

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

佳作

030413

超立方體 Q_n 之最小控制

學校名稱：臺北市私立復興實驗高級中學

作者： 國二 李佳晉 國二 藍唯倫 國二 徐書強 國二 鄭博升	指導老師： 陳俊佑
---	------------------

關鍵詞： 超立方體、控制數

壹、摘要

n 維空間的超立方體 Q_n 其頂點為 n 維空間中的點，每一位坐標均為 0 或 1，兩個點若只有一位坐標不同代表有邊相連。對於一個圖 G ，取一個點集，使得這一堆點，以及所有與這些點有邊相鄰的點的聯集，恰好為整個圖，就稱它為圖 G 的控制集。點數最少的控制集其點數定為圖 G 的(最小)控制數，記為 $\gamma(G)$ 。我們證明 $\gamma(Q_1) = 1, \gamma(Q_2) = \gamma(Q_3) = 2, \gamma(Q_4) = 4, \gamma(Q_5) = 7, \gamma(Q_6) = 12, 30 \leq \gamma(Q_8) \leq 32$ ，當 $n = 2^p - 1, \gamma(Q_n) = 2^{n-p}$ 。

貳、研究動機

國一寒假時，老師讓我們看了一本書叫「棋盤上的數學」，裡面介紹了許多有關圖論的知識，例如：若干個皇后在西洋棋裡如何擺放才能將所有格子全部蓋住。老師也介紹了控制數（也就是書中提到的外圍數）的概念，還讓我們看了一個 n 維空間立方體的影片，引起我們對 n 維空間超立方體最小控制數極大的興趣，因此我們便想以此做為研究主題。

參、研究目的

1. 了解超立方體的構造及其基本性質。
2. 求出 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 、 Q_5 、 Q_6 、 Q_7 及 Q_8 的最小控制數。
3. 了解「拈」，抓 k 堆遊戲的致勝方案。
4. 研究 Q_n 最少控制數是否恰為 $\frac{2^n}{n+1}$ 。並應用問題 3 的結論解決此問題。

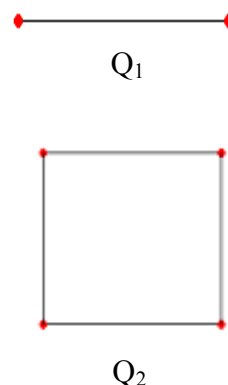
肆、研究器材

紙、筆、頭腦

伍、研究過程、討論及結果

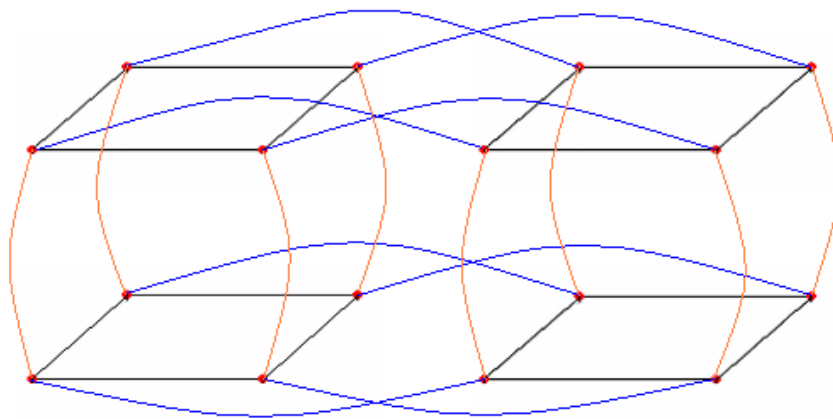
一、超立方體的基本結構及一些表示法

從影片我們知道， n 維空間的超立方體，可由以下步驟得到：將一個 $n-1$ 維超立方體再複製一遍，再將每一對新舊兩點連一條邊。因此可以知道 n 維超立方體共有 2^n 個點。若將超立方體的頂點坐標化，發現二維立方體的頂點可以表示為 $(0,0)$ 、 $(0,1)$ 、 $(1,0)$ 及 $(1,1)$ 四個點；而三維立方體的八個頂點可以表示為 $(0,0,0)$ 、 $(0,0,1)$ 、 $(0,1,0)$ 、 $(0,1,1)$ 、 $(1,0,0)$ 、 $(1,0,1)$ 、 $(1,1,0)$ 、 $(1,1,1)$ 。也恰為二維立方體的四個點，在第三位坐標分別加上 0 或 1。其中的兩個如果只有一位不一樣，則這兩個點有邊相連。超立方體 Q_n 也確實是這樣定， Q_n 的點表示成有 n 位坐標，每一位都是 0 或 1，兩個點如果只有一位不同則這兩個點有邊相連。



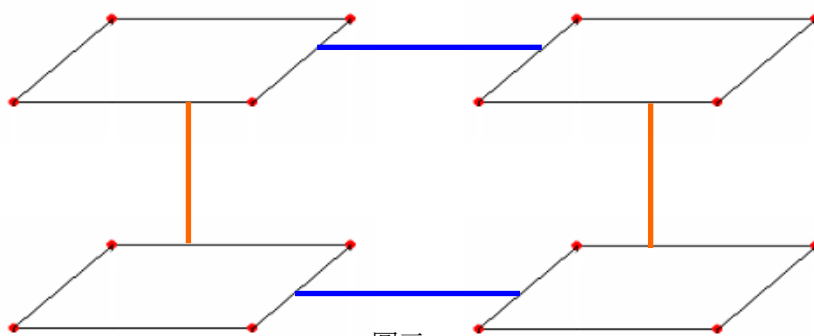
圖一 Q_1 與 Q_2

在研究 Q_4 、 Q_5 的過程，我們發現 Q_n 可以有不同的表示法。以 Q_4 為例： Q_4 是將 Q_3 再複製一次，並將對應點連邊所形成。而一個 Q_3 又是從 Q_2 產生的，如此， Q_4 也可以看成用 Q_2 經兩次複製後對應點連線的過程表示(如圖二)；即可發現當我們將四個 Q_2 相互的對應點之連線視為四條粗線時，便不難看出若將四個 Q_2 各視為一點時，四個 Q_2 便再組成一個更大的 Q_2 (如圖三)。



