中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳創意獎

030407

條條矩矩法-探討級數的奧妙

學校名稱：桃園縣私立新興高級中學

作者：	指導老師：
國一 陳宗蔚 國一 李東霖 國一 黃亦為 國一 古晉丞	黃敏昇 李政璋

關鍵詞：　條條矩矩法、數型關係法、三角形數

條條矩矩法 - 探討級數的奧妙

摘要

本研究探討「小高斯速算」的推廣。主要往三個方面發展：

(1)自然數一到七次方的和。

(2)三角形數列的變形。

(3)自然數兩兩連乘積數列、三連乘積數列……等的總和。

研究過程當中，主要利用三種方法求解：

(1)**條條矩矩法：**用不同的矩形、不同的排列方法表示各數列，再運用直行或橫列觀察，便可將原式變形。這是我們研究出的方法，以下稱爲「條條矩矩法」。

(2)**三角形法：**先將數列排成一個三角形，再將其往不同的方向旋轉，得三個三角形，再將這三個三角形中每個相對應位置上的數字加起來。這些數值會相等。把這些數加起來後除以 3，即得原式的總和。

(3)**數型關係法：**運用數的拆解將式子變成較易運算的形式。

藉由這三種想法，將高次的級數變成較低次的級數，得到本研究的答案。其中「條條矩矩法」可作爲一般計算級數，或是找規律的工具。

壹、　研究動機

數學王子高斯在西元１７８４年七歲時，在課堂上推導出著名的「小高斯速算」，這對算數有極大的貢獻。不論是在求梯形的面積、級數的和……等，皆用得到。我們在研讀數學書籍時，發現了許多有趣的數列，諸如：三角形數列、四面體數列、四角形數列、金字塔數列…….等等，還無意中看到了下一算式：

$(1^p+2^p+3^p+\cdots\ \cdots+n^p)=(1+2+3+\cdots\ \cdots+n)^{p-1}$，其中寫著當 p=3 時此式才成立。

我們立刻聯想到以前在數學課時曾經學過的兩個公式：

(1)　$1+2+3+4+5+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2)　$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

我們覺得這些式子值得我們去探討，並加以推廣。我們認爲應該也能將這些數列，推導出有如 「小高斯速算」的各種級數的通式。

貳、　研究目的

我們的目的爲研究出通式，以便能夠快速求出各種數列的和，以及快速找出數列中欲找的某項數。我們希望能用排黏土、保麗龍球的方式、排列數字的方式…等，來找出一些有規律的級數和。

例如：一、$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2$

　　　二、$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots\cdots+n^3$

三、$1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\cdots\cdots+n^4$

四、$1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+\cdots\cdots+n^5$

五、$1^6+2^6+3^6+4^6+5^6+\cdots\cdots+n^6$

六、$1^7+2^7+3^7+4^7+5^7+\cdots\cdots+n^7$

七、$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+4+\cdots\cdots+n)$

八、$1+[1+(1+2)]+\cdots\cdots+[1+(1+2)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)]$

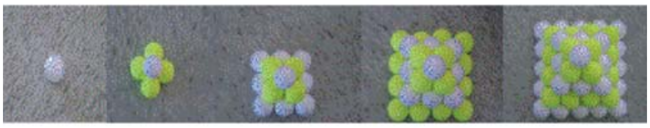
九、$1\times2+2\times3+\cdots\cdots+n(n+1)$

十、$1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$

參、　研究設備及器材

一、電腦
二、電子計算機
三、黏土
四、保麗龍球
五、小牙籤
六、文具

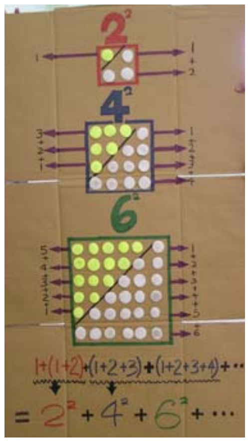
圖一



圖二

肆、　研究過程及方法

爲了能清楚的觀察規律，我們用保麗龍球，及小牙籤做出實際的模型。首先，我們用小牙籤把保麗龍球串成不同大小的三角形和四邊形，再把奇數層的圖形塗上黃色，偶數層不塗色，製作成四面體和金字塔如圖一、二。



我們排出圖一這種形體之後，就可以知道$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+4+\cdots\cdots+n)$爲一個四面體數，而且它的總和就是四面體的體積。於是，我們想到第一種推導方法：將原式改爲四面體的體積，便可算出答案。

接著，我們用黏土製作一個一個的圓餅，排列出如右圖的形狀。此爲$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+4+\cdots\cdots+n)$的另一種表達方式所以我們可以利用這個圖形看出$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+4+\cdots\cdots+n)$等於連續偶數的平方和。

如此便算出了$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+4+\cdots\cdots+n)$，即三角形數的總和。

至於圖二，就是$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2$的幾何表示方法，可以運用金字塔的體積(底面積乘以高乘以三分之一)推導出$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2$的公式，即$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

接下來$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$、$1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4$、$1^5+2^5+3^5+\cdots\cdots+n^5$、

$1^6+2^6+3^6+\cdots\cdots+n^6$、$1^7+2^7+3^7+\cdots\cdots+n^7$，我們都用條條矩矩法推導

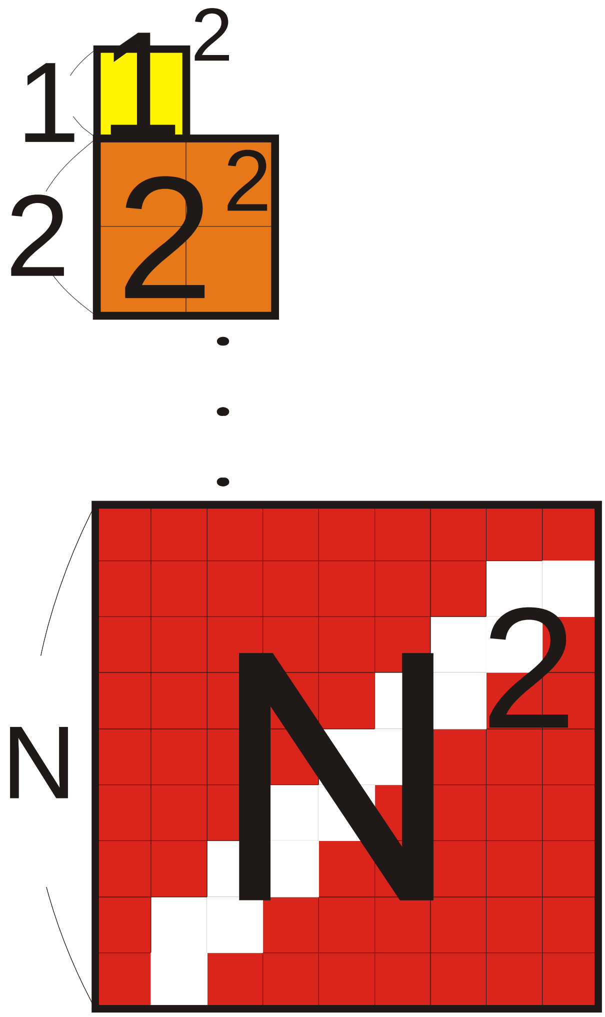
請參考第 6、8、11、14、17 頁。

連乘積數列的算法：$1\times 2+2\times 3+\cdots\cdots+n(n+1)$

我們用黏土排出它的幾何圖形，然後我們發現每一個矩形都是兩個相同的三角形數的和，所以等於兩倍的三角形數列的和。

一、推導金字塔數：$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(一)、條條矩矩法：



當爲第 n 項時

第一區$[(1+2+3+\ldots+n)\times 1]$塊，第二區$[(2+3\ldots+n)\times 1]$塊，第三區$[(3+4+\ldots+n)\times 1]$塊,⋯,

第 n 區$[n\times 1]$塊

故共有

$$1^2+2^2+3^2\ldots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=[(1+2+\ldots+n)\times 1]+[(2+3+\ldots+n)\times 1]+\ldots+(n\times 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)}{2}+\left[\frac{n(n+1)}{2}-1\right]+\ldots+\left[\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)}{2}\times n-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k(k-1)}{2}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)}{2}\times n-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[k(k-1)]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)}{2}\times n-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[k^2-k]$$

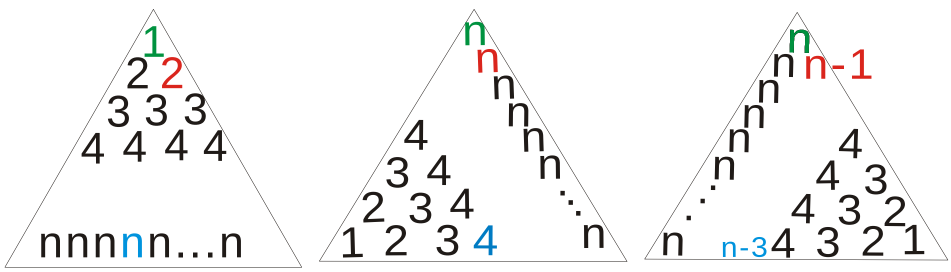
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)}{2}\times n-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2n^2(n+1)+n(n+1)}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(二)、三角形法：



