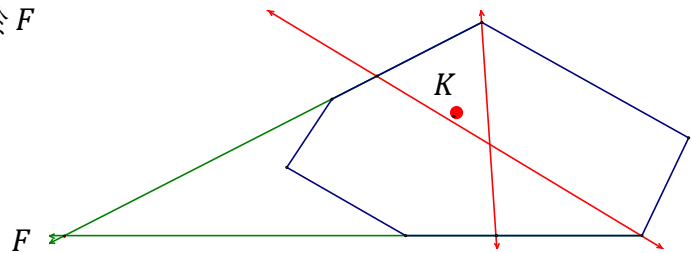
1. 仿問題六之作法，先將 N 邊形轉換為以 K 為頂點的等面積之新 N 邊形
2. 再以問題九之作法，作出面積平分線
(以六邊形為例，說明圖示如下)



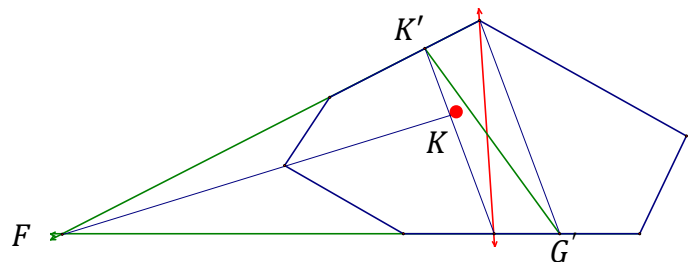
問題十一：過 N 邊形內一點 K 作面積平分線

作法：

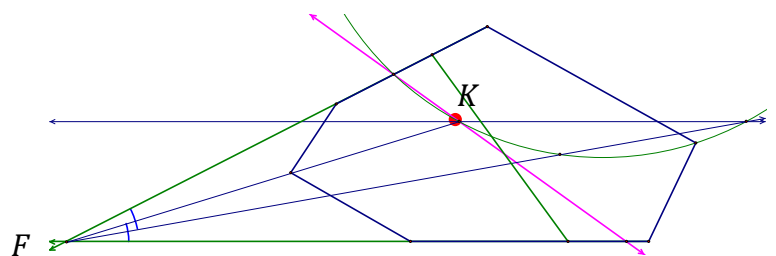
1. 取兩條最靠近 K 點之 N 邊形頂點面積平分線 (作法見問題九)
並延長兩平分線所夾的邊交於 F



2. 在延長線上取 $\overline{FK'} = \overline{FK}$ ，並利用平行線交換面積，做出另一條面積平分線 $\overline{K'G'}$



