中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030410

長方體對角線的奇幻之旅

學校名稱：臺中縣立光德國民中學

作者：	指導老師：
國一 蔡宜霖 國一 劉宇哲 國一 陸彥儒 國一 廖奕竣	吳燕玉 賴姵伶

關鍵詞：　平面、空間、對角線

壹、摘要

先從平面上去探討邊長爲一單位的正方形所構成的長方形，將長、寬是否互質分類去討論對角線所通過多少（正方形）點數及邊數會如何變化？再去探討在空間中，由許多邊長一單位的正立方體所構成的長方體，也是將長、寬和高是否互質分類去討論對角線會通過（正立方體）多少點？多少邊？多少面？我們利用方格紙、在桌墊上實際操作、電腦 Excel、製作模型和遊戲方格實際操作去討論出通過點、邊和面，我們找到了以下的的結論：在平面上：長＝a，寬＝b，（a,b）＝r，通過的點數爲 r－1，邊數爲 a＋b－2r。在空間：長＝a，寬＝b，高＝c，（a,b）＝p，（b,c）＝q，（c,a）＝r，（a,b,c）＝s，通過的點數爲 s－1，邊數爲 p＋q＋r－3s，面數爲 a＋b＋c－2p－2q－2r＋3s。

貳、研究動機：

有一次下課發現同學正在畫桌墊，桌墊是由許多邊長爲一單位的正方形所構成的長方形，我們發現所畫的直線會通過點和邊，就在思考在哪些情況會通過多少點？多少邊？放學時經過附近國小，看到一群小朋友正在爬一個由許多鐵桿子架成的鏤空長方體遊戲器材，當時，他們在比賽誰最快爬到頂端，有一個小朋友是由底邊的一個角落出發，從中間斜爬上去。但是因爲中間斜爬必須穿越桿子或桿子相交的點以及桿子間所形成的面，所以遇到了許多阻礙，突然，這畫面讓我們想到在桌墊看到的長方形，所以激起了我們一個想法：如果沿著對角線穿越一個由許多邊長爲 1 單位的正立方體所構成的長方體，究竟會通過多少面？或多少邊？或多少點？於是本就對數學有高度興趣的我們，決定深入探討一番。

此作品會應應用到下列國高中課本的內容，國中第一冊 2-1 因數與倍數：我們在找長寬高利用因倍數的關係來分類 ，2-2 最大公因數與最小公倍數：在推導交點交邊交面時應用到，第二冊第一章二元一次聯立方程式、第二章平面直角座標系：在討論部分我們發現可以利用直角座標系和方程式找出交點，第五冊相似形：在說明長寬互質只有交邊沒有交點應用到，高中第三冊空間的直線與平面：推導長方體應用到。

參、研究目的：

一、討論在平面上一個由數個邊長爲 1 單位的小正方形組成長方形，在長寬互質的情形下，其對角線所通過的點數及邊數會如何變化?

二、承一、中之長方形，在長寬不互質且長爲寬之倍數，通過的點數及邊數會是怎樣的情形？

三、承一、中之長方形，在長寬不互質，且長不爲寬之倍數，通過的邊數及點數會是怎樣的情形？

四、承二、中之長方形，在長爲寬之倍數且長寬相等(正方形)，通過的邊數及點數會是怎樣的情形？

五、承一、中之長方形，在長寬在某個比值區間，將通過的邊或點標示出來，是否有規律的圖形？

六、討論在空間中是一個由數個邊長 1 單位的小正立方體組成的長方體中，長寬高皆互質時，

其對角線所穿越的面數、點數及邊數。

七、承五、中之長方體，長寬高其中兩者不互質，但皆與第三者互質，其穿越的面數、點數及邊數又是怎樣的一個現象？

八、當此立方體在長寬高皆不互質，或為正方體時，其穿越的面數、點數及邊數如何變化？

肆、研究設備及器材：

紙、筆、方格紙、尺、電腦、Excel、Photo Impact、國高中課本、桌墊、塑鋼土、鐵絲、線、剪刀、美工刀、照相機

伍、研究過程或方法：

老師曾說：「我們認識空間的步驟，是由一維的直線進級到二維的平面，最後才是三維的空間」。於是我們決定先找出平面上，由邊長 1 單位的正方形所構成的長方形，其對角線會通過多少(正方形)邊與點。在進一步推導出空間中，由邊長 1 單位的正立方體所組成的長方體，其對角線會通過多少(正立方體)面、點與邊。

一、首先，我們探討平面。

我們用方格紙和桌墊來討論，選擇各種長寬不同的長方形，實際畫出對角線，並加以觀察歸納。除此之外也以電腦 Excel 輔助畫圖，為了讓討論的狀況更完備，我們決定以長寬是否互質為依據，做了以下的分類：1. 長寬互質(1)長寬皆為質數(2)長寬皆不為質數(3)一為質數另一則非 2.長寬不互質，且長為寬之倍數時(1)長為寬之倍數，且寬為質數(2)長為寬之倍數，且寬不為質數(3)長寬相等時(即為正方形)

(一) 當長與寬互質時，為了驗證推論的結果，我們列出如表 A 數據:（附件一）

表 A：

長(a)	寬(b)	與長平行的交邊數	與寬平行的交邊數	總交邊數
5	3	2	4	6
7	3	2	6	8
11	3	2	10	12
9	4	3	8	11
6	5	4	5	9
:	:	:	:	:

1. 沒有通過交點，只有通過邊，所以交點數為 0。
2. 與長平行的交邊數都是寬減一；與寬平行的交邊數都是長減一。所以我們可以得到一個結論：若長為 a，寬為 b，則與長平行交邊數：b－1，與寬平行交邊數：a－1，而總交邊數我們也可以發現它是由分別與長寬平行的交邊數相加而得到的結果，所以我們可以推出總交邊數的公式：(b－1) ＋(a－1)=a＋b－2

另外，結果顯示，以下三種情況也都符合此結論：

（1） 長寬互質，且皆為質數例：a＝3，b＝2。則交邊數等於 3＋2－2＝3 (見附件一-1)

（2）長寬互質，但皆不爲質數例：a＝9，b＝4。則交邊數等於 9＋4－2＝11 (見附件一-2)

（3）長寬互質，但一是質數，另一則非例：a＝7，b＝6。則交邊數等於 7＋6－2＝11 (見附件一-3)

(二) 長寬不互質，且長爲寬之倍數：

1. 長是寬的倍數，寬是質數〈見附件二圖 1-9〉爲了驗證推論的結果，我們列出如表 B 數據:

表 B：

長(a)	寬(b)	通過的邊數	通過的點數
4	2	2	1
6	3	3	2
8	2	6	1
10	5	5	4
38	19	19	18
:	:	:	:

2. 長是寬的倍數，寬不是質數〈附件二圖 1-10〉爲了驗證推論的結果，我們列出表 C 數據:

表 C：

長(a)	寬(b)	通過的邊數	通過的點數
8	4	4	3
12	4	8	3
12	6	6	5
20	10	10	9
24	12	12	11
:	:	:	:

3.長爲寬之倍數且長寬相等(即正方形)〈附件三〉爲了驗證推論的結果，我們列出表 D 數據:

表 D：

長(a)	寬(b)	通過的邊數	通過的點數
3	3	0	2
5	5	0	4
6	6	0	5
7	7	0	6
8	8	0	7
:	:	:	:

單就上表的結果,我們得知長寬相等時(即正方形),則無交邊,只有交點。又發現交點數爲長或寬減一（因長寬相等）,所以推出的交點數爲：a-1 或 b-1

從 1. 2. 3. 得,通過的邊數爲長減寬,而通過的點數爲寬減一,且點與點間的距離相等(點所分割的距離相等) 。因此我們可以依此推出一個結論:

(1)通過的邊數爲：a-b　　(2)通過的點數爲：b-1

(三) 長寬不互質，但長不爲寬之倍數：（附件四）爲了驗證推論的結果，我們列出表 E 數據:

表 E：　（設 r 爲長、寬之最大公因數）

長(a)	寬(b)	交邊數	交點數	r

10	8	14	1	2
12	9	15	2	3
12	8	12	3	4
6	4	6	1	2
10	4	10	1	2

承（一）、（二）中之結果可預測通過的點數，再利用多一個交點便少二個交邊來推出結論。假設最大公因數爲 r ，經由許多例子發現，交點數恰好爲 r-1(至於爲什麼？這部份我們放在討論)所以利用原本應通過的所有邊數 a+b-2 去扣掉少的 2(r-1)個邊，可得交邊數 y=a+b-2-2(r-1)=a+b-2r

除此之外，我們發現，長、寬互質時，代表 r=1，代入此結論得出之 0 個交點，a+b-2 個交邊與原先相同。所以我們打算以這樣的心得，不再分類互不互質，先行推測空間中的情況，在分類進行驗證。

(四) 在長寬在某個比值區間，將通過的邊或點標示出來，是否有規律的圖形？

比值 0.5~0.9⋯，數據如表 F（附件五）：

表 F：

長(a)	寬(b)	交邊	交點	比值
3	6	3	2	0.5
13	25	36	0	0.5⋯
3	5	6	0	0.6
16	25	39	0	0.6⋯
7	10	15	0	0.7
19	25	42	0	0.7⋯
4	5	7	0	0.8
15	18	31	2	0.8⋯
9	10	17	0	0.9
19	20	37	0	0.9⋯
:	:	:	:	:

在此我們用方格紙還有 Excel 繪圖去驗證，發現只有比值是一樣的值，圖形才會重複出現，若比值不同還是會呈現不一樣的交點和交邊。

二、接著我們探討空間。

將平面上長方形的對角線所經過的點、線的關係延伸到空間上來討論長方體。假設長方體 ABCDEFG 是由邊長爲 1 單位長的小正方體所拼湊而成的（如圖 A）且 $\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=4$，而 $\overline{AG}$ 爲它的對角線，$\overline{AG}$ 在平面 ADCB 的投影是 $\overline{AC}$ ，所以我們打算用平面的關係推論到空間上。在平面時，長方形 ABCD 的對角線 $\overline{AC}$ 恰好有一個交點（I），而這一點把它延伸到空間時，一點就會變成一邊（ $\overline{IJ}$ ），而通過的 6 個交邊延伸到空間上，就會

變成不同的面，此時連接會發現，至少是通過$\overline{IJ}$這個邊，而什麼時候$\overline{AG}$會是通過一個點呢？這就要看$\overline{AH}$或是否有通過交點，如果有，則交點拉到空間所成的直線，如果又能與$\overline{IJ}$有交點，這時，$\overline{AG}$便會通過點了。因爲$\overline{AG}$投影到平面 ADHE 會成爲長方形對角線$\overline{AH}$，$\overline{AG}$投影到平面 ABCD 會成爲長方形對角線$\overline{AC}$，$\overline{AG}$投影到平面 ABFE 會成爲長方形對角線$\overline{AF}$，所以我們在討論長方體對角線所通過的點、線、面時我們可以用平面 ABCD、平面 ADHE 和平面 ABFE 來推導 。

