中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030405

瓶水相逢－十三瓶酒的裝置藝術

學校名稱：臺南縣立仁德國民中學

作者：	指導老師：
國二　郭佳欣 國二　朱庭儀 國二　秦俊仁 國二　李承穎	陳威任

關鍵詞：　等差數列、數型關係、圓周角

摘要

這次的研究，是由文藝復興時期的一個藝術作品所延伸出來的，只要在底層擺放三瓶酒瓶，並且其中兩瓶緊貼兩端，則依序放入十三瓶酒後，將會使得最頂層的三瓶酒一樣高。

首先，我們先試著討論出擺放 13 瓶酒會造成等高的正確性，並且利用他的規律性，討論出向上推疊的基本型擺放的規律。接著將基本型旋轉 90 度後，可以延伸討論出底層為若干瓶的推廣型之規律性。最後再結合基本型與推廣型，發展出最終型的規律變化。最後總結我們找出的規律性，將它推導出各型的公式，統整後歸納於結論中。

壹、　研究動機

這個遊戲，是一個起源於文藝復興時期，在酒櫃中擺放十三瓶酒的藝術作品，只要符合規定的條件，透過不同的擺放方式，都能夠使得最頂層的三個酒瓶顯得一樣高。第一次看到這個問題時，真的令我們覺得無比的驚訝，為什麼只要符合最底層只能擺放三瓶，而且其中兩瓶要緊貼兩端，如此不管怎麼擺，都會讓頂端的三瓶都變成一樣高。

這個問題令我們越想越覺得有興趣，但也更覺得懷疑這問題是否正確。當我們詢問老師的時候，老師建議我們可以利用第四冊中「等差數列」中找公差與規律性的方法，先找出他們的規律性，並且利用這項規律性，再看看是否能推導出其他的排列方式。於是，再老師的指導下，我們對這『十三瓶酒』的問題開始進行了研究。

貳、　研究目的

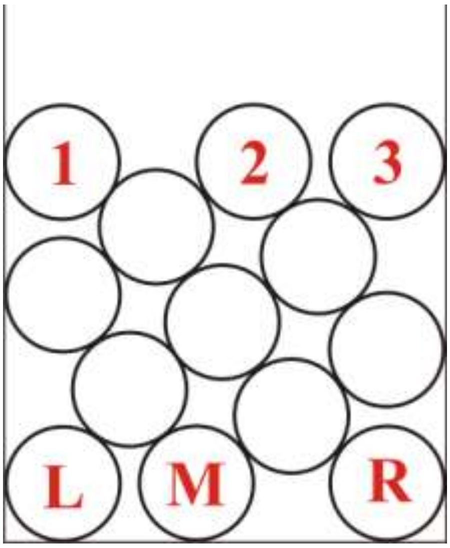
一、 尋找擺放十三瓶酒的方法是否唯一及其規律性。

二、 利用該規律性，推廣出其他的相關擺放規則。

參、　研究設備及器材

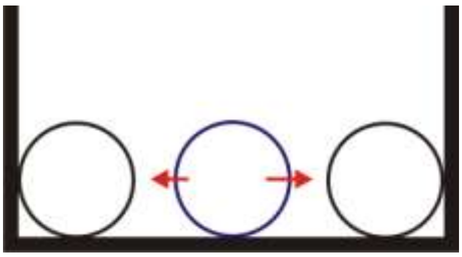
紙、筆、自製的酒瓶（硬幣）與酒櫃（白板）。

肆、　研究過程



定義：我們把底部的三個酒瓶各自給予一個名稱：L代表左瓶，M代表中間的瓶子，R代表右邊的瓶子。而最頂層的三個酒瓶，最左邊的稱為1瓶，中間的稱為2瓶，右邊的稱為3瓶。假設酒瓶的直徑為r。

一、先估計**酒櫃的寬度是多少**？



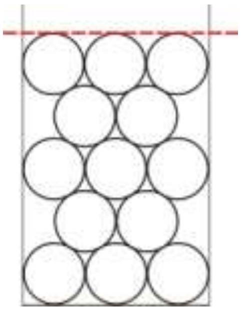
酒櫃的寬度因為最底層只能擺放三瓶酒，所以可以知道**最少要三瓶酒的寬度**；而為了讓M瓶有可以移動的空間，所以**最大的寬度，不可以超過四瓶酒的寬度**（否則上層的酒瓶就會滾落到最底層）。