圖二

藍線：第一次複製之連線
橘線：第二次複製之連線



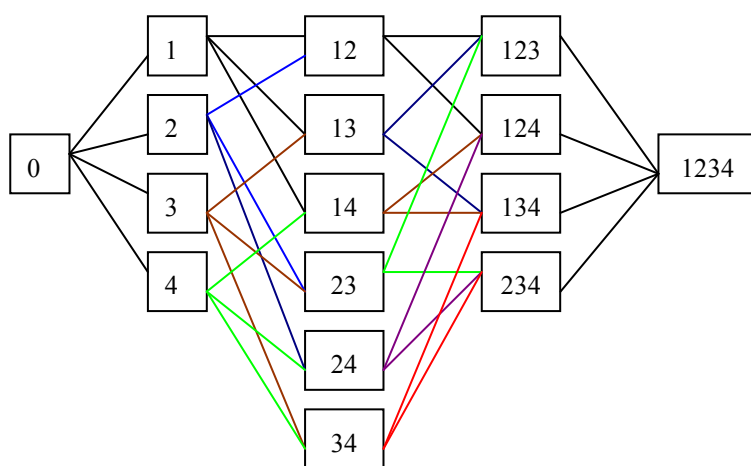
圖三

於是我們認為， Q_n 除了可由 Q_{n-1} 經複製且對應點連線組成一個將兩個 Q_{n-1} 各視為點的 Q_1 外，也可由 Q_{n-2} 經兩次複製後組成一個以 Q_{n-2} 為點的 Q_2 。在跟老師討論後，我們知道卡氏乘積的意義，也知道 Q_n 可以看成 $Q_{n-1} \square Q_1$ ，也可以看成 $Q_{n-2} \square Q_2$ 或是 $Q_{n-i} \square Q_i$ 。

當維度很大時，這樣的表示法有時候也不容易討論，因此引入另一種表示法。我們將超立方 Q_n 體的一點 $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ 中，將所有值為 1 的 x 的下標數字重新組成一個數，由小到大排列，例： $(0,1,0)$ 表示為 2， $(1,0,0,0)$ 表示為 1， $(0,1,0,0,1)$ 表示為 25。

有了這個表示方法，我們可以將任何的 Q_n 表示為「層狀圖(Layer Graph)」。我們將 0 稱為第 0 層，將只有一位數的稱為第一層，有兩位數的稱為第二層，依此類推。第 k 層的點數為 C_k^n 與第 $n-k$ 層的點數 C_{n-k}^n 是一樣的。對照原本的定義，兩個點差一位代表有邊相連，在層狀圖則被轉換成，兩個點如果只相差一個數代表有邊相連。因此我們知道兩個點如果在同層，或差兩層以上就不可能相連。

例如 Q_4 可以用圖三表示：



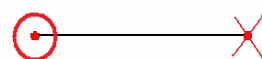
圖四 Q_4 層狀圖

在棋盤上的數學一書中，我們知道從西洋棋的皇后問題引出了最大獨立集(內固數)及最小控制集(外固數)的問題。我們將其定義敘述如下：取一個點集，使得這一堆點，以及所有與這些點有邊相鄰的點的聯集，恰好為整個圖，就稱它為控制集，控制集中所包含的點稱控制點。一個控制點可以控制本身及跟自己有邊相連的點，就好像一個警衛可以看守自己這個點還有它眼力可達的點。一個圖 G 的(最小)控制數定為最少點數的控制集所有的點數。我們的研究就是研究超立方體的控制數，也可以看成最少需要放幾個城堡才能看守住超立方體的每一個點。

二、 Q_1 到 Q_7 的最小控制數

(一) Q_1 的最小控制數 $\gamma(Q_1)=1$ ：

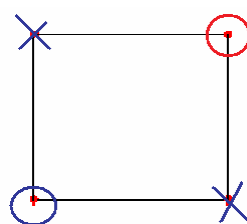
明顯可知 Q_1 的控制數為 1，記為 $\gamma(Q_1)=1$ 。圖五為 Q_1 最小控制的一種表示法。



圖五 Q_1 最小控制

(二) Q_2 的最小控制數 $\gamma(Q_2)=2$

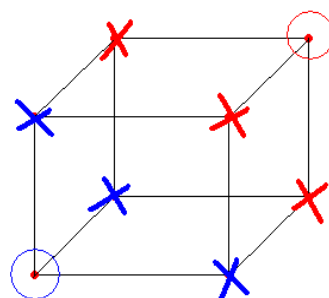
明顯可知 Q_2 的控制數為 2，記為 $\gamma(Q_2)=2$ 。圖六為 Q_2 最小控制的一種表示法。



圖六 Q_2 最小控制

(三) Q_3 的最小控制數 $\gamma(Q_3)=2$

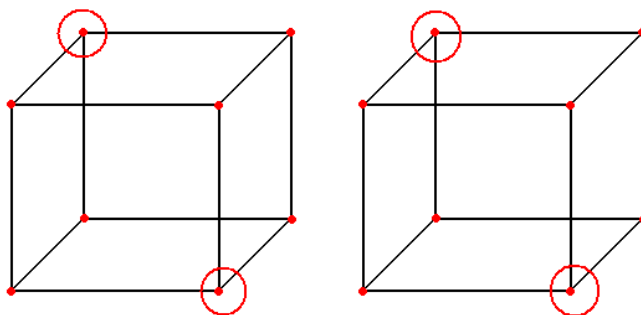
Q_3 有 8 個點，如圖七所示，最小控制數為 2，記為 $\gamma(Q_3)=2$ 。從結果中也可以看出，在 Q_3 當中，每一個控制點可以控制的點數(包括自己)為 4 個，而每一控制點所控制到的都不重複，所以恰好 $\gamma(Q_3)=2^3 \div 4=2$ ，我們稱之為「完美情況」。