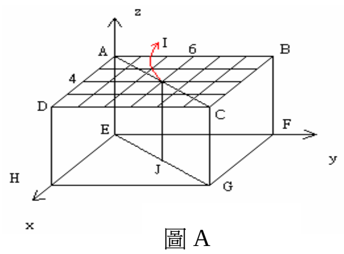


圖 A

(一) 現在我們舉例來說明這三個平面的確會交於一直線，而這一直線就是對角線$\overleftrightarrow{AG}$（圖 B）:

1. 找出平面上的三個點：
A1 平面 ABGH(0,0,4) (2,0,0) (2,5,0) 、 A2 平面 ADGF(0,0,4) (2,0,4) (2,5,0)
A3 平面 AEGC(0,0,4) (0,0,0) (2,5,0)
2. 從三點找出兩個向量：
A1:(2,0,-4) (2,5,-4)、A2:(2,0,0) (2,5,-4)、A3:(0,0,-4) (2,5,-4)
3. 求出各平面的法向量：
A1：(2,0,-4)X (2,5,-4)=(20,0,10)、A2：(2,0,0)X (2,5,-4)=(0,8,10)、A3：(0,0,-4)X (2,5,-4)=(20,-8,0)
4. 各平面的方程式
A1：20X+10Z-40=0、A2：8Y+10Z-40=0、A3：20X-8Y=0
5. 各平面的交線

A1 與 A2： $X = \frac{2}{5}Y = \frac{4-Z}{2}$

A1 與 A3： $X = \frac{2}{5}Y = \frac{4-Z}{2}$

A2 與 A3：$Y = \frac{5}{2}X = \frac{20-5Z}{4}$

6. 可知三平面交於一直線爲: $X = \frac{2}{5}Y = \frac{4-Z}{2}$

7. 將 A(0,0,4)及 G(2,5,0)代入 $X = \frac{2}{5}Y = \frac{4-Z}{2}$ 符合，

所以$\overline{AG}$的方程式的確爲 $X = \frac{2}{5}Y = \frac{4-Z}{2}$ 。

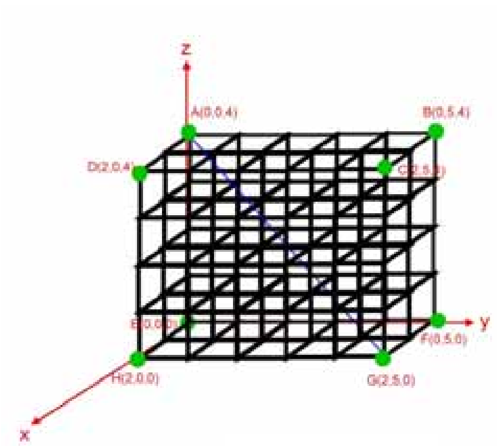


圖 B

(二) 有了上述的基礎，我們開始說明空間中的狀況

假設有一由邊長 1 單位的正立方體所組成長方體，其長、寬和高分別爲 a、b、c 且(a,b)=p，(b,c)=q，(a,c)=r，(a,b,c)=s

1. 根據平面上相似形的推廣，加上長、寬和高之最大公因數爲 s，所以長方體對角線會

通過的點為 s-1(個)

2. 長方形對角線所通過的點，拉到空間變成邊，但其中有 s-1 條會交成點，所以對長 a，寬 b 這個長方形所延伸出來的平面，只剩 p-1-(s-1)=p-1-s+1=p-s(條)交邊。其他二平面以此推論。

我們將三個不同面向的長方形如下表 G：

可知交邊為 $p-s+q-s+r-s=p+q+r-3s$

表 G：

長方形的長寬	最大公因數	長方形對角線會通過的交點	延伸至空間中長方體對角線會通過之邊數
a,b	(a,b)=p	p-1	p-s
b,c	(b,c)=q	q-1	q-s
a,c	(a,c)=r	r-1	r-s

3. 從平面討論的經驗可知，若完全只通過面，應該共(a-1)+(b-1)+(c-1)=a+b+c-3 個面。在空間中若多通過一個點則少 3 個面，多通過一個邊則少 2 個面。

所以通過的面數應該是 a+b+c-3-2(p-s)-2(q-s)-2(r-s)-3(s-1)=a+b+c-2p-2q-2r+3s

(三) 我們試著利用模型找出實際的數據，來驗證(二)中之假設：

1. 在長、寬、高兩兩皆互質的情況下，我們找出如下表 H 數據：(見附件六)

表 H：

長(a)	寬(b)	高(c)	通過面數	通過邊數	通過點數
7	5	3	12	0	0
5	4	3	9	0	0
5	3	2	7	0	0
7	3	2	9	0	0
15	14	11	37	0	0
：	：	：	：	：	：

經由上表得知，我們可引用平面探討的第一種結論（$y=a+b-2$）來導出公式。由長寬高皆互質這項訊息我們可得知一立方體取三個分別以長與寬、長與高、寬與高所組成的面，求出此三面的交邊相加即為所求：

推導過程：$(a+b-2)+(b+c-2)+(c+a-2)$

$=a+b-2+b+c-2+c+a-2=2(a+b+c-3)$

但因彼此會有重覆的交邊，所以必須除 2，得到：交面數為　$y=a+b+c-3$

相當於 p=1，q=1，r=1，s=1

之後，我們列出三方向並舉例證來試驗是否可套用上面推論：

(1)互質，但 a、b、c 三者皆為質數：

例：a=7、b=5、c=3，則通過的面數為 7+5+3-3=12

(2)互質，但 a、b、c 三者皆不為質數：

例：a=25、b=9、c=14。則通過的面數為 25+9+14-3=45

(3)互質，但 a、b、c 三者中有一者不為質數

例：a=9、b=5、c=7。則通過的面數為 9+5+7-3=18

(4)互質，但 a、b、c 三者中有二者不為質數

例：a=4、b=9、c=5。則通過的面數為 4+9+5-3=15

由此可知，長寬高只要互質，並不需一定為質數，都能套用此結論。

那現在要驗證（二）的推論，交點數＝1－1＝0，交邊數＝1＋1＋1－3x1＝0，交面數＝a＋b＋c－2x1－2x1－2x1＋3x1＝a＋b＋c－3。符合（二）的推論。

2. 長寬不互質但高與長、寬分別互質

（1）在長寬相等，但皆與高互質時(設長＝寬＝a)

（2）長寬為倍數關係，且與高互質

（3）長與寬有公因數,但不為倍數關係,且與高互質。

我們找出如下表 I 數據(見附件七)：

表 I：

長(a)	寬(b)	高(c)	總交邊數	總交面數	通過點數
8	8	9	7	8	0
6	3	5	2	7	0
8	6	11	1	20	0
10	10	13	9	12	0
4	2	3	1	4	0
6	3	5	2	7	0
8	4	7	3	10	0
8	6	11	1	20	0
10	6	13	1	24	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

在平面上我們推導出交邊數為 a＋b－2r，和交點數為 r－1，我們推出了以下的結論：

第一種：(a,b)=p≠1，(b,c)=q=1，(a,c)=r=1，(a,b,c)=s=1，

交面數＝[（a＋b－2p）＋（a＋c－2）＋（b＋c－2）－2（p－1）]÷2

=（a+b-2p+a+c-2+b+c-2-2p+2）÷2

=（2a+2b+2c-4p-2）÷2

=a+b+c-2p-1

同理我們可以推導：

第二種：(a,b)=p＝1，(b,c)=q≠1，(a,c)=r＝1，(a,b,c)=s＝1

仿(2)中之探討，可能結論：對角線通過面數為：a+b+c-2q-1，通過邊數為：q-1，通過點數為 0。

第三種：(a,b)=p=1，(b,c)=q=1，(a,c)=r≠1，(a,b,c)=s=1

仿(2)中之探討，可能結論：對角線通過面數為：a+b+c-2r-1，通過邊數為：r-1，通過點數為 0。

我們列出三個方向，從上表舉例來試驗是否符合上述之理論：

(a)在長=寬=a 但與高互質時，例：a=8，b=8，c=9，則通過面數為 8+8+9-2x8-1=8，通過邊數為 8-1=7，通過點數為 0，符合上述推論。

(b)長為寬之倍數，且與高互質時例：a=6，b=3，c=5，則通過面數為 6+3+5-2x3-1=7，通過

邊數爲 3-1=2，通過點數爲 0，符合上述推論。

(c)長與寬有公因數，但不爲倍數關係時，例：a=8，b=6，c=11，則通過面數爲 8+6+11-2x2-1=20，通過邊數爲 2-1=0，通過點數爲 0，符合上述推論。

＝＞由此可知，長寬不互質時，不管是否成倍數關係，結論都是相同的。

那現在要驗證（二）的推論，我們只探討第一種情況，二、三種以此類推，

交點數＝1－1＝0，交邊數＝1＋1＋r－3x1＝r－1，交面數＝a＋b＋c－2xp－2x1－2x1＋3x1＝a＋b＋c－2p-1。符合（二）的推論。

3.長寬高皆不互質：

（1）在長、寬、高皆不互質，長、高爲寬之倍數(但高與長則否)

為了驗證推論的結果，我們利用模型實際操作找出如下表 J 數據：(見附件八)

(設 長爲 a，寬爲 b，高爲 c,最大公因數爲 s 時)

表 J：

長(a)	寬(b)	高(c)	總交點數	總交面數
4	2	6	1	6
6	3	9	2	9
8	4	12	3	12
10	5	15	4	15
:	:	:	:	:

因爲長與高皆爲寬的倍數，所以三者最大公因數必爲寬，由此項關係且應用平面公式，我們可以推導交點數爲 b－1，因爲從平面來看，各面必定都交 b－1 點（因爲三面都看，所以實際上只有 b－1 點）推到空間後可知也只有 b－1 個點。所以交點數爲 b－1。再由三面看，將看到三面所交的邊（推到空間即面）相加，因會重複，且每面會重複 2 次，所以需除以 2。所以交面數：

[a－b+(a+c-2s)+(c-b)] ÷ 2 = (a－b+a+c-2s+c-b) ÷ 2 = (2a-2b+2c-2s)