若將相對應的數字相加後得(2n+1)

即可發現和皆相同

個數 n(n+1)/2

故可求出平方和爲 n(n+1)(2n+1)/6

(三)、數型關係法：

$$\rightarrow 1\times 1=1\times 0+1$$
$$=[(2\times 1\times 0)-1\times 0\times(-1)\div 3+1]$$

$$2\times 2=2\times 1+2$$
$$=(3\times 2\times 1-2\times 1\times 0)\div 3+2$$

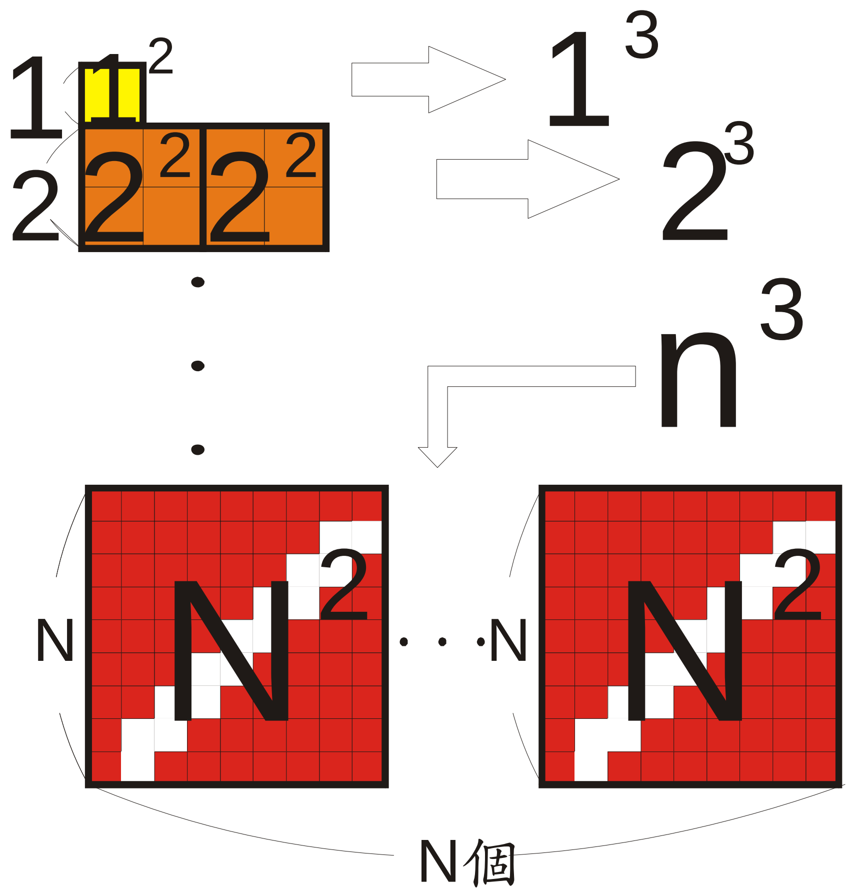
$$\vdots$$

$$n\times n=n(n-1)+n$$
$$=[n(n+1)(n-1)-n(n-1)(n-2)]\div 3+n$$

$$1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2$$
$$=1\times1+2\times2+\ldots\ldots+n\times n$$
$$=[(2\times1\times0)-1\times0\times(-1)]\div3+1+2+\ldots+[n(n+1)(n-1)-n(n-1)(n-2)]\div3+n$$
$$=[(-1)\times0\times(-1)+2\times1\times0-2\times1\times0+3\times2\times1+\ldots+n(n-1)(n-2)+n(n+1)(n-1)]\div3$$
$$+(1+2+\ldots\ldots+n)$$
$$=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)[2(n-1)+3]}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

二、推導：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(一)、條條矩矩法：



當爲第 n 項時

第一塊有$[(1+2++\ldots+n)\times1]$個，第二塊有$[(2+3+\ldots+n)\times3]$個，……，

第 n 塊有$[n(2n-1)]$個

故共有

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=[(1+2++\ldots+n)\times1]+[(2+3+\ldots+n)\times3]+\ldots\ldots+[n(2n-1)]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\times1+\left[\frac{n(n+1)}{2}-1\right]\times3+\cdots\cdots+\left[\frac{n(n+1)}{2}-1-2-\cdots-(n-1)\right]\times(2n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\times[1+3+\cdots\cdots+(2n-1)]-\sum_{k=1}^{k}\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{2}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\times n^2\right]-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[2k^3-3k^2+k\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^3(n+1)}{2}-\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$2\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^3(n+1)}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$2\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^3(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{4}-\frac{n(n+1)}{4}$$

$$2\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{2n^3(n+1)+n(n+1)(2n+1)-n(n+1)}{4}$$

$$2\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n(n+1)\left[2n^2+2n+1-1\right]}{4}$$

$$2\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n(n+1)\left[2n(n+1)\right]}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n(n+1)n(n+1)}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(二)、數型關係法：

$$\boxed{1\times1\times1}=1\times1\times0+1\times1$$
$$=2\times1\times0-1\times0+1\times0+1$$
$$=2\times1\times0+1$$
$$=\left[3\times2\times1\times0-2\times1\times0\times(-1)\right]\div4+1$$

$$\boxed{2\times2\times2}=2\times2\times1+2\times2$$
$$=3\times2\times1-2\times1+2\times1+2$$
$$=3\times2\times1+2$$
$$=(4\times3\times2\times1-3\times2\times1\times0)\div4+2$$

$$\boxed{1\times1\times1+2\times2\times2+3\times3\times3+\ldots+n\times n\times n}$$

$$= \{[3\times2\times1\times0-2\times1\times0\times(-1)]\div4+1\}+\{(4\times3\times2\times1-3\times2\times1\times0)\div4+2\}$$
$$+\{[(n+2)(n+1)(n)(n-1)-(n+1)(n)(n-1)(n-2)]\div4+n\}$$

$$= \frac{1}{4}[(-2)\times(-1)\times0\times1+\times3\times2\times1\times0-3\times2\times1\times0+4\times3\times2\times1+\cdots$$
$$+(n+1)n(n-1)(n-2)+(n+2)(n+1)n(n-1)\ ]$$
$$+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$

$$= \frac{1}{4}(n-1)(n)(n+1)(n+2)+\frac{1}{2}(n)(n+1)$$

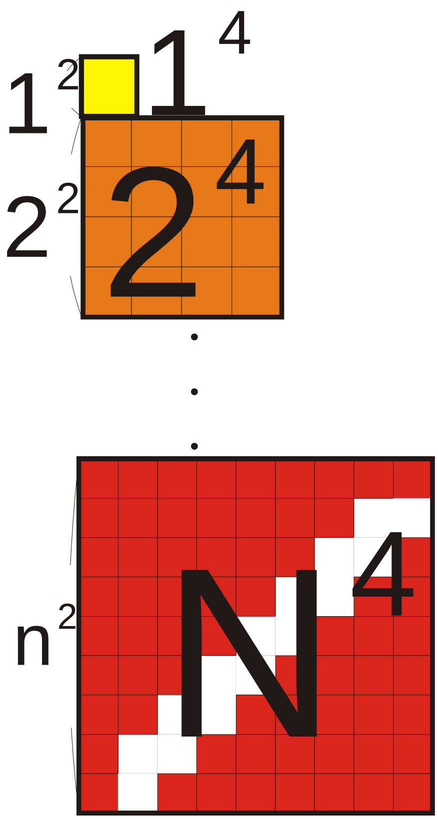
$$= \frac{1}{4}n(n+1)[(n+2)(n-1)+2]$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2+2)$$

$$= \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

三、推導：$1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\ldots\ldots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

(一)、條條矩矩法：



當爲第 n 項時

第一區有$[(1^2+2^2+\cdots+n^2)\times1]$個，第二區有$[(2^2+3^2+\cdots+n^2)\times3]$個，...，

第 n 區有$\left[n^2\times(2n-1)\right]$個

故共有

$$1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\cdots\cdots+n^4=\sum_{k=1}^{n}k^4$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\left[\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)\times1\right]+\left[\left(2^2+3^2+\cdots+n^2\right)\times3\right]+\ldots\ldots+\left[n^2\times(2n-1)\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\times1+\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1^2\right]\times3+\cdots\cdots+$$

$$\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]\times(2n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\times\left[1+3+\cdots\cdots+(2n-1)\right]-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left[k(k-1)(2k-1)(2k-1)\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n^3(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left[4k^4-8k^3+5k^2-k\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n^3(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4}{6}\sum_{k=1}^{n}k^4+\frac{8}{6}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{5}{6}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\frac{5}{3}\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n^3(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{5}{6}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\frac{5}{3}\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n^3(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4}{3}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{5}{6}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{5}{3}\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n^3(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n+1)^2}{3}-\frac{5n(n+1)(2n+1)}{36}+\frac{n(n+1)}{12}$$

$$\frac{5}{3}\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{6n^3(n+1)(2n+1)+12n^2(n+1)^2-5n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{36}$$

$$\frac{5}{3}\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)\left[6n^2(2n+1)+12n(n+1)-5(2n+1)+3\right]}{36}$$

$$\frac{5}{3}\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(12n^3+18n^2+2n-2)}{36}$$

$$\frac{5}{3}\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2-n-1)}{18}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2-n-1)}{30}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

