中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030412

“橋”與“路”

學校名稱：花蓮縣立花崗國民中學

作者：	指導老師：
國二 周炫谷	陳貞泰
國二 李奕瑋	方建華
國二 江恆真	

關鍵詞：　費馬點、最短總路徑、史坦納樹

作品名稱:“橋”與“路”

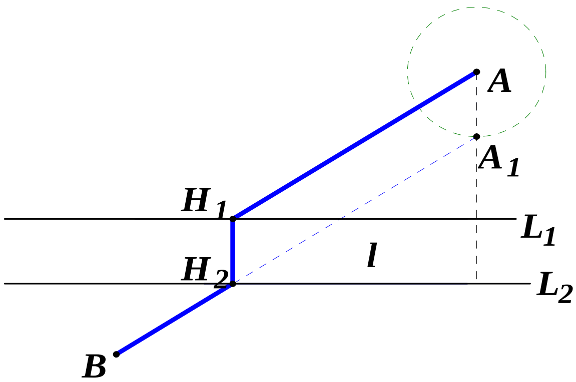
摘要

本文主要是要探討在兩岸平行河流兩側(或同側)的兩個地點間，應在河流的何處造橋，方可達到首要要求(1)造橋經費最省,次要要求(2)各地與各地之間造路經費最省,即以「最短總路徑」建立道路及橋樑之間的聯絡路徑;進而推廣至多地時應於何處造橋與如何構造「最短總路徑」。

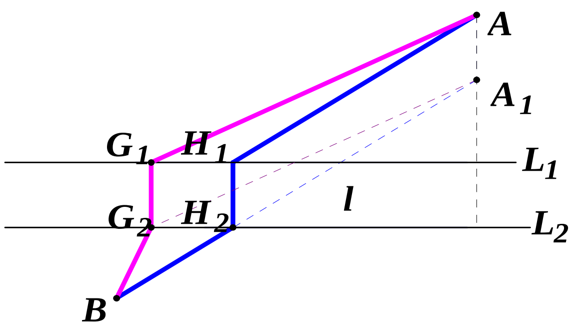
壹、研究動機:

在一次上課中老師提到一個問題:某校在近年因學生就學人數驟增,而擬在校本部隔條兩岸平行的小河建一分校(如圖一~1),又A為校本部大門,B為分校大門,為方便人員的往來,擬建造一座垂直於河面的橋樑,試問該橋樑應建於何處才能最方便人員的往來？我們覺得這個題目非常實用有趣,也試著將這個題型延伸為更多元化(例如:兩岸平行的河流數量,平行河流的交角……等);期望能找到最適當的造橋地點與「最短總路徑」(即經費最省,往來距離最短);以下就是我們的研究過程:

◎研究基本型:



（圖一~1）



（圖一~2）

[作法]:(註:河道兩岸$L_1 // L_2$,河寬為l)(如圖一~1)

1.作$\overrightarrow{AA_1} \perp L_1$,取$\overline{AA_1} = l$　　2.連$\overline{A_1B}$,交L_2於H_2

3.作$\overline{H_2H_1} \perp L_1$,連$\overline{AH_1}, \overline{BH_2}$;則$A \to H_1 \to H_2 \to B$即為所求

[証明]:(如圖一~2)

1.$\because AH_1H_2A_1$為平行四邊形$\therefore \overline{AA_1} = \overline{H_1H_2}, \overline{AH_1} = \overline{A_1H_2}$,

故$A \to H_1 \to H_2 \to B = A \to A_1 \to H_2 \to B$

2.在L_1上,任取一點$G_1(G_1 \neq H_1)$,作$\overline{G_1G_2} // \overline{H_1H_2}$,$\because$ 連$\overline{AG_1}, \overline{BG_2}$

故$A \to G_1 \to G_2 \to B = A \to A_1 \to G_2 \to B$

3.$\because \overline{A_1G_2}, \overline{G_2B}, \overline{A_1B}$為$\Delta A_1G_2B$的三邊$\therefore \overline{A_1G_2} + \overline{G_2B} > \overline{A_1B} = \overline{A_1H_1} + \overline{H_2B}$,

故$A \to G_1 \to G_2 \to B > A \to H_1 \to H_2 \to B$

即$A \to H_1 \to H_2 \to B$為A地至B地的最短總路徑

貳、研究目的:

1.探討兩地位於兩條河岸平行的河流之外側(即異側)時,應於何處造橋與構造「最短總路徑」
2.探討兩地位於多條河岸平行的河流之外側(即異側)時,應於何處造橋與構造「最短總路徑」
3.探討兩地位於兩條河岸平行的河流之同側時,應於何處造橋與構造「最短總路徑」
4.探討多地位於兩條河岸平行的河流之同側時,應於何處造橋與構造「最短總路徑」
5.探討兩地位於兩條河流(河岸平行)交匯交集的相對面時,應於何處造橋與構造「最短總路徑」
6.探討兩地位於多條河岸(河岸平行)交匯交集的相對面時,應於何處造橋與構造「最短總路徑」
7.探討多地位於多條河岸(河岸平行)交匯交集的相對面時,應於何處造橋與構造「最短總路徑」

參、名詞解釋:

＜1＞最短總路徑:可以藉由路徑使任何兩地相通,且相通所有路徑總和最短,稱之「最短總路徑」
＜2＞費馬點(*Fermat Point*):在三角形內部找到一個定點,使此定點到已知三角形三個頂點的距離和為最小時,則此定點就稱之為「費馬點」
＜3＞最小史坦納樹(*Minimal Steiner Tree*):在相異 N 點中 $(N \ge 3)$,連結給出點集的最短網路,稱之為「最小史坦納樹(*Minimal Steiner Tree*)」。而在相異 N 點中,連結給出點集的網路,稱之為「史坦納樹(*Steiner Tree*)」
＜4＞史坦納(*Steiner*)點:在最小史坦納樹上不屬於給出頂點的點,稱為「史坦納(*Steiner Point*)點」(註:三角形中,史坦納點即為費馬點)。而修正後屬於最小史坦納樹的點(含給出頂點的點),我們稱為「新史坦納點(*New Steiner Point*)」。

肆、預備知識:

<1> 若ΔABC為正三角形,O為ΔABC外接圓之圓心,若R為BC弧上之一點,
則$\overline{RB}+\overline{RC}=\overline{RA}$且$\angle BRC=120°$(作法與証明見[附件$A$])

<2> 同底同側兩等頂角之四邊形的四頂點共圓(証明見[附件B])

<3> 若ΔABC分別以三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$往外作正$\Delta ABC'$、正$\Delta A'BC$、正$\Delta ACB'$,
則$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$與$\overleftrightarrow{CC'}$三線必相交於一點(証明見[附件C])

<4> 費馬點定理:在ΔABC中,若$\angle ABC<120°$,$\angle BAC<120°$,$\angle ACB<120°$時,
則必在ΔABC內部存在一點O(費馬點),使得$\angle AOC=\angle BOC=\angle AOB=120°$,
且$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{CO}$為最小值而$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{CO}<\overline{AB}+\overline{BC}$;$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{CO}<\overline{AB}+\overline{AC}$;
$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{CO}<\overline{AC}+\overline{BC}$;(作法與証明見[附件$D$])
<5> 費馬點逆定理:在ΔABC的內部中一點O,若$\angle AOC=\angle BOC=\angle AOB=120°$,且
三角形三內角皆小於$120°$,則$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{CO}$為$\Delta ABC$的內部一點$O$
至三頂點的最短距離和,且O為唯一的一點(作法與証明見[附件E])
<6> 正弦定理:設ΔABC外接圓半徑為R,若$\angle A,\angle B,\angle C$的對邊長分別為$a,b,c$,

$$\text{則}\ \frac{a}{SinA}=\frac{b}{SinB}=\frac{c}{SinC}=2R$$ (証明見[附件F])

伍、準備的器材:直尺、圓規、量角器、軟體 *GSP*

陸、研究過程與方法:

【第一部分】:當河流平行、河岸平行時，橋應建於何處才能使位於河岸兩側的兩地，在互相往來時會有最短路徑(即最短總路徑)。

一、***A*** 地到 ***B*** 地相隔兩條河岸平行的河流時:(即 ***A*** 、***B*** 兩地位於兩條河岸平行的河流的外側)

[作法]:(註:河道兩岸$L_1 // L_2$,河寬爲d_1,河道兩岸$L_3 // L_4$,道路寬爲d_2)(如圖二~1)

1.過A點分作各與河寬等長的垂直線段$\overline{AA_1} = d_1, \overline{A_1A_2} = d_2$

2.連$\overline{A_2B}$,交L_4於H_4,作$\overline{H_4H_3} \perp L_3$於$H_3$　　3.連$\overline{H_3A_1}$,交L_2於H_2,作$\overline{H_2H_1} \perp L_1$於$H_1$

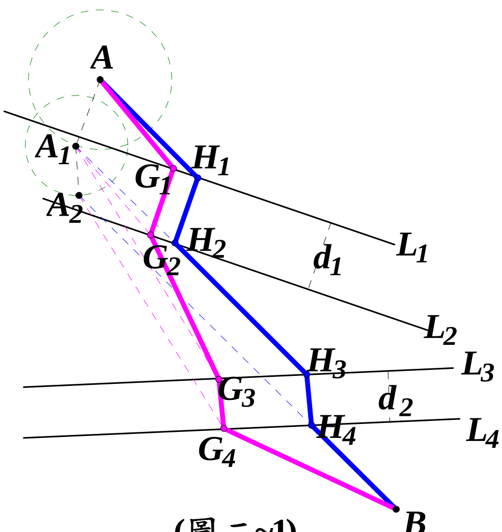
4.連$\overline{AH_1}$,則$A \to H_1 \to H_2 \to H_3 \to H_4 \to B$即爲所求

[証明]:(如圖二~1)

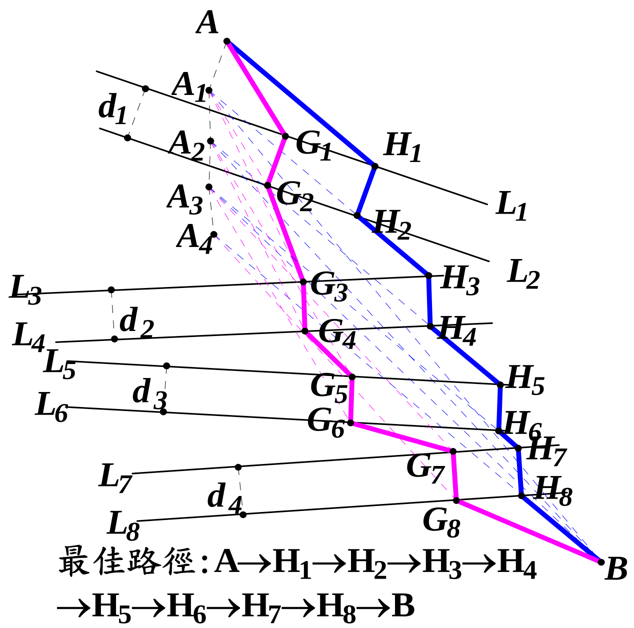
1.在L_1上,任取一點$G_1(G_1 \neq H_1)$,在L_3上,任取一點$G_3(G_3 \neq H_3)$,作$\overline{G_1G_2} // \overline{H_1H_2}$,
$\overline{G_3G_4} // \overline{H_3H_4}$,連$\overline{AG_1}, \overline{G_2G_3}, \overline{BG_4}, \overline{A_1G_2}, \overline{A_1G_3}, \overline{A_2G_4}$

2.$\because AH_1H_2A_1$、$AG_1G_2A_1$、$A_1H_3H_4A_2$、$A_1G_3G_4A_2$皆爲平行四邊形
$\therefore \overline{AA_1} = \overline{H_1H_2} = \overline{G_1G_2}, \overline{A_1A_2} = \overline{H_3H_4} = \overline{G_3G_4}, \overline{AG_1} = \overline{A_1G_2}, \overline{AH_1} = \overline{A_1H_2}$,
$\overline{A_1G_3} = \overline{A_2G_4}, \overline{A_1H_3} = \overline{A_2H_4}$,故$\overline{AH_1} + \overline{H_2H_3} = \overline{A_1H_3}, \overline{A_1H_3} + \overline{BH_4} = \overline{A_2B}$

3.$\because \overline{A_1G_2}, \overline{G_2G_3}, \overline{A_1G_3}$與$\overline{A_2G_4}, \overline{BG_4}, \overline{A_2B}$爲$\Delta A_1G_2G_3$與$\Delta A_2BG_4$的三邊
$\therefore \overline{A_1G_2} + \overline{G_2G_3} > \overline{A_1G_3}, \overline{A_2G_4} + \overline{BG_4} > \overline{A_2B}$,
故$\overline{AG_1} + \overline{G_1G_2} + \overline{G_2G_3} + \overline{G_3G_4} + \overline{BG_4} > \overline{AH_1} + \overline{H_1H_2} + \overline{H_2H_3} + \overline{H_3H_4} + \overline{BH_4}$
即$A \to H_1 \to H_2 \to H_3 \to H_4 \to B$爲最短總路徑



(圖二~1)



(圖二~2)

註:用(圖二~1)的方法可以解決 ***A***、***B*** 兩地位之間有若干條河岸平行的河流的問題,現僅以四條河流爲例([作法]與[証明]如(圖二~1)上,故省略;而圖形如(圖二~2))

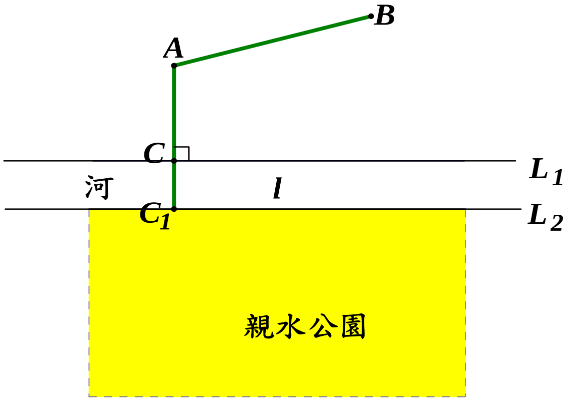
【第二部分】:當河流平行、河岸平行時，橋應建於何處才能使位於河岸同側的兩地、三地、四地、五地、⋯、N 地至橋的總距離最短(即最短總路徑)。

一、A 地與 B 地位於兩岸平行的河流同側時:

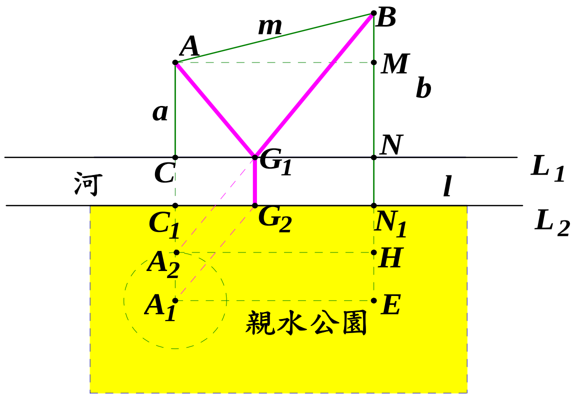
[例如]:(圖四~1)A、B 兩地位於河岸平行的河流 l 的同側,今欲在河流 l 上造一橋,以方便 A、B 兩地的居民到河流 l 對岸的親水公園休憩,並使造橋經費最省且 A、B 兩地到親水公園造路費用最省(即造路經費最省)(亦即最短總路徑)。

[分析一]:最初我們以爲 A、B 兩地位於河岸平行的河流 l 的同側的作法,也可依據“對稱軸”與“兩點之間以直線距離爲最短” “垂直距離最短”的觀念,而只須比較:

$\overline{AB}+\overline{AC}$(註 : $\overline{AC}\perp L_1$)(如圖四 ~ 1) 與仿【研究 1】作法所得的 $\overline{AG_1}+\overline{BG_1}$(如圖四 ~ 2) 之大小,就可找出符合題意的搭橋位置與道路。



(圖四~1)



(圖四~2)

[討論與比較]:(如圖四~2)因 A、B 爲定點,L_1 爲定直線,所以設從 A、B 到 L_1 的距離分別爲

$\overline{AC}=a,\overline{BN}=b,$ 又設 $\overline{AB}=m(a,b,m$ 均爲正數$,a\le b)$, 作 $\overline{AM}\,//\,L_1$, 交 $\overline{BN}$ 於 M; 則 $\overline{BM}=b-a,$

$$\overline{AM}=\overline{A_2H}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{m^2-(b-a)^2},\ \overline{BH}=a+b,$$

$$\therefore\ \overline{A_2B}=\sqrt{(\sqrt{m^2-(b-a)^2})^2+(a+b)^2}=\sqrt{m^2+4ab}=\overline{AG_1}+\overline{BG_1};\text{又}\ \overline{AB}+\overline{AC}=m+a;$$

設 $s_1=\overline{A_2B}(=\sqrt{m^2+4ab}),\ s_2=\overline{AB}+\overline{AC}(=m+a)$; 比較 s_1 與 s_2 之大小:

(1)若 $a<b$, 且 (i) 當 $m>2b-\dfrac{a}{2}$ 時, $\because m>2b-\dfrac{a}{2}\Rightarrow 2m>4b-a\Rightarrow 2am>4ab-a^2$

$$\Rightarrow m^2+2am+a^2>m^2+4ab\Rightarrow\sqrt{m^2+2am+a^2}>\sqrt{m^2+4ab}$$

$$\Rightarrow m+a>\sqrt{m^2+4ab}\Rightarrow s_1<s_2;$$

同理 : (ii) 當 $m=2b-\dfrac{a}{2}$ 時, 則 $s_1=s_2$; (iii) 當 $m<2b-\dfrac{a}{2}$ 時, 則 $s_1>s_2$