＊　３ｒ≦酒櫃的寬度＜４ｒ

二、找出酒櫃的寬度後，再以自製的酒瓶（硬幣）與酒櫃（白板）尋找出各種狀況：

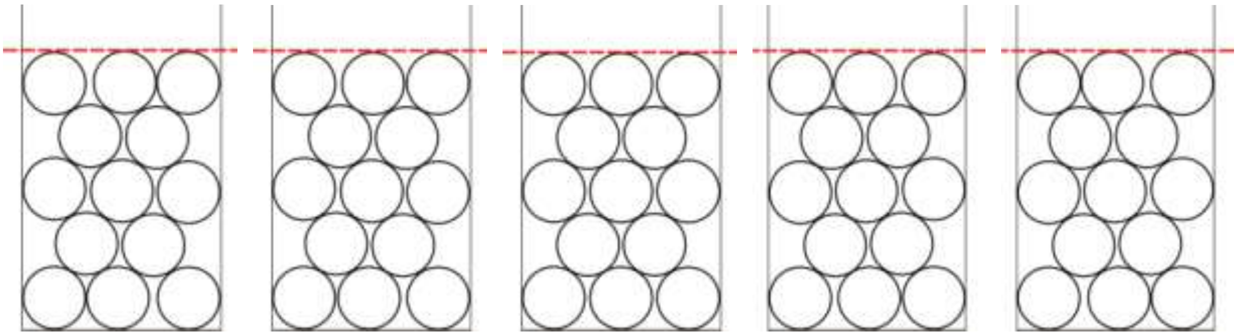
（一）酒櫃寬度是**三瓶酒**的寬度：

只有**一種**排列方式，經過目測，看起來是等高的。



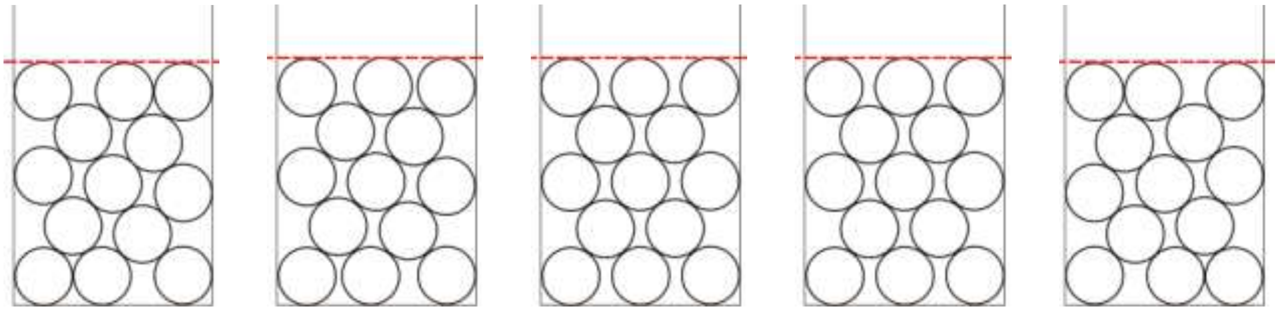
（二）酒櫃寬度在**三瓶酒至三瓶半**之間（不包含三瓶）:

可以歸納出五種排列方法，分別是(1) Ｌ跟Ｍ相接觸；(2) Ｍ在中間偏左；(3) Ｍ在正中間；(4) Ｍ在中間偏右；(5) Ｍ跟Ｒ相接觸。而且每一組看起來都是等高的。



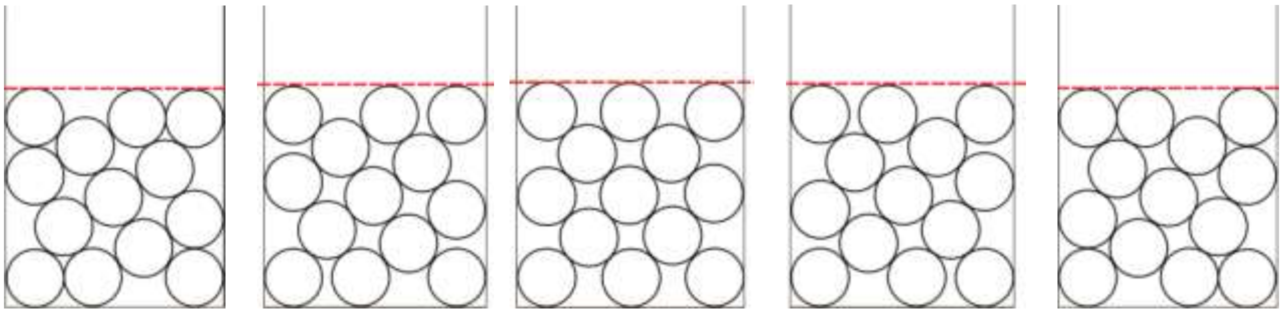
（三）酒櫃寬度剛好爲**三瓶半**的寬度：

可以歸納出五種排列方法，分別是(1) Ｌ跟Ｍ相接觸；(2) Ｍ在中間偏左；(3) Ｍ在正中間；(4) Ｍ在中間偏右；(5) Ｍ跟Ｒ相接觸。而且每一組看起來都是等高的。



（四）酒櫃寬度在**三瓶半到四瓶酒**之間（不包含四瓶）：

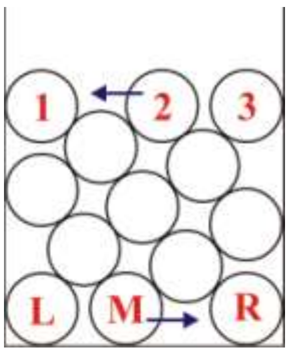
可以歸納出五種排列方法，分別是(1) Ｌ跟Ｍ相接觸；(2) Ｍ在中間偏左；(3) Ｍ在正中間；(4) Ｍ在中間偏右；(5) Ｍ跟Ｒ相接觸。而且每一組看起來都是等高的。



＊ **觀察上述的 16 種狀況，發現只要在酒櫃中擺放十三瓶酒，最頂層的三瓶的確會等高。**

＊ **在這 16 種狀況中，只有Ｌ、Ｒ、１、３這四個瓶子會固定不變。**

＊ 在這 16 種狀況中，觀察可得到一個共通性：**若Ｍ緊貼著Ｌ，則２會緊貼著３；而當Ｍ向Ｒ移動時，則２也會逆向的往１移動；最後若是Ｍ跟Ｒ緊貼，則２就會跟１緊貼。**



＊　接著下列的研究過程，都分爲上述這四種狀況來討論。

＊　可以將這些狀況再細分爲五種：(1)　L跟M相接觸；

(2)　M在中間偏左；

(3)　M在L跟R的正中間【將（一）的狀況歸類在此】;