圖七 Q_3 最小控制

(四) Q_4 的最小控制數 $\gamma(Q_4)=4$

Q_4 就是將 Q_3 複製一次，對應點連起來，即 $Q_4=Q_3 \square Q_1$ ，如圖八為 Q_4 的一組解。



圖八 四個點控制 Q_4

也就是說 $\gamma(Q_4) \leq 4$ ，我們可以用以下簡單的證明來證明 4 個就是最小控制數：
因為每個控制點最多能控制五個點，少於 4 個點無法控制 16 個點。所以， $\gamma(Q_4)=4$ 。

透過以上幾個例子，不難看出幾個簡單但重要的結果。

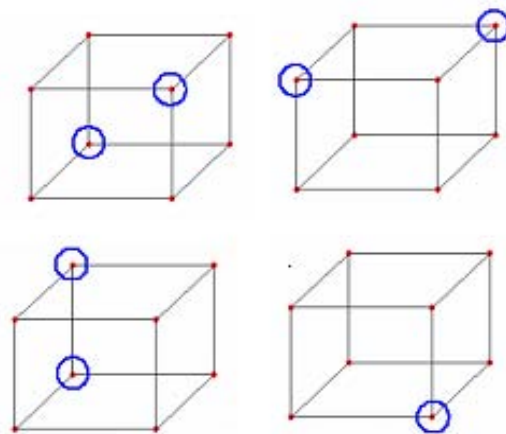
(1) 將一個 $n-1$ 維超立方體的控制集，也複製一遍，就可以當 n 維超立體的控制集，因此 $\gamma(Q_n) \leq 2\gamma(Q_{n-1})$ 。

(2) 在 n 維超立方體中，一個控制點能控制 $n+1$ 個點，都不重覆的情況下， $\gamma(Q_n) \geq \frac{2^n}{n+1}$ 。

我們不難看出，完美情況的必要條件為 $n+1$ 是 2 的幕次，即 $n = 2^p - 1$ 。也就是 Q_7 可能是下一個完美情況。

(五) Q_5 的最小控制數 $\gamma(Q_5)=7$

明顯可知 $\gamma(Q_5) \leq 8$ ，因此我們從 8 個點開始逐步往下找，但最少只找到 7 個點可以做為控制集，如圖九，因此猜想 7 可能就是它的最小控制數，要證明它，可先假設只有 6 個控制點。(在往後的研究我們也是以這種方式進行)



圖九 七個點控制 Q_5

我們將 Q_5 視為 $Q_3 \square Q_2$ 。

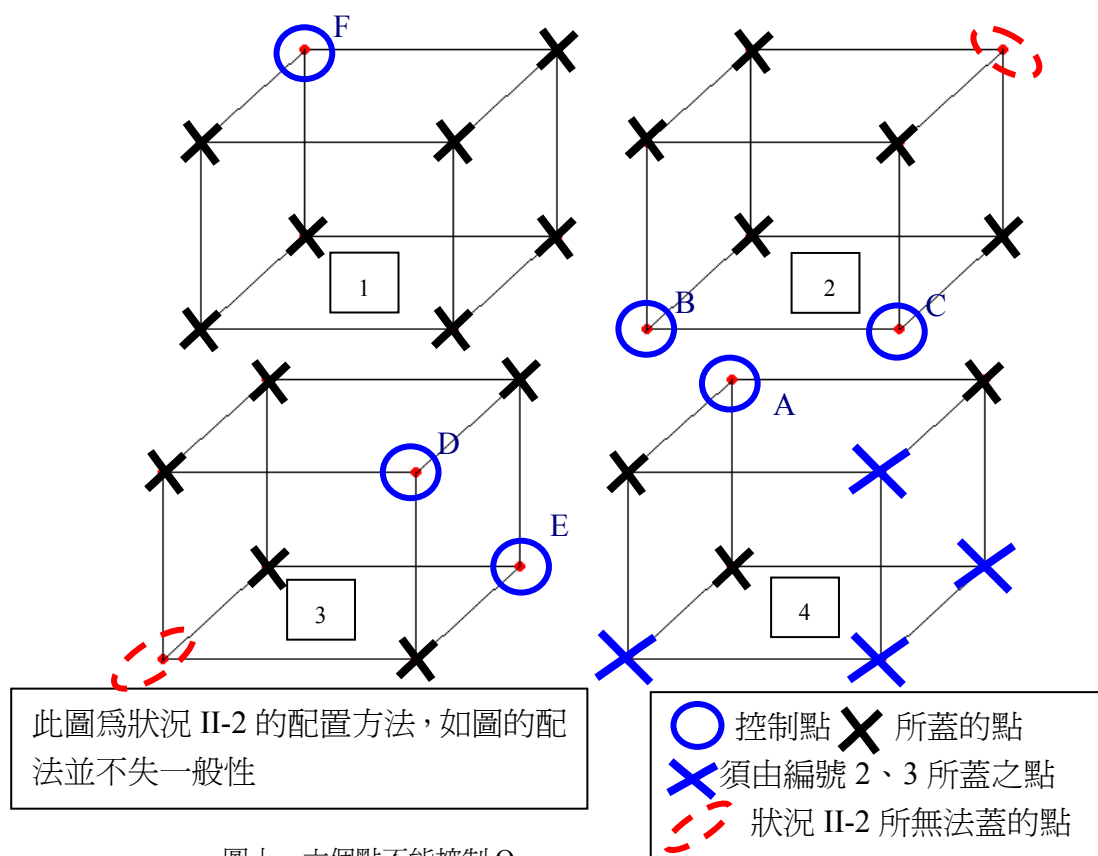
依據鴿籠原理，必定有一個立方體上面至多只有一個控制點，我們分為兩種情況來討論：

- I. 若一個立方體上沒有控制點，那麼該立方體上面的八個點都要用其餘立方體上的控制點來蓋，則須至少八個。(不合)
- II. 可設每一個立方體上至少有一個控制點，不失一般性，設編號 4 上面只有一個控制點，再設 A 為該控制點，如圖十。那麼，編號 4 立方體上面會有四點 (藍色 X) 沒被蓋到，而這四個點則必須由編號 2 和 3 上面的控制點來蓋。我們再分為以下兩種情況討論：