(二)、數型關係法：

$\rightarrow 1\times1\times1\times1$

$= 1\times1\times1\times0+1\times1\times1$

$$= 1\times1\times1\times0+1\times1\times0+1\times1$$
$$= 1\times2\times1\times0+1\times1$$
$$= \left(3\times2\times1\times0-2\times1\times0\times(-1)\right)\div4\times1+1\times1$$
$$\to 2\times2\times2\times2$$
$$=2\times2\times2\times1+2\times2\times2$$
$$=2\times2\times2\times1+2\times2+1\times2\times2$$
$$=2\times3\times2\times1+2\times2$$
$$=\left(4\times3\times2\times1-3\times2\times1\times0\right)\div4\times2+2\times2$$
$$\vdots$$
$$\to n\times n\times n\times n$$
$$=n\times n\times n\times(n-1)+n\times n\times n$$
$$=n\times n\times n\times(n-1)+n\times n\times(n-1)+n\times n$$
$$=n\times(n+1)\times n\times(n-1)+n\times n$$
$$=(n+2)(n+1)n(n-1)-(n+1)n(n-1)(n-2)\div4\times n+n\times n$$

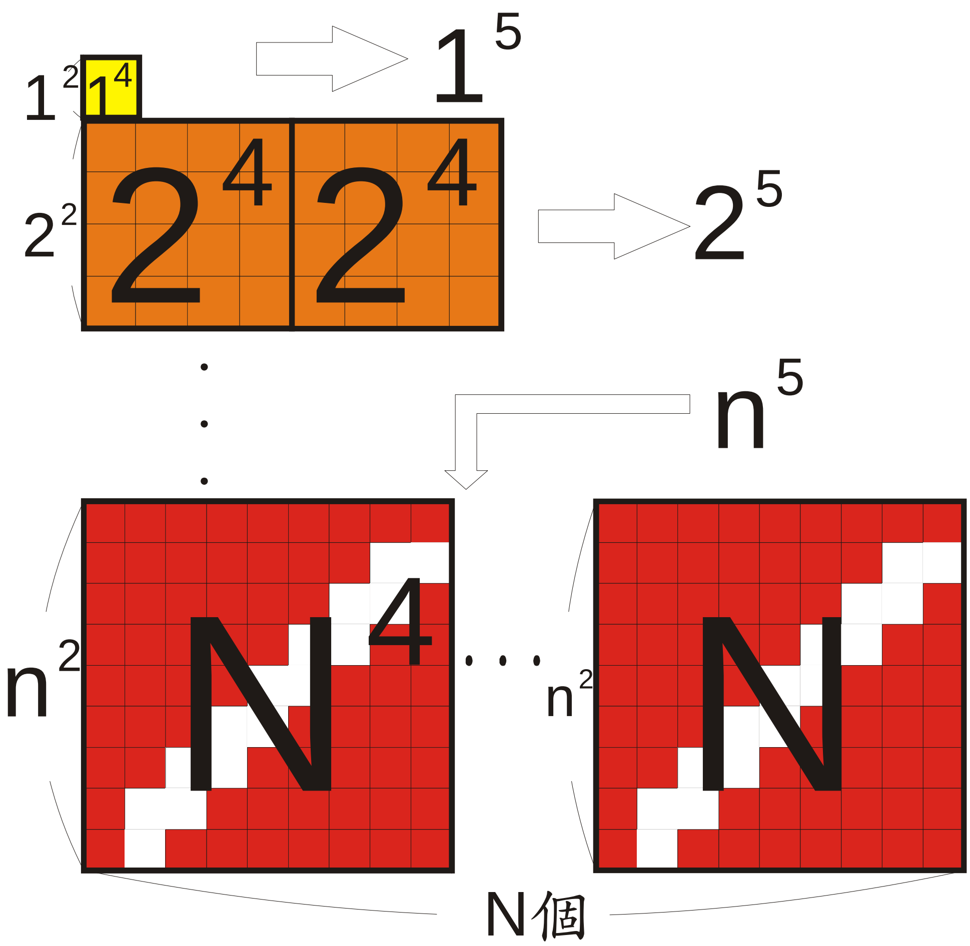
故共有

$$1^4+2^4+3^4+4^4+......+n^4$$
$$=\left(\frac{3\times2\times1\times0-2\times1\times0\times(-1)}{4}\right)\times1+1^2+\frac{(4\times3\times2\times1-3\times2\times1\times0)}{4}\times2+2^2$$
$$+....\frac{\{(n+2)(n+1)n(n-1)-(n+1)n(n-1)(n-2)\}}{4}\times n+n^2$$

$$=\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)+\{[-2\times1\times0\times(-1)+(3\times2\times1\times0)\ ]\times1$$
$$+[-(3\times2\times1\times0)+(4\times3\times2\times1)]\times2+....$$
$$+[-(n+1)n(n-1)(n-2)+(n+2)(n+1)n(n-1)\ ]\times n\}\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{4}\times\{[-2\times1\times0\times(-1)-(3\times2\times1\times0)-...-(n+1)n(n-1)(n-2)]$$
$$+(n+2)(n+1)n(n-1)\times n\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{4}\times\left[(n+2)(n+1)n^2(n-1)-\frac{n(n+1)(n-1)(n+2)(n-2)}{5}\right]$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{20}n(n+1)(n-1)(n+2)(4n+2)$$
$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)[5+3(n-1)(n+2)]$$
$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)$$

四、推導：$1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+\cdots\cdots+n^5=\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$

(一)、條條矩矩法：



當爲第 n 項時

第一行$(1^2+2^2+\ldots+n^2)\times 1$個，第二行$(2^2+3^2+\ldots+n^2)\times 7$個，……，

第n行$n^2\times\left[n^3-(n-1)^3\right]$個

共$(1^2+2^2+\ldots+n^2)\times 1+(2^2+3^2+\ldots+n^2)\times 7+\cdots\cdots+n^2\times\left[n^3-(n-1)^3\right]$個

故共有

$$1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+\cdots\cdots+n^5=\sum_{k=1}^{n}k^5$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=(1^2+2^2+\ldots+n^2)\times 1+(2^2+3^2+\ldots+n^2)\times 7+\cdots\cdots+n^2\times\left[n^3-(n-1)^3\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\times 1+\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1^2\right]\times 7+\cdots\cdots+\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

$$\times\left(3n^2-3n+1\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2-3k+1\right)\right]-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\times\left(3k^2-3k+1\right)\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}\right]-\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\frac{3n(n+1)}{2}\right]+$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times n-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left[k(k-1)(2k-1)(3k^2-3k+1)\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{12}-\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{4}+\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left[6k^5-15k^4+14k^3-6k^2+k\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2-3n^2(n+1)^2(2n+1)+2n^2(n+1)(2n+1)}{12}$$

$$-\sum_{k=1}^{n}k^5+\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n}k^4-\frac{7}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$2\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{2n^4(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{12}-\frac{7n^2(n+1)^2}{12}$$

$$+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{12}$$

$$2\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{2n^4(n+1)(2n+1)+n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-7n^2(n+1)^2}{12}$$

$$+\frac{2n(n+1)(2n+1)}{12}-\frac{n(n+1)}{12}$$

$$2\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{n(n+1)\left(4n^4+8n^3+2n^2-2n\right)}{12}$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{n^2(n+1)^2\left(2n^2+2n-1\right)}{12}$$

(二)、數型關係法：

$\rightarrow 1\times1\times1\times1\times1$

$= 1\times1\times1\times1\times0+1\times1\times1\times1$

$= 2\times1\times1\times1\times0+1\times1\times1$

$= 1\times1\times2\times1\times0+1\times1\times1$

$= 1^2\times(2\times1\times0)+1^3$

$\rightarrow 2\times2\times2\times2\times2$

$=2\times2\times2\times2\times1+2\times2\times2\times2$

$=3\times2\times2\times2\times1+2\times2\times2$

$= 2\times2\times3\times2\times1+2\times2\times$

$$= 2^2 \times (3 \times 2 \times 1) + 2^3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\to n \times n \times n \times n \times n$$

$$= n \times n \times n \times n \times (n-1) + n \times n \times n \times n$$

$$= (n+1) \times n \times n \times n \times (n-1) + n \times n \times n$$

$$= n^2 \times \left[(n+1) \times n \times (n-1)\right] + n^3$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots\cdots + n^5 = \sum_{k=1}^{n} k^5$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \left\{1^2 \times \left[3 \times 2 \times 1 \times 0 - 2 \times 1 \times 0 \times (-1)\right] \div 4 + 1^3\right\}$$

$$+ \left[2^2 \times \left(4 \times 3 \times 2 \times 1 - 3 \times 2 \times 1 \times 0\right) \div 4 + 2^3\right]$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$+ \left\{n^2 \times \left[(n-1)n(n+1)(n+2) - (n-2)(n-1)n(n+1)\right] \div 4\right\} + n^3$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \left(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right) + \frac{1}{4}\{(-2) \times (-1) \times 0 \times 1 \times 1^2 \quad - 3 \times 2 \times 1 \times 0 \times \left(2^2 - 1^2\right)$$

$$- (n-2)(n-1)n(n+1) \times \left[n^2 - (n-1)^2\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{4} \times \{-\left[2 \times 1 \times 0 \times (-1) \times 1 + 3 \times 2 \times 1 \times 0 \times 3 + \ldots + (n+1)n(n-1)(n-2)(2n-1)\right]$$

$$+ (n+2)(n+1)n(n-1)n^2\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n^3(n-1)(n+1)(n+2)}{4} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)k(k-1)(k-2)(2k-1)\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)\left[(n+1) + n(n-1)(n+2)\right]}{4} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[2k^5 - 5k^4 + 5k^2 - 2k\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)(n^3 + n^2 - n + 1)}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^5 + \frac{5}{4}\sum_{k=1}^{n} k^4 - \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)\left(n^3 + n^2 - n + 1\right)}{4} + \frac{1}{24}n(n+1)(2n+1)\left(3n^3 + 3n - 1\right) - \frac{5}{24}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}n(n+1)$$