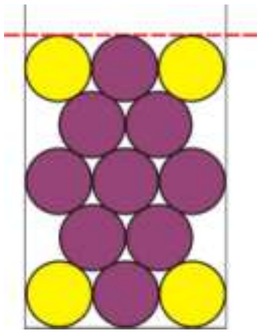
(4)　M在中間偏右；

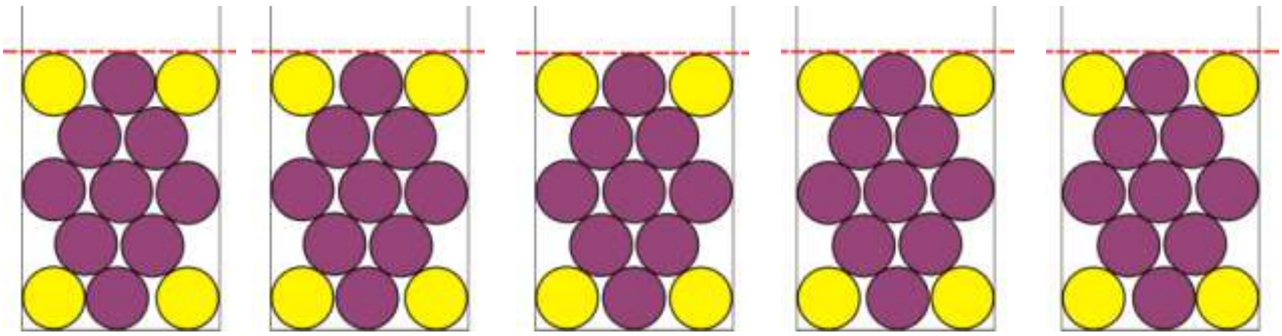
(5)　M跟R相接觸。

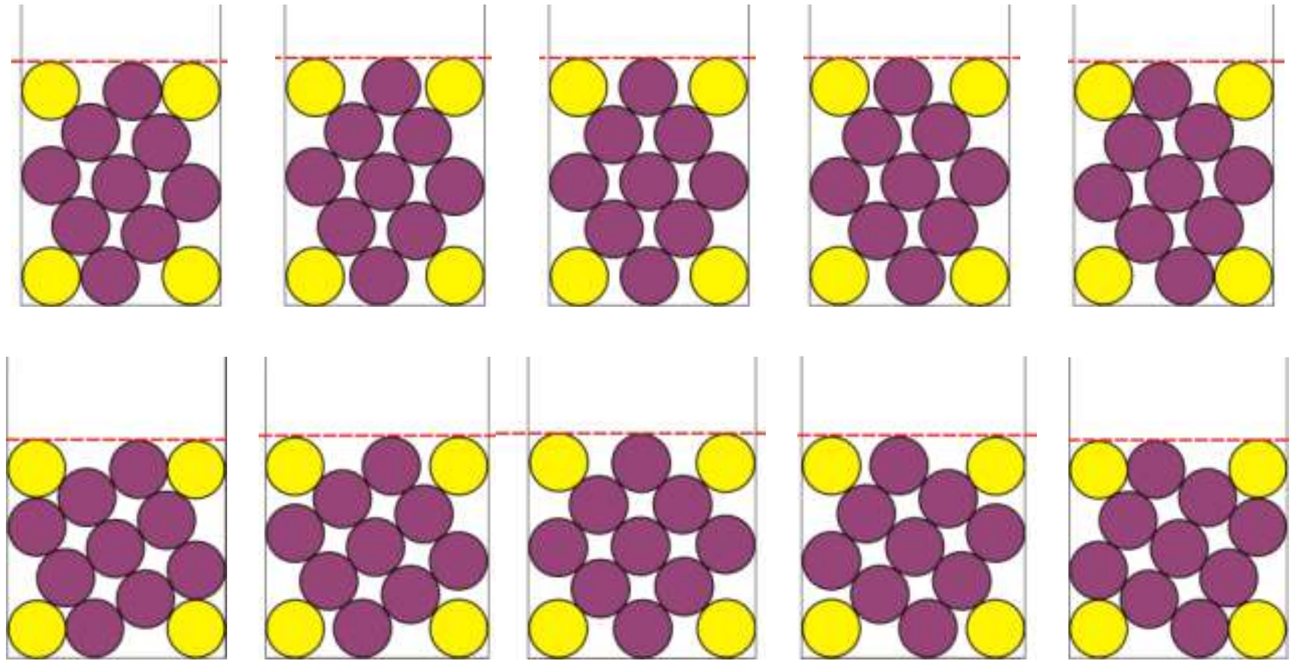
而且(1)跟(5)互相爲對稱，(2)跟(4)互相爲對稱，(3)則是跟自己對稱。

三、是否能確定最頂層的三瓶酒真的等高？

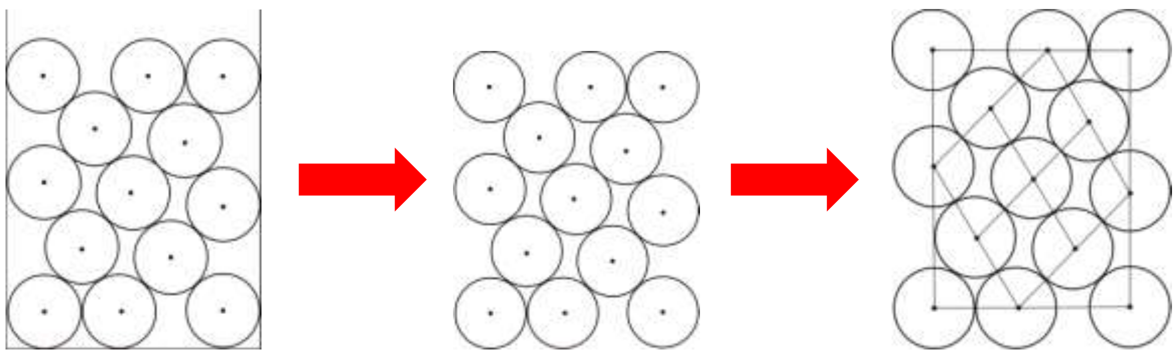
先將會固定不變的瓶子塗上黃色，而剩下的九個瓶子塗上紫色，我們可以得到下列的圖。

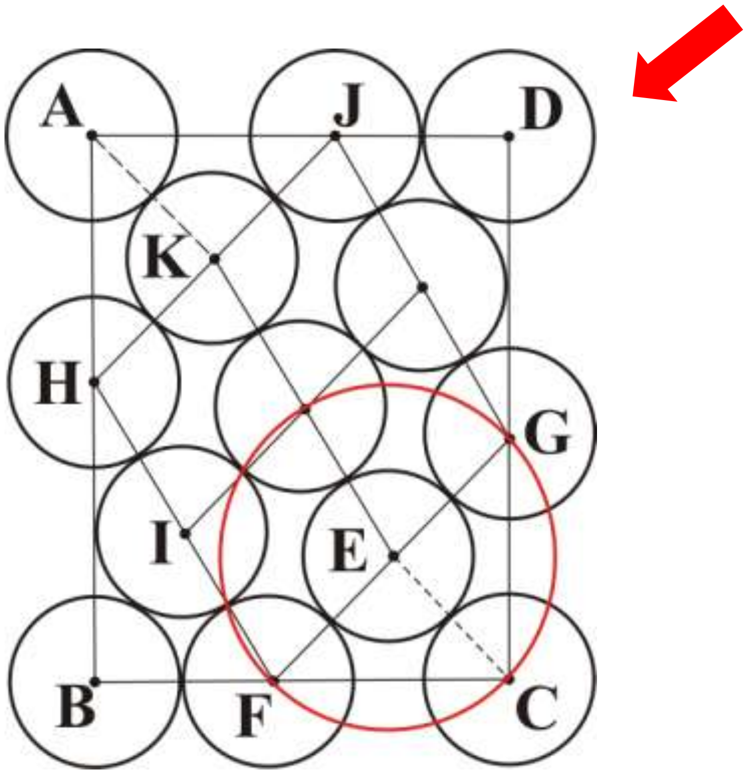






觀察可發現，除了固定不變的四瓶外，其他的九個瓶子將形成一個四邊形的形狀；現在我們隨意取一組出來，並且將所有的圓形都標上圓心，之後把外面的代表酒櫃的框框塗掉，接著把中間的九個圓心連線，另外也把固定不動的四個圓分別與旁邊的圓心相聯接，最後再把圓心標上字母。