1. 不失一般性，設編號 2、3 上面分別有 1、3 個控制點，那麼，編號 2 上面所剩下的點（最少 3 個）都必須由編號 1 來蓋，但此時已經存在著五個控制點，所以必定蓋不完。（不合）
2. 不失一般性，設編號 2、3 上面分別有 2、2 個控制點（如圖九），由於編號 1、4 同時為編號 2、3 所蓋，所剩下來的點再自己上面的控制點來蓋，因此編號 1、4 上面的控制點分布位置會相同。而編號 2、3 上面的各兩個控制點的位置也會被限制在相對以及相鄰的位置，不管怎麼放，必定蓋不完。（不合）

綜合以上，知道六個點不可能是 Q_5 的一個控制集。

所以， $\gamma(Q_5)=7$ 得證。

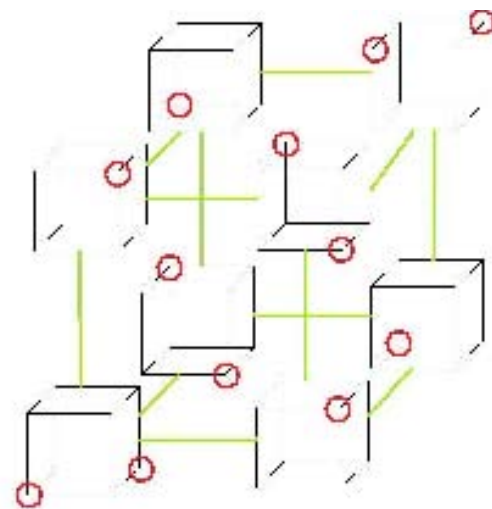


圖十 六個點不能控制 Q_5

(六) Q_6 的最小控制數 $\gamma(Q_6)=12$

$\gamma(Q_6) \leq 14$ ，逐步往下找，最少只找到 12 個點可以做為控制集，如圖十一。要證明它，我們一樣先假設只有 11 個控制點。

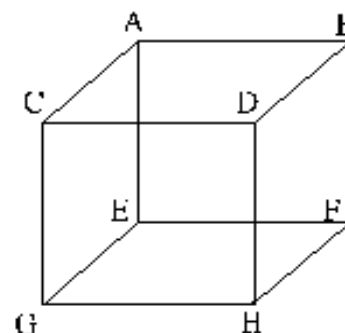
將 Q_6 視為 $Q_3 \square Q_3$ ，如圖十二中，每一點都視為一個 Q_3 。令 A 這個 Q_3 有 a 個控制點，依此類推。若將 11 個控制點分到 8 個 Q_3 ，根據鴿籠原理，必定至少有一個 Q_3 上面至多有 1 個控制點。可分為兩部分討論：



圖十一 12 個點控制 Q_6

I、設 A 上面沒有控制點，則必有 $b+c+e \geq 8$ ，分爲以下幾種情形討論。

- 1) 若 $b+c+e=11$ ，則 d,g,h,f 皆爲 0，必須 $d+g+f \geq 8$ 才能蓋完 H，不合。
- 2) 若 $b+c+e=10$ ，則剩下一個控制點，此時 H 上面還剩 8 個點，必定蓋不完。
- 3) 若 $b+c+e=9$ ，由於每個點都連到 D,G,H,F 中的兩個點，則這 9 個最多可蓋 D,G,H,F 中 18 個點，剩下 14 個點，且其中有 8 個在 H 上，此時只剩下 2 個控制點，所以必定蓋不完。
- 4) 若 $b+c+e=8$ ，則剩下 3 個分布在 D,G,H,F 這 4 個 Q_3 中，必定又有一個 Q_3 上面沒有控制點，不妨設 $d=0$ 。由於 A 和 D 同時都爲 B,C 所蓋，所剩下來的點再分別由 E,H 所蓋，所以 E,H 上面必定會有 e 個控制點分布位置相同。



圖十二 Q_6 視爲 $Q_3 \square Q_3$

若 $e=0$ ，則有 $g+f \geq 8$ ，不合。

若 $e=1$ ，則 E 上面剩下來的 4 個點都要由 G,F 所蓋， $g+f \geq 4$ ，不合。

若 $e=2$ ，則 $b+c=6$ ，共可蓋掉 G,F 中 6 個點，而 E,H 可蓋掉 G,F 中 6 個點（當 $h=3$ 時）或是 4 個點（當 $h=2$ 時），如果情況是前者， $6+6 < 16$ ，必定蓋不完。若是後者， $16-6-4=6$ ，剩下一個控制點，無論放哪裡，必定蓋不完。

若 $e=3$ ，則 $b+c=5$ ，共可蓋掉 G,F 中 5 個點，而 E,H 可蓋掉 G,F 中 6 個點，此時已經沒有剩下控制點了，且 $5+6 < 16$ ，必定有剩下。