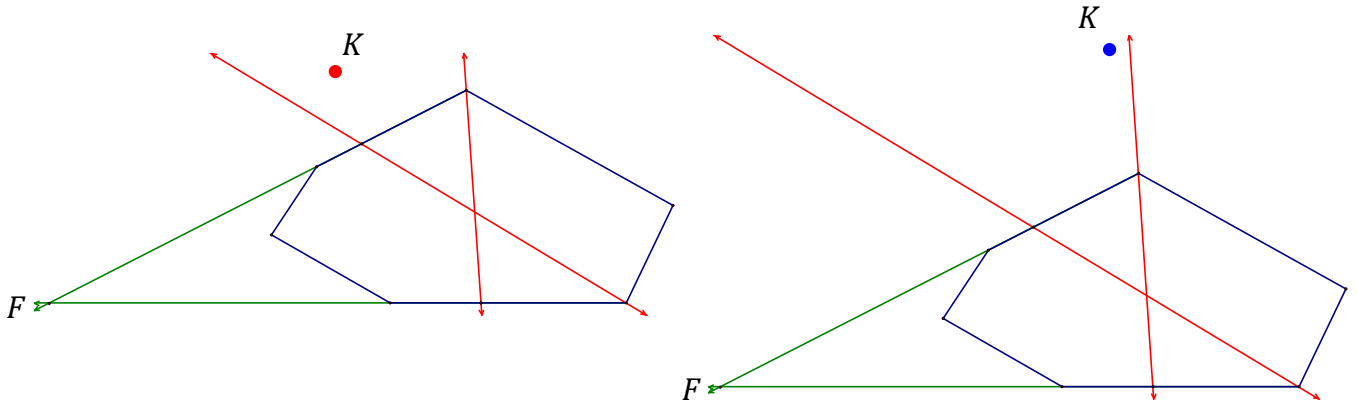
3. 仿問題七之作法，作出過 K 點之面積平分線



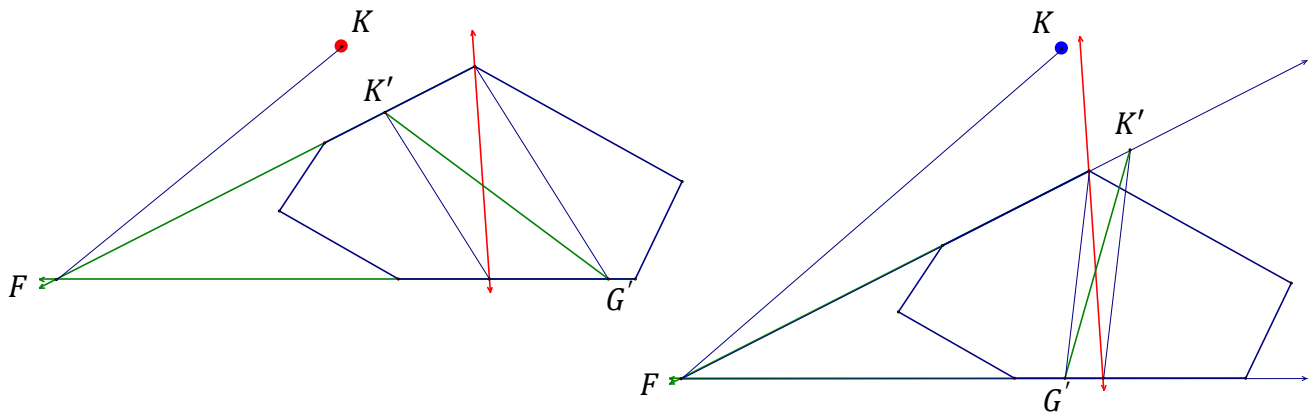
問題十二：過 N 邊形外一點 K 作面積平分線

作法：（以六邊形為例，並依 K 點距離遠近分述兩種情況）

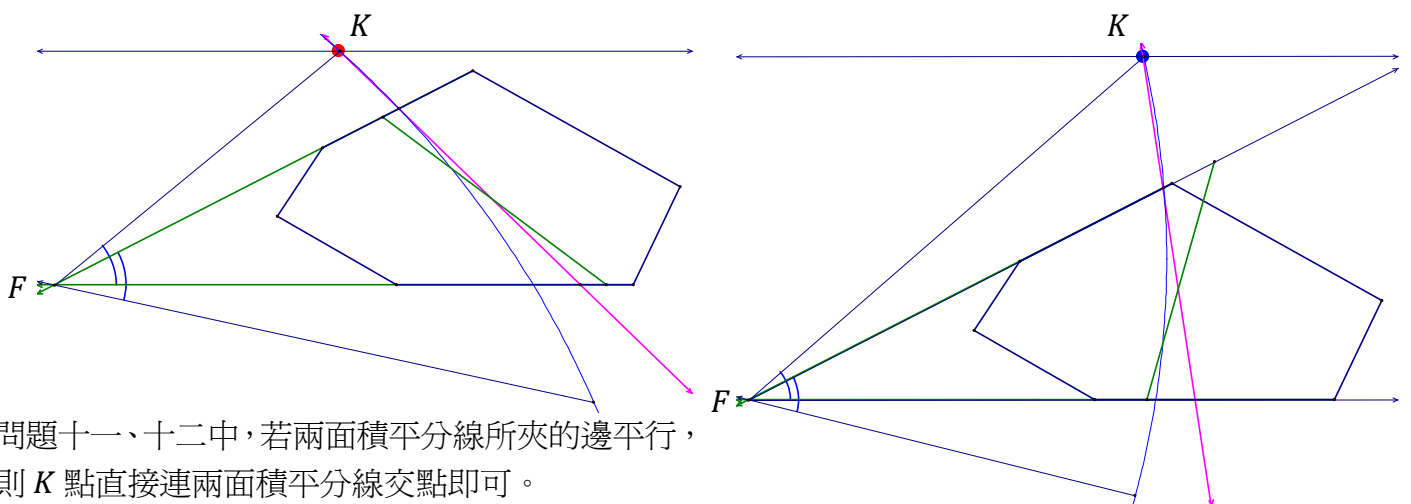
1. 取兩條最靠近 K 點之 N 邊形頂點面積平分線，並延長兩平分線所夾的邊交於 F