連接$\overline{CE}$，因為$\overline{CE}$、$\overline{EF}$和$\overline{EG}$都等於酒瓶的直徑ｒ，所以我們可以知道，Ｃ、Ｆ、Ｇ這三個點都會落在以Ｅ為圓心且半徑為ｒ的圓周上，再加上$\angle FCG = 90°$，利用定理，我們可以知道：Ｆ、Ｅ、Ｇ這三點恰好在同一條直線上。同理，Ｈ、Ｉ、Ｆ這三點也在同一條直線上，我們可以推導出**四邊形ＨＦＧＪ是一個菱形**。（如附錄一）

再連接$\overline{AK}$，因為$\overline{AK}$、$\overline{KH}$和$\overline{KJ}$都等於酒瓶的直徑ｒ，所以Ａ、Ｈ、Ｊ這三點都會落在以Ｋ為圓心且半徑為ｒ的圓周上，又因為Ｈ、Ｋ、Ｊ這三個點在同一條直線上，所以我們可以知道$\angle HAJ = 90°$。同理，我們可以得到$\angle JDG = 90°$，因此，我們知道**四邊形ＡＢＣＤ正好為一長方形**。（如附錄二）

由於ＡＢＣＤ為一個長方形，所以可知道Ａ、Ｊ、Ｄ這三點剛好在同一條直線上，並且和$\overline{BC}$平行，也就是這三點將會在同一高度上，既然圓心都在同高度上，那麼這三個酒瓶當然也等高了。