綜合 1,2,3,4 得出：每一個 Q_3 上面至少有一個控制點（結論 1）。

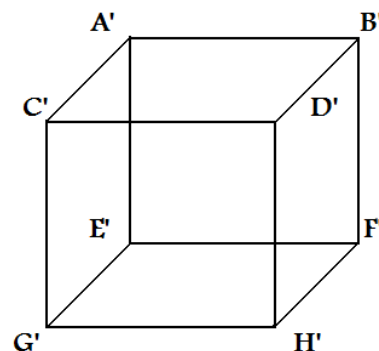
將 A、D、G、F 分爲一組，B、C、E、H 分爲一組。將 11 個控制點分到這兩組，根據鴿籠原理，必定有一組有不大於 5 個控制點。不能有一組只有不大於 4 個控制點是很顯然的，如果這種情況發生，則另一組 Q_3 的每一個點都最多與三個控制點相鄰，又依據鴿籠原理，在該組中必定有一個 Q_3 有不大於 1 個控制點，該 Q_3 必定無法被完全控制。

因而能夠不失一般性，假設一組(A,D,G,F)有恰好五個控制點，且 A,D,G,F 分別有 1,2,1,1 個控制點，表示爲 $(a, d, g, f) = (1, 2, 1, 1)$ ，則剩下的六個點分布在 B,C,E,H 四點中，可能的情況可分爲兩種：1,1,1,3 或 1,1,2,2。

- (1) 若 B,C,E,H 有 1,1,1,3 個的話，可能的情況分爲兩種： $(b, c, e, h) = (1, 1, 1, 3)$ or $(b, c, e, h) = (1, 1, 3, 1)$ ，其餘的皆可經由翻轉得出。

- (1.1) 在 $(b, c, e, h) = (1, 1, 1, 3)$ 的情況下，由於 E 上面只有一個控制點，且與之相鄰的 A,G,F 合計共有三個控制點，所以 E 點上必定會有剩下。

- (1.2) 若 $(b, c, e, h) = (1, 1, 3, 1)$ 的話，由於 B,C 兩點都是恰好被蓋完，即控制點不重複控制，在這樣的條件下，D 上面的兩個控制點就會有所限制。圖十三爲每一個 Q_3 的放大圖，若 D 點的 2 個控制點的距離等於 3，（如 G' 和 B'）的位置，則無法完全控制 B 上的每一個點，所以只能限制在相對或是相鄰的位置。若放在相對 G',F' 兩點，則 C 和 B 上面



圖十三 Q_3 的放大圖

的控制點只能放在 A'或是 D'兩點，此時若一放 A'，一放 D'，則所剩下的點分別為 D',H' 和 A',E'，兩者之間沒有交集，又兩者一定要被 A 各蓋掉一個才可能蓋完，所以 C 和 B 上面的兩控制點必定放在相同的位置。反之，若 D 的兩個控制點放在相鄰 G',H'兩點，則 C 和 B 上面的控制點只能放在 A'或 B'兩點，若一放 A'，一放 B'，則剩下來的點分別為 D',F' 和 C',E'，兩者之間沒有交集，必定會有剩。所以可得出一個結論：C 和 B 上的控制點分布位置相同 (結論 2)。由結論 2 得知，C 和 B 上的控制點分布相同，又同時被 A,D 所蓋，所以 G 和 F 上面的控制點分布位置也會相同，則 H 上必定會有剩下。

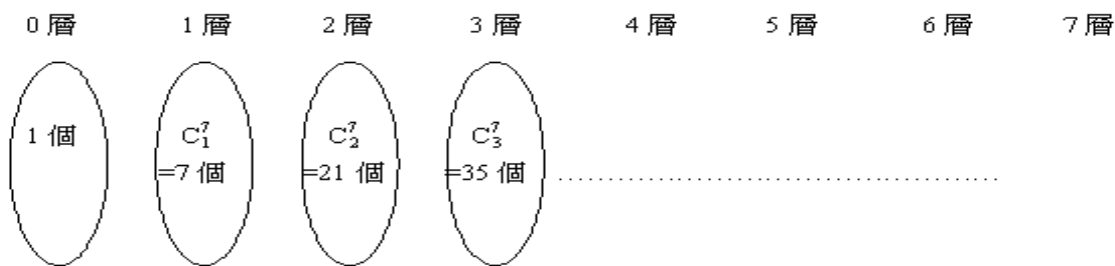
由討論(1.1)和(1.2)得出情況(1)不可能實現 (結論 3)。

(2) 若 B,C,E,H 有 1,1,2,2 個點，則可不失一般性地假設 $(b,c,e,h)=(1,1,2,2)$ ，又可由結論 2 得出 B,C 上的控制點分布位置一樣，且 A 上只有一個控制點，E 有兩個，所以 A 上必定會有剩下，因而情況(2)也不可能實現 (結論 4)。

由結論 3 和結論 4 得出情況 II 不可能實現，又由結論 1 得出情況 I 不可能實現，所以， $\gamma(Q_6) > 11$ 。從而 $\gamma(Q_6)=12$ 得證。

(七) Q_7 的最小控制數 $\gamma(Q_7)=16$

已知 Q_7 有 $2^7=128$ 個點，利用我們的層狀圖(如圖十四)：在第 4 層以後點的個數恰與 0~3 層對稱(因 $C_n^m = C_{m-n}^m$)。不失一般性，設 0 上有一個控制點，而第二層是不能放控制點的 (會重覆蓋到第一層)，那麼，第二層的 21 個點 ($C_2^7 = 21$ 個) 必須由第三層的控制點來蓋，第三層的每個點可以連到 3 個第二層的點 ($C_3^2 = 3$) 以及 4 個第四層的點，所以第三層需要 7 個控制點。第三層已有 7 個控制點，剩下 28 個，需要 7 個第四層的控制點來蓋($28/C_3^4=7$)，依此類推，結果列於表一。