=a-b+c-s---------因 b=s

=a-2b+c　得到公式: y= a-2b+c

相當於(a,b)=b，(b,c)=b，(a,c)=b，s=b，所以交面數＝＞a+b+c-2b-2b-2b+3b=a-2b+c

那現在要驗證（二）的推論，交點數＝s－1＝b－1，

交面數＝a＋b＋c－2xb－2xb－2xb＋3xb＝a－2b＋c。符合（二）的推論。

（2）在長、寬、高皆不互質，高不爲寬之倍數(高與長、寬皆不爲倍數關係)

爲了驗證推論的結果,我們利用模型實際操作找出如下表 K 真實數據:(見附件九)(設長爲 a，寬爲 b，高爲 c，（a,b）＝b，（b,c）＝q，（a,c）＝r，（a,b,c）＝2)

表 K：

長(a)	寬(b)	高(c)	總交點數	總交邊數	總交面數
8	4	6	1	2	8
12	6	8	1	6	8
16	8	10	1	6	16

20	10	12	1	10	16

a、b 的交點數：b-1

b、c；a、c 的交點數：[q-1+ (r-1)]= q+r-2

將三者相加： b-1+(q+r-2) = b+q+r-3

因爲其中有三點交於一點，剩下 b+q+r-3-3= b+q+r-6 個（交邊數）

將這些平面上看到的點推到空間(即變成邊) 再由三面看由平面公式，將三面所看到的邊相加，因爲經過一個邊少到 2 個面，所以要再扣除多算的邊，又因爲邊推到空間變成了面，而且會重複 2 次，所以要除以 2，除以 2 完以後之答案即爲所求。(以下爲導結論過程)

[a-b+（a+c-2r）+（b+c-2q）-2（b+p+r-6）]÷2

=(a-b+a+c-2r+b+c-2q-2b-2p-2r+12)÷2=(2a-2b+2c-4r-4q+12)÷2

= a-b+c-2r-2q+6=a-b+c-2（r+q-3）

可得到結論：交面數:a-b+c-2（r+q-3），交邊數:b+q+r-6，交點數:1

那現在要驗證（二）的推論，交點數＝2－1＝1，交邊數＝b＋q＋r－3· 2＝b＋q＋r－6，交面數＝a＋b＋c－2xb－2xq－2xr＋3x2＝a－b＋c－2q－2r＋6=a-b+c-2（r+q-3）。符合（二）的推論。

（3）(甲)長寬相等，高不相等

為了驗證推論的結果，我們利用模型實際操作找出如下表 L 數據：(見附件十)

表 L：

長(a)	寬(b)	高(c)	通過的點	通過的面
2	2	6	1	4
3	3	9	2	6
4	4	16	3	12
5	5	15	4	10

當長＝寬＝a 時，且高爲長與寬之倍數時，利用平面公式，由各三面看到的邊並相加（交邊延伸到空間爲交面），因有重複（每面會多算一次），所以每面除以 2 後即爲所求。（以下爲導結論）：

（c－a＋c－b）÷2＝【2c－(a＋b)】÷2 ←因爲長＝寬，所以在此我們將 b 轉換爲 a，其交面數爲(2c－2a)÷2＝c－a

由此可知在長寬相等，且高爲長寬之倍數時，其對角線所通過的交面爲：

c－a 且擇其相異三面可發現它們均只通過其長減一個點，由此我們可推知此立方體應該也只通過其長減一，其交點數爲 a－1

那現在要驗證（二）的推論，交點數＝a－1，交邊數＝a＋a＋a－3xa＝0，

交面數＝a＋b＋c－2xa－2xa－2xa＋3xa＝－2a＋a＋c＝c－a。符合（二）的推論。

(乙)在長寬高皆不相等時(但爲彼此倍數)

為了驗證推論的結果，我們利用模型實際操作找出如下表 M 數據：(見附件十一)

表 M：

長(a)	寬(b)	高(c)	總交點數	總交邊數	總交面數
4	2	8	1	2	4

6	3	12	2	3	6
8	4	16	3	4	8
9	3	27	2	6	18
12	4	36	3	8	24

利用前面平面的推導，b－1　來求出長與寬、寬與高、長與高所形成的三個面其對角線所通過的交點，此時將三面所通過的交點相加可得此公式：

(b－1)＋(a－1)＋(b－1)＝a＋2b－3

但因長與高皆爲寬的倍數，則此時三者的最大公因數將會等於寬，所以在立體上最多只能通過 b－1 個點。

前面我們談到三個面通過的交點共有 a＋2b－3 個，若延伸至立體則可通過 a＋2b－3 個邊，但是因爲延伸到立體時每通過一個點就會少交三個邊，現在我們通過了 b－1 個點，所以通過的總邊數就要減掉 3(b－1)個，則總交邊爲：

a＋2b－3－3(b－1)＝a＋2b－3－3b＋3＝a－b

前面我們所談的是在長寬高皆不相等，但爲彼此倍數時的立方體所通過的邊，現在我們要來探討它所通過的面：

此時我們再引用平面探討的結果 a－b 來求出上述三面所通的交邊，而此交邊延伸到立體時會形成通過的面：

(a－b)＋(c－a)＋(c－b)＝a－b＋c－a＋c－b＝2c－2b

前面我們提到立方體的交邊有 a－b 個，又每通過一個交邊會減少二個通過的面，所以 2c－2b 必須再減掉 2(a－b)，得到：

2c－2b－2(a－b)＝2c－2b－2a＋2b＝2c－2a＝2(c－a)因爲交邊會有重覆，所以要除 2，得到交面：c－a

那現在要驗證（二）的推論，（a,b）＝b，（b,c）＝b，（a,c）＝a（a,b,c）＝b 交點數＝b－1，交邊數＝b＋b＋a－3xb＝a－b，交面數＝a＋b＋c－2xb－2xb－2xa＋3xb＝c－a。符合（二）的推論。

（丙）當長寬高皆相等時，形成一正方體。正方體是由六個正方形結成，而正方形在平面探討上是只有交點而沒有交邊，所以當它組成正方體時也不會有交邊，爲了驗證推論的結果，我們利用模型實際操作找出如下表 N 數據：(附件十二)

表 N：

長(a)	寬(b)	高(c)	總交點數
2	2	2	1
3	3	3	2
5	5	5	4
7	7	7	6
10	10	10	9

由以上的數據可推知正方體的交點數應該是由它的邊長數減一，所以正方體交點數的公式可知是：a－1

那現在要驗證（二）的推論，（a,b）＝a，（b,c）＝a，（a,c）＝a（a,b,c）＝a 交點數＝a－1，交邊數＝a＋a＋a－3xa＝0，交面數＝a＋a＋a－2xa－2xa－2xa＋

$3\times a=0$。符合（二）的推論。

陸、研究結果：

一、平面探討：

一個由數個邊長為 1 單位的小正方形組成的長方形，長為 a，寬為 b，$(a,b)=r$。

（一） 在長寬互質的情形下，不管長寬是否為質數時，其交點數為 0，交邊數為 $a+b-2$。

（二） 在長寬不互質，且長為寬之倍數時，其交點數為 $b-1$，交邊數為 $a-b$。

（三） 在長寬不互質，且長不為寬之倍數時，其交點數為 $r-1$，交邊數為 $a+b-2r$。

（四） 在長為寬之倍數且長寬相等（正方形）時，其交點數為 $a-1$ 或 $b-1$，交邊數為 0。

（五） 在長寬在某一個比質區間，將通過的點和邊數標示出來，發現沒有規律的圖形。

（六） 由以上討論可知，不論長寬是否為互質或是倍數關係，其交點數為 $r-1$，交邊數為 $a+b-2r$。

二、空間探討：

一個由數個邊長 1 單位的小正立方體組成的長方體，長為 a，寬為 b，高為 c，$(a,b)=p$，$(b,c)=q$，$(a,c)=r$，$(a,b,c)=s$。

（一） 在長寬高皆互質，不管長寬高是否為質數時，其交點數為 0，交邊數為 0，交面數為 $a+b+c-3$。

（二） 在長寬高其中兩者不互質（不管是否為倍數關係），但皆與第三者互質時，以 $p\neq1$ 說明，其交點數為 0，交邊數為 $p-1$，交面數為 $a+b+c-2p-1$。

（三） 在長寬高皆不互質：

1. 在長、寬、高皆不互質，長、高為寬之倍數(但高與長則否) ，其交點數為 $b-1$，交邊數為 0，交面數為 $a-2b+c$。
2. 在長、寬、高皆不互質，高不為寬之倍數(高與長、寬皆不為倍數關係) ，其交點數為 1，交邊數為 $b+q+r-6$，交面數為 $a-b+c-2(r+q-3)$。
3. (1)長寬相等，高不相等，其交點數為 $a-1$，交邊數為 0，交面數為 $c-a$。

   (2)在長寬高皆不相等時(但為彼此倍數) ，其交點數為 $b-1$，交邊數為 $a-b$，交面數為 $c-a$。

   (3)當長寬高皆相等時，形成一正方體，其交點數為 $a-1$，交邊數為 0，交面數為 0。

（四） 由以上討論，不論長寬高是否互質或是倍數關係，其交點數為 $s-1$，交邊數為 $p+q+r-3s$，交面數為 $a+b+c-2p-2q-2r+3s$。

柒、討論：

一、當長方形的長和寬互質時，對角線便不會通過點只會通過邊，怎能確定不會通過點呢？我們利用反證法來說明：

如圖 C 所示，長方形 ABCD 由一平方單位的小正方形所組成，長為 12 單位長，寬為 5 單位長，因為（5,12）=1 所以長寬的長度為互質。

假設長方形對角線 $\overline{AC}$ 通過(m,n)這一點，m≠12，n≠5

由相似三角形的性質可得知

$$\frac{5-n}{5}=\frac{m}{12} \Rightarrow 1-\frac{n}{5}=\frac{m}{12} \Rightarrow 12-\frac{12}{5}n=m$$

⇒ 因爲 m,n 必爲整數，所以 n 必爲 5 (不合)

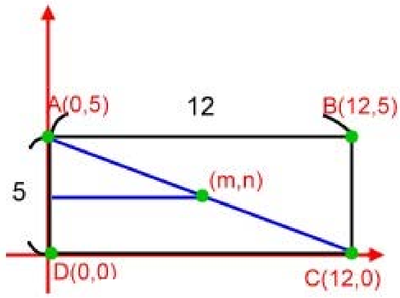


圖 C

二、在平面上，長方形的（長,寬）＝r，則對角線所穿過的點爲(r-1)個，爲什麼呢？以長爲14，寬爲 10 爲例:14:10=7:5 且(14,10)=2，依討論一中提及的相似形概念，長 7 寬 5 的情形下，對角線不會通過點，但將其放大 2 倍則會有 1 個交點，此時長爲 14 寬爲 10。同理，若放大 3 倍，結果有 2 個交點。於是我們會發現用最大公因數減一就是交點數，及交點數爲(r-1)個。