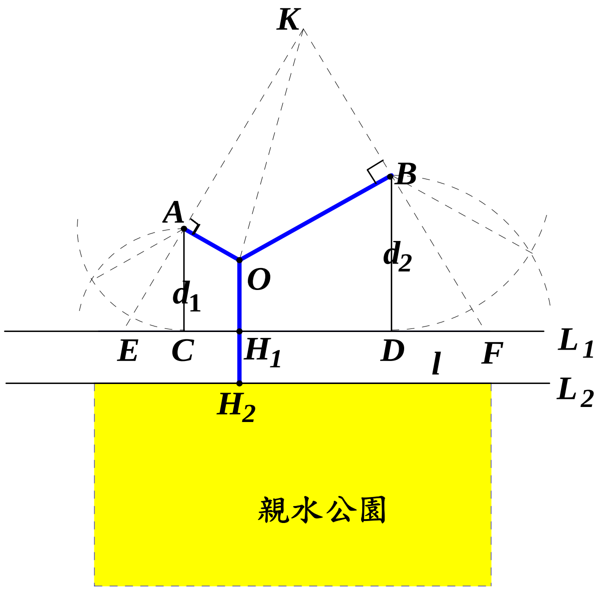
(2)若 $a=b$, 且 (i) 當 $m>\dfrac{3a}{2}$ 時, $\because m>\dfrac{3a}{2}\Rightarrow 2m>3a\Rightarrow 2am>3a^2$

$$\Rightarrow m^2+2am+a^2>m^2+4a^2\Rightarrow\sqrt{m^2+2am+a^2}>\sqrt{m^2+4a^2}$$

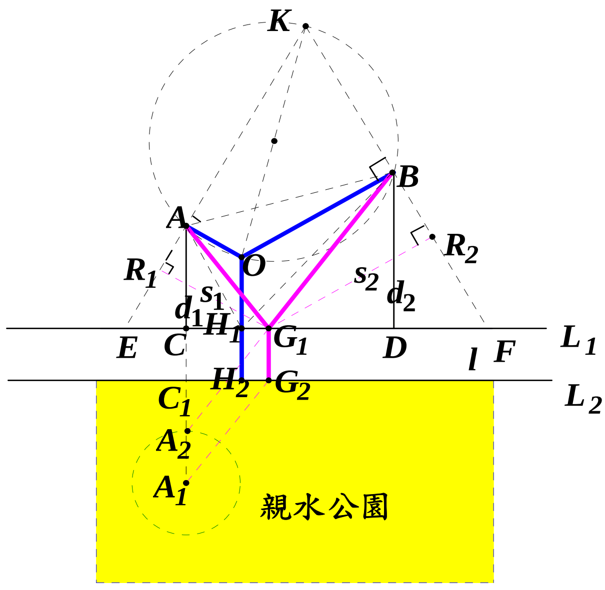
$$\Rightarrow m+a>\sqrt{m^2+4a^2}\Rightarrow s_1<s_2;$$

同理 : (ii) 當 $m=\dfrac{3a}{2}$ 時, 則 $s_1=s_2$; (iii) 當 $m<\dfrac{3a}{2}$ 時, 則 $s_1>s_2$

[分析二]:在我們再次看清題意與思考之後,我們發現:橋樑是一定要垂直搭於河上(造橋經費最省),而道路鋪設的方案應是多種多樣的,如果能使 A、B 兩地到親水公園的道路中,有某段道路重疊使用,不就可以使 A、B 兩地到親水公園的總路徑更短,且也減少了造路的費用嗎?因此[分析一]中的[討論與比較]所得的路徑一定不是最短總路徑,不過它卻可當作 A 地與 B 地位於兩岸平行的河流同側且路徑不可重覆使用時,求得最短總路徑的方法。又因橋樑是一定要垂直搭於河上,因此我們可將橋與河岸 L_1 的交點,視為一點 H_1,透過[費馬點逆定理]找尋出費馬點(即史坦納點)的方法,而找到了造橋的最佳位置與最短總路徑;以下就是我們的[作法]與[證明]及[討論]:



(圖四~3)



(圖四~4)

[作法]:1.設地點A、B至L_1的距離分別為$\overline{AC}=d_1,\overline{BD}=d_2(d_1<d_2)$(如圖四~3)

2.過地點A、B分別作$\overleftrightarrow{EK}$與$\overleftrightarrow{FK}$,使$\angle EAC=\angle FBD=30°$,且$\overleftrightarrow{EK}$與$\overleftrightarrow{FK}$交於$K$,分別交$L_1$於$E$、$F$,則$\Delta KEF$為等邊三角形

3.分別過A、B作$\overleftrightarrow{EK}$與$\overleftrightarrow{FK}$的垂線交於O(費馬點即史坦納點),過O作$\overline{OH_1}\perp L_1$則$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{OH_1}$即為所求。

[証明]:(如圖四~4),

1.連$\overline{AB},\overline{AH_1},\overline{BH_1}$ $\because \angle AKB=60°,\angle EAC=30°,\angle KBA<90° \therefore \angle KAB>30°$

故$\angle BAC<120° \therefore \angle BAH_1<120°$。又因$\angle ABH_1<\frac{1}{2}AOB$弧$=60° \therefore \angle ABH_1<120°$;

2.$\because A$、K、B、O四點共圓,$\angle AKB=60° \therefore \angle AOB=120°$,

又$\because O$為ΔAH_1B內部之一點,$\therefore \angle AH_1B<\angle AOB=120°$

3.$\because \angle EAC=\angle FBD=30°,\angle KAO=\angle KBO=90°,\therefore \angle OAC=\angle OBD=60°$

故$\angle AOB=\angle AOH_1=\angle BOH_1=120°$,即$O$為$\Delta AH_1B$之費馬點(史坦納點)(証明見[附件$E$])

即$\overline{AO}+\overline{OH_1}+\overline{BO}$為最短總路徑

(a).比較$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{OH_1}$與$\overline{CA}+\overline{AB}$之大小:

1.設t=$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{OH_1}$, t_2=$\overline{CA}+\overline{AB}$

2.連$\overline{KO}$, $\because$ ΔAKO與ΔBKO爲直角三角形有公共的外接圓A、O、B、K,且外接圓直徑等於$\overline{OK}$,由三角函數的正弦定理($\overline{OK}$爲ΔABC外接圓直徑, $\dfrac{\overline{AB}}{Sin(\angle AKB)}$=$\overline{OK}$:

(見[附件F])) 有$\overline{AB}$=$\overline{OK}\times Sin60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{OK} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AK}$

又$\because$ ΔAEC爲直角三角形,且$\angle AEC = 60° \therefore \overline{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AE}$;故$t_2 = \overline{CA}+\overline{AB} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AE}$

$+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AK} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\overline{AK}+\overline{AE}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{EK} = h$($h$爲等邊$\Delta KEF$的高),

又$\because$ h=$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{OH_1} = t \therefore t_2 > t$

(b).比較$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{OH_1}$與$\overline{AG_1}+\overline{BG_1}$之大小:(設$t_1 = \overline{AG_1}+\overline{BG_1}$)

1.延長$\overrightarrow{AC}$交L_2於C_1,取$\overline{A_1C_1} = \overline{AC}$, $\overline{A_1A_2} = \overline{CC_1}$, $\therefore \overline{A_2C} = \overline{AC}$;

2.連$\overline{A_2B}$交L_1於G_1,作$\overline{G_1G_2} \perp L_2$,交$L_2$於$G_2$,連$\overline{A_1G_2}$;

$\because \Delta ACG_1 \cong \Delta A_2CG_1$且$A_1A_2G_1G_2$爲平行四邊形

$\therefore \overline{A_1G_2} = \overline{A_2G_1} = \overline{AG_1}$,故$t_1 = \overline{A_1G_2}+\overline{BG_1} = \overline{A_2G_1}+\overline{BG_1} = \overline{AG_1}+\overline{BG_1}$

3.設s_1、s_2分別爲G_1到$\overline{KE}$、$\overline{KF}$的距離,則$\overline{AG_1} > s_1$, $\overline{BG_1} > s_2$

又$\because$ 等邊三角形一邊上之任意一點到其餘兩邊距離之和等於等邊三角形之高(h)

$\therefore t_1 = \overline{AG_1}+\overline{BG_1} \geq s_1 + s_2 = h = t$;

綜合$(a)(b)$得$t = \overline{AO}+\overline{BO}+\overline{OH_1}$爲最短總路徑

[討論]:由[分析二]的[作法]與[証明]中, $\because d_1 < d_2$,顯然地,A點必落於正ΔEFK的$\overline{EK}$上,B點必落於正ΔEFK的$\overleftrightarrow{FK}$上,又因$\angle BAC = 120°$時, $\angle BAK = 30° \therefore \angle ABK = 90°$,故$\overline{BA} \perp \overline{KF}$,即$O$點與$A$點重合(如圖四~5);又$\angle BAC = 150°$時,$B$與$K$重合,$O$落於正$\Delta KEF$外部(如圖四~7);因此我們分$(a)\angle BAC < 120°$ $(b)\angle BAC = 120°$ $(c)120° < \angle BAC < 150°$ $(d)\angle BAC = 150°$ $(e)\angle BAC > 150°$等五種情況討論:

$(a)\angle BAC < 120°$(如圖四~3,圖四~4的[作法]與[証明])

$(b)\angle BAC = 120°$(如圖四~5)

[作法]:1.作$\overline{AC(H_1)} \perp L_1$、$\overline{BD} \perp L_1$,設$\overline{AC(H_1)} = d_1$, $\overline{BD} = d_2$(如圖四~5)

2.過A作$\angle EAC = 30°$,過B作$\angle FBD = 30°$,並使$\overleftrightarrow{EK}$與$\overleftrightarrow{FK}$交於K,則ΔKEF爲等邊三角形

3.連$\overline{BA(O)}$,則$\overline{A(O)B}+\overline{AC(H_1)}$即爲所求。

[証明]:(如圖四 ~ 5)

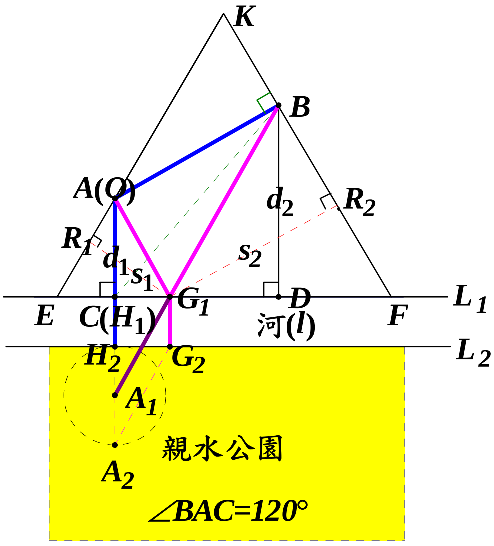
1.延長$\overline{AH_1}$,取$\overline{A_2H_2}=\overline{AC(H_1)}$,$\overline{A_1A_2}=\overline{H_1H_2}$;連$\overline{A_1B}$,交$L_1$於$G_1$,作$\overline{G_1G_2}\perp L_2$,
則$\overline{G_1G_2}=\overline{H_1H_2}$, $A_1A_2G_2G_1$爲平行四邊形,故$\overline{A_2G_2}=\overline{A_1G_1}$, $\overline{AC(H_1)}=\overline{A_1C(H_1)}$

2.設$t_2=\overline{AB}+\overline{AC(H_1)}$,$t_1=\overline{AG_1}+\overline{BG_1}$

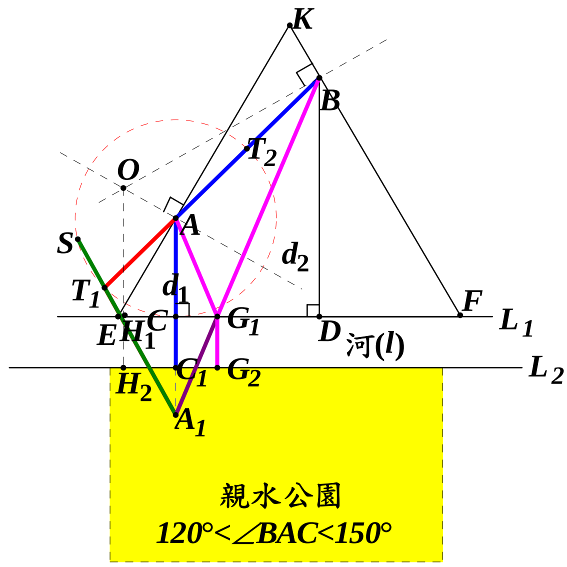
3.$\because \angle C(H_1)AE=30°$, $\angle CAB=120°$, $\therefore \angle KAB=30°$,又$\because \angle K=60°$,
故$\angle KBA=90°$,即$\overline{AB}\perp\overline{BK}$

4.由於正三角形邊上之一點與另兩邊距離和等於一邊之高
$\therefore\ \overline{AB}+\overline{AC(H_1)}=\overline{AB}+d_1=h$(正$\Delta KEF$之高)$=t_2$

5.分別作$\overline{G_1R_1}\perp\overline{EK}$,作$\overline{G_1R_2}\perp\overline{FK}$,且分別交$\overline{EK}$、$\overline{FK}$於$R_1$、$R_2$;並設$\overline{G_1R_1}=s_1$,
$\overline{G_1R_2}=s_2$,且$\overline{G_1R_1}+\overline{G_1R_2}=s_1+s_2=h=t_2$;又$\because \overline{G_1A}>\overline{G_1R}=s_1$;$\overline{G_1B}>\overline{G_2R}=s_2$
$\therefore t_1=\overline{AG_1}+\overline{BG_1}>s_1+s_2=h=\overline{AB}+\overline{AC(H_1)}=t_2$
故$\overline{AG_1}+\overline{BG_1}>\overline{AB}+\overline{AC(H_1)}$,即$\overline{AB}+\overline{AC(H_1)}$爲最短總路徑



(圖四~5)



(圖四~6)

$(c)120°<\angle BAC<150°$(如圖四 ~ 6,其[作法]與圖四 ~ 5同)

[証明]:(如圖四 ~ 6)

1.延長$\overline{AC}$,取$\overline{A_1C}=\overline{AC}$,連$\overline{A_1G_1}$,則$\overline{A_1G_1}=\overline{AG_1}$

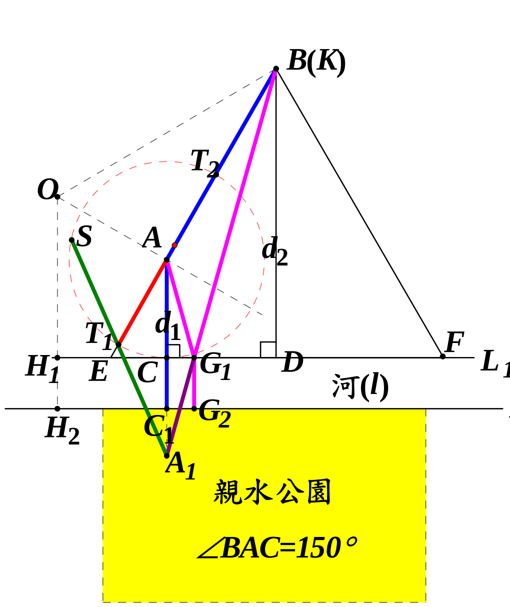
2.以A爲圓心,$\overline{A_1C}$爲半徑,畫圓交$\overline{BA}$於T_1、T_2,則$\overline{T_1T_2}$爲圓A之直徑,
$\overline{AC}=\overline{AT_1}$,連$\overline{A_1T_1}$交圓$A$於$S$,則弧$ST_2<180°\ \therefore \angle ST_1T_2<90°$, $\angle BT_1A_1>90°$
即$\overline{BA_1}>\overline{BT_1}$;$\therefore\ \overline{BG_1}+\overline{A_1G_1}>\overline{BA}+\overline{AT_1}$,故$\overline{BG_1}+\overline{AG_1}>\overline{BA}+\overline{AC}$,

3.$\because \angle BAO>90°\ \therefore\ \overline{BO}>\overline{BA}$,又因$\overline{AO}+\overline{OH_1}>\overline{AH_1}>\overline{AC}$,
故$\overline{BO}+\overline{AO}+\overline{OH_1}>\overline{BA}+\overline{AC}$,

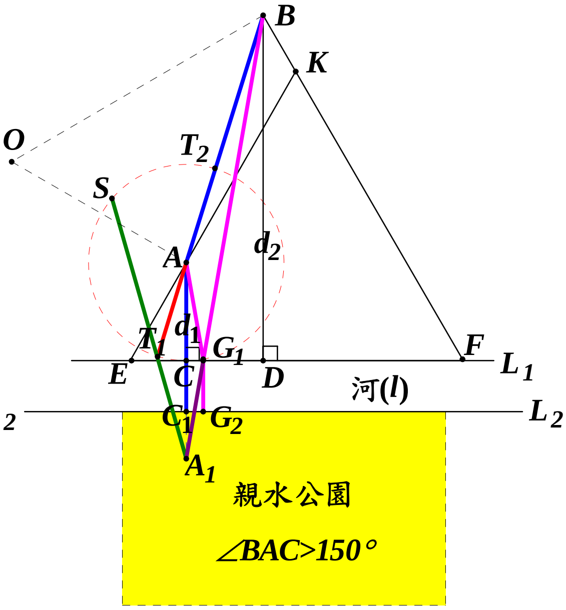
4.綜合2,3得$\overline{AB}+\overline{AC}$爲最短總路徑