圖十四 Q_7 的層狀圖

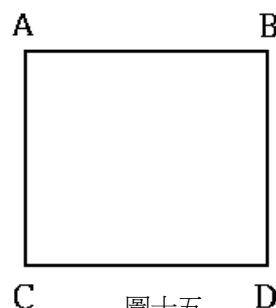
層	0	1	2	3	4	5	6	7
控制個數	1	X	X	7	7	X	X	1

表一

我們知道 $\gamma(Q_7) \geq \frac{2^7}{7+1} = 16$ 。而我們找出的一個點集 $S = \{0, 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356, 1247, 1256, 1346, 1357, 2345, 2367, 4567, 1234567\}$ ，S 共有 16 個點，不難檢驗 S 是 Q_7 的一個控制集，所以 $\gamma(Q_7)=16$ 。我們也可以檢驗 S 中的任兩個點不會控制同一個點，也就是說 Q_7 果真是完美情況。

(八) Q_8 的最小控制數 $30 \leq \gamma(Q_8) \leq 32$

如圖十五，將 Q_8 視為 $Q_6 \square Q_2$ ，圖中每一個點都是一個 Q_6 。設 A 上面有 x 個控制點，由於 A 本身可視為一個 Q_6 ，所以 A 上面會剩下來 $64-7x$ 個點，須由 B、C 來蓋，則有 $B+C \geq 64-7x$ ，設 B、C 上共有 $64-7x+y$ 個控制點，如此 B、C 共會蓋到 D 中 $64-7x+y$ 個點，所以 D 剩下 $64-(64-7x+y) = 7x-y$ 個點，從而 D 上面至少必須放 $(7x-y)/7$ 個控制點，又已假設每一個 Q_6 至少有 x 個控制點，此時四個 Q_6 共有 $64-5x$ ，因此可以得到關係式 $64-5x \leq \gamma(Q_8) \leq 2\gamma(Q_7)=32$ ，經過移項整理可知 $x \geq 7$ ，也就是任一 Q_6 皆含有不少於 7 個控制點，且 $\gamma(Q_8) \geq 29$ 。



圖十五

Q_8 視為 $Q_6 \square Q_2$

若 $\gamma(Q_8) = 29$ ，則四個 Q_6 必定分別有 (7,7,7,8) 個控制點，其中有一個 7 恰與另兩個 7 相鄰，該 Q_6 上面至少會剩下 $64-7 \times 7 - 7 \times 2 = 1$ 個，所以必定 $\gamma(Q_8) \geq 30$ 。又 $\gamma(Q_8) \leq 2\gamma(Q_7) = 32$ ，所以 $30 \leq \gamma(Q_8) \leq 32$ 。

三、在討論 Q_{15} 之前，我們要介紹一種數學遊戲，因為它跟我們的題目有很大的關係。

中國古代有一種兩人的數學遊戲叫做 Nim，就是在 k ($k \geq 3$) 堆物件中，一次至少取一個，至多取一堆，不可跨堆，兩人輪流取，直到最後一個物件誰取誰勝。這種遊戲存在著一些「致勝方案」。在『科克曼女生問題』一書中介紹了必勝法。

先將 k 堆中每堆的個數都轉換成二進位，再用直式相加，定義新的加法： $1+1=0$ 、 $0+1=1$ ，也就是模 2 下的加法。此 k 個數相加之後，若其值為 0，那麼這就是一個致勝點。保持拿完後能變成致勝點，就是必勝法。以三堆個數分別為 2、13、15 及 5、10、11 為例子

(2,13,15) :	(5,10,11) :
2 = 10 ₂	5 = 101 ₂
13 = 1101 ₂	10 = 1010 ₂
15 = 1111 ₂	11 = 1011 ₂
0000	0100

所以，若有三堆，個數分別為 2、13、15 是一個致勝點，而 5、10、11 不是。前一段提到過 S 可做為 Q_7 的一個控制集，不難檢驗 S 中的每一個點也都是致勝點。

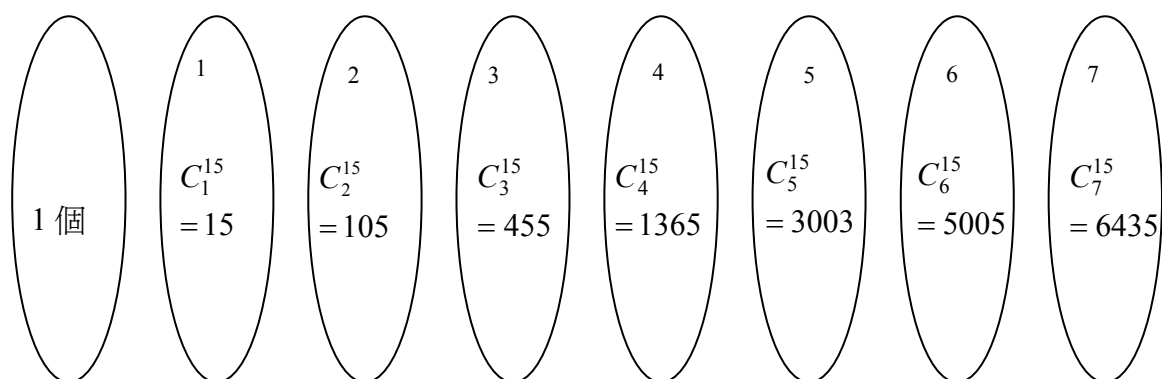
Q_7 的點編號最大到 7，最多也只有 7 個相異數字。因此，我們將不超過 7 堆，每堆個數不同也都不超過 7 個的致勝點找出來，恰好也就是這 16 個點。

因此我們猜想：只要找到每堆最多 15 個且個數都不相同，最多 15 堆的所有致勝點，就可以做為超立方體 Q_{15} 的一個完美控制集，當然也就是最小控制集。

更一般的情況為：當 $n = 2^p - 1$ ，對所有 $k \leq n$ ，找出 Nim 遊戲中，有 k 堆，每堆個數皆不相同且不超過 n 的致勝點，做為 Q_n 的第 k 層的控制點，就可以完全控制 Q_n ，且此控制集為完美控制集，控制點個數為 2^{n-p} 。