三、在平面上爲什麼通過一個交點則會少二個交邊呢？我們是以 4x2 的長方形來看的，本來應該通過 4+2-2=4 個邊但因通過一個點，所以只剩下兩個邊。舉了許多例子也都得到相同的結果。

四、在空間中爲什麼通過一條邊會少兩個交面？則是直接由三之結論延伸而來至於通過一個點，則會少 3 個面，是利用 2x2x2 的長方體來看的。本來應該通過 2+2+2-3=3 個面，但因通過一個點，所以完全沒有通過面了。舉了許多例子也都得到相同的結果。

五、在平面推導通過幾個點，除了利用方格紙和 Excel 繪圖之外，我們可以配合直角座標討論二元一次方程式正整數解，先將長方形決定直角座標系，利用兩點我們找出對角線的二元一次方程式，只要找出這二元一次方程式的整數解，就可以找出交點數目。

例：如圖 D：通過（0,0)，(6,3）這兩點的方程式爲 $Y=\frac{1}{2}X$ ，可以找到下列兩組整數解，所以可知交點數爲 2。舉了許多例子也都得到相同的結果。

那我們推論在空間中，通過的點也可以利用方程式去推導，這部分可以留待以後我們高中學到三元一次方程式和空間座標時，有機會再繼續探討。

X	2	4	
Y	1	2	

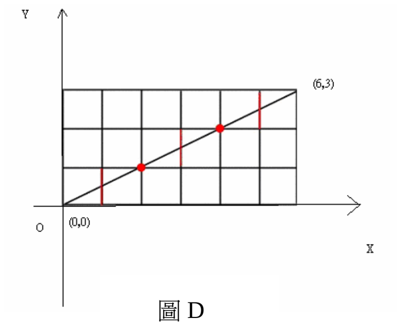


圖 D

捌、結論

一、平面探討

（一）一個由許多邊長一單位的正方形所組成的長方形，若長爲 a，寬爲 b，且(a，b)=r，則其對角線所通過之 (正方形的)邊數：a+b-2r

(正方形的)點數：r-1

（二）以上結論不論長寬互不互質皆成立

二、空間討論

（一）一個由許多邊長一單位的正立方體所組成的長方體，若長為 a，寬為 b，高為 c，且 $(a,b)=p$、$(b,c)=q$、$(a,c)=r$ 、$(p,q,r)=s$ ，則其對角線通過之

(正立方體的)面數：$a+b+c-2p-2q-2r+3s$

(正立方體的)邊數：$p+q+r-3s$

(正立方體的)點數：$s-1$

（二）不論長、寬、高是否有互質皆符合上述結論

玖、參考資料及心得：

一、參考資料

（一）國中數學第一冊 2-1 因數與倍數。

（二）國中數學第一冊 2-2 最大公因數與最小公倍數。

（三）國中數學第二冊第一章二元一次聯立方程式。

（四）國中數學第二冊第二章平面直角座標系。

（五）國中數學第四冊第二章簡單的幾何圖形。

（六）國中數學第五冊相似形。

（七）高中數學第三冊空間中的直線與平面。

二、心得

一開始著手討論問題時，單純地想把平面上的情形推廣到空間中，然後我們的疑問就解決了。可是光把長方形的長、寬、高的分類，就有著好多種狀況，在推導時花了不少時間，也遇到了不少問題。另外，討論平面時，我們將長方形的對角線會通過的邊或點用其他顏色標示以方便觀察，原本以為發現在某一區間的比值會呈規律的圖形，但多找幾組做討論時，發現只有比值相同時，圖形才會呈現某種規律。可以討論的東西實在太多，然而交件日期在即，且篇幅有限，其他未臻完備的部分，留待以後，在將其完成。

在整個過程裡，大家分工合作一起克服許多困難，尤其是對空間概念覺得十分抽象的我們，為了製作一個模型來幫助思考，試過很多方法。也常常跑去附近國小拿著童軍繩去拉對角線，都是為了讓空間概念更清楚，且幫助我們空間的推導。花了很多心思和時間，報告終於完成了，我們體會到許多研究數學的樂趣以及奧妙，這將是我們美好的回憶，往後有機會會繼續研究，繼續欣賞數學的美和享受其中的樂趣。

拾、附錄：

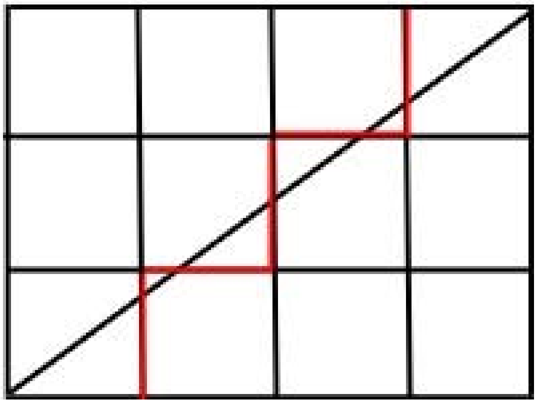


圖 1-1(4x3)

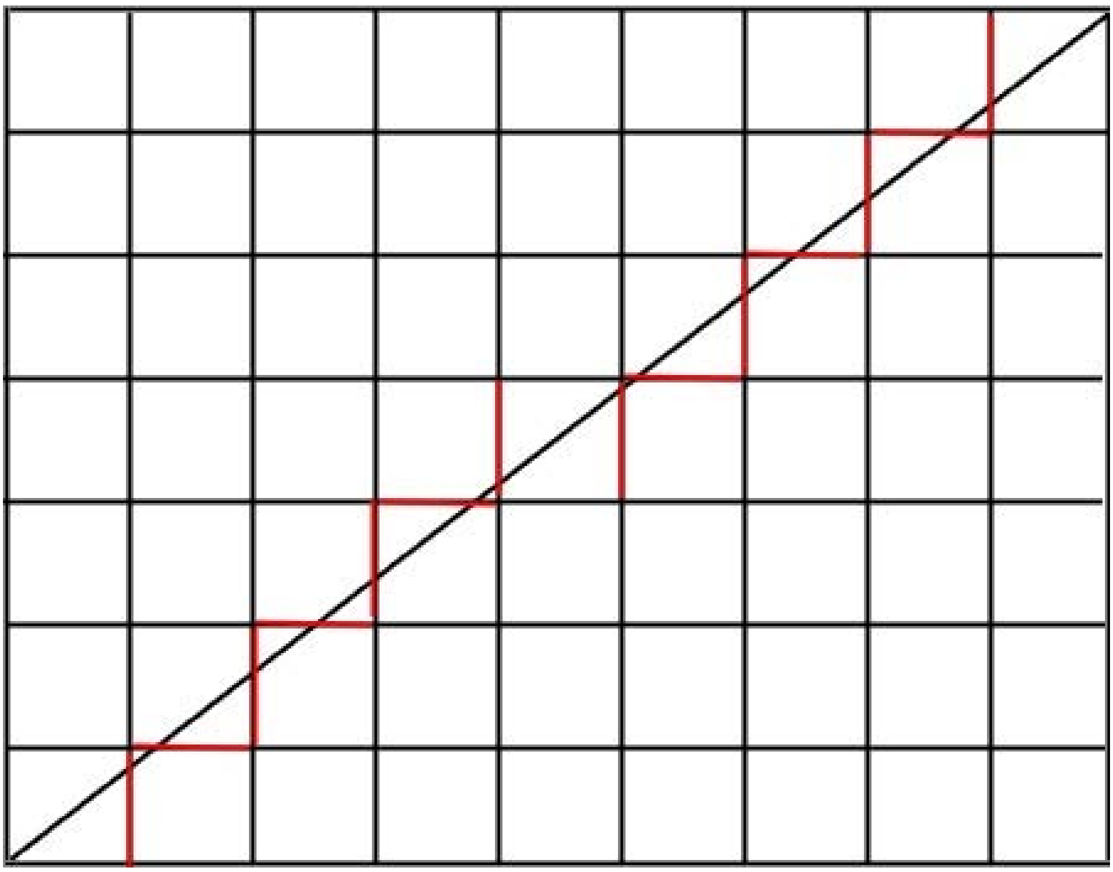


圖 1-2(9x7)

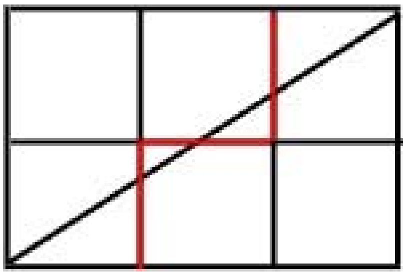


圖 1-3(3x2)

【附件一-1】

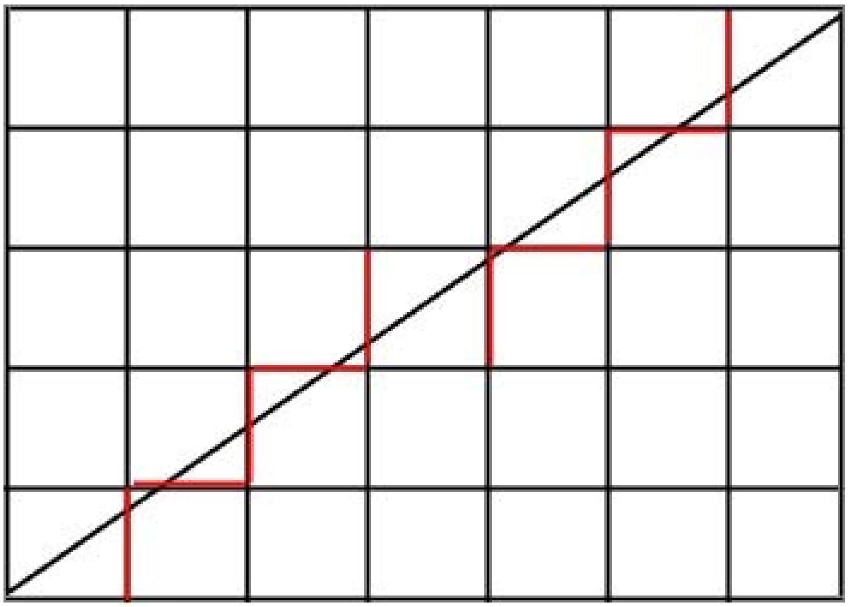


圖 1-4(7x5)