相同的，在其他組當然也可以利用這個來證實最頂端的三瓶酒一定會等高。

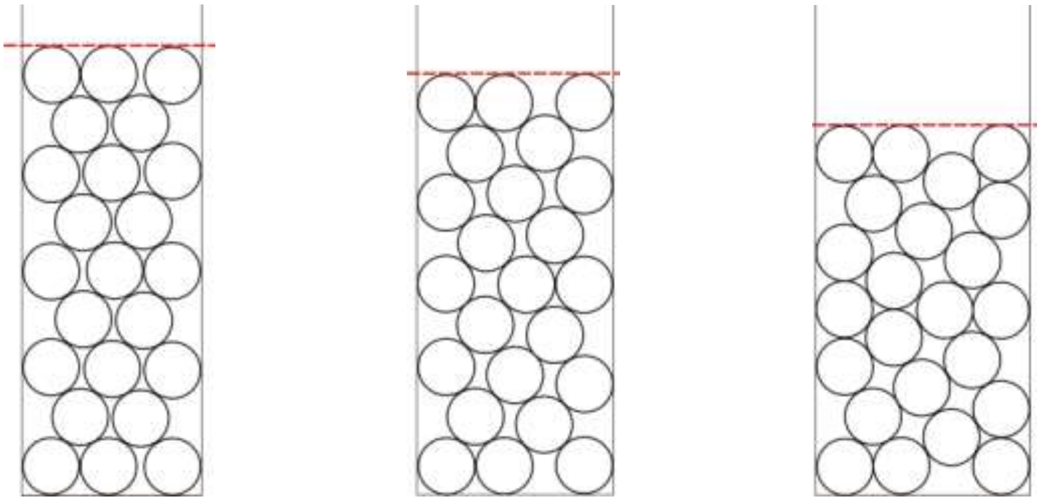
＊　**中間九個酒瓶的圓心連線，將形成一個菱形。**

＊　**不管怎麼排列，最頂端的三瓶酒１、２、３一定會等高。**

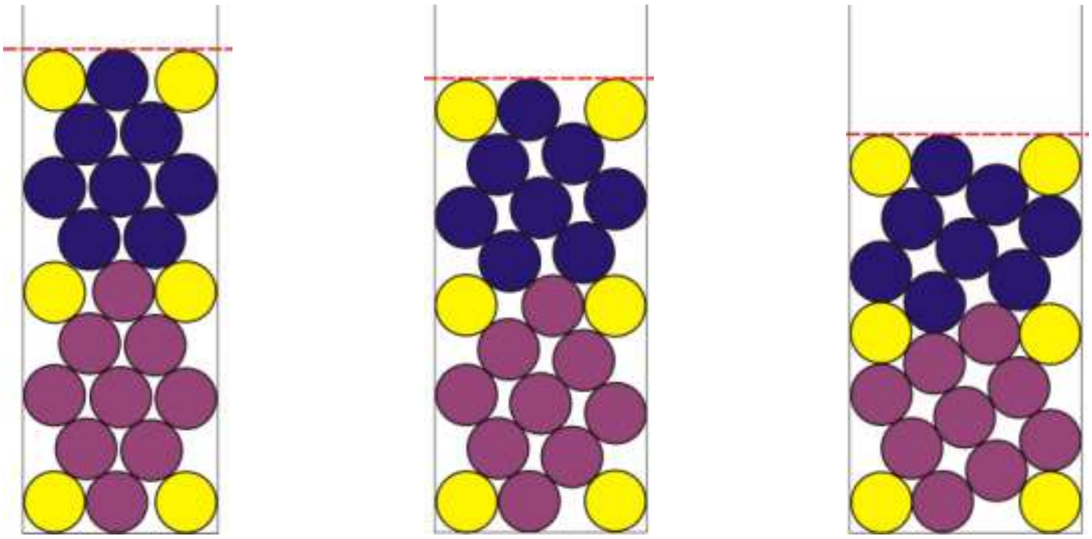
四、若繼續堆疊上去，是否有某一層的三瓶酒能夠等高呢？

【基本】

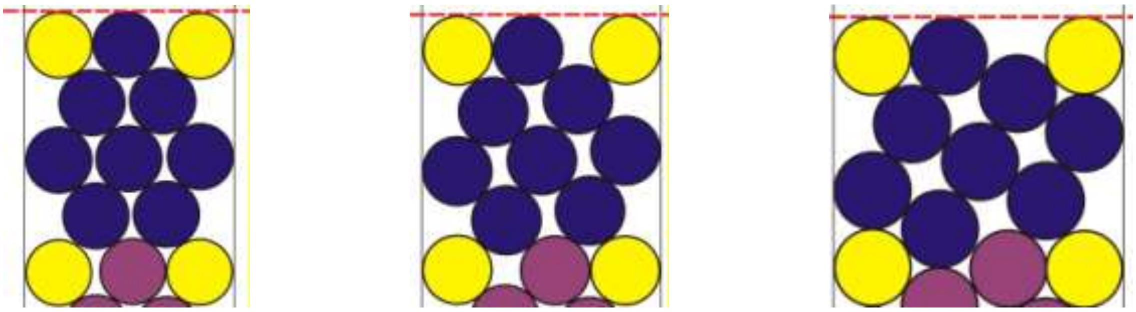
先以【(1) L 跟 M 相接觸】此狀況來實驗，發現只要 23 瓶就可讓頂層的三瓶酒等高。