$(d)\angle BAC=150°$(如圖四 ~ 7,其[作法]與[証明]同圖四 ~ 6)

$(e)\angle BAC>150°$(如圖四 ~ 8,其[作法]與[証明]亦同圖四 ~ 6)

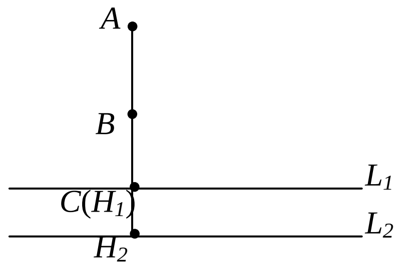


(圖四~7)



(圖四~8)

[小結]:1.當$\overleftrightarrow{AB} \perp L_1$時,則$\overleftrightarrow{AB}$與$L_1$之交點$C(H_1)$爲所搭橋樑之端點,而$\overline{AB}+\overline{BC(H_1)}$爲最短總路徑(最小史坦納樹)(如右圖)



2.若ΔABH_1(H_1在L_1上)三內角皆小於120°,則ΔABH_1之費馬點O(史坦納點)與A、B之連線段及$\overline{OH_1} \perp L_1$的$\overline{OH_1}$之和爲最短總路徑;亦及$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OH_1}$爲最短總路徑($\Delta ABH_1$最小史坦納樹)。且$\angle AOB = \angle AOH_1 = \angle BOH_1 = 120°$

3.若ΔABC(C在L_1上)中有一內角不小於120°(如:$\angle BAC \geq 120°$),則$\overline{AB}+\overline{BC(H_1)}$爲最短總路徑(即最小史坦納樹)。

二、三地 ***A***、***B***、***C*** 位於兩岸平行的河流同側時:

[分析]:若三地 A、B、C 位於兩岸平行的河流同側時,且 C 點與河岸 L_1 的距離最短;則由 A、B、C 三地與 L_1 上橋端點 H_1 等四點所連接的路徑,必不會同時有三條或三條以上的路徑同時匯合於此四點中之任一點,其理由如下:

因 C 點與橋端點 H_1 的距離最短,所以定點 C 必與 H_1 連成一線,而爲最短總路徑中的一部分,又爲達最短總路徑之要求,所以 C 點理應除 $\overline{CH_1}$ 通路外,也爲其餘通路的必經之處,而可能有通路$\overline{BC}$與$\overline{CA}$,故可分成下列兩種狀況:(如下圖)

(狀況一):ΔABC中三內角均小於120°,由[附件G]的証明中,知必可作一路徑

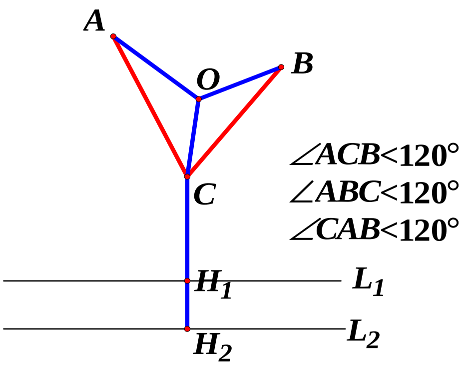
$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{CO}$($O$爲費馬點)(亦爲史坦納點) $< \overline{AC}+\overline{BC}$

故$\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{CH_1}$必不爲最短總路徑

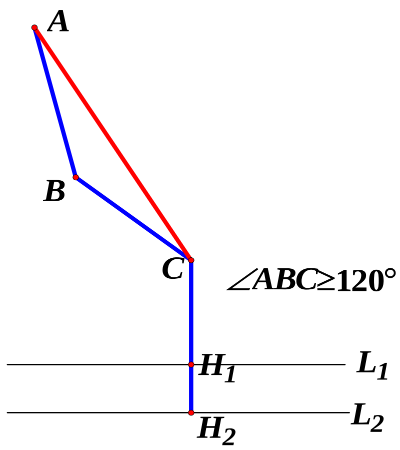
(狀況二):ΔABC中有一內角不小於120°(如$\angle ABC \geq 120°$),由[附件H]的証明中,知$\overline{AB}$

$+\overline{BC}$爲ΔABC中之最短路徑,而非$\overline{AC}+\overline{BC}$;故$\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{CH_1}$必不爲最短總路徑。

綜合(狀況一)與(狀況二),我們得知:$\overline{AC}$、$\overline{BC}$與$\overline{CH_1}$匯合於C點,不符合我們所要求的最短總路徑原則;亦即N邊形的各頂點皆不可能爲三條路徑或三條以上路徑的匯合點。而其[作法]如下:



(狀況一)



(狀況二)

[作法]:(狀況一)

1.連$\overline{AC},\overline{AB},\overline{BC}$;作$\Delta ABC$之費馬點$O$,

2.連$\overline{AO},\overline{BO},\overline{CO}$,作$\overline{CH_1}\perp L_1$,交$L_1$於$H_1$;則$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{CO}+\overline{CH_1}$即爲所求

[作法]:(狀況二)

1.連$\overline{AB},\overline{BC}$,作$\overline{CH_1}\perp L_1$,交$L_1$於$H_1$;則$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CH_1}$即爲所求

[小結]:1.當A,B,C三點共線(C與L_1距離最短),且$\overleftrightarrow{AC}\perp L_1$時,又若$\overleftrightarrow{AC}$與$L_1$之交點$H_1$爲所搭橋樑之端點,則$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑

2.若ΔABC(C與L_1距離最短),三內角皆小於120°,則ΔABC之費馬點O(即史坦納點)與A、B、C之連線段及$\overline{CH_1}\perp L_1$的$\overline{CH_1}$之和爲最短總路徑;

亦即$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑。

3.若ΔABC(C與L_1距離最短)中有一內角不小於120°(如:$\angle ABC\ge 120°$),

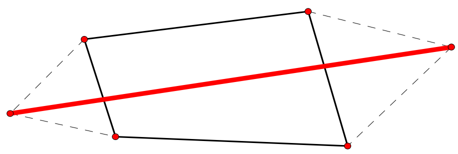
則$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CH_1}$爲最佳路徑

三、四地 ***A***、***B***、***C***、***D*** 位於兩岸平行的河流同側時:

[分析]:若四地 A、B、C、D 位於兩岸平行的河流同側時,且 C 點與河岸 L_1 的距離最短;則由 A、B、C、D 四地中,因 C 點與橋端點 H_1 的距離最短,所以定點 C 必與 H_1 連成一線,形成最短總路徑中的一部分,而剩餘的路徑中只須找出 A、B、C、D 四地中彼此互通的最短路徑,再加上$\overline{CH_1}$,即爲最短總路徑(亦即造路費用最省)。由[附錄]中之長方形史坦納樹的討論中,

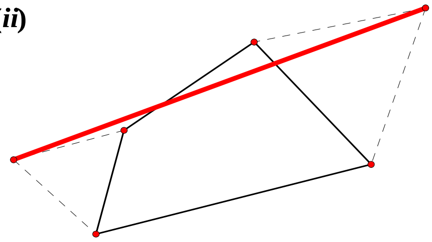
我們得知:每一四邊形都可以作得兩組史坦納樹且每組史坦納樹都有其軸幹,而依其軸幹走向的不同,可分成下列四種情形:(紅色粗線爲軸幹);我們只要對任一四邊形作出其兩組史坦納樹,再比較這兩組史坦納樹連線段總和之大小,取其總和較小者,再加上與河岸距離最短者就可找得最短總路徑。

(*i*)



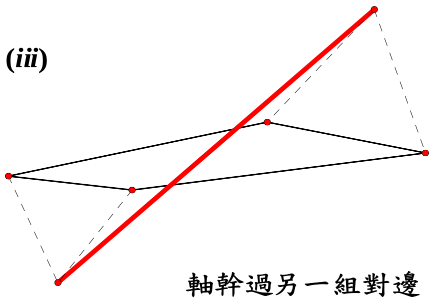
軸幹過對邊

(*ii*)



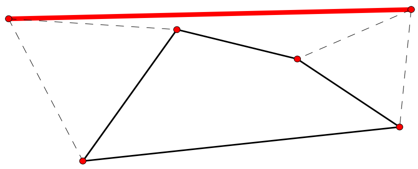
軸幹過一鄰邊一對邊

(*iii*)



軸幹過另一組對邊

(*iv*)



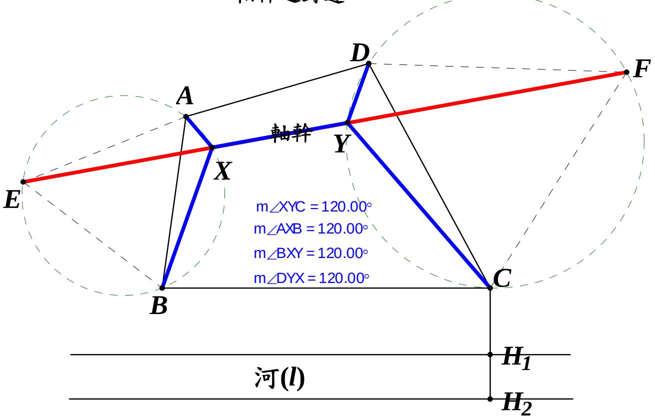
軸幹在四邊形外部

針對上述四種情形,我們分別作了研究與修正,而找出了「最短總路徑」;(註:綠色粗線爲原史坦納樹,藍色粗線爲最小史坦納樹(即爲修正後的史坦納樹))

(*a*) (軸幹過四邊形對邊) **(如圖(*i*))** (軸幹過四邊形對邊)(見[附錄]--正方形史坦納樹)

＊仿(正方形史坦納樹的[作法]與[証明],故省略)

(*i*) 軸幹過對邊



$\Rightarrow \overline{AX}+\overline{BX}+\overline{XY}+\overline{DY}+\overline{CY}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑(最小 史坦納樹)。

(*b*) (如圖(*ii*)) (軸幹過四邊形之相鄰兩邊)

[作法]:1.仿[附錄B]長方形史坦納樹作法,得$\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{XY}+\overline{CY}+\overline{DY}$(如圖($ii$)之左圖)

2.第一次修正($X\rightarrow A$)後,得$\overline{AB}+\overline{AY}+\overline{CY}+\overline{DY}$之路徑(如圖($ii$)之右圖棕 色線)

但$\angle AYC=101.52°$,故作第二次修正($Y\rightarrow Y_1$)(即找出ΔADC的費馬點或史坦納點Y_1)使得$\angle AY_1D=\angle CY_1D=\angle AY_1C=120°$

3.第二次修正後,得$\overline{AB}+\overline{AY_1}+\overline{CY_1}+\overline{DY_1}$爲最短總路徑(如圖($ii$)之右圖藍色線)

[証明]:1.連$\overline{BY}$, $\because$ A爲ΔXBY內部之一點,$\therefore$ $\overline{BA}+\overline{AY}<\overline{BX}+\overline{XY}<\overline{BX}+\overline{XY}+\overline{AX}$,

2.$\because$ Y_1爲ΔADC之費馬點,$\therefore$ $\overline{AY_1}+\overline{DY_1}+\overline{CY_1}<\overline{AY}+\overline{DY}+\overline{CY}$

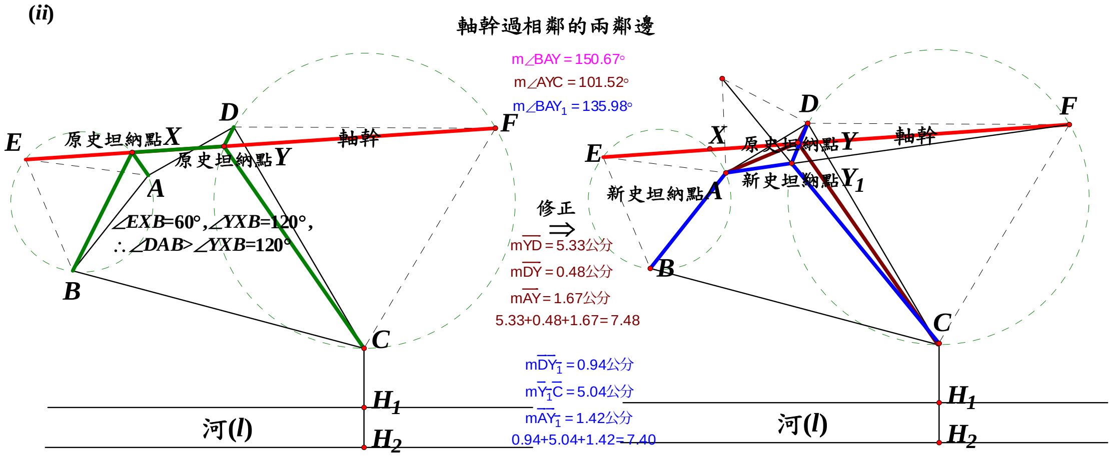
故$\overline{BA}+\overline{AY_1}+\overline{DY_1}+\overline{CY_1}+\overline{CH_1}<\overline{BA}+\overline{AY}+\overline{DY}+\overline{CY}+\overline{CH_1}$

$< \overline{BX}+\overline{XY}+\overline{AX}+\overline{DY}+\overline{CY}+\overline{CH_1}$

即$\overline{BA}+\overline{AY_1}+\overline{DY_1}+\overline{CY_1}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑

[討論]:若原史坦納點(X)落於四邊形的外部,則修正成較靠近X的頂點A爲新史坦納點(亦即原四邊形頂點),再檢驗$\angle AYD,\angle CYD$與$\angle AYC$是否等於120°;若不等於120°,則再修正成$\angle AY_1D=\angle CY_1D=\angle AY_1C=120°$(而$Y_1$爲新史坦納點),如此就可得最短總路徑:$\overline{BA}+\overline{AY_1}+\overline{DY_1}+\overline{CY_1}+\overline{CH_1}$

(ii)



(c) (如圖(*iii*)) (軸幹過另一組對邊) [仿(如圖(*ii*))]

[作法]:1.仿正(長)方形史坦納樹作法,得$\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{XY}+\overline{CY}+\overline{DY}$(如圖(*iii*)之左圖)

2.修正後,得$\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{CD}$爲最佳路徑(如圖(*iii*)之右圖),再加上$\overline{CH_1}$而得最短總路徑:$\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{CD}+\overline{CH_1}$

[証明]:$\overline{BD}$交$\overline{EF}$於O, $\because$ $\overline{AB}=\overline{BE},\overline{FD}=\overline{CD}$,且$B,D$分別爲$\Delta AXO,\Delta CYO$內部之一點,

$\therefore$ $\overline{BA}+\overline{BO}<\overline{AX}+\overline{XO};\overline{OD}+\overline{CD}<\overline{OY}+\overline{CY}$

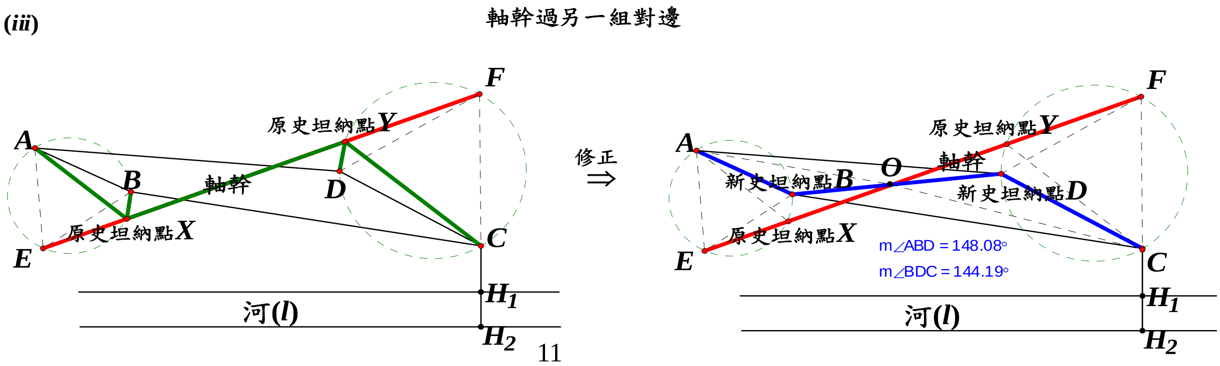
故$\overline{BA}+\overline{BO}+\overline{OD}+\overline{CD}<\overline{AX}+\overline{XO}+\overline{OY}+\overline{CY}<\overline{AX}+\overline{XO}+\overline{OY}+\overline{CY}+\overline{BX}+\overline{DY}$

$\Rightarrow$ $\overline{BA}+\overline{BD}+\overline{CD}<\overline{AX}+\overline{XY}+\overline{CY}+\overline{BX}+\overline{DY}$,

即$\overline{BA}+\overline{BD}+\overline{CD}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑

[討論]:若原史坦納點(X)及原史坦納點(Y)皆位於四邊形的外部,則修正成較靠近原史坦納點的頂點B爲新史坦納點(即四邊形頂點B) 及較靠近原史坦納點的頂點D爲新史坦納點(即四邊形頂點D),再檢驗$\angle CDB$與$\angle ABD$是否不小於120°;若是,則可得最短總路徑:$\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{CD}+\overline{CH_1}$(最小史坦納樹)。

(iii)



(d)(如圖(iv)) (軸幹位於四邊形外部) [仿(如圖(ii))]