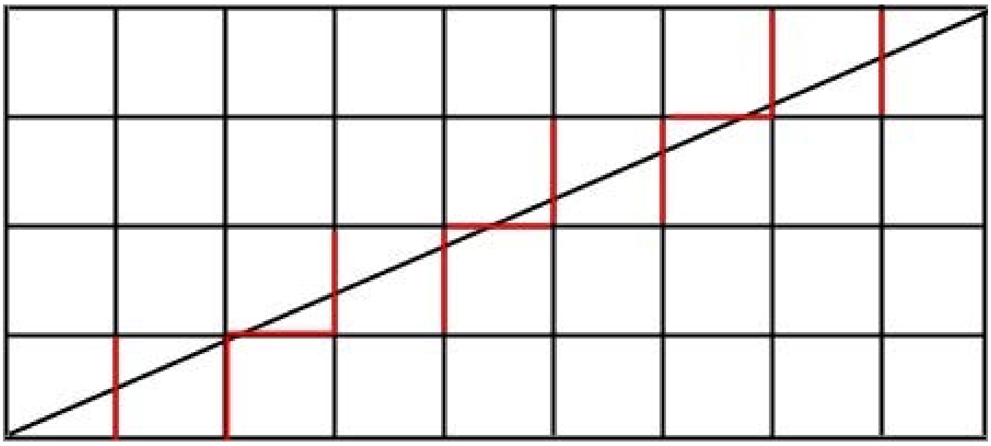


圖 1-5(9x4)

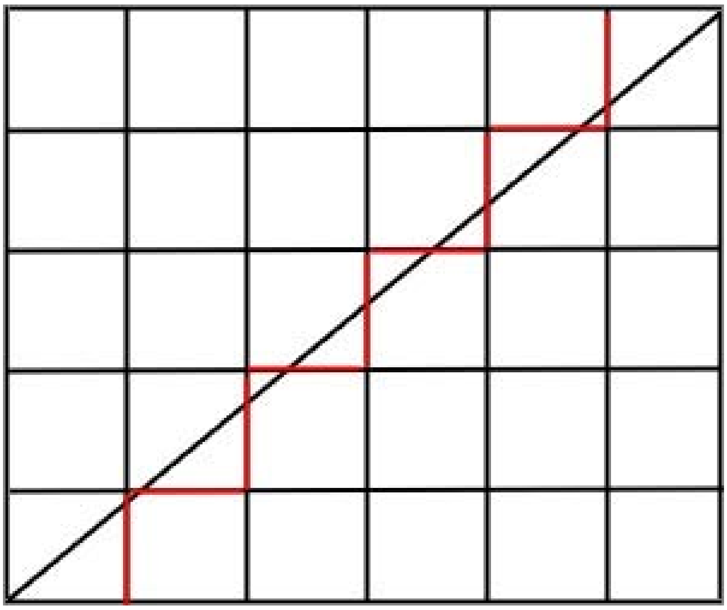


圖 1-7(6x5)

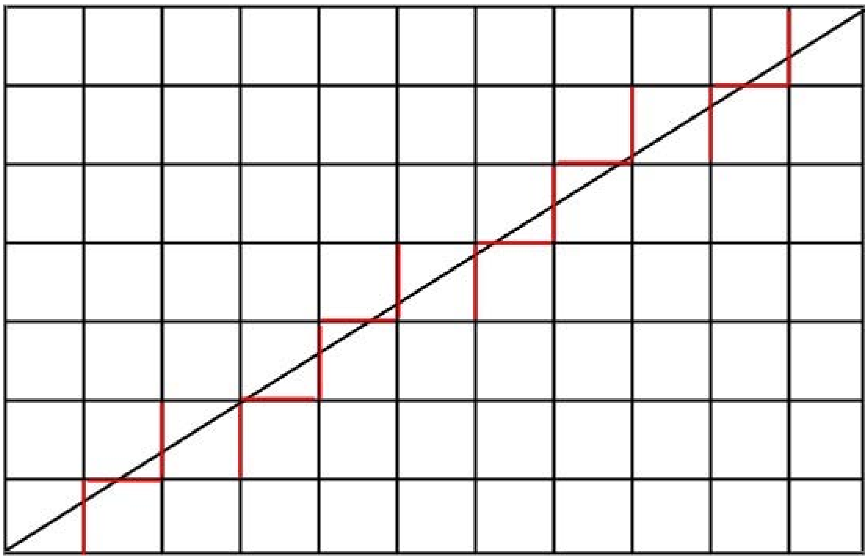


圖 1-8(11x7)

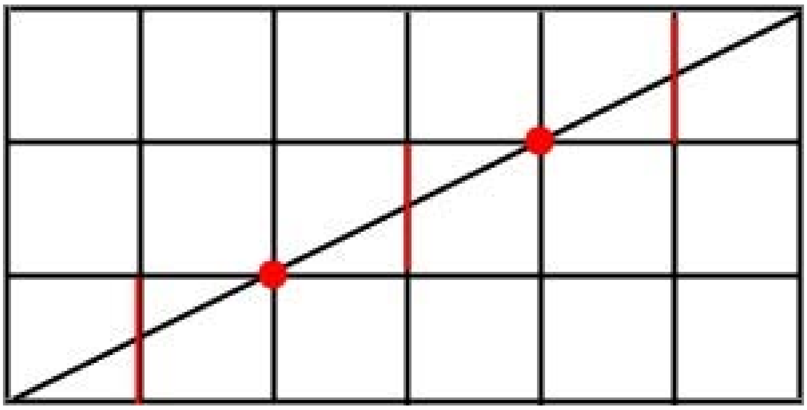


圖 1-9(6x3)

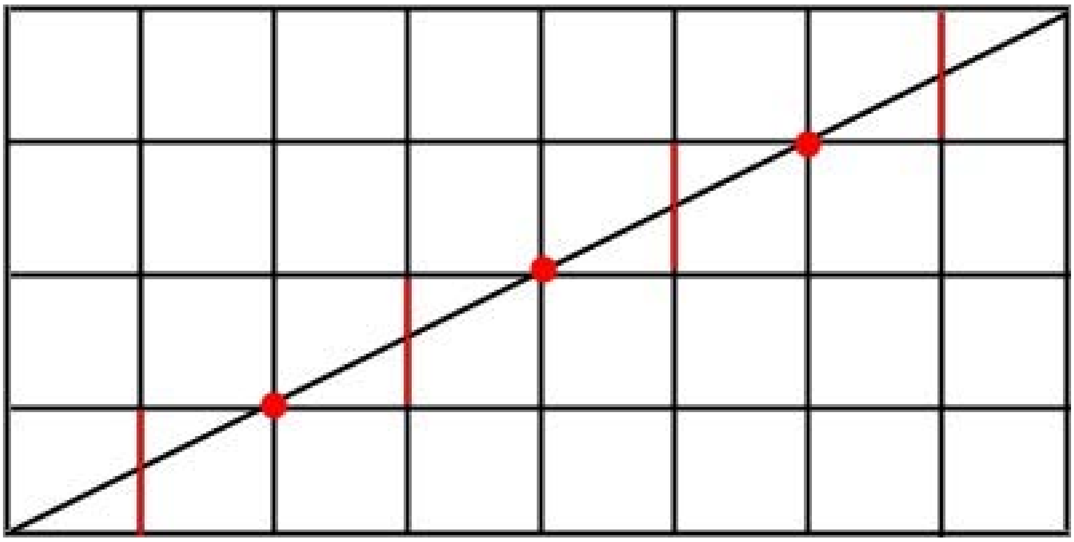


圖 1-10(8x4)

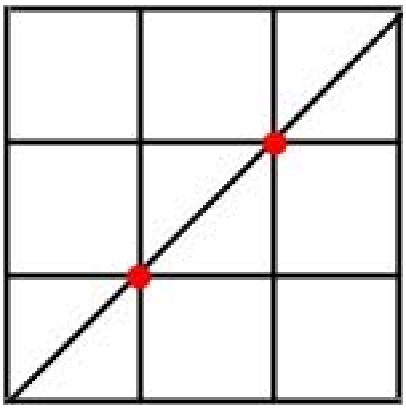


圖 1-13(3x3)

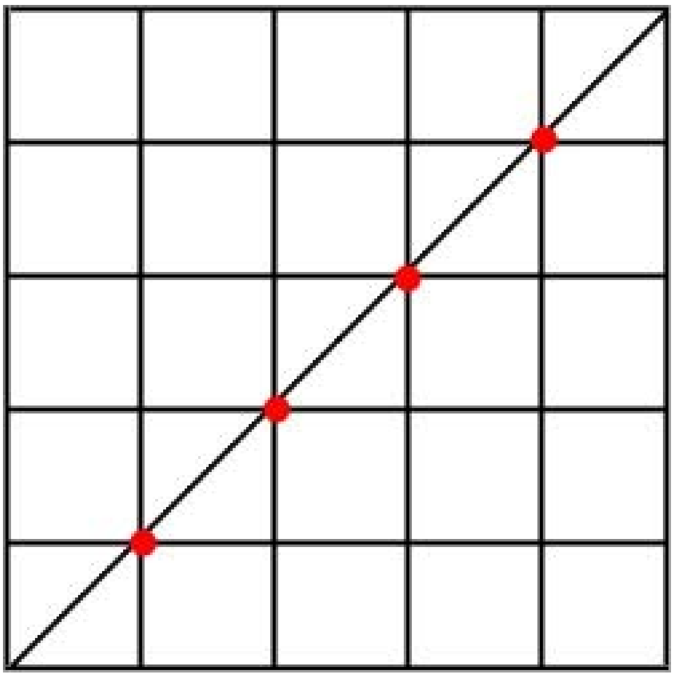


圖 1-14(5x5)

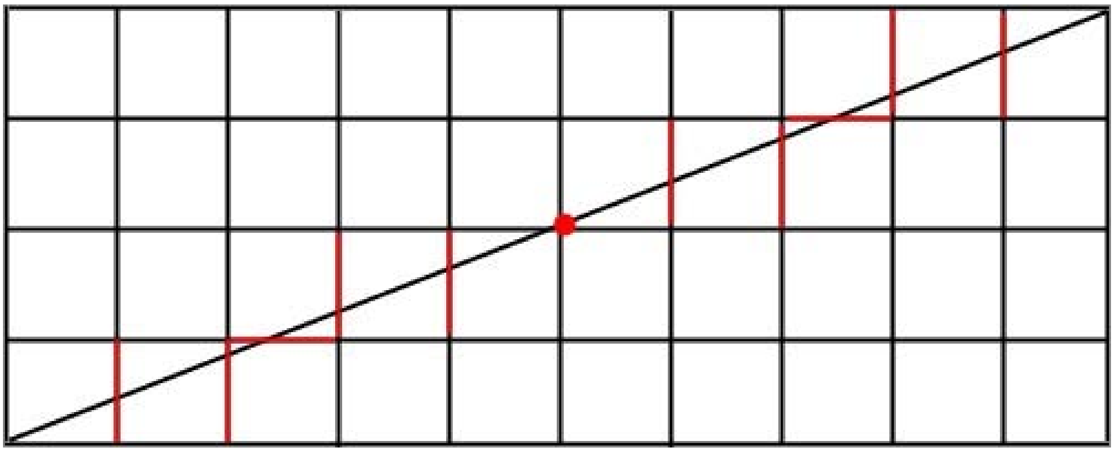


圖 1-11(10x4)