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{6n(n+1)\left[n(n^3 + n^2 - n + 1) + 1\right] + \left[n(n+1)(3n^2 + 3n - 1)\right] - 5n(n+1)(2n+1)}{24}$$

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{6n(n+1)(n^4 + n^3 - n^2 + n + 1) + n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1 - 5)}{24}$$

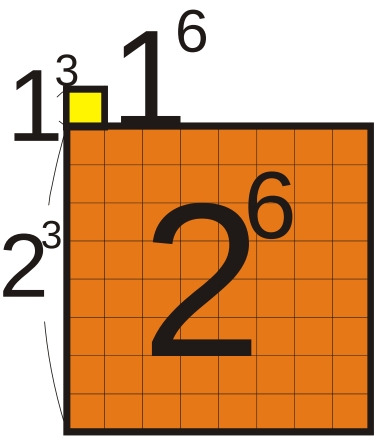
$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{n(n+1)(2n^4+2n^3-2n^2+2n+2+2n^3+3n^2-3n-2)}{8}$$

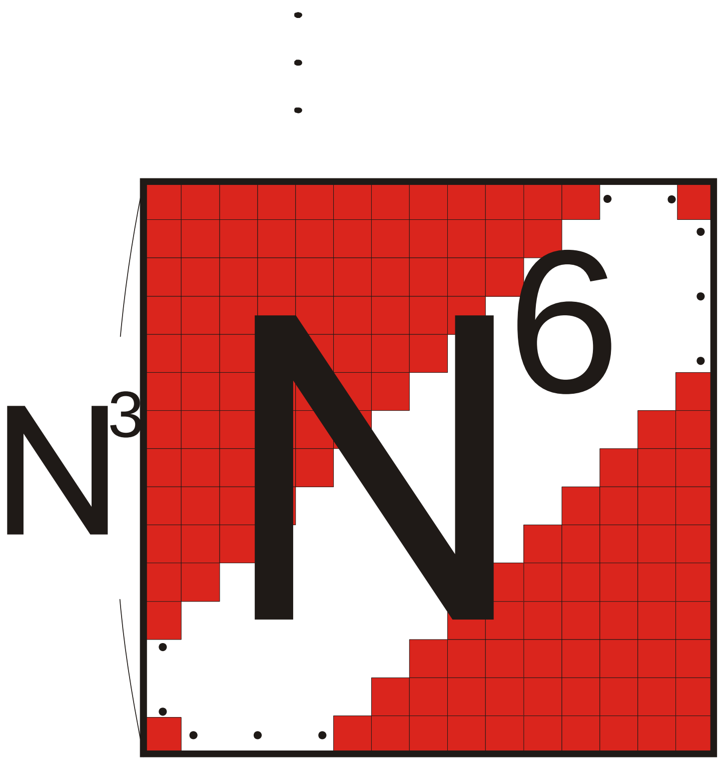
$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{n(n+1)(2n^4+4n^3+n^2-n)}{12}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

五、推導：$1^6+2^6+3^6+4^6+5^6+\cdots\cdots+n^6=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}$

(一)、條條矩矩法：





$$\sum_{k=1}^{n}k^6=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[k^3-(k-1)^3\right]\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{(k-1)^2\times k^2}{4}\right]\right\}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\left[3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3\times\frac{n(n+1)}{2}+n\right]$$

$$-\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}k^6+\frac{9}{4}\sum_{k=1}^{n}k^5-\frac{10}{4}\sum_{k=1}^{n}k^4+\frac{5}{4}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$\frac{7}{4}\sum_{k=1}^{n}k^6=\frac{n^3(n+1)^3(2n+1)}{8}-\frac{3n^3(n+1)^3}{8}+\frac{n^3(n+1)^2}{4}+\frac{9}{4}\times\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$-\frac{5}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}+\frac{5}{4}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)\left[3n^2(n+1)^2-2(3n^2+3n-1)-1\right]}{24}$$

$$+\frac{n^2(n+1)^2\left[-6n(n+1)+4n+3(2n^2+2n-1)+5\right]}{16}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n^2-6n+1)}{24}+\frac{n^2(n+1)^2(4n+2)}{16}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n^2-6n+1+3n^2+3n)}{24}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{24}$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}k^6=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}$$

(二)、數型關係法：

$$1\times1\times1\times1\times1\times1$$
$$=1\times1\times1\times1\times1\times0+1\times1\times1\times1\times1\times1$$
$$=2\times1\times1\times1\times1\times0+1\times1\times1\times1$$
$$=(2\times1\times0)\times1^3+1^4$$
$$=\{(3\times2\times1\times0)-[2\times1\times0\times(-1)]\}\div4\times1^3+1^4$$

$$2\times2\times2\times2\times2\times2$$
$$=2\times2\times2\times2\times2\times1+2\times2\times2\times2\times2$$
$$=3\times2\times2\times2\times2\times1+2\times2\times2\times2$$
$$=(3\times2\times1)\times2^3+2^4$$
$$=[(4\times3\times2\times1)-(3\times2\times1\times0)]\div4\times2^3+2^4$$

$$n\times n\times n\times n\times n\times n$$
$$=n\times n\times n\times n\times n\times(n-1)+n\times n\times n\times n\times n$$
$$=(n+1)\times n\times n\times n\times n\times(n-1)+n\times n\times n\times n$$

$$=\left[(n+1)\times n\times(n-1)\right]\times n^3+n^4$$

$$=\{[(n+2)(n+1)n(n-1)]-[(n+1)n(n-1)(n-2)]\}\div 4\times n^3+n^4$$

$$\therefore 1^6+2^6+3^6+\cdots\cdots+n^6=\sum_{n=1}^{n}n^6$$

$$=\{(3\times 2\times 1\times 0)-2\times 1\times 0\times(-1)\}\div 4\times 1^3+1^4+[(4\times 3\times 2\times 1)-(3\times 2\times 1\times 0)]\div 4\times 2^3+2^4$$

$$+\cdots\cdots+\{[(n+2)(n+1)n(n-1)-(n+1)n(n-1)(n-2)]\}\div 4\times n^3+n^4$$

$$=\left(1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4\right)$$

$$+\frac{1}{4}\{-[(-1)\times 0\times 1\times 2]\times 1^3+(0\times 1\times 2\times 3)\times 1^3$$

$$-(0\times 1\times 2\times 3)\times 2^3+(1\times 2\times 3\times 4)\times 2$$

$$-\cdots\cdots-[(\mathrm{n}-2)(n-1)n(n+1)]\times n^3+[(n-1)n(n+1)(n+2)]\times n^3$$

$$\sum_{n=1}^{n}n^6=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}+\{-[(-1)\times 0\times 1\times 2]\times 1^3-(0\times 1\times 2\times 3)\times 7-\ldots\ldots-[(n-2)(n-1)n(n+1)]\times$$

$$(3n^2-3n+1)+(n-1)n(n+1)(n+2)\times n^3\}$$

$$\sum_{n=1}^{n}n^6=\frac{1}{4}\left\{n^3\times(n+2)(n+1)n(n-1)-\sum_{n=1}^{n}[(n-2)(n-1)n(n+1)(3n^2-3n+1)]\right\}$$

$$+\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$\sum_{n=1}^{n}n^6=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}+\frac{1}{4}\{[n^4(n-1)(n+1)(n+2)]$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{n}\left[3n^6-9n^5+4n^4+7n^3-7n^2+2n\right]\right\}$$

$$\sum_{n=1}^{n}n^6=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}+\frac{n^4(n-1)(n+1)(n+2)}{4}-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{n}n^6+\frac{9}{4}\sum_{n=1}^{n}n^5-\sum_{n=1}^{n}n^4-\frac{7}{4}\sum_{n=1}^{n}n^3+\frac{7}{4}\sum_{n=1}^{n}n^2$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n}n$$

$$\frac{7}{4}\sum_{n=1}^{n}n^6=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}+\frac{n^4(n-1)(n+1)(n+2)}{4}+\frac{9}{4}\times\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$-\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}-\frac{7}{4}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{7}{4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$-\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{7}{4}\sum_{n=1}^{n} n^6 = \frac{1}{48}\Big[12n^4(n-1)(n+1)(n+2)+9n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)-21n^2(n+1)^2$$