[作法]:1.仿正方形史坦納樹作法,得$\overline{CX}+\overline{DX}+\overline{XY}+\overline{AY}+\overline{BY}$(如圖($iv$)之左圖)

2.修正後,得$\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{AB}$爲最佳路徑(如圖($iv$)之右圖),再加上$\overline{CH_1}$而得最短總路徑:$\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{AB}+\overline{CH_1}$

[証明]:1.$\because \Delta ECD$爲正三角形,且C, D, X, E四點共圓

$\therefore \angle EDC=\angle ECD=\angle DEC=60°, \angle DXC=\frac{1}{2}DC$弧$=\angle EDC=60°$

又$\because \angle XDC>\angle EDC \therefore \angle XDC>\angle DXC$,故$\overline{CX}>\overline{CD}$;同理:$\overline{BY}>\overline{AB}$

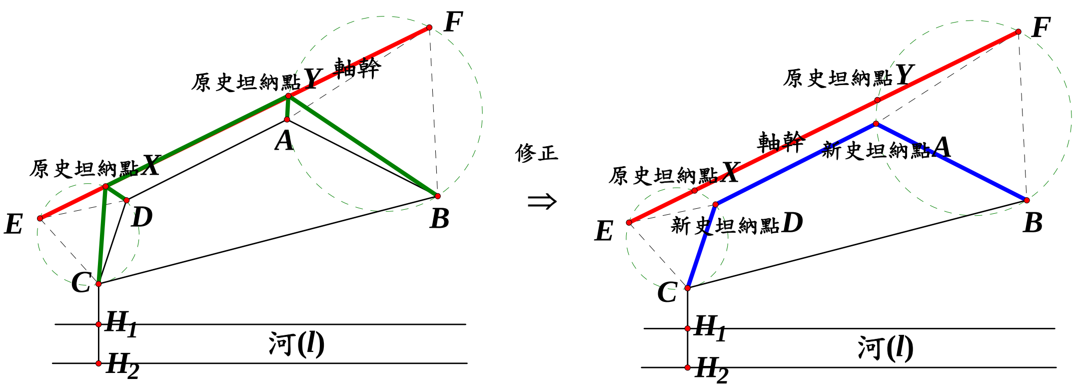
2.在四邊形$ADXY$中,$\overline{DX}+\overline{XY}+\overline{AY}>\overline{AD}$(四邊形中,三邊之和>第四邊),

$\therefore \overline{DX}+\overline{XY}+\overline{AY}+\overline{CX}+\overline{BY}>\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{AB}$(如圖($iv$)之左圖)

故$\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑

[討論]:若原史坦納點(X)及原史坦納點(Y)位於四邊形的外部,則修正成較靠近原史坦納點(X)的頂點D及修正成較靠近原史坦納點(Y)的頂點A,而使D與A爲新史坦納點,再檢驗$\angle CDA$與$\angle BAD$是否不小於120°;若是,則可得最短總路徑:$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{CH_1}$(最小史坦納樹)。

(iv) 軸幹位於四邊形外部



[小結]:1.當A, B, D, C四點共線(C與L_1距離最短),且$\overleftrightarrow{AC}$與L_1之交點H_1爲所搭橋樑之端點,則$\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{CD}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑

2.若軸幹過四邊形的對邊($\overline{AB}$,$\overline{CD}$)時,則作ΔABO與ΔCDO之費馬點(即史坦納點)X與Y,可得最小史坦納樹:$\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{XY}+\overline{CY}+\overline{DY}+\overline{CH_1}$

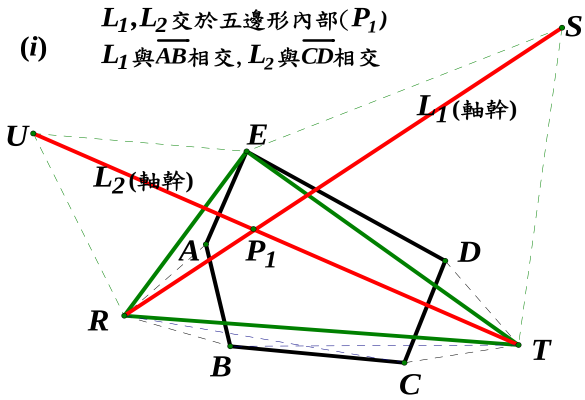
3.若軸幹不同時過四邊形的兩對邊($\overline{AB}$,$\overline{CD}$)時,則所作ΔABO與ΔCDO之費馬點(即原史坦納點)X與Y,會有落於四邊形之外,將四邊形之外的原史坦納點(X或Y),修正成爲最 靠近X或Y之頂點,爲新史坦納點;再檢驗位於四邊形內部史坦納點的相鄰兩通路的夾角是否都爲120°及以四邊形頂點爲新史坦納點的兩通路夾角是否皆不小於120°,若是,則各組中的最小史坦樹即爲確定

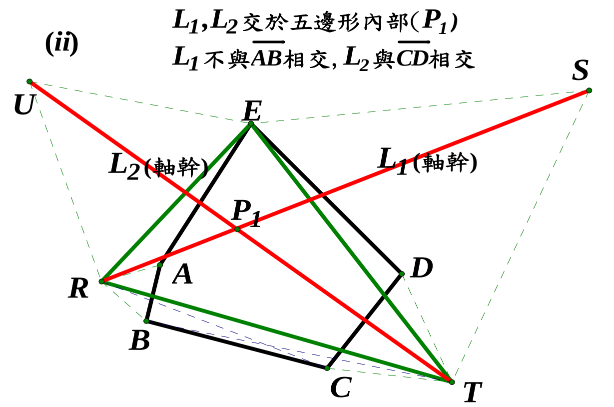
4.比較每一四邊形的兩組史坦納樹的大小,再取其較小者,即得聯結A, B, C, D四地的最短總路徑(最小史坦納樹)。

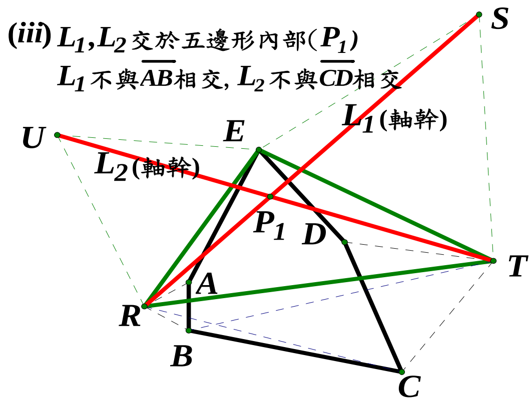
四、五地 **A、B、C、D、E** 位於兩岸平行的河流同側時:

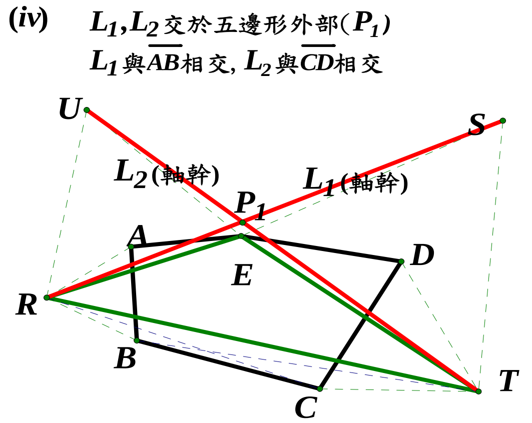
[分析]:與四地 A、B、C、D 位於兩岸平行的河流同側時的分析雷同。設 C 點與河岸 L_1 的距離最短;由[附錄 C]中之正五邊形史坦納樹文獻的[作法]與[証明]中,我們得知:每一五邊形都可以任一組對邊向外作兩個正三角形,再以正三角形的頂點 R 與 T 與夾邊對角頂點 E 而連成一新 ΔERT ,作 ΔERT 的費馬點 P_1(亦即史坦納點)(亦是兩軸幹 L_1, L_2 的交點)。

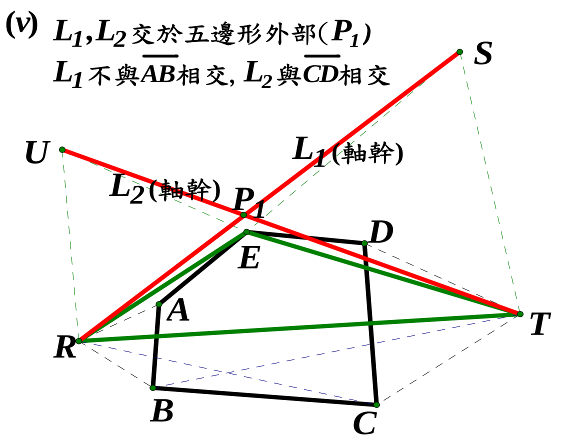
又因當$\angle RET < 120°$時,費馬點(P_1)落於ΔRET內部;而當$\angle RET \geq 120°$時,則P_1落於ΔRET外部或頂點E上,所以P_1可能落於五邊形$ABCDE$的外部、邊上或內部;且因四邊形$TBAE$軸幹L_1(即$\overline{RS}$)與四邊形$RCDE$軸幹L_2(即$\overline{TU}$)走向的不同,而可分成下列六種情形;又因每一五邊形皆有五組不完全相同的對邊,因此我們只要對於任一五邊形的五組不完全相同的對邊做出其五組史坦納樹,再比較此五組史坦納樹之大小,取其路徑總和最小者,再加上與河岸距離最短者,就可找到相異五地的最短總路徑(最小史坦納樹)了。

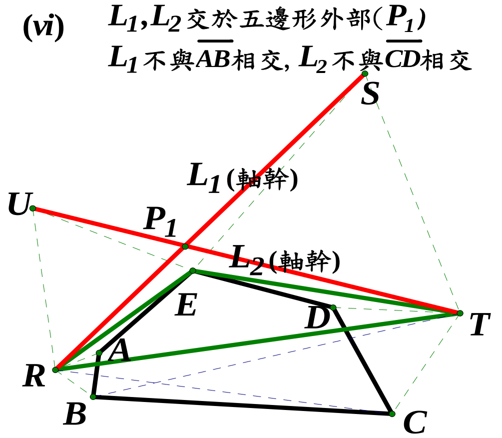










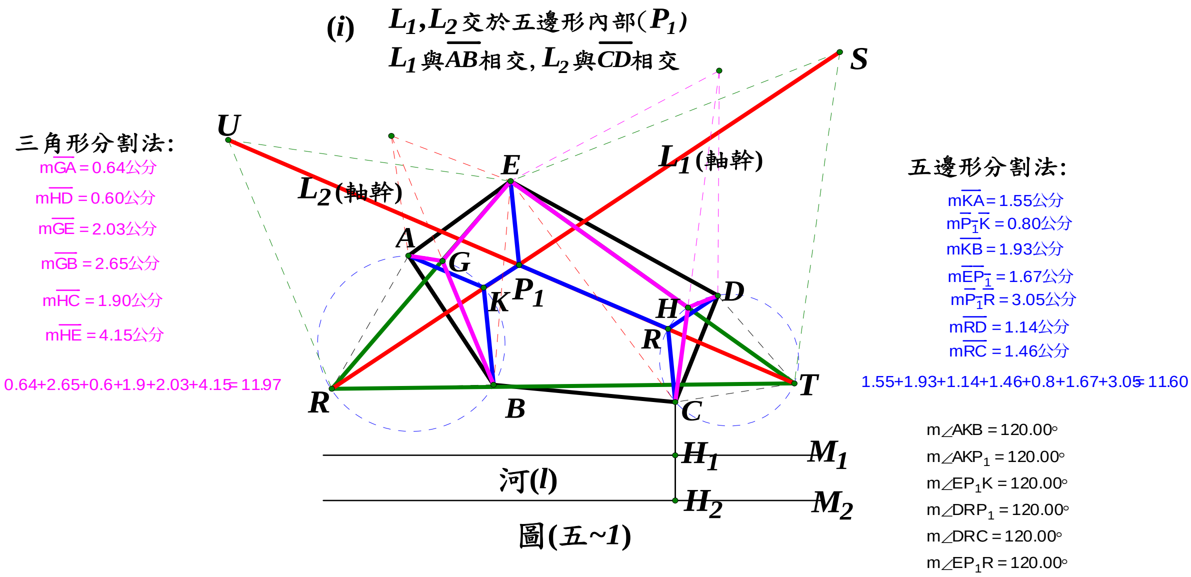


針對上述六種情形,我們分別作了以下的研究與修正,而找出了「最短總路徑」。

(*a*) (兩軸幹交於內部且 L_1 與 $\overline{AB}$ 相交,L_2 與 $\overline{CD}$ 相交) (如圖五~1)

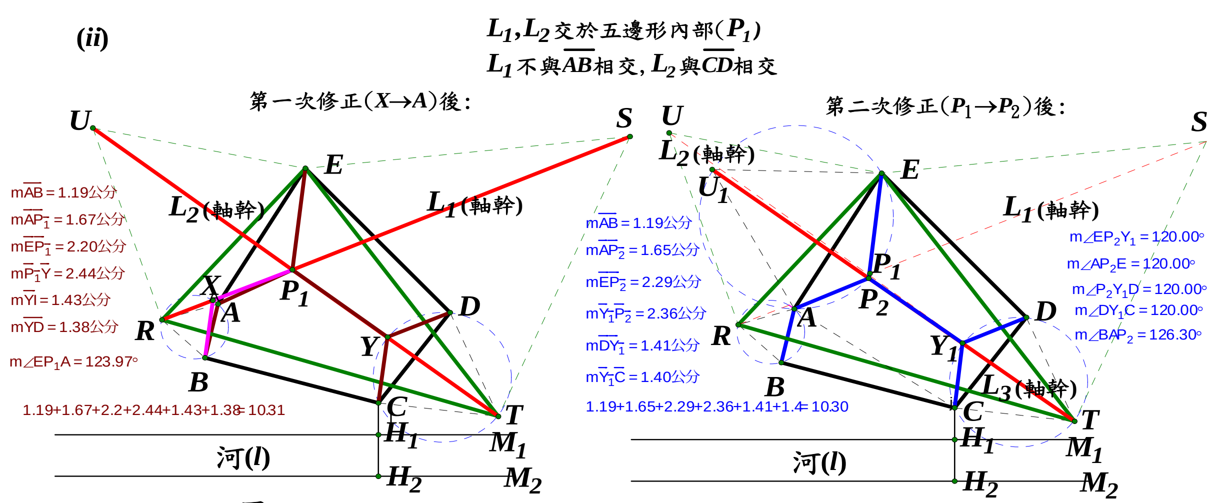
＊仿(正五邊形史坦納樹的[作法]與[証明],故省略) **(見[附錄 *C*]--正五邊形史坦納樹)**

$\Rightarrow \overline{AK}+\overline{BK}+\overline{EP_1}+\overline{P_1R}+\overline{DR}+\overline{CR}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑(最小史坦納樹)



圖(五~1)

(*b*) (兩軸幹交於內部且 L_1 不與 $\overline{AB}$ 相交,L_2 與 $\overline{CD}$ 相交) (如圖五~2.*a*,五~2.*b*) (註:粉紅粗線爲原始線, 棕色粗線爲第一次修正線,深藍粗線爲第二次修正線)



圖(五~2.*a*) 圖(五~2.*b*)

[作法]:1.仿正五邊形史坦納樹作法,得$\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{XP_1}+\overline{EP_1}+\overline{YP_1}+\overline{CY}+\overline{DY}$

2.$\because$ X點落於五邊形$ABCDE$之外部 $\therefore$ 作第一次修正:$X\rightarrow A$,

得$\overline{AB}+\overline{AP_1}+\overline{EP_1}+\overline{YP_1}+\overline{CY}+\overline{DY}+\overline{CH_1}$(如圖(五 ~ 2.*a*))

3.但$\because \angle EP_1A=123.97°\neq 120°$,$\therefore$ 作第二次修正,將$P_1\rightarrow P_2$,$Y\rightarrow Y_1$(P_2,Y_1爲四邊

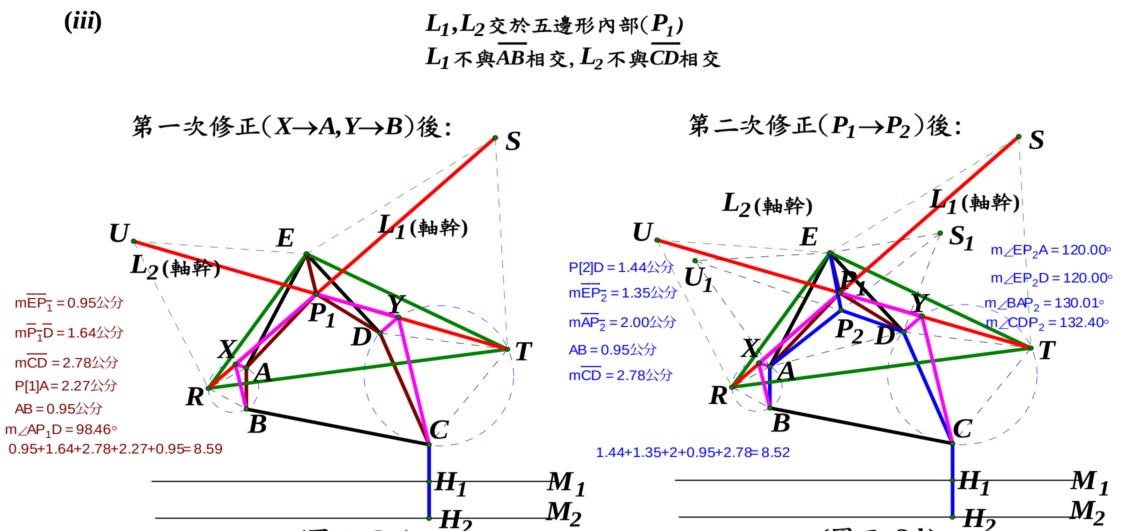
形$ACDE$的史坦納點),得$\overline{AB}+\overline{AP_2}+\overline{EP_2}+\overline{Y_1P_2}+\overline{CY_1}+\overline{DY_1}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑(最小史坦納樹)(如圖(五 ~ 2.$b$))