四、 Q_{15} 的控制數及其它完美情況的控制數

Q_{15} 一共有 $2^{15}=32768$ 個點，再利用我們的層狀圖，算出每一層的點數，如圖十六。第 k 層的一個點會連到第 $k-1$ 層 k 個點，也會連到第 $k+1$ 層的 $15-k$ 個點，因此我們可以計算出，完美情況下，每一層應該有的控制點個數。結果列於表二。



圖十六 Q_{15} 的層狀圖

層數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
控制點數	1	0	0	35	105	168	280	435	435	280	168	105	35	0	0	1

表二

根據上面所介紹致勝點的定義，我們分別求出，3 堆及 4 堆，每堆個數不同且都不超過 15 個的致勝點，這些致勝點分別落在第三層及第四層。發現第三層有 35 個點，第四層有 105 個點，見表三，跟推論相符合。

三堆的致勝點	$(1,2,3)$ 、 $(1,4,5)$ 、 $(1,6,7)$ 、 $(1,8,9)$ 、 $(1,10,11)$ 、 $(1,12,13)$ 、 $(1,14,15)$ 、 $(2,4,6)$ 、 $(2,5,7)$ 、 $(2,8,10)$ 、 $(2,9,11)$ 、 $(2,12,14)$ 、 $(2,13,15)$ 、 $(3,4,7)$ 、 $(3,5,6)$ 、 $(3,8,11)$ 、 $(3,9,10)$ 、 $(3,12,15)$ 、 $(3,13,14)$ 、 $(4,8,12)$ 、 $(4,9,13)$ 、 $(4,10,14)$ 、 $(4,11,15)$ 、 $(5,8,13)$ 、 $(5,9,12)$ 、 $(5,10,15)$ 、 $(5,11,14)$ 、 $(6,8,14)$ 、 $(6,9,15)$ 、 $(6,10,12)$ 、 $(6,11,13)$ 、 $(7,8,15)$ 、 $(7,9,14)$ 、 $(7,10,13)$ 、 $(7,11,12)$
四堆的致勝點	$(1,2,4,7)$ 、 $(1,2,5,6)$ 、 $(1,2,8,11)$ 、 $(1,2,9,10)$ 、 $(1,2,12,15)$ 、 $(1,2,13,14)$ 、 $(1,3,4,6)$ 、 $(1,3,5,7)$ 、 $(1,3,8,10)$ 、 $(1,3,9,11)$ 、 $(1,3,12,14)$ 、 $(1,3,13,15)$ 、 $(1,4,8,13)$ 、 $(1,4,9,12)$ 、 $(1,4,10,15)$ 、 $(1,4,11,14)$ 、 $(1,5,8,12)$ 、 $(1,5,9,13)$ 、 $(1,5,10,14)$ 、 $(1,5,11,15)$ 、 $(1,6,8,15)$ 、 $(1,6,9,14)$ 、 $(1,6,10,13)$ 、 $(1,6,11,12)$ 、 $(1,7,8,14)$ 、 $(1,7,9,15)$ 、 $(1,7,10,12)$ 、 $(1,7,11,13)$ 、 $(2,3,4,5)$ 、 $(2,3,6,7)$ 、 $(2,3,8,9)$ 、 $(2,3,10,11)$ 、 $(2,3,12,13)$ 、 $(2,3,14,15)$ 、 $(2,4,8,14)$ 、 $(2,4,9,15)$ 、 $(2,4,10,12)$ 、 $(2,4,11,13)$ 、 $(2,5,8,15)$ 、 $(2,5,9,14)$ 、 $(2,5,10,13)$ 、 $(2,5,11,12)$ 、 $(2,6,8,12)$ 、 $(2,6,9,13)$ 、 $(2,6,10,14)$ 、 $(2,6,11,15)$ 、 $(2,7,8,13)$ 、 $(2,7,9,12)$ 、 $(2,7,10,15)$ 、 $(2,7,11,14)$ 、 $(3,4,8,15)$ 、 $(3,4,9,14)$ 、 $(3,4,10,13)$ 、 $(3,4,11,12)$ 、 $(3,5,8,14)$ 、 $(3,5,9,15)$ 、 $(3,5,10,12)$ 、 $(3,5,11,13)$ 、 $(3,6,8,13)$ 、 $(3,6,9,12)$ 、 $(3,6,10,15)$ 、 $(3,6,11,14)$ 、 $(3,7,8,12)$ 、 $(3,7,9,13)$ 、 $(3,7,10,14)$ 、 $(3,7,11,15)$ 、 $(4,5,6,7)$ 、 $(4,5,8,9)$ 、 $(4,5,10,11)$ 、 $(4,5,12,13)$ 、 $(4,5,14,15)$ 、 $(4,6,8,10)$ 、 $(4,6,9,11)$ 、 $(4,6,12,14)$ 、 $(4,6,13,15)$ 、 $(4,7,8,11)$ 、 $(4,7,9,10)$ 、 $(4,7,12,15)$ 、 $(4,7,13,14)$ 、

四堆的致勝點(續)	(5,6,8,11)、(5,6,9,10)、(5,6,12,15)、(5,6,13,14)、(5,7,8,10)、(5,7,9,11)、(5,7,12,14)、(5,7,12,14)、 (5,7,13,15)、(6,7,8,9)、(6,7,10,11)、(6,7,12,13)、(6,7,14,15)、 (8,9,10,11)、(8,9,12,13)、(8,9,14,15)、(8,10,12,14)、(8,10,13,15)、(8,11,12,15)、 (9,10,12,15)、(9,10,13,14)、(9,11,12,14)、(9,11,13,15)、 (10,11,12,13)、(10,11,14,15)、(12,13,14,15)
-----------	--