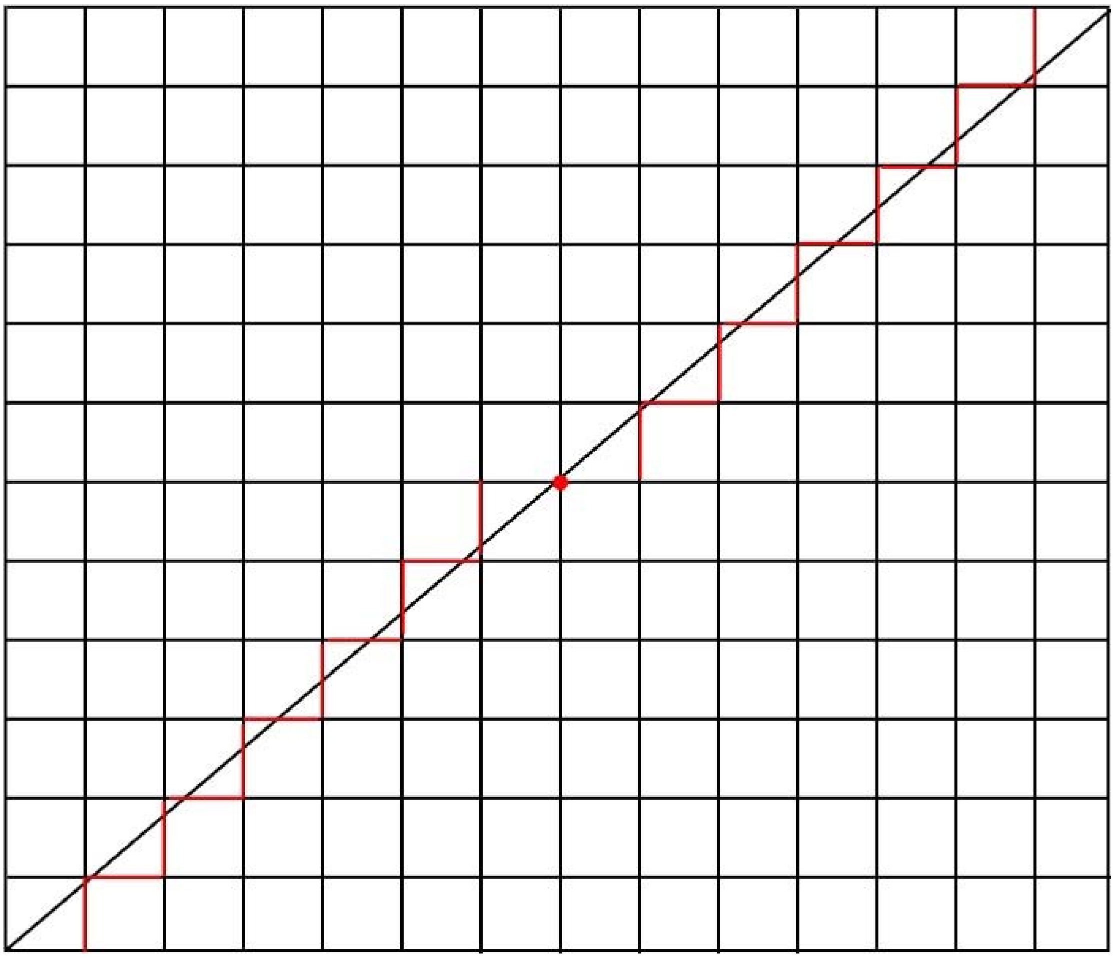
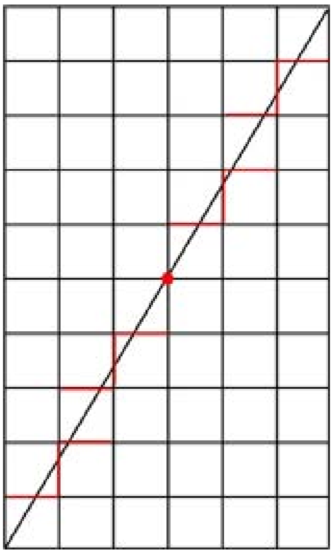
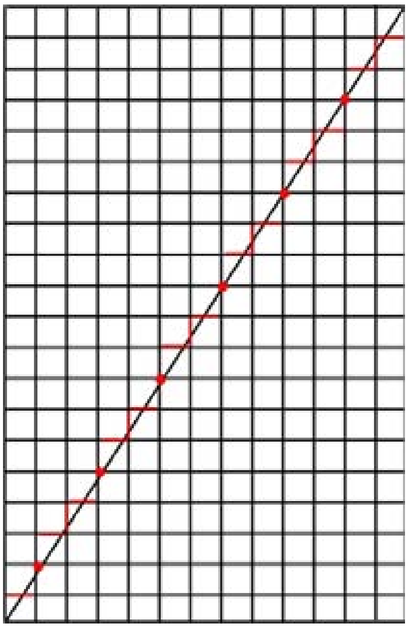


圖 1-12(14x12)

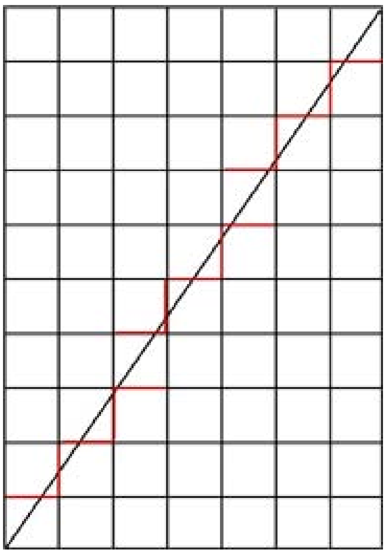
【附件四】



寬與長比值 0.6 (6 ×10)

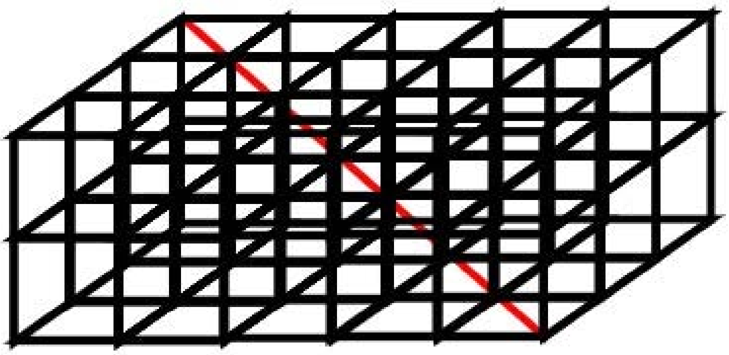


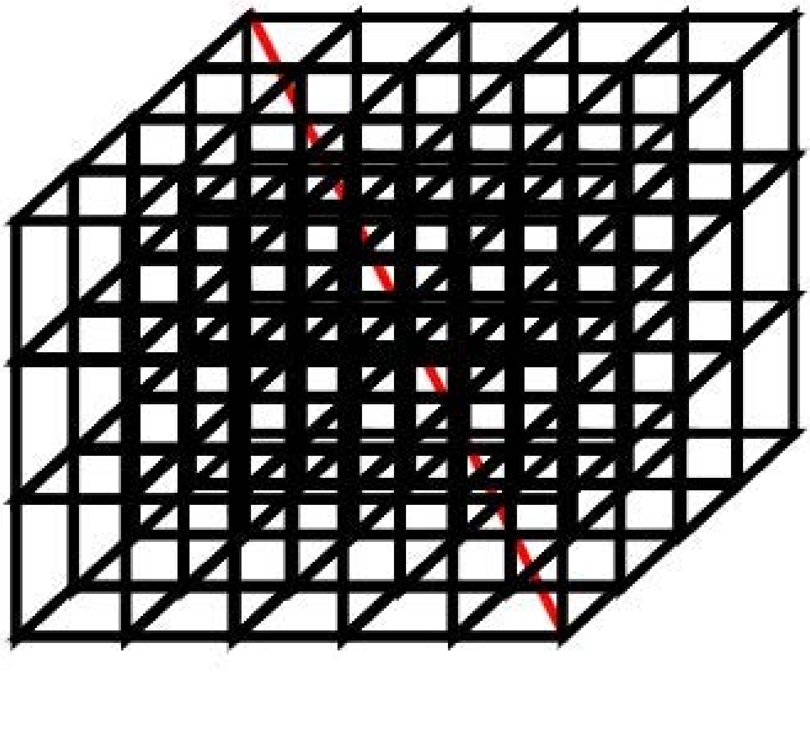
寬與長比值 0.65 (13 ×20)



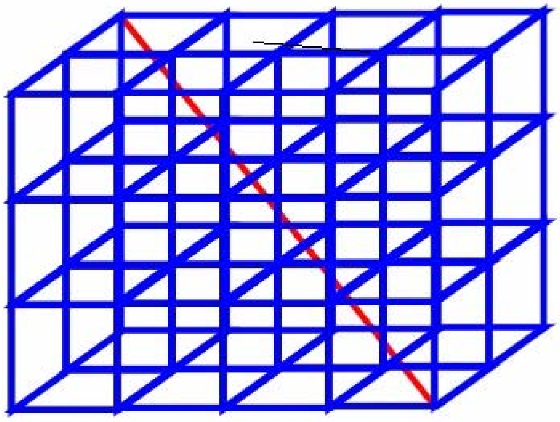
寬與長比值 0.7 (7 ×10)