$$+14n(n+1)(2n+1)-12n(n+1)\Big]$$

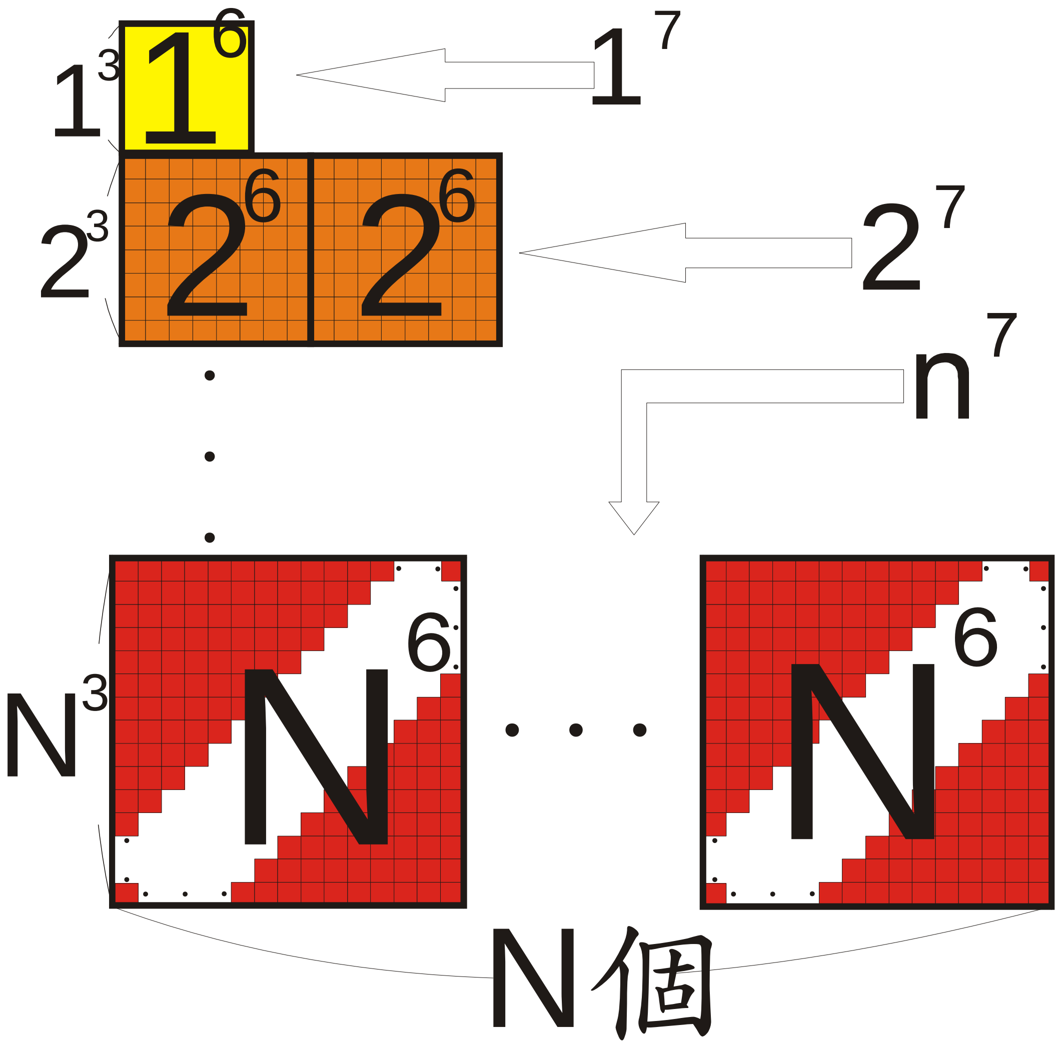
$$\frac{7}{4}\sum_{n=1}^{n} n^6 = \frac{1}{48}\{n(n+1)[12n^3(n-1)(n+2)+9n(n+1)(2n^2+2n-1)-21n(n+1)+14(2n+1)-12]\}$$

$$\frac{7}{4}\sum_{n=1}^{n} n^6 = \frac{1}{48}\left[n(n+1)(12n^5+30n^4+12n^3-12n^2-2n+2)\right]$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}$$

六、推導：$1^7+2^7+3^7+4^7+5^7+\cdots\cdots+n^7=\dfrac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}$

(一)、條條矩矩法：



$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \sum_{k=1}^{n}\left[k^4-(k-1)^4\right]\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{(k-1)^2k^2}{4}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[4k^3-6k^2+4k-1\right]\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{(k-1)^2k^2}{4}\right]$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\left[4\sum_{k=1}^{n}k^3-6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k-\sum 1\right]$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[4k^7-14k^6+20k^5-15k^4+6k^3-k^2\right]$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\left[4\sum_{k=1}^{n}k^3-6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k-\sum 1\right]-\sum_{k=1}^{n}k^7+\frac{7}{2}\sum_{k=1}^{n}k^6-5\sum_{k=1}^{n}k^5$$
$$+\frac{15}{4}\sum_{k=1}^{n}k^4-\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$2\sum_{k=1}^{n}k^7=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\left[4\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}-6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right]$$

$$+\frac{7}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}-5\times\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$+\frac{15}{4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}-\frac{3}{2}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n^3(n+1)^2}{4}\times n^3+\frac{n(n+1)(2n+1)(6n^4+12n^3+9n^2+3n)}{24}-\frac{n^2(n+1)^2(20n^2+20n-10+9)}{24}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2\left[6n^4+3(2n+1)(2n^2+2n+1)-20n^2-20n+1\right]}{24}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2\left[6n^4+12n^3-2n^2-8n+4\right]}{24}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^7=\frac{n^2(n+1)^2\left[3n^4+6n^3-n^2-4n+2\right]}{24}$$

(二)、數型關係法：

$$1\times1\times1\times1\times1\times1\times1$$
$$=1\times1\times1\times1\times1\times1\times0+1\times1\times1\times1\times1\times1$$
$$=2\times1\times1\times1\times1\times1\times0+1\times1\times1\times1\times1$$
$$=(2\times1\times0)\times1^4+1^5$$
$$=\left[3\times2\times1\times0-2\times1\times0\times(-1)\right]\div4\times1^4+1^5$$

$$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$$
$$=2\times2\times2\times2\times2\times2\times1+2\times2\times2\times2\times2\times2$$
$$=3\times2\times2\times2\times2\times2\times1+2\times2\times2\times2\times2$$
$$=(3\times2\times1)\times2^4+2^5$$
$$=(4\times3\times2\times1-3\times2\times1\times0)\div4\times2^4+2^5$$

$$\vdots$$

$$n\times n\times n\times n\times n\times n\times n$$
$$=n\times n\times n\times n\times n\times n\times(n-1)+n\times n\times n\times n\times n\times n$$
$$=(n+1)n\times n\times n\times n\times n\times(n-1)+n\times n\times n\times n\times n$$
$$=\left[(n+1)n(n-1)\right]\times n^4+n^5$$
$$=\left[(n+2)(n+1)n(n-1)-(n+1)n(n-1)(n-2)\right]\div4\times n^4+n^5$$

$$\therefore\ 1^7+2^7+3^7+\cdots\cdots+n^7=\sum_{n=1}^{n}n^7$$

$$=\left\{\left[3\times2\times1\times0-2\times1\times0\times(-1)\right]\div4\times1^4+1^5\right\}+\left[(4\times3\times2\times1-3\times2\times1\times0)\div4\times2^4+2^5\right]$$

$$+\cdots\cdots+\{[(n+2)(n+1)n(n-1)-(n+1)n(n-1)(n-2)]\div 4\times n^4+n^5\}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^7=\frac{1}{4}\{[-(-1)\times 0\times 1\times 2]\times 1^4+(0\times 1\times 2\times 3)\times 1^4-(0\times 1\times 2\times 3)\times 2^4+(1\times 2\times 3\times 4)$$

$$\times 2^4-\cdots\cdots-(n-2)(n-1)n(n+1)\times n^4+(n-1)n(n+1)(n+2)\times n^4\}+(1^5+2^5+3^5+\cdots\cdots+n^5)$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^7=\frac{n^2(n+1)(2n^2+2n-1)}{12}+n^5(n+1)-\frac{1}{4}\{[(-1)\times 0\times 1\times 2]\times 1+(0\times 1\times 2\times 3)\times 7+\ldots\ldots$$

$$+(n-2)(n-1)n(n+1)(4n^3-6n^2+4n-1\}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^7=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}+\frac{n^5(n-1)(n+1)(n+2)}{4}$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{n}(n-2)(n-1)n(n+1)(4n^3-6n^2+4n-1)$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^7=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}+\frac{n^5(n-1)(n+1)(n+2)}{4}-\sum_{n=1}^{n} n^7+\frac{7}{2}\sum_{n=1}^{n} n^6-3\sum_{n=1}^{n} n^5-\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{n} n^4+\frac{7}{2}\sum_{n=1}^{n} n^3$$

$$-\frac{9}{4}\sum_{n=1}^{n} n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n} n$$

$$2\sum_{n=1}^{n} n^7=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}+\frac{n^5(n-1)(n+1)(n+2)}{4}$$

$$+\frac{7}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}-3\times\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$-\frac{5}{4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}-\frac{7}{2}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{9}{4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$2\sum_{n=1}^{n} n^7=\frac{2n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)+6n^5(n-1)(n+1)(n+2)+2n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{24}$$

$$-6n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)-$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)+21n^2(n+1)^2-9n(n+1)(2n+1)+6n(n+1)}{24}$$

$$2\sum_{n=1}^{n} n^7=\{n(n+1)[2n(n+1)(2n^2+2n-1)+6n^4(n-1)(n+2)+2(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)-$$