表三

我們也可以繼續求出 5 堆以上的致勝點，但其個數更多，一一求出後計算總數是否真的為 2048 個，再檢驗這些致勝點是否為 Q_{15} 的一個控制集，這方法雖然可行，卻沒效率，因此我們不打算用這個方法再算下去，而要直接挑戰 $n = 2^p - 1$ 的猜想。

當我們用層狀圖來表示 Q_n 的時候， Q_n 第 k 層的點都是由 k 個相異不大於 n 的數所組成，與位於第 $k \pm 1$ 層與之相鄰的點，必定是由這 k 個數裡面取 $k - 1$ 個數所組成，或是在這 k 個數之中再加上一個不大於 n 的且不同於這 k 個數的正整數所組成。利用這種特性，我們可以說明，若將所有的致勝點當成控制點，會有以下的結果。

- (一) 這些控制點彼此在 Q_n 上面的距離大於 2。也就是任兩個控制點所控制的點都不重覆。
1. 相鄰兩層的控制點不會有邊相連。因為在第 k 層的控制點(致勝點)，轉換成二進位，並在模 2 下做加法，得到的值已經是 0，此時，再多任何一個不為 0 的數，模 2 下相加起來就絕對不會是 0；反之，若再少一個數的話，加起來也絕對不會是 0。因此知道第 k 層的控制點不會連到第 $k \pm 1$ 層的控制點。
 2. 任意兩個第 k 層的控制點，不會控制到同一個第 $k \pm 1$ 層的點。假設有兩個第 k 層的控制點 X 與 Y 蓋到了同一個第 $k+1(k-1)$ 層的非控制點 $A(B)$ 。 $A(B)$ 是由 X 加入(拿走)一個不屬於(屬於) X 也不大於 n 的數 p ， Y 是一個與 $A(B)$ 相連控制點，就是從 $A(B)$ 中拿走(加入)一個數，使得 Y 是一個致勝點，拿走的數必為 p ，故這兩控制點是同一個，與假設矛盾。
 3. 第 $k-1$ 層的控制點，與第 $k+1$ 層的控制點，不會控制同一個第 k 層的點。若第 $k-1$ 層的控制點，與第 $k+1$ 層的控制點控制了第 k 層的同一個點的話，代表則兩控制點相差兩個數，而此兩個數又必須相加為 0，所以這兩個數必相同，得到矛盾。
- (二) 當 $n = 2^p - 1$ 時，由 Nim 致勝點找出的控制點就是 Q_n 的控制集。等同於我們要證明任一個點若不是控制點，則一定會連到某一個控制點。
- 由前面的討論可知，若一個點 x 不是控制點，將其在層狀圖的座標轉成二進位，並在模 2 下做加法，設其結果為一個有 p 位且不為 0 的數 α ，則只要在二進位下加上 α 或減去 α 就可以讓結果為 0。將 α 轉回十進位後得到 a ，為一不大於 n 的數。因此若 x 包含 a 則 x 減去 a 就是一個控制點；若 x 不包含 a 則可以加上 a 也會是一個控制點。所以，控制點以外的點皆與恰一控制點相鄰。
- (三) 當 $n = 2^p - 1$ 時，由 Nim 致勝點找出的控制點就是 Q_n 的控制集，且任兩個控制點所連到的點都不重覆，可以知道這個控制集是完美控制集，恰有 $\frac{2^n}{n+1} = \frac{2^n}{2^p} = 2^{n-p}$ 個點。且已知 $\gamma(Q_n) \geq \frac{2^n}{n+1}$ ，所以有 $\gamma(Q_n) = 2^{n-p}$ 。

陸、結論、心得與展望

1. 對於 n 維超立方體 Q_n ，看成 $Q_{n-i} \square Q_i$ ，且可以用層狀圖來分析。
2. 對於 $n = 1, 2, 3, \dots, 7$ ，得到 $\gamma(Q_1) = 1$ ， $\gamma(Q_2) = \gamma(Q_3) = 2$ ， $\gamma(Q_4) = 4$ ， $\gamma(Q_5) = 7$ ， $\gamma(Q_6) = 12$ ， $\gamma(Q_7) = 16$ 。另外有 $30 \leq \gamma(Q_8) \leq 32$ ，以及對所有的對於其它任意 $n = 2^p - 1 + k, k \leq 2^p$ ，則有 $\frac{2^n}{n+1} \leq \gamma(Q_n) \leq 2^k \gamma(Q_{2^p-1}) = 2^{n-p+k}$ 。
3. 當 $n = 2^p - 1$ 時，抓 k 堆每堆不超過 n 個的致勝點可作為 Q_n 第 k 層的控制點，所有的控制點可作為一個點數恰為 2^{n-p} 的控制集，也就是 $\gamma(Q_n) = 2^{n-p}$ 。

我們接下來要努力的目標是找出非完美情況下 $\gamma(Q_n)$ 的通式。

經過這一年來的研究，我們學到了許多東西，雖然有些是超越我們目前知識範圍的東西，學起來有一些辛苦，卻讓我們獲得了課本以外的事物，更充實了我們的心靈。同時我們要感謝我們的指導老師，他都在最適當的時機給予最適當的協助，幫助我們突破了許多瓶頸。也謝謝所有幫助我們的人。

柒、參考資料

1. 單墀 棋盤上的數學 出版社：九章出版社 出版日期：93.08
2. 教育部 數學小精靈－四次元空間歷險記
3. 羅見今 科克曼女生問題 出版社：九章出版社 出版日期：82.07

【評語】 030413

1. 這是一個相當不容易的問題，不論題材或內容來說，都有相當的難度。
2. 得到的結果很好，特別是當 $n = 2^p - 1$ 時的答案，利用 Nim 的致勝點找出控制點的答案，相當有創見。
3. 作品說明書的撰寫極為精簡，可再加一些補充。例如，列圖論參考書、多說一些圖論用語的定義。
4. 看板中列出的猜想，可寫進說明內。