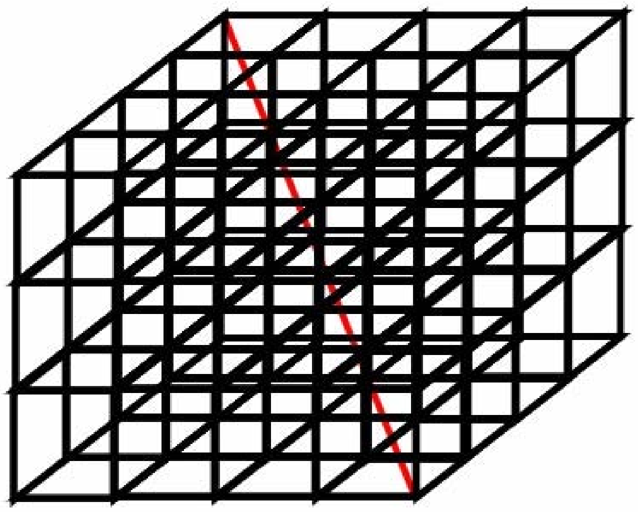
【附件五】



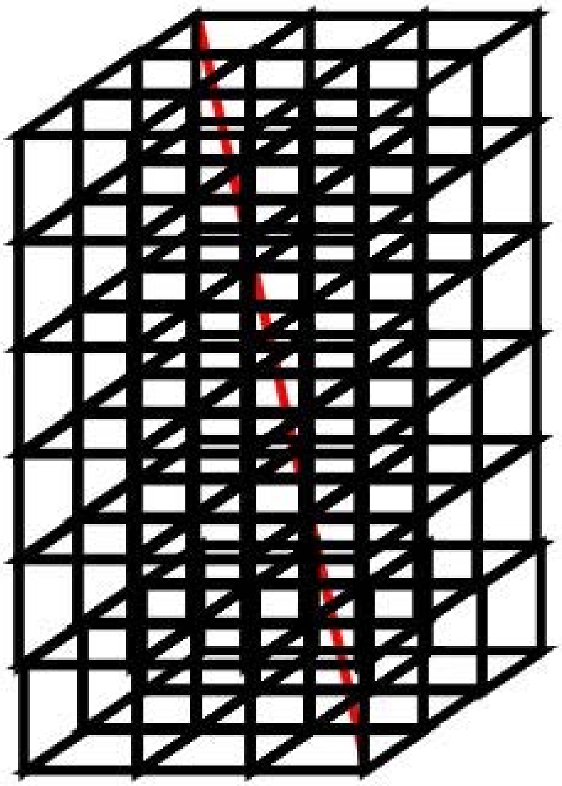


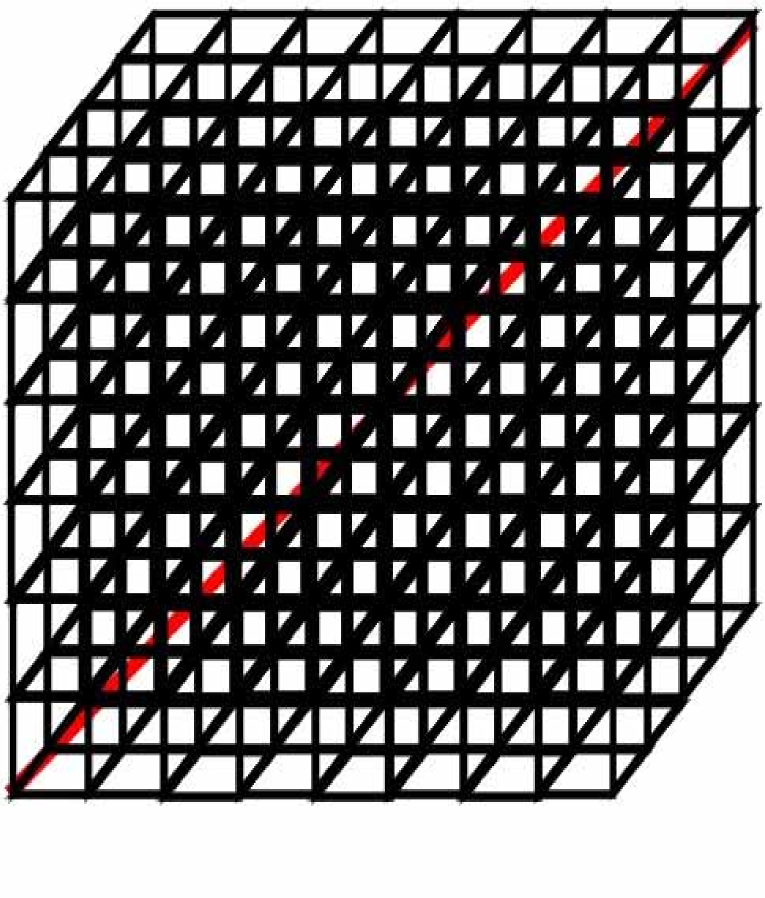
【附件六】

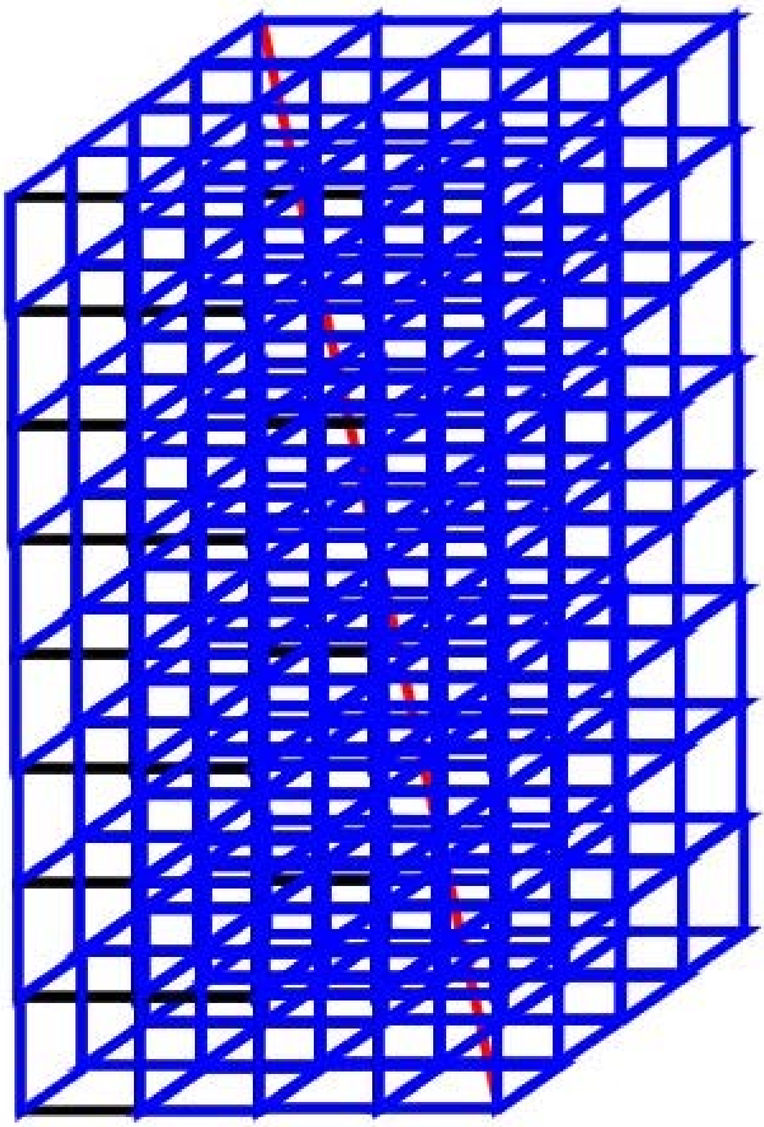




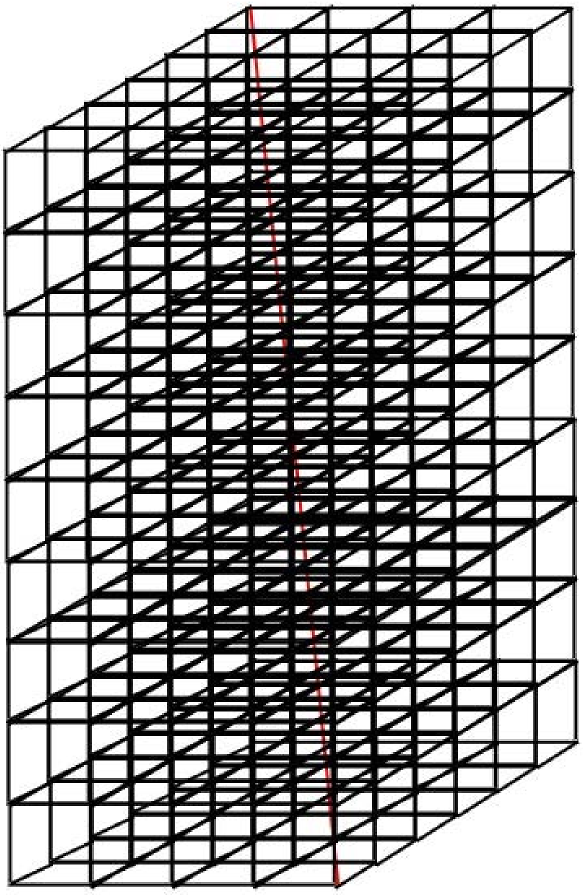
【附件七】

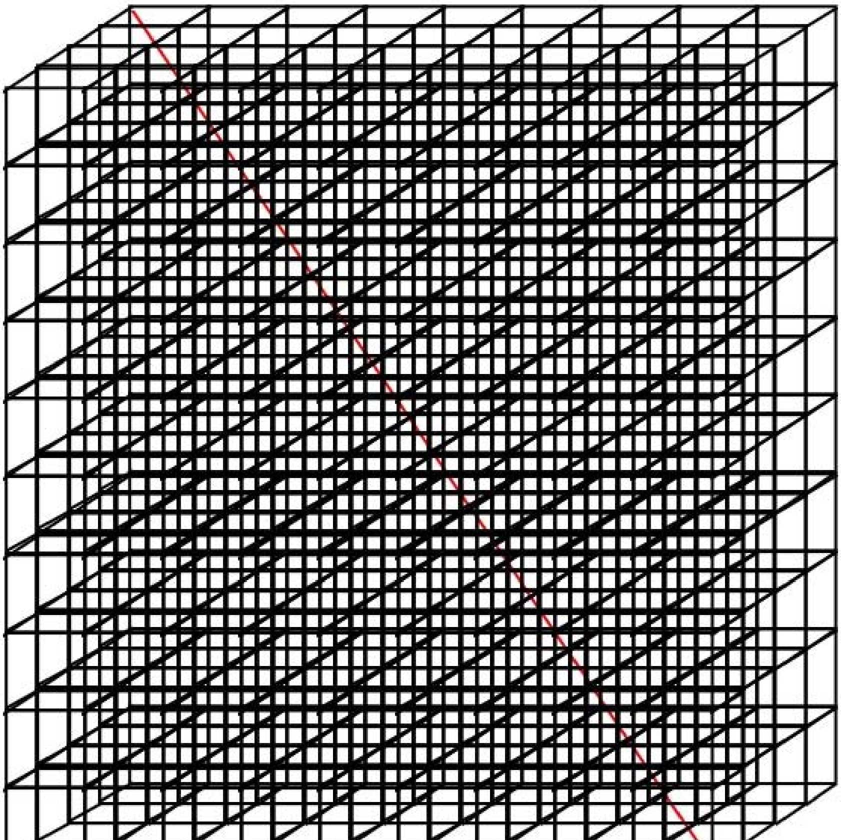