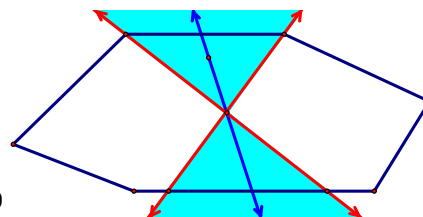
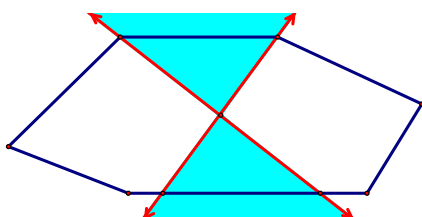
2. 在延長線上取 $\overline{FK'} = \overline{FK}$ ，並利用平行線交換面積，做出另一條面積平分線 $\overline{K'G'}$



3. 仿問題八之作法，作出過 K 點之面積平分線



問題十一、十二中，若兩面積平分線所夾的邊平行，則 K 點直接連兩面積平分線交點即可。



陸、結論

- 一、「求過頂點或邊上一點，作多邊形面積平分線」。可利用平行線交換面積法，先將多邊形轉換成等面積之三角形，再以三角形中線來平分面積。必要時，再利用平行線交換面積法修正，解出所求正確的面積平分線。
- 二、「求過內或外任意點 K ，作三角形面積平分線」。參考資料中是將 K 點與邊上中點連線，再作兩次相似形求解。而我們的作法不同，是先在邊上取 K' 點，使 K' 與 K 至頂點等距離，再作出過 K' 點之面積平分線 $\overline{KG'}$ ，取得頂點至 G' 點的距離，再作相似形求解。
- 三、所有三角形面積平分線的中點，在重心附近會形成三條曲線圍成的重心區，過重心區內的點，可作出三條面積平分線；過曲線上的點，可作出二條面積平分線；在曲線交點或重心區外的點，只能作一條面積平分線。
- 四、對於「求過任意點 K ，作大於 3 的多邊形面積平分線」的問題，我們研究出解法。先找出最靠近 K 點的兩條過頂點面積平分線，延長兩線夾邊交於 F 點，並在邊上取 K' 點，使 $\overline{FK'} = \overline{FK}$ ，再作出過 K' 點的面積平分線 $\overline{K'G'}$ ，最後作相似形求解；若兩線的夾邊平行，則 K 點直接連兩面積平分線交點即可得解。

柒、未來展望

- 一、利用文獻加上我們的研究，求出作多邊形任意等分的方法；目前已知在圖形中央可能出現無解區域。
- 二、往立體圖形發展，給定一個四面體與一條直線，作一平面包含該直線，並平分此四面體的體積。
- 三、往兩個三角形發展，作一條直線同時平分兩個三角形的面積。

捌、參考資料

- 一、莊焜安、許威德、黃浚柏、董晏均。面積平分線知多少。
中華民國第二十三屆中小學科學展覽會。
取自：http://www.nhjh.cy.edu.tw/group1/science-visit/content/93_math02.pdf。
- 二、張至皓、何玉婉、何知一、張城豪。怎樣分才公平三角形面積兩等分的尺規作圖。
中華民國第四十六屆中小學科學展覽會。
取自：<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/junior/0304/030414.pdf>。
- 三、陳鴻鑫、陳思遠。多邊形面積平分研究。中華民國第二十二屆中小學科學展覽會。
取自：<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/22/pdf/22h/177.pdf>。
- 四、劉任昌。從用直線平分凸五邊形的面積談起。
取自：http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d254/25413.pdf。
- 五、張湘琦、鄭巧君。凸 n 邊形等分面積線數量之分布探索。2006 年國際科展。
取自：<http://www.tyc.edu.tw/files/CD/science45/high/0304/030427.pdf>。
- 六、陳旻宏。三角形分割線形成的包絡線。
取自：<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/30/pdf/30h/098.pdf>。
- 七、王秋富、林凱揚。多邊形形上點面積等分線探討。
取自：<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/31/pdf/31m/127.pdf>。

【評語】 030414

1. 作品表達具有邏輯性與系統性。
2. 善用圖形解釋，研究結果說明清晰。
3. 研究過程完整，學以致用，符合科學精神。
4. 未來展望可作為延伸研究之基礎。