[証明]:1.連$\overline{BX}$, $\because$ A爲ΔXBP_1內部之一點,$\therefore$ $\overline{BA}+\overline{AP_1}<\overline{BX}+\overline{P_1X}<\overline{BX}+\overline{P_1X}+\overline{AX}$,故$\overline{BA}+\overline{AP_1}+\overline{EP_1}+\overline{P_1Y}+\overline{DY}+\overline{CY}+\overline{CH_1}<\overline{BX}+\overline{P_1X}+\overline{AX}+\overline{EP_1}+\overline{P_1Y}+\overline{DY}+\overline{CY}+\overline{CH_1}$

2.$\because$ P_2, Y_1爲四邊形$ACDE$的史坦納點,$\therefore$ $\overline{AB}+\overline{AP_2}+\overline{EP_2}+\overline{Y_1P_2}+\overline{CY_1}+\overline{DY_1}+\overline{CH_1}<\overline{BA}+\overline{AP_1}+\overline{EP_1}+\overline{P_1Y}+\overline{DY}+\overline{CY}+\overline{CH_1}$,故$\overline{BA}+\overline{AP_1}+\overline{EP_1}+\overline{P_1Y}+\overline{DY}+\overline{CY}+\overline{CH_1}$爲五邊形$ABCDE$的最短總路徑

[討論]:若原史坦納點(X)位於五邊形的外部,則修正成較靠近原史坦納點(X)的頂點A爲新史坦納點(即五邊形頂點A),再檢驗三通路匯合點的兩邊夾角是否爲120°,若不爲120°,則修正爲120°,與及兩通路的夾角是否不小於120°;若是,即可得五邊形$ABCDE$的最短總路徑

(c) (兩軸幹交於內部且 L_1不與$\overline{AB}$相交,L_2不與$\overline{CD}$相交) (如圖五~3.a,五~3.b) (註:粉紅粗線爲原始線,棕色粗線爲第一次修正線,深藍粗線爲第二次修正線) ([作法][証明][討論]同(圖五~2)故省略)



(圖 五~3.a)　(圖 五~3.b)

(d) (兩軸幹交於外部且 L_1與$\overline{AB}$相交,L_2與$\overline{CD}$相交) (如圖五~4) (註:粉紅粗線爲原始線,深藍粗線爲修正線)

[作法]:1.仿正五邊形史坦納樹作法,得$\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{XP_1}+\overline{EP_1}+\overline{YP_1}+\overline{CY}+\overline{DY}$(如圖(五 ~ 4))

2.第一次修正($P_1\rightarrow E$)後,得$\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{EX}+\overline{EP_1}+\overline{EY}+\overline{CY}+\overline{DY}$

但$\because$ $\angle BXE\neq 120°, \angle CYE\neq 120°$

3.連$\overline{BE}$,$\overline{CE}$,分別作ΔABE,ΔCDE之費馬點G, H;而作第二次修正($X\rightarrow G, Y\rightarrow H$)後,得$\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{GE}+\overline{EH}+\overline{DH}+\overline{CH}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑(最小史坦納樹)

[証明]:1.在第一次修正後,$\because$ E爲在ΔP_1XY內部之一點,$\therefore$ $\overline{XE}+\overline{YE}<\overline{XP_1}+\overline{YP_1}+\overline{EP_1}$

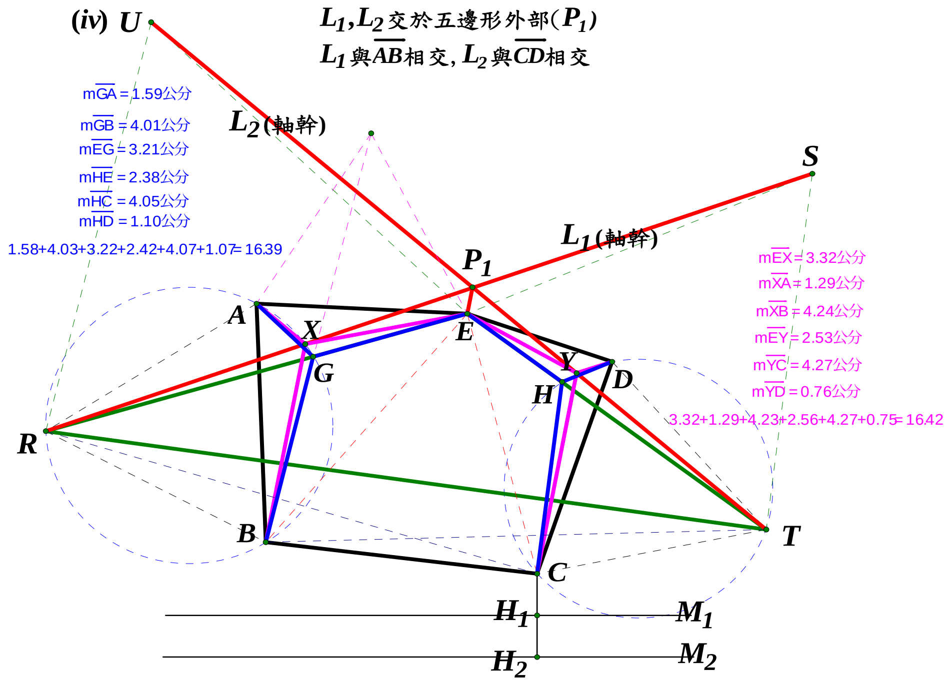
故$\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{XE}+\overline{YE}+\overline{YD}+\overline{YC}<\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{XP_1}+\overline{YP_1}+\overline{EP_1}++\overline{P_1X}+\overline{YD}+\overline{YC}$

2. $\because G, H$ 分別爲 $\Delta ABE, \Delta CDE$ 的費馬點 $\therefore \overline{AG}+\overline{BG}+\overline{GE}<\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{XE}$,

$\overline{EH}+\overline{DH}+\overline{CH}<\overline{EY}+\overline{DY}+\overline{CY}$,

故 $\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{GE}+\overline{EH}+\overline{DH}+\overline{CH}<\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{XE}+\overline{EY}+\overline{DY}+\overline{CY}$,

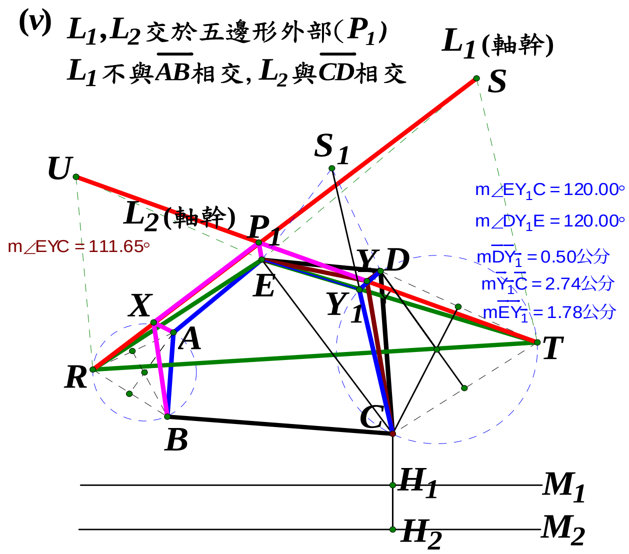
即 $\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{GE}+\overline{EH}+\overline{DH}+\overline{CH}+\overline{CH_1}$ 爲最短總路徑(最小史坦納樹)



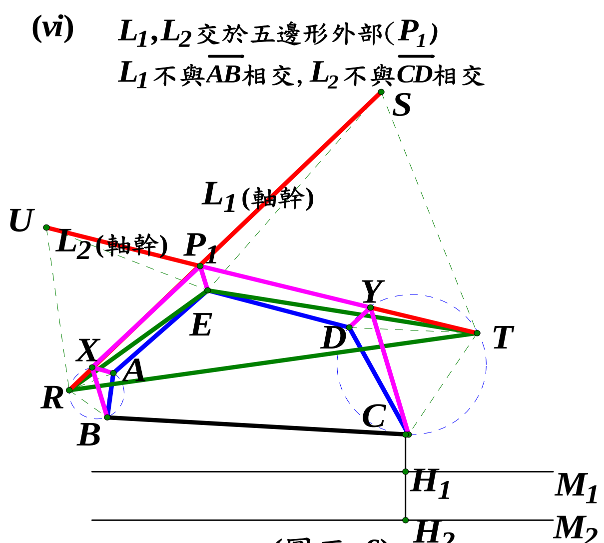
(圖五~4)

***(e)* (兩軸幹交於外部且 L_1 不與 $\overline{AB}$ 相交,L_2 與 $\overline{CD}$ 相交) (如圖五~5) ([作法][証明][討論]同(圖五~2)故省略)(註:粉紅粗線爲原始線，深藍粗線爲修正線)**

***(f)* (兩軸幹交於外部且 L_1 不與 $\overline{AB}$ 相交,L_2 不與 $\overline{CD}$ 相交) (如圖五~6) ([作法][証明][討論]同(圖五~2)故省略)(註:粉紅粗線爲原始線，深藍粗線爲修正線)**



(圖五~5)



(圖五~6)

[小結]:1.當A,B,D,E,C五點依序共線(C與M_1距離最短),且$\overleftrightarrow{AC}$與M_1之交點H_1爲所搭橋樑之端點,

則$\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DE}+\overline{EC}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑

2.若五邊形$ABCDE$中的不相鄰邊($\overline{AB}$,$\overline{CD}$),所作正ΔABR與正ΔCDT的兩頂點R,T與E所形成兩軸幹L_1(即$\overline{RS}$)及L_2(即$\overline{TU}$)分別與$\overline{AB}$及$\overline{CD}$相交,而交點P_1落於ΔETR之內部,

則交點P_1即爲ΔETR之費馬點(即史坦納點),且正ΔABR與正ΔCDT之外接圓分別交$\overline{RS}$及$\overline{TU}$於X,Y;可得史坦納樹:$\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{XP_1}+\overline{EP_1}+\overline{P_1Y}+\overline{DY}+\overline{CY}+\overline{CH_1}$

(即最短總路徑)

3.若五邊形$ABCDE$中的不相鄰邊($\overline{AB}$,$\overline{CD}$),所作正ΔABR與正ΔCDT的兩頂點R,T與E所形成兩軸幹L_1(即$\overline{RS}$)及L_2(即$\overline{TU}$)不完全與$\overline{AB}$及$\overline{CD}$相交(即$\overline{TU}$與$\overline{CD}$相交,而$\overline{RS}$不與$\overline{AB}$相交或$\overline{RS}$與$\overline{AB}$相交,而$\overline{TU}$不與相交$\overline{CD}$)時,則將位於ΔETR之外部的原史坦納點(X或Y或P),修正成爲最靠近原史坦納點之頂點,而成爲新史坦納點, 在檢驗內部史坦納點,的兩邊夾角修正爲$120°$,即可得:新史坦納樹長而爲最短總路徑

4.若五邊形$ABCDE$中的不相鄰邊($\overline{AB}$,$\overline{CD}$),所作正ΔABR與正ΔCDT的兩頂點R,T與E所形成兩軸幹L_1(即$\overline{RS}$)及L_2(即$\overline{TU}$)分別與$\overline{AB}$及$\overline{CD}$相交,而交點P_1落於ΔETR之外部,則找出ΔABE與ΔCDE的費馬點G,H,即可得史坦納樹長:$\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{GE}+\overline{EH}+\overline{HD}+\overline{CH}+\overline{CH_1}$(即最短總路徑)

5.每一五邊形計有的五組史坦納樹,比較其總和的大小,再取其最小者,即得聯結A,B,C,D,E五地的最短總路徑(最小史坦納樹)。

[總結一]:觀察位於河岸同側的兩地、三地、四地、五地至橋的最短總路徑的作法與討論,得知最小史坦納樹具有如下的三基本性質：

1.史坦納樹上的點,只有一條通路時,此點必為多邊形上的頂點

2.史坦納樹上的點,若有兩條通路時,此點必為修正後的新史坦納點也是多邊形上的頂點, 且兩條通路夾角不小於$120°$

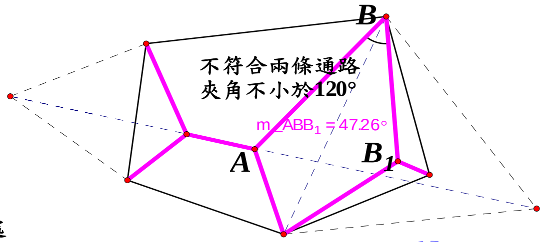
3.每個多邊形內部新史坦納點處的兩邊夾角恰為$120°$

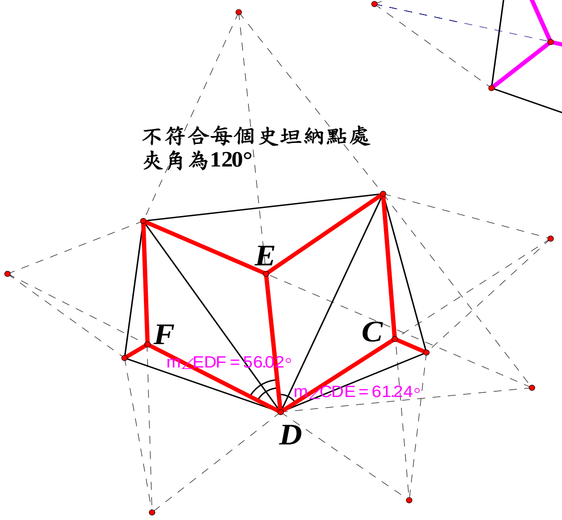
雖然滿足這三個性質的史坦納樹不一定是最小史坦納樹,但只要多邊形所有內部史坦納點處的兩邊夾角恰爲$120°$和多邊形中有兩條通路頂點夾角不小於$120°$的所有連接方式確定後,再比較所有史坦納樹的大小,取其最小者,那麼最小史坦納樹也就隨之確定,而找得最短總路徑。(見「數學傳播」17 卷第四期堵丁柱著--“談談 *Gilbert-Pollak* 猜想的証明”)

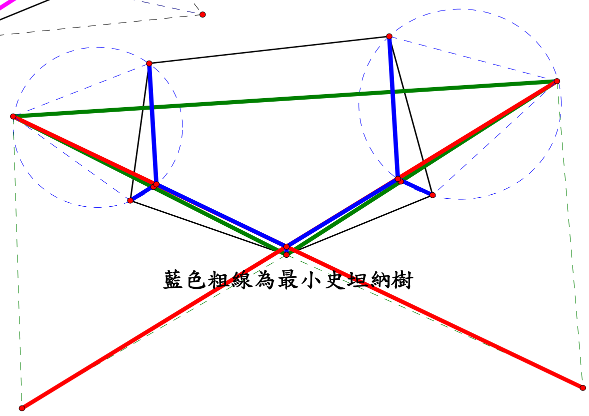
因而我們猜想:

(1)N邊形中,有n個頂點,而有$(n-2)$個史坦納點(含修正後的新史坦納點)

(2)五邊形中,若採三角形分割法(即將五邊形分割成三個三角形)或將五邊形分割成一四邊形一三角形的分割法,所找出的史坦納點與史坦納樹,皆不符合最小史坦納樹的三基本性質(如下圖)

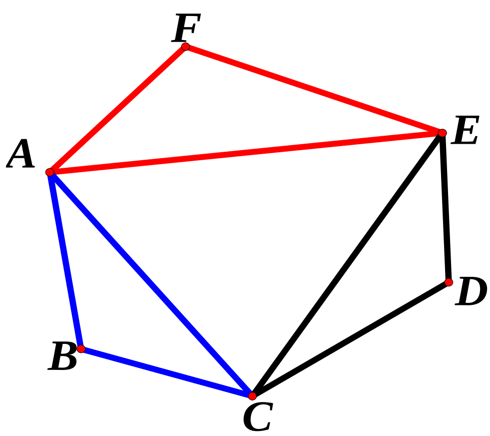


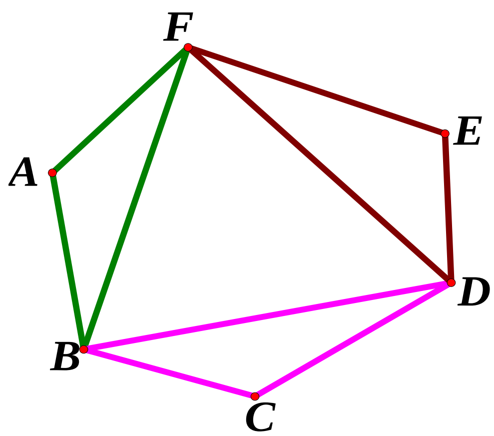




五、六地 ***A***、***B***、***C***、***D***、***E***、***F*** 位於兩岸平行河流的同側時:

[分析]:1.由[總結一],得知構成最小史坦納樹的必要條件。又因六邊形可依「跳隔頂點」的方式(中間隔一頂點的二頂點),分成兩組「三角形群」,而每一「三角形群」各有三個三角形。(如下圖) $(a$組 $: \Delta AEF, \Delta ABC, \Delta CDE; \quad b$組 $: \Delta ABF, \Delta BCD, \Delta DEF)$





又每一三角形都可找得一史坦納點(可能在三角形內部,可能修正後在六邊形頂點),而只要符合史坦納樹的三基本性質,就可找到每個三角形的最小史坦納樹

2.由於每組「三角形群」的都有三個三角形而有三條最小史坦納樹,我們挑出較小的兩條最小史坦納樹,再加上有最長史坦納樹的三角形中較短的六邊形邊,就可得該組「三角形群」中六地互通的最小史坦納樹

3.比較$(a)(b)$兩組中的最小史坦納樹,取其較短者,再加上$\overline{CH_1}$,即為最短總路徑

[作法]:1.連$\overline{AE}, \overline{AC}, \overline{CE}$,各作$\Delta AEF, \Delta ABC, \Delta CDE$的最小史坦納樹[如$(a)$組圖一]

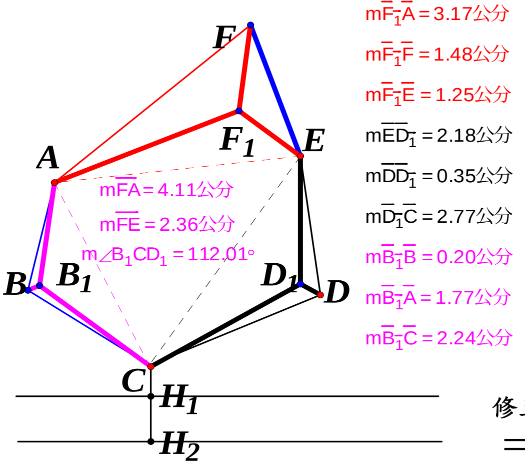
2.比較各組最小史坦納樹的長短($p = \overline{AB_1} + \overline{B_1C} + \overline{BB_1} = 4.21; q = \overline{ED_1} + \overline{D_1C} + \overline{DD_1} = 3.53;$
$r = \overline{AF_1} + \overline{FF_1} + \overline{EF_1} = 5.90$)

3.取較小的兩組最小史坦納樹(即$p=\overline{AB_1}+\overline{B_1C}+\overline{BB_1}=4.21;q=\overline{ED_1}+\overline{D_1C}+\overline{DD_1}=3.53$)

4.檢驗$\angle B_1CD_1=112.01°<120°$;

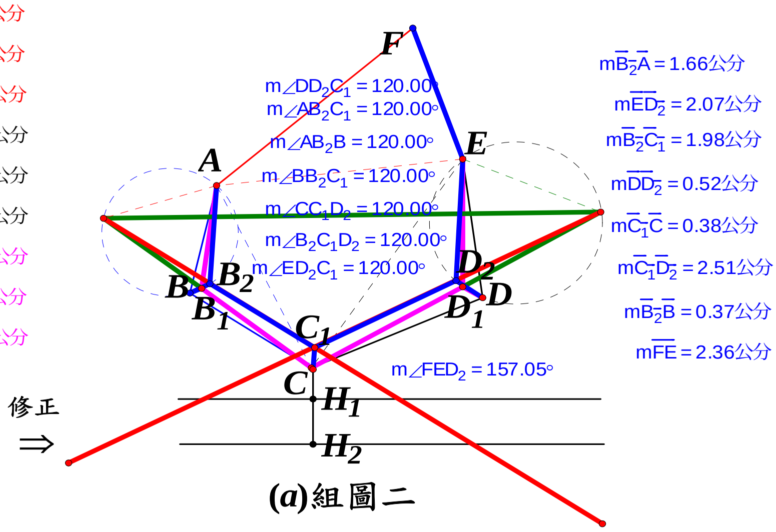
5.$\because \angle B_1CD_1=112.01°<120° \therefore$ 仿五邊形最小史坦納樹的修正作法,得五邊形$ABCDE$的最小 史坦納樹:$\overline{AB_2}+\overline{B_2C_1}+\overline{BB_2}+\overline{CC_1}+\overline{C_1D_2}+\overline{DD_2}$;比較$\overline{FA}=4.11$與$\overline{FE}=2.36$,取較短的$\overline{EF}$;則$\overline{AB_2}+\overline{B_2C_1}+\overline{BB_2}+\overline{CC_1}+\overline{C_1D_2}+\overline{DD_2}+\overline{EF}+\overline{CH_1}$即爲$(a)$組三角形群的最短總路徑[如$(a)$組圖二]

6.續作(b)組三角形群的最短總路徑:$\because \angle FAB=143.62°\geq 120°;\angle BCD=122.21°\geq 120°$; $\angle FED=168.03°\geq 120°$;剔除最長邊$\overline{AF}(=4.41)$,則$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}=11.91$ [如(b)組圖]$>\overline{AB_2}+\overline{B_2C_1}+\overline{BB_2}+\overline{CC_1}+\overline{C_1D_2}+\overline{ED_2}+\overline{EF}+\overline{DD_2}=11.85$;故其最短總路徑爲:$\overline{AB_2}+\overline{B_2C_1}+\overline{BB_2}+\overline{CC_1}+\overline{C_1D_2}+\overline{ED_2}+\overline{EF}+\overline{DD_2}+\overline{CH_1}$[如$(a)$組圖二]



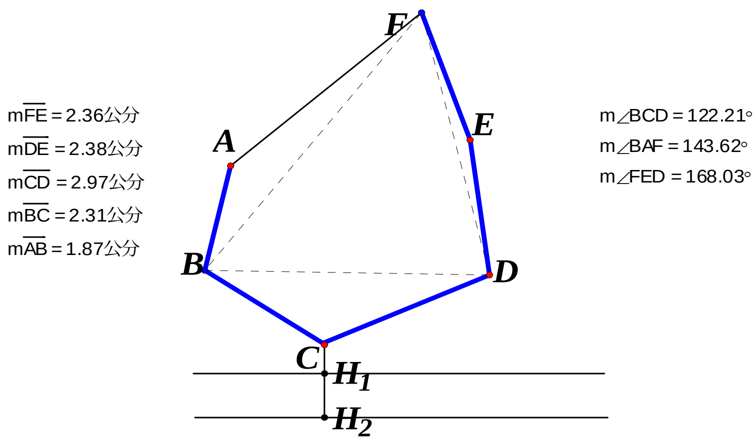
(a)組圖一

最短路徑:2.18+0.35+2.77
+0.20+1.77+2.24+2.36=11.87



(a)組圖二

最短路徑:0.38+2.51+2.36+0.52
+0.37+2.07+1.98+1.66=11.85



(b)組圖

最短路徑:2.38+2.38+2.97+2.31
+1.87=11.91

[小結]:1.當A,B,D,E,F,C六點依序共線(C與M_1距離最短),且$\overleftrightarrow{AC}$與M_1之交點H_1爲所搭橋樑之端點,則$\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FC}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑

2.若A,B,D,E,F,C六點爲正六邊形的六頂點時,則任五等邊和$+\overline{CH_1}$爲最短總路徑

3.除正六邊形外的所有六邊形,皆可依上述的[作法]找得最短總路徑

六、七地 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 位於兩岸平行河流的同側時:

[分析]:1.由於七邊形中除去一邊外,皆可仿照六邊形方式,得到一組由三個三角形所組成的「三角形群」,因此七邊形會有七組不同的「三角形群」。

2.仿照六邊形的[作法],作出每一組「三角形群」內的各個三角形的最小史坦納樹,計算出每一組「三角形群」的三個最小史坦納樹的和

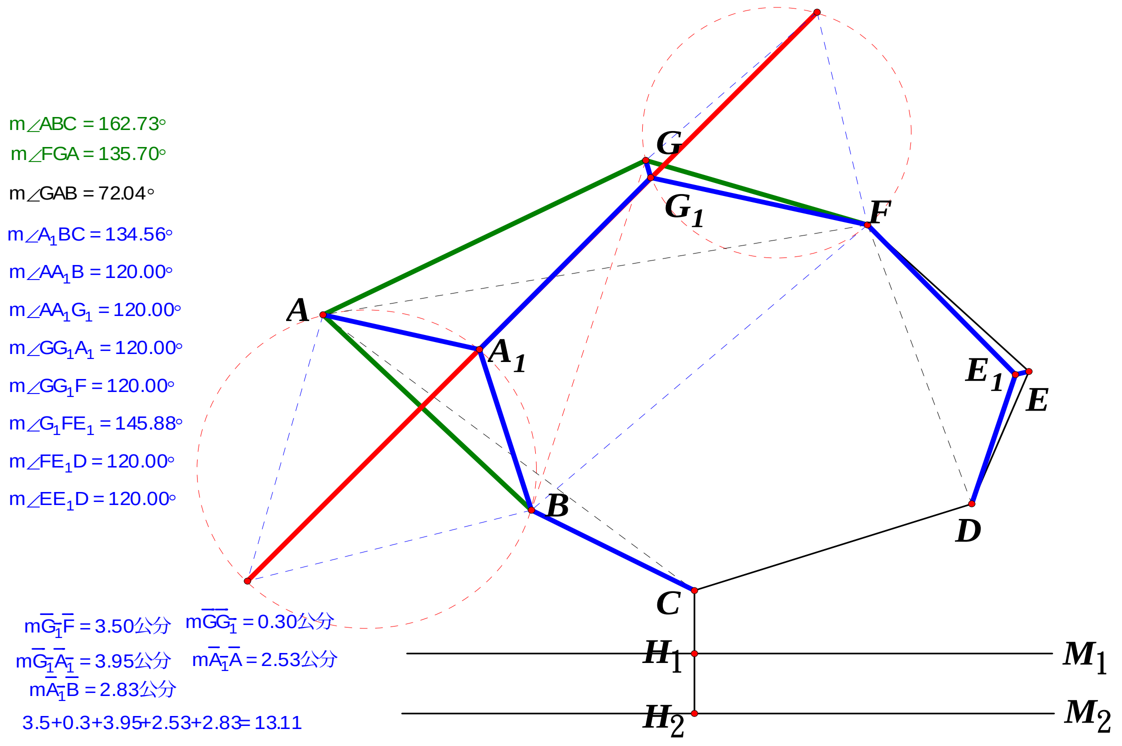
3.再比較七組不同「三角形群」的三個最小史坦納樹的和,取其總和最小者再加上$\overline{CH_1}$,即爲最短總路徑了。

[作法]:1.選定一邊(如下圖中$\overline{CD}$),餘者“跳隔頂點”相連,得由$\Delta ABC,\Delta AGF,\Delta FED$所組成的「三角形群」,各作$\Delta ABC,\Delta AGF,\Delta FED$的最小史坦納樹

2.依最小史坦納樹基本三性質,檢視兩條通路的夾角是否不小於120°(如下圖中$\angle GAB = 72.04 < 120°$,不合);若兩條通路的夾角小於120°,則採四邊形或五邊形的最小史坦納樹作法,將兩條通路夾角小於120°者加以修正,使其符合最小史坦納樹基本三性質

3.重覆選定其餘六邊,作其餘六組「三角形群」的最小史坦納樹和

4.比較此七組不同「三角形群」的最小史坦納樹和的長短,取其最短的史坦納樹和再加上$\overline{CH_1}$,即爲最短總路徑(如下圖:僅以選定$\overline{CD}$邊爲例)



[小結]:1.當A,B,D,E,F,G,C七點依序共線(設C點與M_1距離最短),且$\overleftrightarrow{AC}$與M_1之交點H_1爲所搭橋樑之端點,則$\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GC}+\overline{CH_1}$爲最短總路徑

2.若A,B,C,D,E,F,G七點爲正七邊形的七頂點時,則任六等邊和$+\overline{CH_1}$爲最短 總路徑

3.若七邊形$ABCDEFG$的七內角皆不小於$120°$時,則剔除最長邊外,則其餘 六邊和$+\overline{CH_1}$即爲最短總路徑

4.除了七邊形$ABCDEFG$的七內角皆不小於$120°$時外,否則皆可依上述的[作法]找得最短總路徑

七、N(N≥8)地位於一條兩岸平行河流的同側時:

[小結]:1.若 N ≥8 且爲偶數時,猜想可仿照六邊形作法分成兩組「三角形群」,每組有$\frac{N}{2}$個三角形,各作「三角形群」的最小史坦納樹,再加以修正成符合最小史坦納樹的三基本性質,比較兩組最小史坦納樹,取其較小者

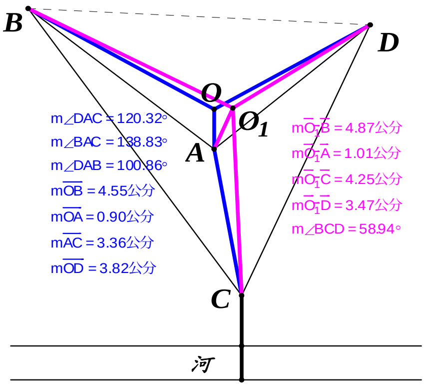
2.若 N ≥8 且爲奇數時,猜想亦可由 N邊形中除去一邊外,得到一組由$\frac{N-1}{2}$個三角形所組成的「三角形群」,作此「三角形群」的最小史坦納樹,再加以修正成符合最小史坦納樹的三基本性質,比較 N組不同「三角形群」的最小史坦納樹,取其最小者

3.若 N 邊形中(N ≥8)且每一內角皆不小於$120°$時,則捨棄最長邊外的其餘(N-1)邊之和,即爲此 N 邊形(N ≥8)的最小史坦納樹。

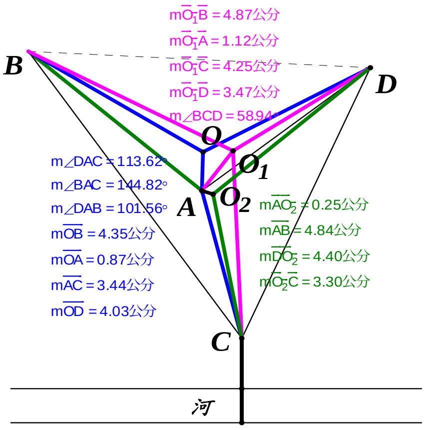
【第三部分】:當一條河流兩岸平行時，橋應建於何處才能使位於河岸同側的四地、五地、…、多地呈單凹角凹多邊形時至橋的總距離最短:

一、四地 A、B、C、D 位於兩岸平行的河流同側且四地呈單凹角四邊形時:

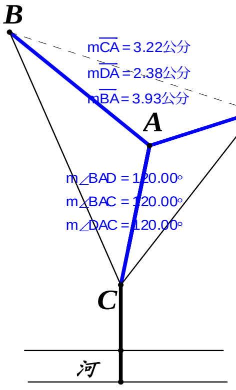
[分析]:若四地 A、B、C、D 位於兩岸平行的河流同側且四地呈單凹角四邊形時,又 C 點與河岸 L_1 的距離最短;則因 $ABCD$ 爲一單凹角四邊形,所以連接兩條對角線可得ΔBCD及ΔBCD內部之$\Delta ABC,\Delta ACD,\Delta ABD$等四種三角形。又因$\Delta ABC,\Delta ACD,\Delta ABD$等三個三角形爲共用凹角頂點 A 的三個三角形;而共用凹角頂點 A 的角度可能爲一角或兩角小於$120°$或三角皆等於$120°$的三個三角形,又由[附件 D]的証明,知“三角形三內角皆小於$120°$之費馬點至三頂點距離之和小於三角形任兩邊之和”所以,我們分下列四種情形討論之。(一).共用凹角頂點 A 的角度只有一角小於$120°$時:則作此三角形之費馬點與三頂點連線段,與ΔBCD所作之費馬點與三頂點連線段(若ΔBCD爲三內角皆小於$120°$之三角形時),加以比較,取其較短者,加上凹四邊形另一頂點與其餘三頂點的最短連線段及 C 點與河岸 L_1 的最短距離,即爲最短總路徑(二).共用凹角頂點 A 的角度有兩個角度小於$120°$時:則作此兩三角形之費馬點與三頂點連線段,與ΔBCD所作之費馬點與三頂點連線段(若ΔBCD爲三內角皆小於$120°$之三角形時),加以比較,取其最短者,加上凹四邊形另一頂點與其餘三頂點的最短連線段及 C 點與河岸 L_1 的最短距離,再比較兩種路徑之長短,取其較短者,即爲最短總路徑(三).共用凹角頂點 A 的角度的三個角皆等於$120°$時:(此時A點爲ΔBCD 之費馬點)則$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AC}$再加上$C$點與河岸$L_1$的距離,即爲最短總路徑。



(圖 *A*)



(圖 *B*)



(圖 *C*)

[作法一]:(如圖 *A*)

1. $\because \angle DAC = 120.32^\circ > 120^\circ, \angle BAC = 138.83^\circ > 120^\circ, \angle BCD = 58.94^\circ < 120^\circ,$

$\angle DAB = 100.86^\circ < 120^\circ,$

$\therefore$ 作ΔABD與ΔBCD之費馬點O與O_1

2. 連$\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{DO}, \overline{AO_1}, \overline{BO_1}, \overline{DO_1}, \overline{AC}$

3. 比較:$\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{DO} + \overline{AC} = 0.90 + 4.55 + 3.82 + 3.36 = 12.63$

$\overline{AO_1} + \overline{BO_1} + \overline{DO_1} + \overline{AC} = 1.01 + 4.87 + 3.47 + 3.36 = 12.71$

$\therefore$ 取$\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{DO} + \overline{AC}$爲其所求