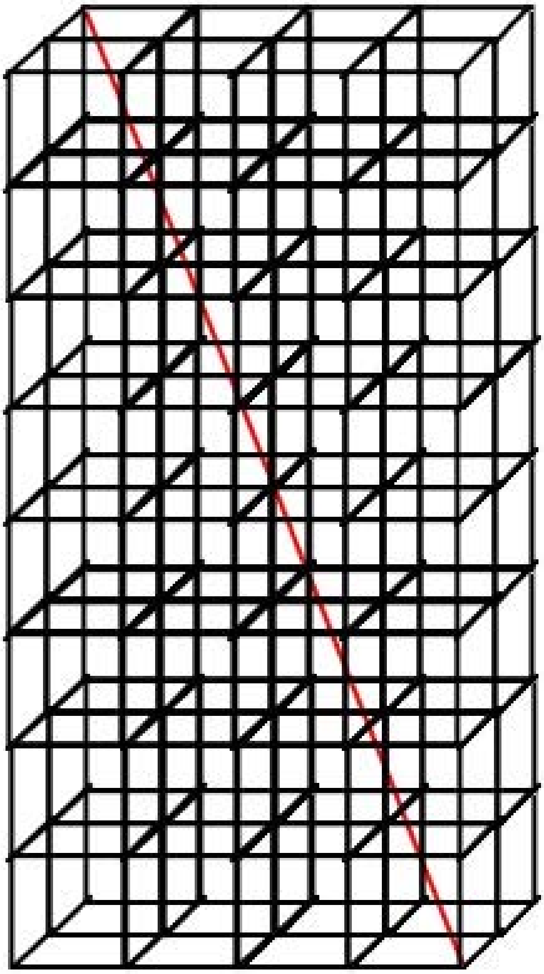


【附件九】

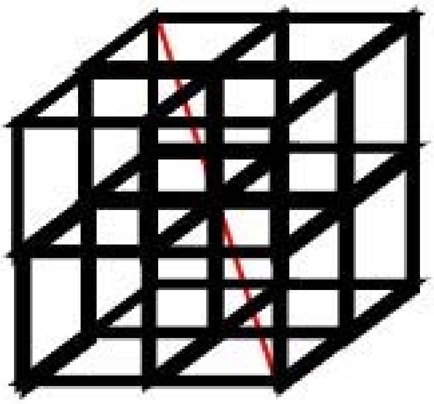




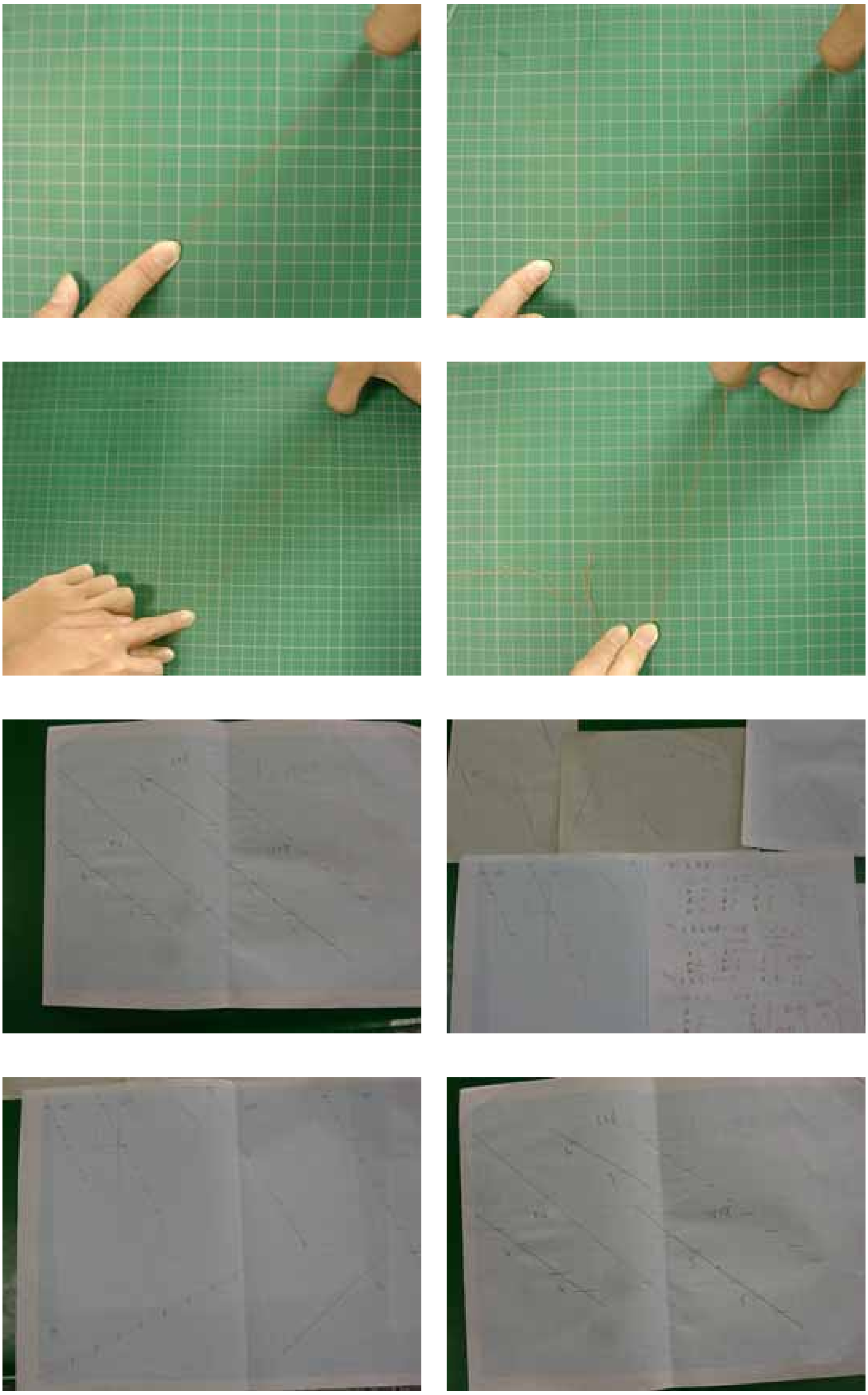
【附件十】



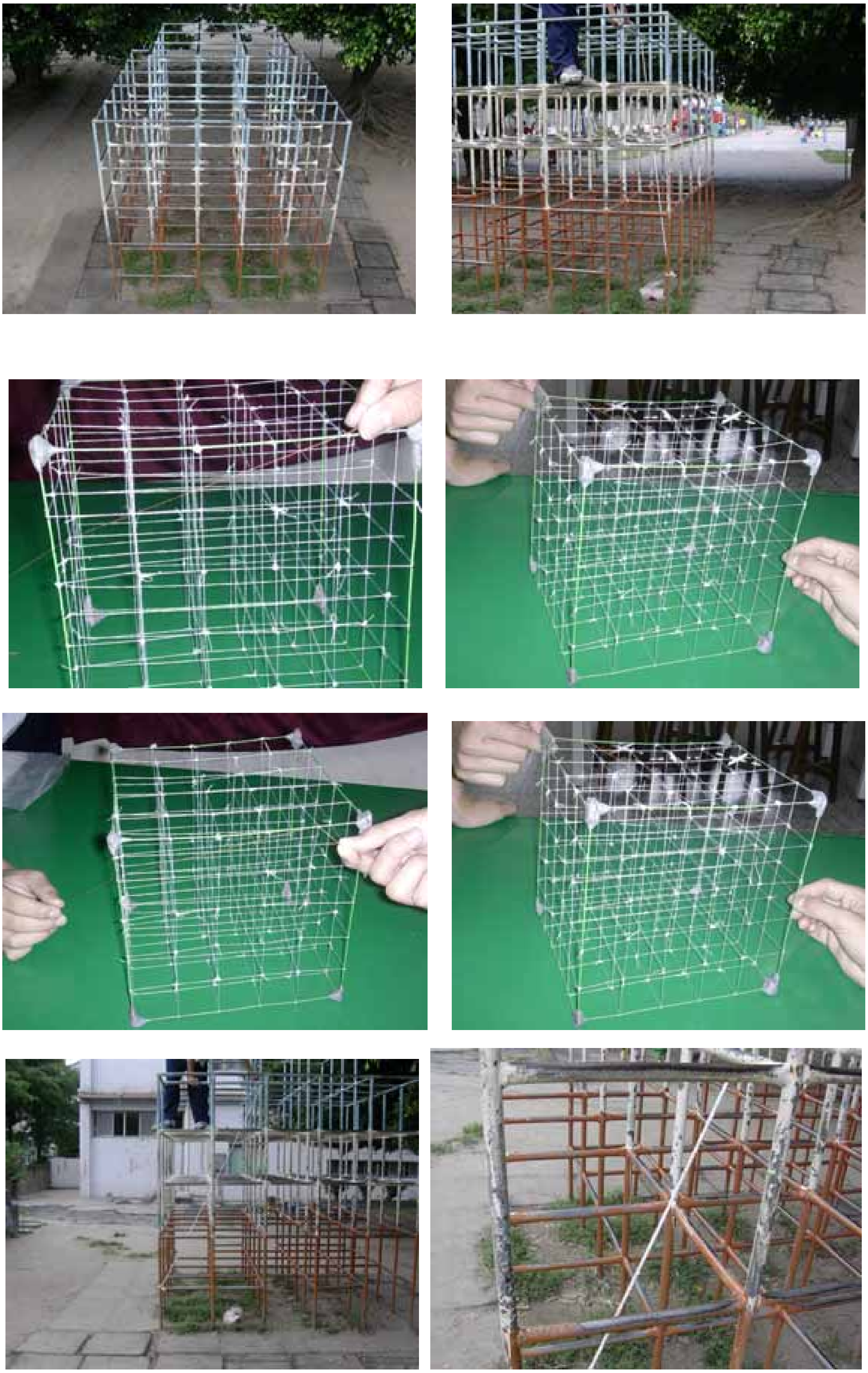
【附件十一】



【附件十二】



附件十三（平面）



附件十四（空間）

【評語】030410

1. 討論詳實。
2. 模型製作很用心。
3. 如能以數學式子呈現結果更佳。