若我們將其上色，基本的 13 瓶酒依照原來的上色，之後頂層的左右兩瓶也跟固定不定的瓶子一樣塗上黃色，其餘的塗上藍色將會變成下面的狀況。

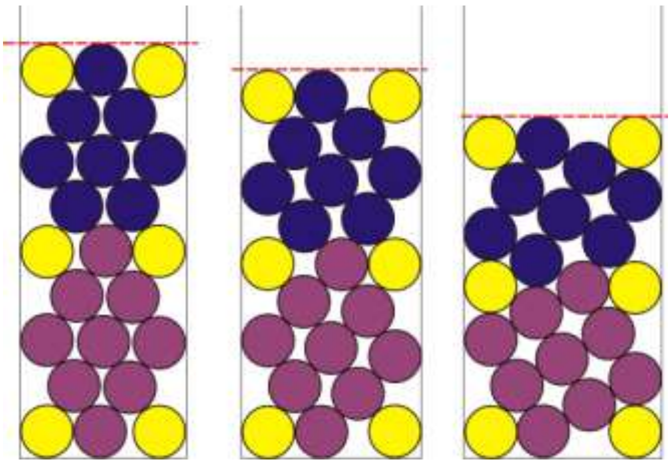


如果扣除原有的 13 瓶酒後，發現多出來的 10 瓶若是加上原有頂端的三瓶，就可以變成【(5)M 跟 R 相接觸】這種的排列方式。

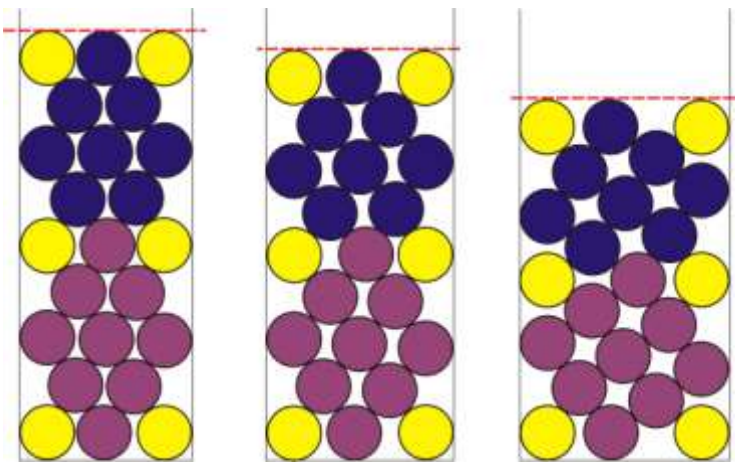


所以，我們大膽的假設，若要排出第二次最頂層三瓶酒等高的狀況，也就是要與自己的對稱組互相組合才可以，所以可以分為下面五種情形，並且經過實際排列後，證實可行：

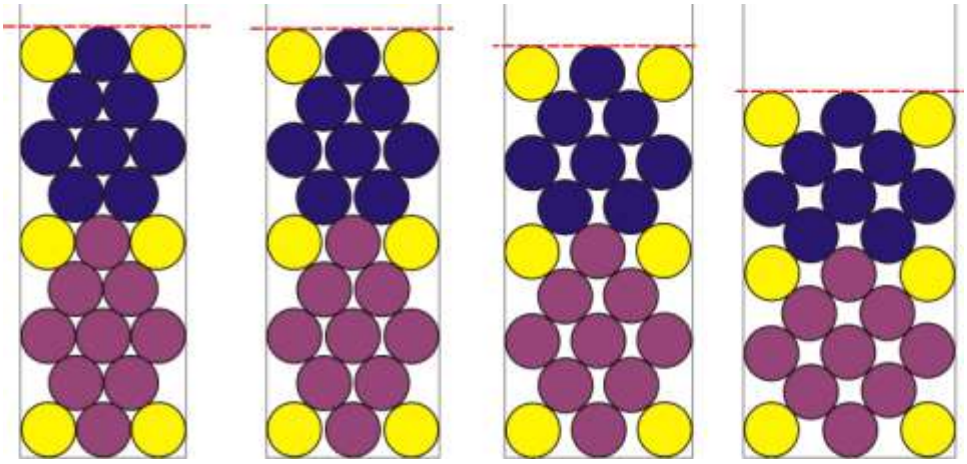
（一）　【(1) L跟M相接觸】就要配合【(5)M跟R相接觸】　(1)☆(5)



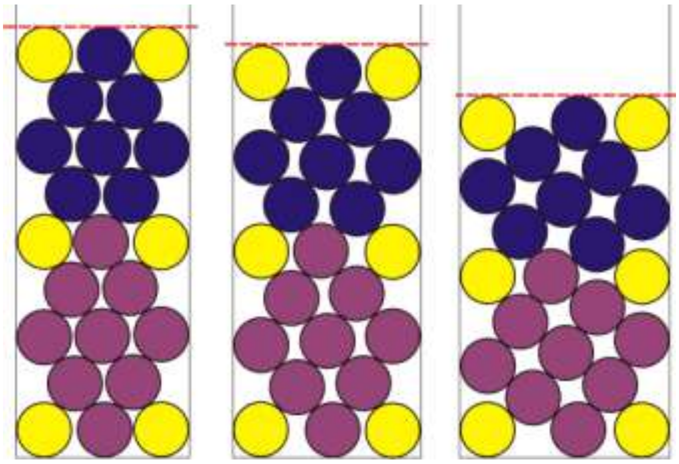
（二）　【(2)M在中間偏左】就要配合【(4)M在中間偏右】　(2)☆(4)



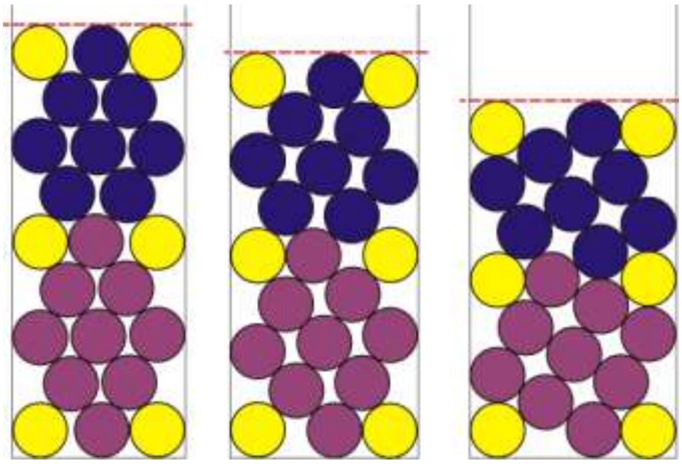
（三）　【(3)M在正中間】就要配合【(3)M在正中間】　(3)☆(3)



（四）　【(4)M在中間偏右】就要配合【(2)M在中間偏左】　(4)☆(2)



（五）　【(5)M跟R相接觸】就要配合【(1) L跟M相接觸】　(5)☆(1)