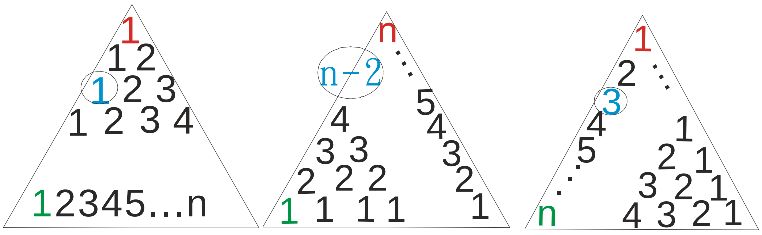
$$6n(n+1)(2n^2+2n-1)-(2n+1)(3n^2+3n-1)+21n(n+1)-9(2n+1)+6]\}\times\frac{1}{24}$$

$$2\sum_{n=1}^{n} n^7=\frac{1}{24}n(n+1)(6n^6+18n^5+10n^4-10n^3-4n^2+4n)$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^7=\frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}$$

七、推導：三角形數的和 1+(1+2)+……+$(1+2+\cdots\cdots+n)$

(一)、三角形法；



若將相對應的數字相加，即可發現和皆為 n+2，

個數為 n(n+1)/2，

故可求出和為 n(n+1)(n+2)/6

(二)、數型關係法：

發現：

→ 當n為奇數時

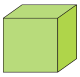
$$
\begin{aligned}
&1+(1+2)+......+(1+2+......+n)\\
&=2^2+4^2+......+(n-1)^2+\frac{n(n+1)}{2}\\
&=4\left[1^2+2^2+......+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right]+\frac{n(n+1)}{2}\\
&=4\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)n+\frac{n(n+1)}{2}\\
&=\frac{n(n+1)(n-1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\
&=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}
$$

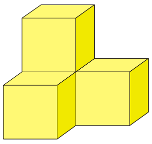
→ 當n為偶數時

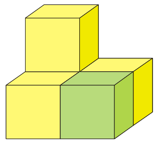
$$
\begin{aligned}
&1+(1+2)+......+(1+2+......+n)\\
&=2^2+4^2+......+n^2\\
&=4\left[1^2+2^2+......+\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]\\
&=4\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{n}{2}\right)\times\left(\frac{n+2}{2}\right)\times(n+1)\\
&=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}
$$

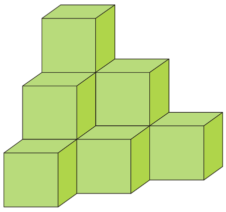
得$1+(1+2)+......+(1+2+......+n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

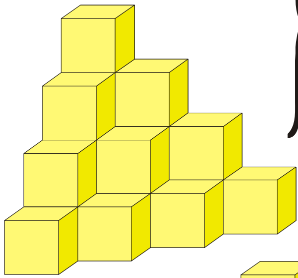
八、推導四面體數的和：$1+[1+(1+2)]+...+[1+(1+2)+...+(1+2+...+n)]$

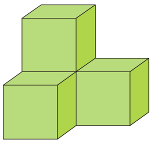
$1 \Rightarrow$ 

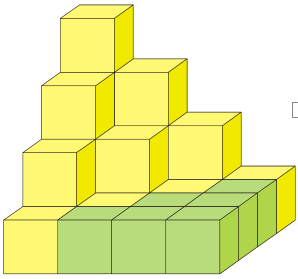
$1+(1+2) \Rightarrow$ 

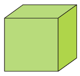
$1+[1+(1+2)] \Rightarrow$  $=1^2+2^2$

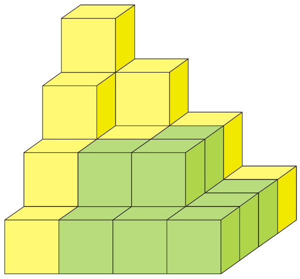
$1+(1+2)+(1+2+3) \Rightarrow$ 

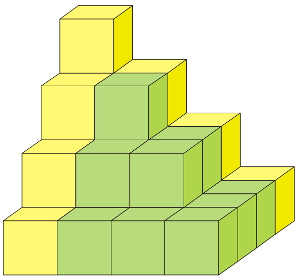
$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4) \Rightarrow$ 









 $=1^2+2^2+3^2+4^2$

故 n 可爲偶數或奇數

當$n=2k$時$(k=0,1,2,3,\cdots\cdots)$，n爲偶數

$$1+[1+(1+2)]+\ldots+[1+(1+2)+\ldots+(1+2+\ldots+n)]$$
$$=(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2+4^2)+\ldots+[1^2+2^2+\ldots\ldots+(2k)^2]$$
$$=1^2\times k+2^2\times k+3^2\times(k-1)+4^2\times(k-1)+..+(2k-1)^2\times 1+(2k)^2\times 1$$
$$=(1^2+2^2)\times k+(3^2+4^2)\times(k-1)+\ldots+[(2k-1)^2+(2k)^2]\times 1$$
$$=[1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(2k)^2]\times k-\{(1^2+2^2)\times 0+(3^2+4^2)\times 1+\ldots.$$
$$\ldots..+[(2k-1)^2+(2k)]\times(k-1)\}$$
$$=\frac{2k^2(2k+1)(4k+1)}{6}-\sum_{k=1}^{k}\{[(2k-1)^2+(2k)^2]\times(k-1)\}$$
$$=\frac{k^2(2k+1)(4k+1)}{3}-\sum_{k=1}^{k}(8k^3-12k^2+5k-1)$$

$$=\frac{k^2(2k+1)(4k+1)}{3}-8\times\frac{k^2(k+1)^2}{4}+12\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-5\times\frac{k(k+1)}{2}+k$$

$$=\frac{2k^2(2k+1)(4k+1)-12k^2(k+1)^2+12k(k+1)(2k+1)-15k(k+1)+6k}{6}$$

$$=\frac{1}{6}k\left[2k(2k+1)(4k+1)-12k(k+1)^2+12(k+1)(2k+1)-15(k+1)+6\right]$$

$$=\frac{1}{6}k\left(4k^3+12k^2+11k+3\right)$$

$$=\frac{1}{24}2k(2k+2)(2k+1)(2k+3)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)_{\#}$$

當$n=2k+1$時$(k=0,1,2,3,\cdots\cdots)$，n爲奇數

$$1+[1+(1+2)]+\ldots\ldots+\{1+(1+2)+\ldots\ldots+(1+2+3+\ldots\ldots+2k)\}+\{1+2+\ldots\ldots+[1+2+\ldots\ldots+(2k+1)]\}$$

$$=\frac{1}{6}k(2k+1)(2k+3)(k+1)+\frac{1}{6}(2k+1)(2k+2)(2k+3)$$

$$=\frac{1}{6}(2k+1)(2k+3)(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{24}(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)$$

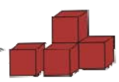
$$=\frac{1}{24}(2k+1)[(2k+1)+1][(2k+1)+2][(2k+1)+3]$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

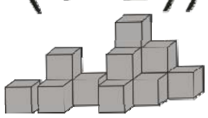
九、推導：四面體數的和的和

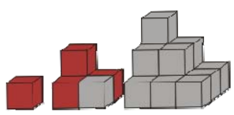
四面體數的和的和：

1為 

1+(1+(1+2))為 

1+(1+(1+2))+(1+(1+2)+(1+2+3))

為 

二三項合併後得 

$$1+[1+(1+(1+2))]+[1+(1+(1+2))+(1+(1+2)+(1+2+3))]+\cdots\cdots$$
$$+1+(1+(1+2))+(1+(1+2)+(1+2+3))+(1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)))$$

當$n=2k+1$時$(k=0,1,2,3,\cdots\cdots)$，n爲奇數

$$1+(1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2))+\cdots\cdots+(1^2+(1^2+2^2)+\cdots\cdots+(1^2+2^2+\cdots+(2k+1)^2))$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{6}(2k+1)(2k+2)(4k+3)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{8}{3}\times\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{18}{3}\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{13}{3}\times\frac{k(k+1)}{2}+\frac{3}{3}\times k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2k^2(k+1)^2}{3}+k(k+1)(2k+1)+\frac{13k(k+1)}{6}+k\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}k\left[4k(k+1)^2+6(k+1)(2k+1)+13(k+1)+6\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{6}k\left(4k^3+20k^2+35k+25\right)\right]$$

$$=\frac{4}{6}\times\frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}+\frac{20}{6}\times\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{35}{6}\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{25}{6}\times\frac{k(k+1)}{2}$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{45}+\frac{5k^2(k+1)^2}{6}+\frac{35k(k+1)(2k+1)}{36}+\frac{25k(k+1)}{12}$$

$$=\frac{4k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)+150k^2(k+1)^2+175k(k+1)(2k+1)+375k(k+1)}{180}$$

$$=\frac{1}{180}k(k+1)\left[4(2k+1)(3k^2+3k-1)+150k(k+1)+175(2k+1)+375\right]$$

$$=\frac{1}{120}(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)(2k+5)$$

當$n=2k$時$(k=0,1,2,3,\cdots\cdots)$，n爲偶數

$$1+(1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2))+\cdots\cdots+(1^2+(1^2+2^2)+\cdots\cdots+(1^2+2^2+\cdots+(2k-1)^2))$$
$$+(1+(1+2)+\ldots+(1+2+\cdots+2k))$$