[証明]:(如圖 *A*)

1. $\because \angle DAC = 120.32^\circ > 120^\circ, \angle BAC = 138.83^\circ > 120^\circ, \angle BCD = 58.94^\circ < 120^\circ,$

$\angle DAB = 100.86^\circ < 120^\circ,$

$\therefore$ 可作得之通路有三:

$(i)\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{DO} + \overline{AC}(ii)\overline{AO_1} + \overline{BO_1} + \overline{DO_1} + \overline{AC}(iii)\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AC}$

2. $\because O$爲ΔABD之費馬點, $\therefore \overline{AO} + \overline{BO} + \overline{DO} < \overline{AO_1} + \overline{BO_1} + \overline{DO_1}$(見附件$D$、$E$)

且$\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{DO} < \overline{AB} + \overline{AD}$, 故$\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{DO} + \overline{AC}$合於所求

[作法二]:(如圖 *B*)[証明]:(如圖 *B*)(省略)

[作法三]:(如圖 *C*)

1. $\because \angle DAC = \angle BAC = \angle BAD = 120^\circ$

$\therefore$ 連$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$即爲所求

[証明]:(如圖 *C*)

1. $\because \angle DAC = \angle BAC = \angle BAD = 120^\circ$

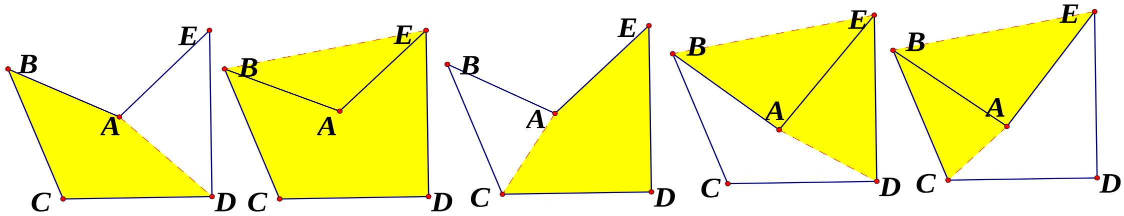
$\therefore A$爲ΔBCD之費馬點,故$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}$爲最短總路徑 ,而合於所求

[討論]:在上述的[分析] [作法] [証明]中,單凹角的凹四邊形所分割成的三個三角形,亦可視爲每依序所連成的三角形與最外圍之三角形所作得的費馬點與三角形三頂點連線段與另一頂點與三頂點中最短連線段之和,取其最短路徑者,而找得最短總路徑。

二、五地 ***A***、***B***、***C***、*D*、*E*位於兩岸平行的河流同側且五地呈單凹角五邊形時:

[分析]:若五地 *A*、*B*、*C*、*D*、*E* 位於兩岸平行的河流同側且五地呈單凹角五邊形時,又 *C* 點與河岸 L_1 的距離最短;我們猜想可仿照上述[討論]而將單凹角五邊形分成如下五種情形:

(i)四邊形$ABCD(ii)$四邊形$BCDE(iii)$四邊形$CDEA(iv)$四邊形$DEAB(v)$四邊形$EABC$等五種情形(剔除凹四邊形者),再仿照[研究二]中四邊形的最小史坦納樹的作法,加上所餘頂點與另四頂點的最短路徑,比較此五種路徑的長短,取其最小者,即爲連通五地的最短總路徑



而至於五地以上的單凹角 N 邊形,我們猜想亦可仿照上述的[分析],將此單凹角 N 邊形分成 N 個凸$(N\text{-}1)$邊形,再比照凸$(N\text{-}1)$邊形作法,找出每個凸$(N\text{-}1)$邊形的最小史坦納樹,加上另一頂點與凸$(N\text{-}1)$邊形頂點的最短路徑,再比較所有 N 條最短路徑的長短後,取得最短路徑者,即可找得單凹角 N 邊形的最短總路徑。

【第四部分】:兩地或多地位於兩條或多條河岸平行河流交匯的交集對面時,應於何處造橋與如何構造「最短總路徑」。(註:多地呈單凹角的凹多邊形時,亦可比照下述方法處理)

一、兩地位於兩條河岸平行河流交匯的交集對面時:

[分析]: 兩地位於兩條河岸平行河流交匯的交集相對面時,爲了達成首要要求造橋經費最省,因此我們先測得兩條河流寬度之和$(l+m)$,再連交集相對面之相對點$\overline{SR}$,而分:

(i).若$\overline{SR}\le l+m$,則$\overline{AS}+\overline{SR}$(即$\overline{H_1H_2}$)$+\overline{BR}$爲造橋經費最省與最短總路徑

(ii).若$\overline{SR}>l+m$,則$\overline{AH_1}+\overline{H_1H_2}+\overline{H_2H_3}+\overline{H_3H_4}+\overline{H_4B}$爲造橋經費最省與最短總路徑

[作法]: (如左下圖(i))[証明]: 省略

1. $\because \overline{SR}\le l+m$(兩河寬和) $\therefore$ 連$\overline{AS}$,$\overline{SR}$,$\overline{BR}$,則$\overline{AS}+\overline{SR}(\overline{H_1H_2})+\overline{BR}$即爲所求

[作法]: (如右下圖(ii))

1. $\because \overline{SR}>l+m$,$\therefore$ 分別作$\overrightarrow{AA_1}\perp M_1$,作$\overrightarrow{BB_1}\perp L_2$,取$\overline{AA_1}=l$,$\overline{BB_1}=m$,連$\overline{A_1B_1}$交$L_1,M_2$於$H_3,H_2$

2. 作$\overline{H_2H_1}\perp M_1$於$H_1$,作$\overline{H_3H_4}\perp L_2$於$H_4$,連$\overline{AH_1},\overline{H_2H_3},\overline{BH_4}$;則$\overline{AH_1}+\overline{H_2H_1}+\overline{H_2H_3}$ $+\overline{H_3H_4}+\overline{BH_4}$即爲所求

[証明]: (如右下圖(ii))

1. $\because AA_1H_2H_1, BB_1H_3H_4$皆爲平行四邊形,$\therefore \overline{AH_1}=\overline{A_1H_2}$,$\overline{BH_4}=\overline{B_1H_3}$;故$\overline{AH_1}+\overline{H_2H_3}+\overline{BH_4}$ $=\overline{A_1H_2}+\overline{H_2H_3}+\overline{B_1H_3}=\overline{A_1B_1}$

2. 連$\overline{AS},\overline{BR}$;作$\overline{SG_2}\perp M_2,\overline{RG_3}\perp L_1$;連$\overline{A_1G_3}$;$\because AA_1G_2S, BB_1G_3R$亦爲平行四邊形, $\therefore \overline{AS}=\overline{A_1G_2},\overline{BR}=\overline{B_1G_3}$;

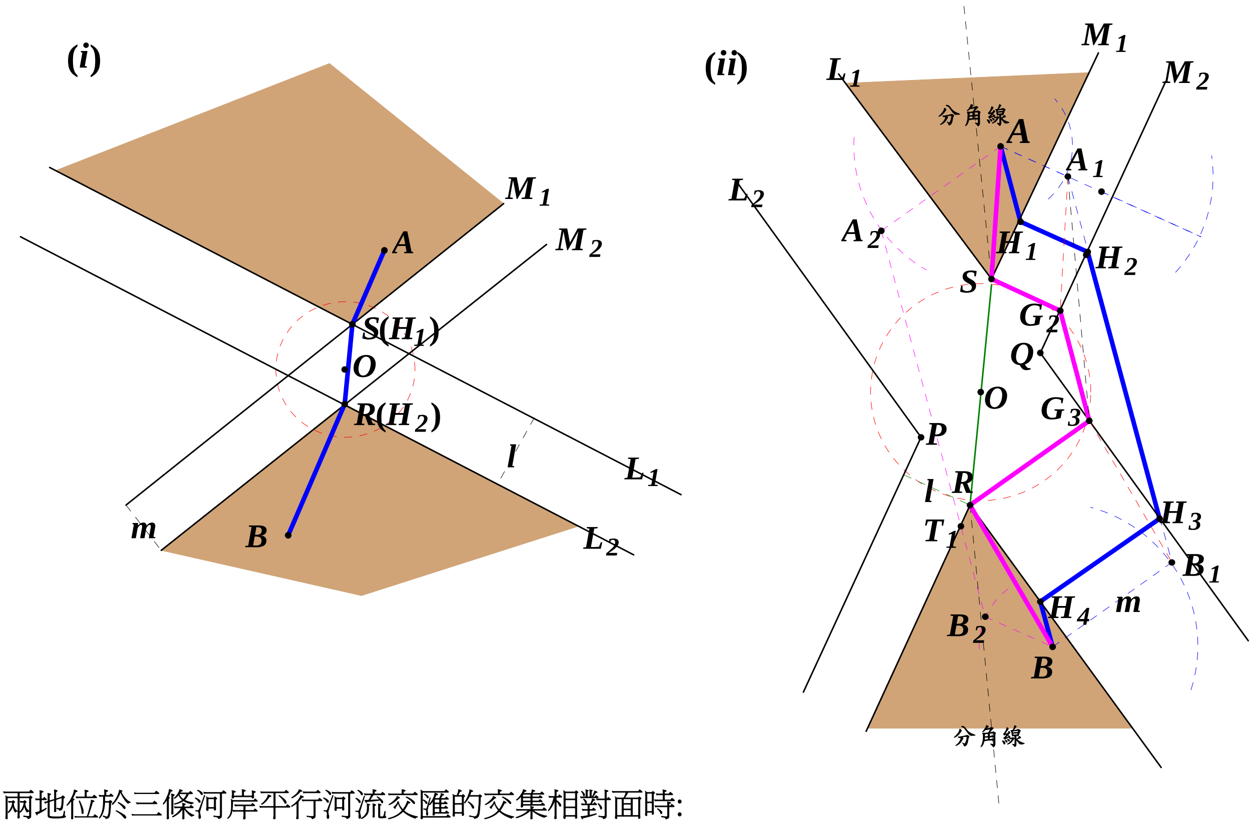
3. 在$\Delta A_1G_2G_3$中,$\because \overline{A_1G_2}+\overline{G_2G_3}>\overline{A_1G_3}$;在$\Delta A_1G_3B_1$中,$\because \overline{A_1G_3}+\overline{B_1G_3}>\overline{A_1B_1}$ $\therefore \overline{AS}+\overline{SG_2}+\overline{G_2G_3}+\overline{RG_3}+\overline{BR}=\overline{A_1G_2}+\overline{SG_2}+\overline{G_2G_3}+\overline{RG_3}+\overline{B_1G_3}>\overline{A_1G_3}+\overline{SG_2}+\overline{RG_3}$ $+\overline{B_1G_3}>\overline{A_1B_1}+\overline{H_1H_2}+\overline{H_3H_4}=\overline{AH_1}+\overline{H_1H_2}+\overline{H_2H_3}+\overline{H_3H_4}+\overline{BH_4}$

[小結]:兩地位於兩條河岸平行河流交匯的交集相對面時,若

(i).相對區域頂點$\overline{SR} \le l+m$(兩河寬之和),則$\overline{AS}+\overline{SR}$(即$\overline{H_1H_2}$)$+\overline{BR}$爲造橋經費最省與最短總路徑

(ii).相對區域頂點$\overline{SR} > l+m$,則比較以A地順時針或逆時針所作的兩條總路徑的大小,取其較小者,即爲造橋經費最省與最短總路徑

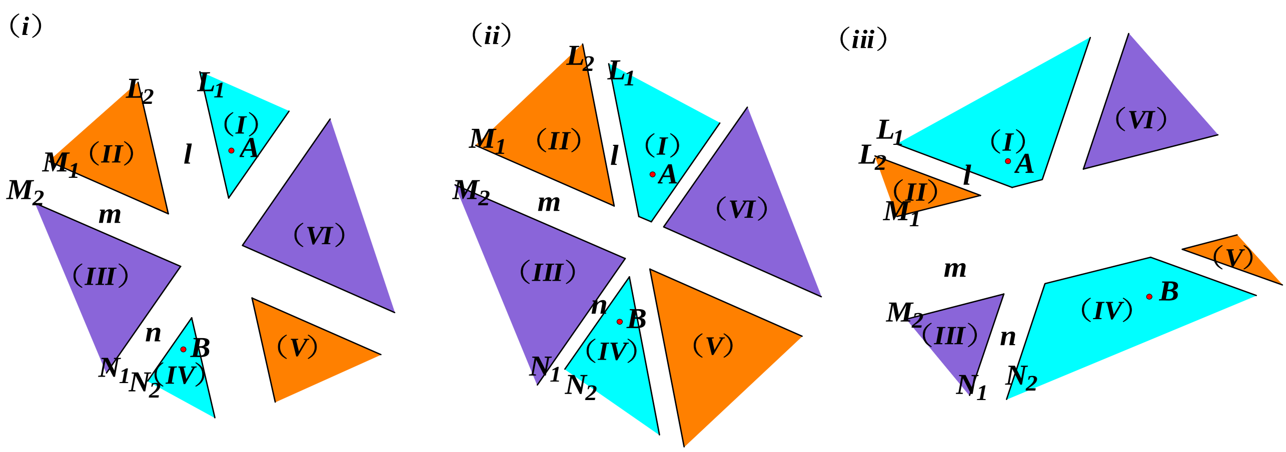
[推廣]:若A、B兩地位於兩條河岸平行河流交匯的交集相對面的最接近處,相對面區域各有r地、k地時,可仿[研究2],先作r地與k地的最小史坦納樹,再連結A、B兩地的最短路徑,即可得位於兩條河岸平行河流交匯的交集相對面的r地與k地的造橋經費最省與最短總路徑。



二、兩地位於三條河岸平行河流交匯的交集相對面時:

[分析]:兩地位於三條河岸平行河流交匯的交集相對面時,則A、B兩地可能位於交集相對面

(i).皆爲三角形區域(ii).一爲三角形區域,一爲四邊形區域(iii).皆爲四邊形區域(如下圖)



[作法]:(i)兩地位於三角形的相對區域時,[作法]如[研究3~一.(i)](故省略)

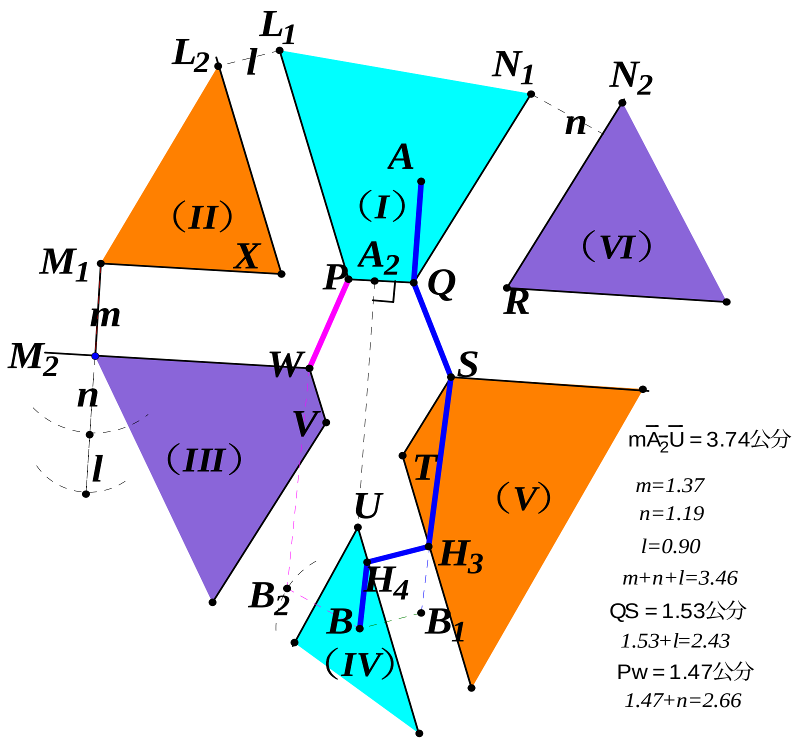
[作法]: (ii)(如下圖)(A、B兩地一位於三角形區域,一位於四邊形區域)([証明]省略)

1.作$\overline{UA_2}\perp\overline{PQ}\because\overline{UA_2}=3.74>l+m+n=3.46>\overline{PW}+n=2.66>\overline{QS}+l=2.43$

$\therefore\overline{QS}+l$(河寬)爲最短造橋距離

2.連$\overline{QS}$,作$\overline{BB_1}\perp L_1$,連$\overline{B_1S}$交L_1於H_3,作$\overline{H_3H_4}\perp L_2$於$H_4$,連$\overline{AQ},\overline{BH_4},\overline{H_3H_4},\overline{SH_3}$;

則$\overline{BH_4}+\overline{SH_3}+\overline{H_3H_4}+\overline{QS}+\overline{AQ}$即爲所求



[作法]: (iii)(與[作法](ii)同,故省略)