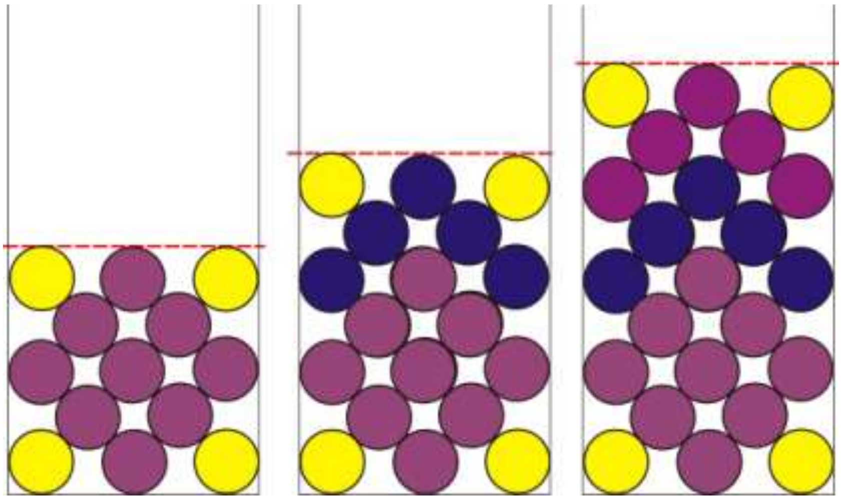


所以，若繼續堆疊上去，接下來會讓頂層三瓶等高的瓶數就是 33 瓶。有可能是

(1)☆(5)☆(1) 或 (2)☆(4)☆(2) 或 (3)☆(3)☆(3) 或 (4)☆(2)☆(4) 或 (5)☆(1)☆(5)。

【特例】

然而在實作的過程中，我們發現了特例存在，就是在(3)這組之中，只要 18 瓶就可以讓頂層三瓶等高，也就是每次只要**增加 5 瓶**就可以讓頂層等高。



＊ 【基本】只要跟對稱組組合，每次增加 10 瓶，就可以保持頂層的酒瓶等高。

＊ 【特例】特例每次增加 5 瓶，就可以保持頂層的酒瓶等高。

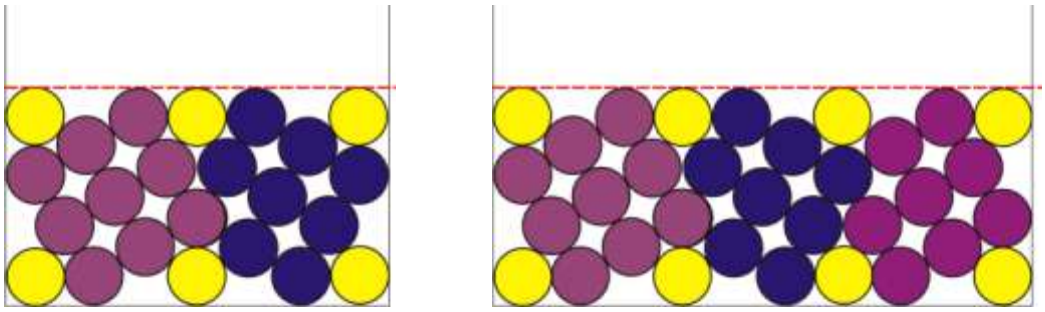
五、若將酒櫃的寬度延伸,使得底層能夠擺放更多的酒瓶,是否會有等高的情形發生呢？

關於這個部份，在一開始推測酒櫃寬度的部份就出現了問題，若是底層放置四瓶，那麼酒櫃的寬度一次將出現多個變因(中間兩瓶如何安排，距離兩側瓶子的距離)，所以使得難以找到切入點，使得這部份一直停滯不前。

後來發現，反正堆好的瓶子是類似長方形的排列，若是我們利用前一個向上堆疊的觀念來想，將堆疊好的瓶子**旋轉九十度**，就可以發現到下列的狀況：

【基本】

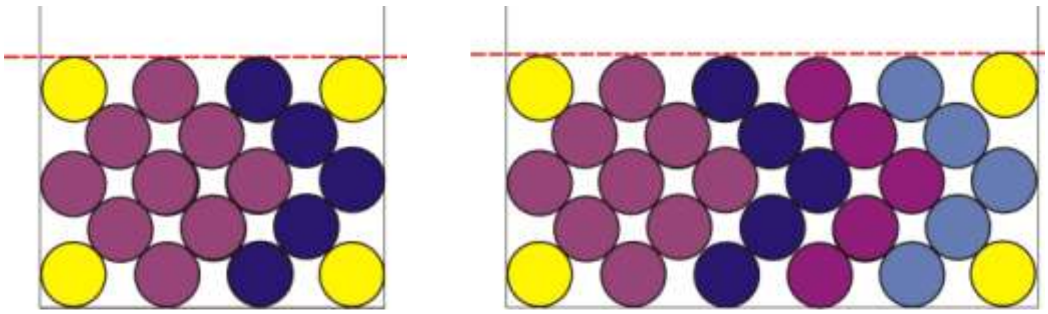
將基本類型（每次固定增加十瓶）所堆疊的瓶子旋轉九十度，可以得到下列的圖形：



經過觀察後，發現在基本類型中，底層的瓶數都是**奇數**，而且所需要的瓶數和向上堆疊所需要的瓶數一樣。

【特例】

如果將特例類型（每次固定增加五瓶）所堆疊的瓶子旋轉九十度，可以得到下列圖形。



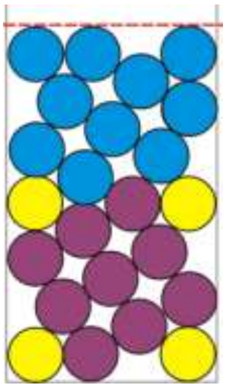
經過觀察後，發現在特例類型中，底層的瓶數若都固定是**偶數**，而且所需要的瓶數和向上堆疊所需要的瓶數一樣（但是一次要增加 10 瓶，才能保持底層是偶數）。

* **底層爲奇數，每次底層增加兩瓶，則總瓶數將增加 10 瓶。**
* **底層爲偶數，每次底層增加兩瓶，則總瓶數將增加 10 瓶。**

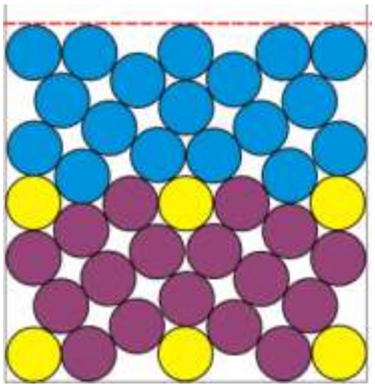
六、接著五的討論，如果再繼續向上堆疊，是否會有等高的情形發生呢？

【奇數】

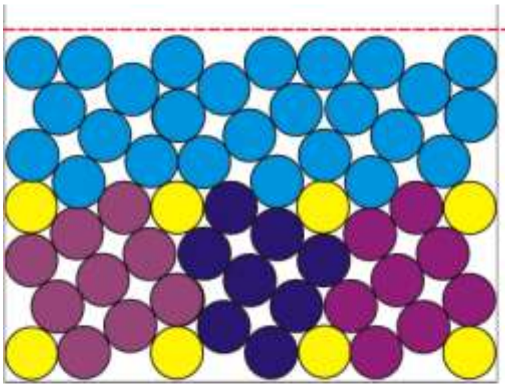
若是底層爲三瓶時，第一次等高爲 13 瓶，每增加 10 瓶，就能向上堆疊保持頂層等高。



若是底層爲五瓶時，第一次等高爲 23 瓶，每增加 18 瓶，就能向上堆疊保持頂層等高。



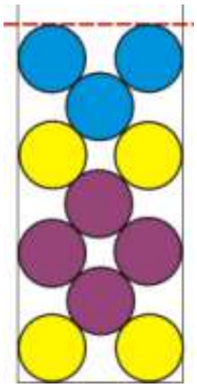
若是底層爲七瓶時，第一次等高爲 33 瓶，每增加 26 瓶，就能向上堆疊保持頂層等高。