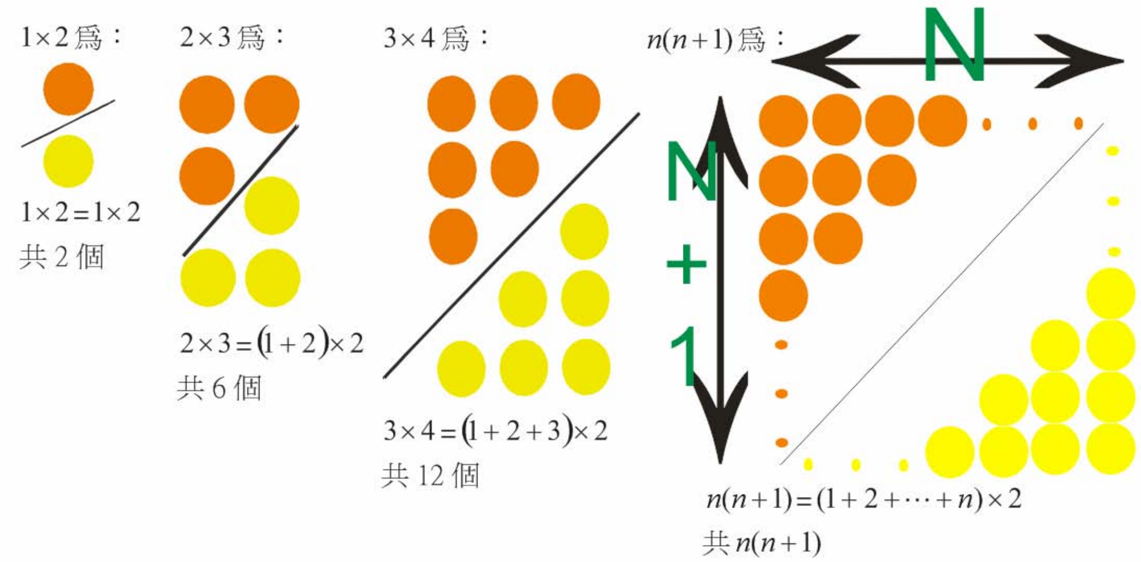
$$=\frac{1}{120}(2k-1)2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)+\frac{1}{24}2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)$$

$$=\frac{1}{120}2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)$$

十、推導：連乘積的推廣

(一)、推導：$1\times 2+2\times 3+\cdots\cdots+n(n+1)$

1.幾何證明法：



故共有

$$
\begin{aligned}
&1\times 2+2\times 3+\ldots\ldots+n(n+1)\\
&=1\times 2+(1+2)\times 2+(1+2+3)\times 2+\ldots\ldots+(1+2+\ldots\ldots+n)\times 2\\
&=2\times[1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots\ldots+(1+2+\ldots\ldots+n)]\\
&=2\times\left[\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right]\\
&=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}
$$

2.數型關係法：

技巧性的將兩數相乘做改變：

$$
\begin{aligned}
1\times 2&=(3\times 2\times 1)\div 3\\
&=(3\times 2\times 1-2\times 1\times 0)\div 3\\
2\times 3&=(3\times 3\times 2)\div 3\\
&=(4\times 3\times 2-1\times 3\times 2)\div 3\\
&=(4\times 3\times 2-3\times 2\times 1)\div 3
\end{aligned}
$$

同理

$$n\times(n+1)=[(n+2)(n+1)n-(n+1)n(n-1)]\div 3$$

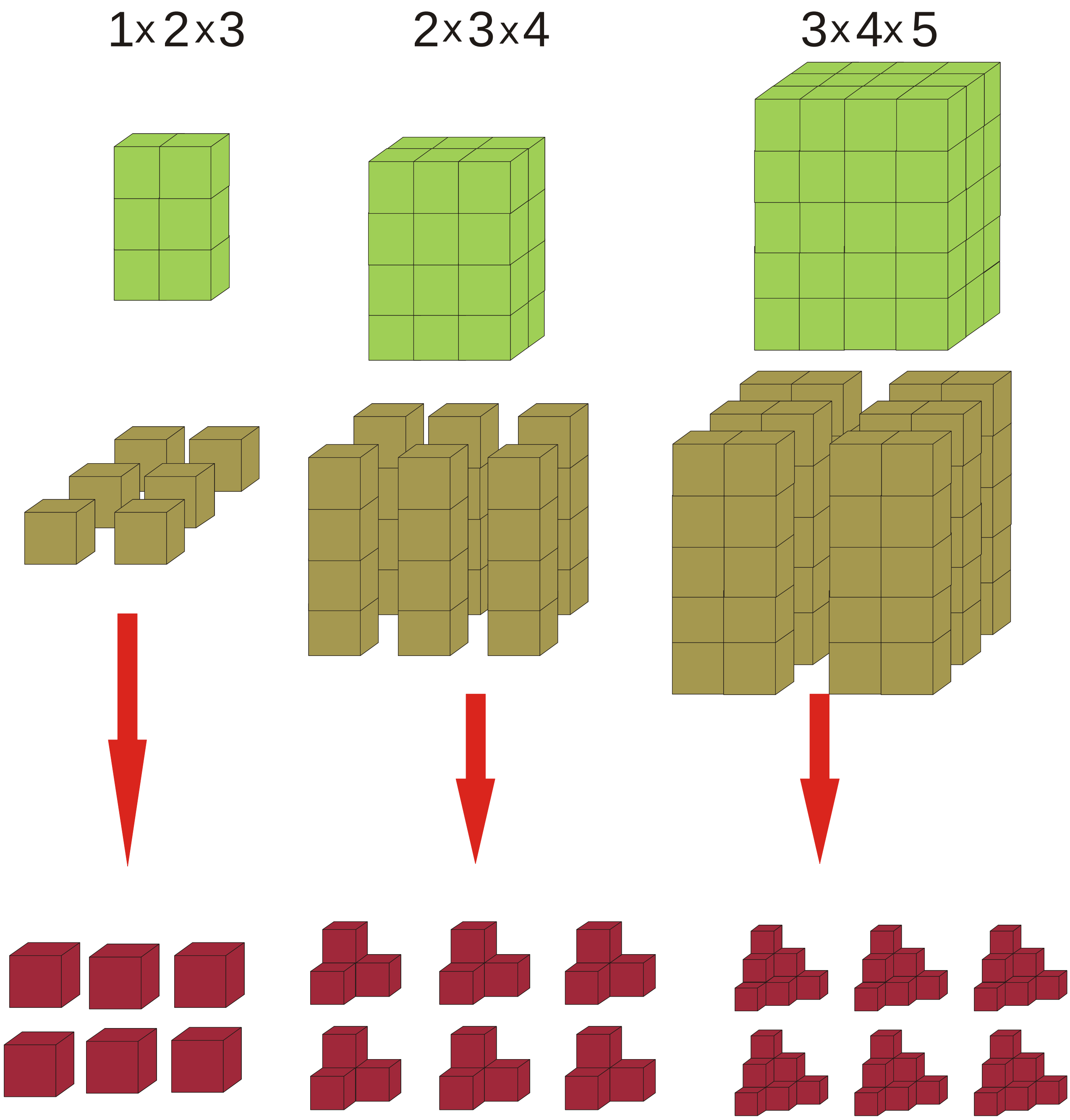
$$
\begin{aligned}
&1\times 2+2\times 3+\cdots\cdots+n(n+1)\\
&=[(n+2)(n+1)n-(n+1)n(n-1)+\cdots\cdots+3\times 2\times 1-2\times 1\times 0]\div 3\\
&=\frac{1}{3}(n+2)(n+1)n
\end{aligned}
$$

得出$1\times 2+2\times 3+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(二)、推導：$1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$

1. 幾何證明法：

我們發現$1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n(n+1)(n+2)$
可以轉變為四面體數的和的六倍
即
$\{1+[1+(1+2)]+...$
$+[1+(1+2)+...+(1+2+...+n)]$
$\boxed{=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)}$ #



2. 數型關係法：

技巧性的將三數相乘做改變：

$$3\times2\times1=(4\times3\times2\times1)\div4$$
$$=(4\times3\times2\times1-3\times2\times1\times0)\div4$$
$$4\times3\times2=(4\times4\times3\times2)\div4$$
$$=(5\times4\times3\times2-4\times3\times2\times1)\div4$$

同理

$$n(n+1)(n+2)=\left[(n+3)(n+2)(n+1)n-(n+2)(n+1)n(n-1)\right]\div4$$

$$1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n(n+1)(n+2)$$
$$=\left[(n+3)(n+2)(n+1)n-(n+2)(n+1)n(n-1)+\cdots+(4\times3\times2\times1)-(3\times2\times1\times0)\right]\div4$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