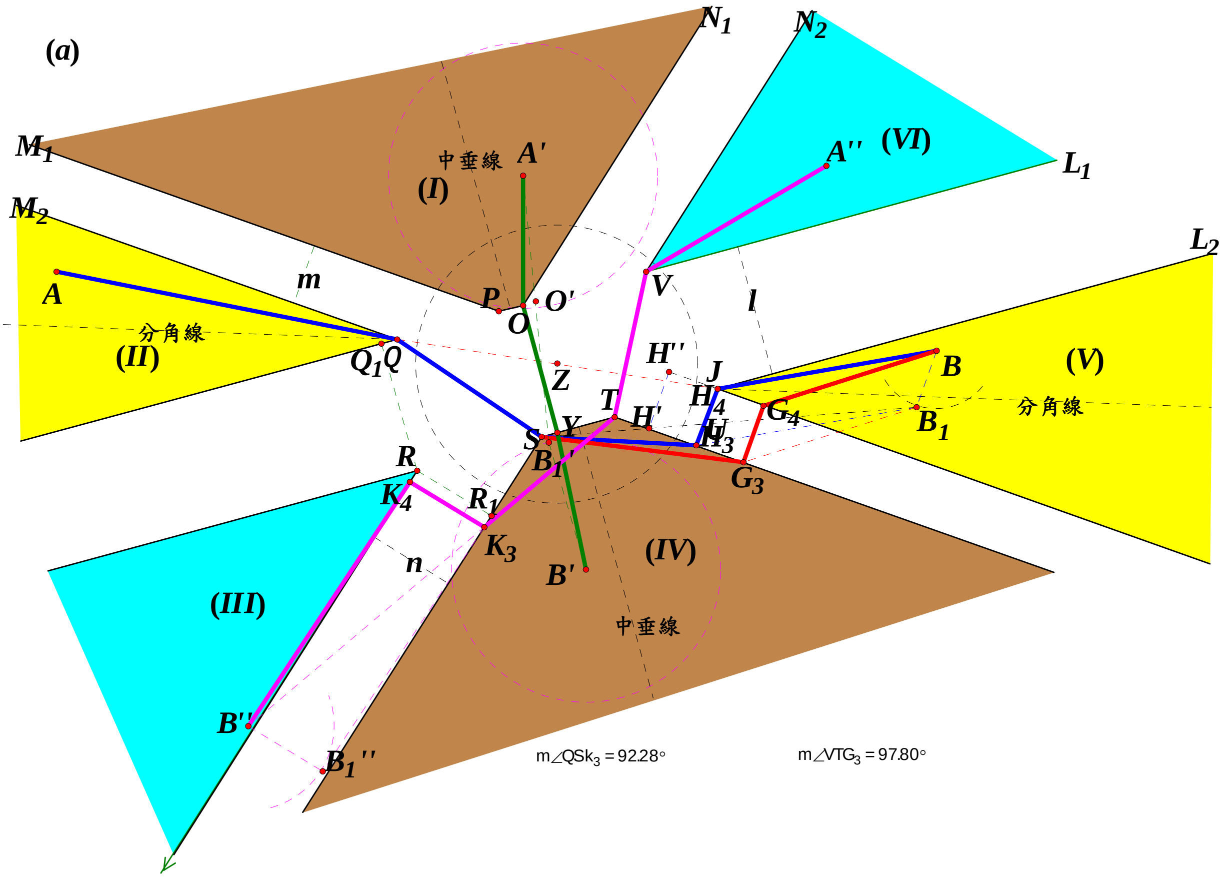
[小結]:兩地位於三條河岸平行河流交匯的交集相對面時,若

(i).(如下圖(a))$(I)(IV)$區,設$\overline{OY}=l$爲$L_1 // L_2$之間的河寬。仿照兩地位於兩條河岸平行的河流外側時的作法,找出A'至B'的最佳造橋位置與最短總路徑;但若橋樑的造橋位置落於河中(如下圖(a)中的O'),則平移修正橋樑位置於最靠近O'點的頂點O爲造橋的位置,而得橋$\overline{OY}$,故$\overline{A'O}+\overline{OY}+\overline{YB'}$爲造橋經費最省與最短總路徑

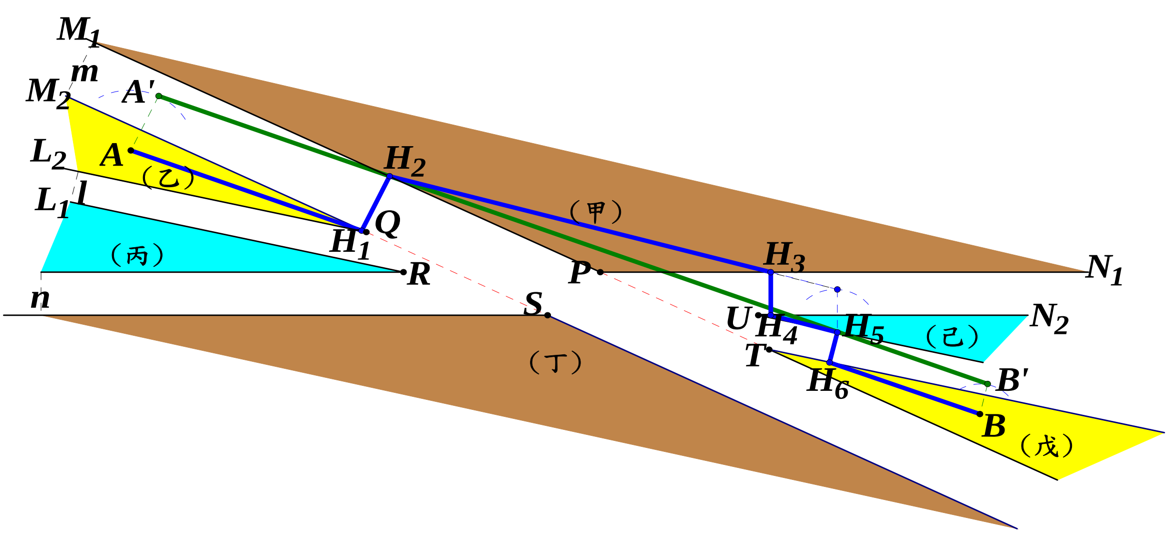
(ii).(如下圖(a))$(II)(V)$區,$\because\overline{QJ}>l+m+n,\angle QSK_3=92.28°,\therefore\overline{QS}$爲五邊形區$QSR_1RQ_1$中$L_1$至$N_2$的最短距離;又$\because\overline{QS}<l+n,\therefore$連$\overline{QS}$,再作$B$與$S$之間的最短路徑,可得$\overline{AQ}+\overline{QS}+\overline{SH_3}+\overline{H_3H_4}+\overline{H_4B}$爲$A$、$B$兩地造橋經費最省與最短總路徑。同理:在$(III)(VI)$區中,$\because\angle VTG_3=97.80°$且$\overline{VT}<l+m,\therefore$連$\overline{VT}$,再作$B''$與$T$之間的最短路徑,可得$\overline{A''V}+\overline{VT}+\overline{TK_3}+\overline{K_3K_4}+\overline{K_4B''}$爲$A''$、$B''$兩地造橋經費最省與最短總路徑。

(iii).(如下圖(b))(乙)(戊)區,$\overline{QS} > l+n$,$\overline{PT} > l+n$,即(乙)(戊)區之頂點與不相鄰之其它區頂點的連線段皆大於所跨河寬之和,則作$\overrightarrow{AA'} \perp M_2$,取$\overline{AA'} = m$,作$\overrightarrow{BB'} \perp L_2$,取$\overline{BB'} = l$,連$\overline{A'B'}$,分別交$M_1$,$L_2$於$H_2$,$H_5$;作$\overline{H_2H_1} \perp M_2$,$\overline{H_5H_6} \perp L_2$;續作作$\overrightarrow{H_5C} \perp N_2$,取$\overline{H_5C} = n$,連$\overline{CH_2}$,交$N_1$於$H_3$,作$\overline{H_3H_4} \perp N_2$,可得$\overline{AH_1} + \overline{H_1H_2} + \overline{H_2H_3} + \overline{H_3H_4} + \overline{H_4H_5} + \overline{H_5H_6} + \overline{H_6B}$爲(乙)(戊)區$A$、$B$兩地造橋經費最省與最短總路徑。同理:由$A$地至$B$地的逆時針方向,亦可作得一組造橋經費最省與最短總路徑;再比較此兩組最短總路徑的長短,取其較短者,即可找得最佳的造橋經費最省與最短總路徑。

(a)



(b)



[推廣]:若兩地位於三條河岸平行河流交匯的交集相對面的最接近處,且相對面區域各有r地、k地時,可仿[研究2],先作r地與k地的最小史坦納樹,再依上述[小結]連結最接近兩地的最短路徑,即可得位於兩條三條河岸平行河流交匯的交集相對面的r地與k地的造橋經費最省與最短總路徑。

三、兩地位於 n 條河岸平行河流交匯的交集相對面時:

當兩地位於n條河岸平行河流交匯的交集相對面時,則可依相對區域之兩地所在區域的頂點及不相鄰區域頂點的連線段,來與所跨河道寬之和比較大小,以決定造橋的長度:

(i).若頂點及不相鄰區域頂點的連線段 ≤ 所跨k條(取最大k)河流寬之和時,則以頂點及不相鄰區域頂點的連線段作爲橋樑,再補上$(n-k)$條河道寬作爲橋樑。 $(k \le n)$

(ii).若頂點及不相鄰區域頂點的連線段 > 所跨k條(取最大k)河流寬之和時,則作n條河道寬作爲橋樑。

(iii).在(i)(ii)中,定出作橋樑長度後,再依前述作法找出最短路徑,即可完成造橋費用最省與最短總路徑。

四、多地位於 n 條河岸平行河流交匯的交集相對面時:

當多地位於n條河岸平行河流交匯的交集相對面時,仍可依相對區域之兩地所在區域的頂點及從不相鄰區域頂點的連線段,來與所跨河道寬之和比較大小,以決定造橋的最短長度,再依各區域中找出最小史坦納樹的路徑,加以銜接,即可完成造橋費用最省與最短總路徑。

柒、最後心得與結論:

一、利用"對稱軸"與"兩點之間以直線距離爲最短"的觀念,可以解決兩地位於若干條河岸平行河流外側時的最佳造橋位置與最短總路徑

二、兩地位於一條兩岸平行河流的同側時,(i).若兩地與造橋端點所形成三角形之三內角皆小於$120°$(亦即兩地連線段與近河岸地與河岸的垂直連線段之夾角小於$120°$)時,則此三角形的費馬點與三頂點(含造橋端點)連線爲兩地位於一條兩岸平行河流同側時的最短總路徑。(ii).若兩地與造橋端點所形成三角形之三內角中有一內角不小於$120°$(亦即兩地連線段與近河岸地與河岸的垂直連線段之夾角不小於$120°$)時,則位於河流同側兩地的連線段再加上與河岸較短距離之地的連線段即爲最短總路徑。

三、三地位於一條兩岸平行河流的同側時,(i).若三地所形成三角形之三內角皆小於$120°$時,則此三角形的費馬點與三頂點連線再加上與河岸較短距離之地的連線段即爲最短總路徑。(ii).若三地所形成三角形之三內角中有一內角不小於$120°$時,則此不小於$120°$的內角頂點的相鄰兩邊再加上與河岸較短距離之地的連線段即爲最短總路徑。

四、四地位於一條兩岸平行河流的同側時,則四地所圍成的四邊形可形成兩組史坦納樹。(i).若軸幹過四邊形對邊時,則此二對邊之各二端點與四邊形對角線交點所圍成的兩三角形之費馬點與各端點連線段及兩費馬點連線段(即最小史坦納樹)與四頂點中離河岸最短距離的連線段之和爲最短總路徑。(ii).若軸幹不同時過四邊形兩對邊時,則此二對邊之各二端點與四邊形對角線交點所圍成的兩三角形之費馬點,如有落於四邊形之外時,則修正爲最靠近費馬點之頂點,再檢驗位於四邊形內部史坦納點的相鄰兩通路夾角是否都爲$120°$以及修正後新史坦納點的兩通路夾角是否不小於$120°$,若是,再比較兩組史坦納樹的大小,取其較小者再加上與河岸較短距離之地的連線段即爲最短總路徑。

五、五地 A,B,C,D,E 位於一條兩岸平行河流的同側時,仿正五邊形史坦納樹作法,可得五組史

坦納樹,比較修正後五組史坦納樹的大小,取其最小者再加上與河岸較短距離之地的連線段即為最短總路徑。

六、最小史坦納樹具有如下的三基本性質：

1.史坦納樹上的點,只有一條通路時,此點必為多邊形上的頂點

2.史坦納樹上的點,若有兩條通路時,此點必為修正後的新史坦納點也是多邊形上的頂點,且兩條通路夾角不小於120°

3.多邊形內部每個史坦納點處的兩邊夾角恰為120°

七、六地 A,B,C,D,E,F 位於一條兩岸平行河流的同側時,則

1.當A,B,D,E,F,C六地依序共線(C與M_1距離最短),且$\overleftrightarrow{AC}$與M_1之交點H_1為所搭橋樑之端點,則$\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FC}+\overline{CH_1}$為最短總路徑

2.若A,B,D,E,F,C六地為等角六邊形的六頂點時,則任五等邊和$+\overline{CH_1}$為最短 總路徑

3.A,B,D,E,F,C六地若不為正六邊形的六頂點時,則六邊形可依「跳隔頂點」(中間隔一頂點的二頂點),分成兩組「三角形群」,而每一組「三角形群」各有三個三角形。每一組「三角形群」都可找得三個史坦納點(可能在三角形內部,可能修正後在六邊形頂點),而只要符合史坦納樹的三基本性質,就可確定每一組「三角形群」中每一個三角形的最小史坦納樹,取其較短的兩個最小史坦納樹,再加上有最長史坦納樹的三角形中較短的六邊形邊,即為該「三角形群」的最短總路徑;最後再比較兩組「三角形群」的最小史坦納樹的長短,取其較短者再加上與河岸較短距離之地的連線段即為最短總路徑。

八、七地 A,B,C,D,E,F,G 位於一條兩岸平行河流的同側時,則由於七邊形中除去一邊外, 皆可仿照六邊形方式,得到一組由三個三角形所組成的「三角形群」,因為七邊形有七邊,所以會有七組不同的「三角形群」。仿照六邊形的[作法],作出每一組「三角形群」內的三個三角形的最小史坦納樹,計算出每一組「三角形群」的三個最小史坦納樹的和;再比較七組不同「三角形群」的三個最小史坦納樹和的長短,取其總和最小者再加上與河岸較短距離之地的連線段即為最短總路徑。

九、$N(N\geq 8)$地位於一條兩岸平行河流的同側時:則

1.若 $N\geq 8$ 且為偶數時,猜想可仿照六邊形作法分成兩組「三角形群」,每組有 $\frac{N}{2}$ 個三角形,各作「三角形群」的最小史坦納樹,再加以修正成符合最小史坦納樹的三基本性質,比較兩組最小史坦納樹,取其較小者再加上與河岸較短距離之地的連線段即為最短總路徑。

2.若 $N\geq 8$ 且為奇數時,猜想亦可由 N 邊形中除去一邊外,得到一組由 $\frac{N-1}{2}$ 個三角形所組成的「三角形群」,作此「三角形群」的最小史坦納樹,再加以修正成符合最小史坦納樹的三基本性質,比較 N組不同「三角形群」的最小史坦納樹,取其最小者再加上與河岸較短距離之地的連線段即為最短總路徑。

3.若 N 邊形中($N\geq 8$)且每一內角皆不小於120°時,則捨棄最長邊外的其餘(N-1)邊之和再加上與河岸較短距離之地的連線段即為最短總路徑。

十、$N(N\geq 4)$地位於一條兩岸平行河流的同側,且 $N(N\geq 4)$地呈單凹角 N 凹多邊形時:我們猜想可將單凹角 N 邊形分成 N 個凸(N-1)邊形,再比照凸(N-1)邊形的作法,找出每個凸(N-1)邊

形的最小史坦納樹,加上另一頂點與凸(N-1)邊形頂點的最短路徑,再比較所有 N 條最短路徑的長短後,取得最短路徑者,即爲單凹角 N 邊形的最短總路徑。

十一、若兩地A與B位於兩條河岸平行河流交匯的交集相對面的最接近處,相對面區域各有r地、k地時,可先作r地與k地的最小史坦納樹,再連結A、B兩地的最短路徑,即可得位於兩條兩條河岸平行河流交匯的交集相對面的r地與k地的造橋經費最省與最短總路徑

十二、若兩地位於三條河岸平行河流交匯的交集相對面的最接近處,且相對面區域各有r地、k地時,先作r地與k地的最小史坦納樹,再依最佳造橋位置連結最接近兩地的最短路徑,即可得位於三條河岸平行河流交匯的交集相對面的r地與k地的造橋經費最省與最短總路徑。

十三、當兩地或多地位於n條河岸平行河流交匯的交集相對面時,則可依相對區域之兩地所在區域的頂點及不相鄰區域頂點的連線段,來與所跨河道寬之和比較大小,以決定造橋的長度;再分別利用最小史坦納樹的作法找出最短路徑,即可完成造橋費用最省與最短總路徑。

捌、問題的討論與展望:

能夠如期完成此篇報告,首先要感謝老師的指導。然而美中不足的是:(1).對於凸 $N(N\geq 6)$ 邊形所找得的最小史坦納樹只能猜想,而無法証明(2).對於單凹角凹 $N(N\geq 5)$邊形所找得的最小史坦納樹亦只能猜想,而無法証明(3).對於多凹角凹 N 邊形,仍然無法找出最小史坦納樹。此三問題還請教授不吝予以指導!

玖、參考資料:

1.「數學傳播」17 卷第四期堵丁柱著--“談談 *Gilbert-Pollak* 猜想的証明”

2.「三角函數」,建興出版社,陳一理著,1998 年 7 月增訂版

3.中華民國第 46 屆科展

【評語】030412

1. 內容豐富。
2. 做圖詳實。
3. 如能鎖定二、三個子題深入探討更佳。