得出$1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

(三)、綜合(一)、(二)兩點，我們可得一通式：

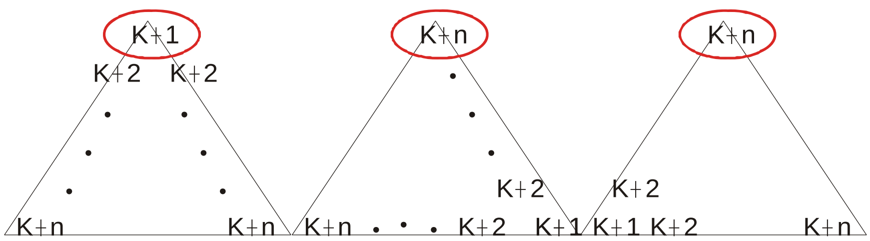
$$(1\times2\times3\times4\times\cdots\times M)+[2\times3\times4\times5\times\cdots\times(M+1)]+\cdots+N(N+1)(N+2)(N+3)\cdots(N+M-1)$$
$$=\frac{N(N+1)(N+2)(N+3)\cdots\cdots(N+M)}{M+1}$$

十一、推導：三角形法推廣

我們在求解$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$時曾運用所謂的三角形法來求出和，而在連乘積的推廣裡的$(1\times2)+(2\times3)+(3\times4)+\cdots\cdots+[n(n+1)]$的式子中也運用了三角形法。在這兩式中，皆為兩項相乘，而在前面的式子中每項的差為 0，在下面的式子中每兩項的差為 1。於是我們想到若將兩項之差由 0 推廣到 k，是否可以求解。

利用式子的$\sum_{h=1}^{n}h(h+k)=\sum_{h=1}^{n}h^2+\sum_{h=1}^{n}hk=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{kn(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1+3k)}{6}$

我們即求得一通式：只要k為任意實數，則$\sum_{h=1}^{n}h(h+k)=\frac{n(n+1)(2n+1+3k)}{6}$



每一項(三個三角形相對位置上的數字和)的和為(k+1)+(k+n)+(k+n)=3k+2n+1

項數有$\frac{1}{2}$n(n+1)個

故和為$\frac{1}{2}$n(n+1) × (3k+2n+1) ÷ 3

結論：$\sum_{n=1}^{n}n(n+k)$，k為任意實數，通式為$\frac{1}{6}$n(n+1)(2n+1+3k)

伍、　研究結果

一、可以用幾何方法「條條矩矩法」解出下列各式：

（一）$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

（二）$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

（三）$1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\cdots\cdots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

（四）$1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+\cdots\cdots+n^5=\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$

（五）$1^6+2^6+3^6+4^6+5^6+\cdots\cdots+n^6=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}$

（六）$1^7+2^7+3^7+4^7+5^7+\cdots\cdots+n^7=\dfrac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}$

二、可以用幾何方法「三角形法」解出下列各式：

（一）$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

（二）$1\times2+2\times3+\cdots\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

（三）$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+4+\cdots\cdots+n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

三、可以用數型方法「數型關係法」解出下列各式：

（一）$1+2+3+4+5+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

（二）$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

（三）$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

（四）$1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\cdots\cdots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

（五）$1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+\cdots\cdots+n^5=\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$

（六）$1^6+2^6+3^6+4^6+5^6+\cdots\cdots+n^6=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}$

（七）$1^7+2^7+3^7+4^7+5^7+\cdots\cdots+n^7=\dfrac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}$

（八）$1\times2+2\times3+\cdots\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

（九）$1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

（十）四面體數：$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+4+\cdots\cdots+n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

（十一）四面體數的和：

$$1+[1+(1+2)]+\ldots+[1+(1+2)+\ldots+(1+2+\ldots+n)=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

（十二）四面體數的和的和：

$$1+(1+(1+(1+2)))+\cdots+(1+(1+(1+2))+\cdots+(1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+n)))$$

$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

四、導出連乘積的通式：

$$(1\times2\times3\times4\times\cdots\times M)+[2\times3\times4\times5\times\cdots\times(M+1)]+\cdots+N(N+1)(N+2)(N+3)\cdots(N+M-1)$$

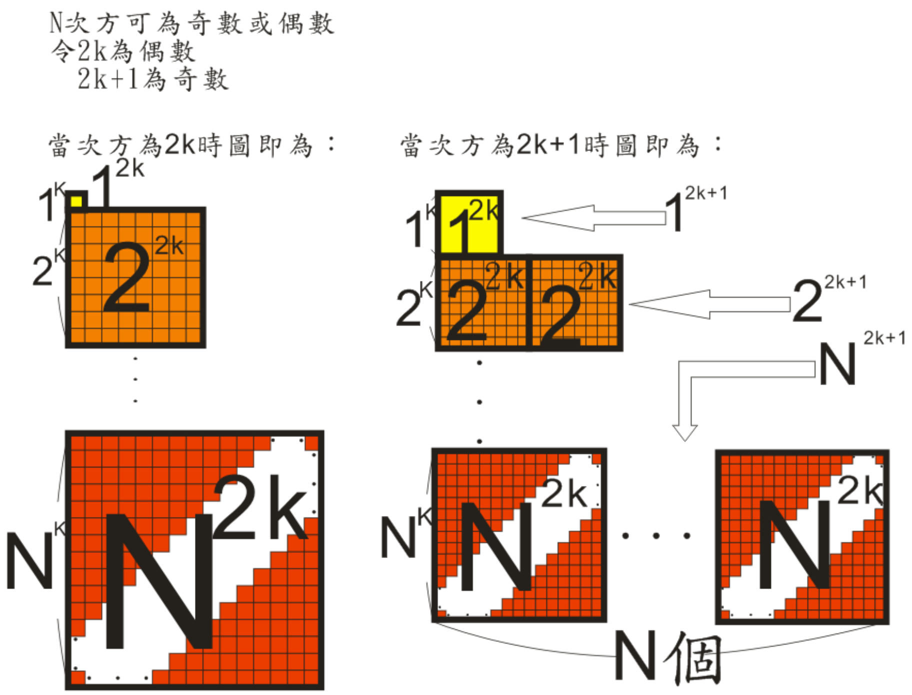
$$=\frac{N(N+1)(N+2)(N+3)\cdots\cdots(N+M)}{M+1}$$

五、三角形法適用於$\sum_{n=1}^{n}n(n+k)$，且通式為$\dfrac{n(n+1)(2n+1+3k)}{6}$

陸、　討論

我們的「條條矩矩法」能把幾何運用在算術上，能夠推導出許多需要花很多時間才能解出的數列，是我們最大的收穫。我們的「條條矩矩法」雖能把幾何運用在算術上，但是卻無法推導到任意次方。希望我們在下次的研究中能推導至任意次方。

以下是我們對「條條矩矩法」的結論：



柒、　結論

我們在研究過程之中，發現到三角形數、四面體數、平方數、金字塔級數……等數的許多特性。

以下是我們的結論：

一、三角形數：

（一）、第 n 個三角形數的公式是 $\frac{n(n+1)}{2}$

（二）、所有大於 3 的三角形數都不是質數。

（三）、所有三角形數因數的倒數之和是 2。

（四）、兩個相鄰的三角形數之和是平方數。

（五）、開始的 n 個立方數的和是第 n 個三角形數的平方。

二、四面體數：三角形數在立體的推廣

（一）、四面體數每層爲三角形數，其公式是首 n 個三角形數之和，即 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$。

（二）、四面體數的奇偶順序是「奇偶偶偶」。

三、平方數：

（一）、指可以寫成某個整數的平方的數，即其平方根爲整數的數。

（二）、一個平方數是兩個相鄰三角形數之和。

（三）、在十進位中，平方數只能以 0，1，4，5，6 或 9 結尾。

四、金字塔級數：平方數在立體的推廣

（一）、金字塔級數每層爲平方數，其公式是首 n 個平方數之和，即 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

（二）、金字塔級數的奇偶順序是「奇奇偶偶」。

捌、　參考資料及其他

一、蔡聰明(2003)。數學拾貝（1~19 頁），三民書局。

二、孫文先(1985)。與中學生談中國數學史上的幾大成就（1~51 頁），九章出版社。

三、夏聖亭(1998)。中學數學題巧解妙法（5~26 頁），凡異出版社。

四、許介彥(2005)。數學悠哉遊（267~282 頁），三民書局。

五、陸思明(2001)。數列與級數（1~15 頁），建宏出版社。

六、陳台堂(2007)。ABC 數學（22、68 頁），國家圖書館。

七、國立台灣科學教育館：http://www.ntsec.gov.tw/

八、維基百科：http://zh.wikipedia.org/wiki/

九、昌爸工作坊：http://www.mathland.idv.tw/

【評語】030407

1. 利用幾何運算的想法，重新證明一些前人已知的算術公式，是不錯的嚐試。
2. 在計算 $\sum_{k=1}^{n} k^{v}$ 時，還是無法避免要用到 $\sum_{k=1}^{n} k^{j}$ 的結果（１ ≦ j ＜v）。所以本質上這樣的做法並沒有比前人的其他做法節省太多。
3. 利用幾何圖形的分割幫忙計算，頗有創意，值得欣賞。