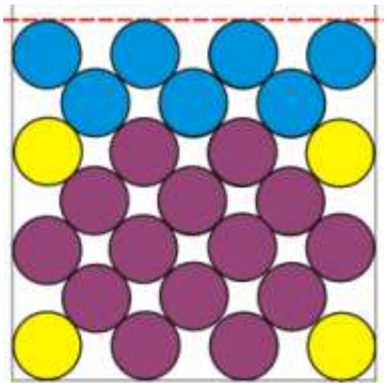
觀察其中的規律，發現到，每次增加的，都是（第一次等高的瓶數－底層的瓶數）。

【偶數】

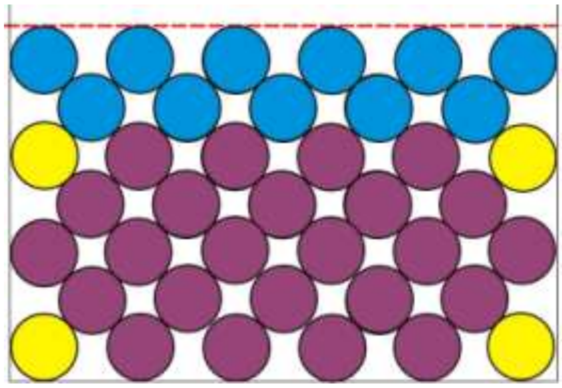
若是底層爲兩瓶時，第一次等高爲 8 瓶，每增加 3 瓶，就能向上堆疊保持頂層等高。



若是底層爲四瓶時，第一次等高爲 18 瓶，每增加 7 瓶，就能向上堆疊保持頂層等高。



若是底層爲六瓶時，第一次等高爲 28 瓶，每增加 11 瓶，就能向上堆疊保持頂層等高。



觀察其中的規律，發現到，每次增加的，都是（底層的瓶數×２－１）。

＊　底層爲奇數，若是繼續向上堆疊，則每次將增加（第一次等高的瓶數－底層的瓶數）瓶。

＊　底層爲偶數，若是繼續向上堆疊，則每次將增加（底層的瓶數×２－１）瓶。

伍、 研究結果

一、是否擺放 13 瓶酒，一定能使得頂層等高？

（一） 酒櫃寬度是**三瓶酒**的寬度：可以

（二） 酒櫃寬度界於**三瓶酒與四瓶酒之間**的寬度：可以

不論寬度是多少，只要在底部保持三瓶的時候，只要擺放１３個酒瓶，就能夠使得頂端的三瓶保持一樣的高度。

二、基本型：底層保持三瓶，要如何增加才能使得頂層等高？

【基本】 只要跟對稱組組合，每次增加 10 瓶，就可以保持頂層的酒瓶等高。

不論寬度是多少，都符合下列五種狀況：

（一） **【(1)Ｌ跟M相接觸】就要配合【(5)M跟Ｒ相接觸】** (1)☆(5)

（二） **【(2)M在中間偏左】就要配合【(4)M在中間偏右】** (2)☆(4)

（三） **【(3)M在正中間】就要配合【(3)M在正中間】** (3)☆(3)

（四） **【(4)M在中間偏右】就要配合【(2)M在中間偏左】** (4)☆(2)

（五） **【(5)M跟Ｒ相接觸】就要配合【(1)Ｌ跟M相接觸】** (5)☆(1)

其中**(1)跟(5)互相為對稱組，(2)跟(4)互相為對稱組，(3)則是跟自己為對稱組**。

若是持續堆疊上去，每一組都需要搭配自己對稱組上方的 10 個酒瓶（扣掉底層的３瓶）才能讓頂層的三瓶一樣高，例如：(1)☆(5)☆(1)☆(5)☆(1)………☆(1)☆(5)☆(1)。

13 瓶－＞ 23 瓶－＞ 33 瓶－＞ 43 瓶－＞……… **（首項是 13，公差是 10）**

$a_1=13$，$d=10$，利用 $a_n=a_1+(n-1)d$，得到 $a_n=10n+3$。

【特例】　每次增加５瓶，就可以保持頂層的酒瓶等高。

不論寬度是多少，都只發生在**【(3)M在正中間】**這組中，每次只需增加五瓶，就可以讓頂層保持一樣高。

13瓶－＞ 18瓶－＞ 23瓶－＞ 28瓶－＞………　**（首項是13，公差是5）**

$a_1=13$，$d=5$，利用$a_n=a_1+(n-1)d$，得到$a_n=5n+3$。

三、推廣型：討論底層的情況，如何才能使得頂層等高？

【奇數】　底層為奇數，每次底層增加兩瓶，則總瓶數將增加10瓶。

將基本型向上堆疊的情形旋轉九十度後，可以討論出底層為奇數（不包含１瓶）的排列方式：

13瓶－＞ 23瓶－＞ 33瓶－＞ 43瓶－＞………

但是考慮到奇數必須表示成$2m+1$，所以得到－**（首項是13，公差是10）**。

$a_1=13$，$d=10$，利用$a_m=a_1+(m-1)d$，得到$a_m=10m+3$。

【偶數】　底層為偶數，每次底層增加兩瓶，則總瓶數將增加10瓶。

將特例型向上堆疊的情形旋轉九十度後，可以討論出底層為偶數（包含2瓶）的排列方式：

８瓶－＞ 18瓶－＞ 28瓶－＞38瓶－＞………

但是考慮到偶數必須表示成$2m$，所以得到－**（首項是８，公差是10）**。

$a_1=8$，$d=10$，利用$a_m=a_1+(m-1)d$，得到$a_m=10m-2$。

四、最終型：找出所有的情況，如何才能使得頂層等高？

由推廣型的分類來分析，將種類分成【奇數】和【偶數】兩種：

【奇數】

如果底層是奇數，表示成$2m+1$，則每次會固定增加$8m+2$瓶。

所以得到－（**首項是$10m+3$，公差是$8m+2$**）。

$a_1=10m+3$，$d=8m+2$，

利用$a_n=a_1+(n-1)d$，得到$a_n=8mn+2m+2n+1$。

【偶數】

如果底層是偶數，表示成$2m$，則每次會固定增加$2m-1$瓶。

所以得到－（**首項是$10m-2$，公差是$2m-1$**）。

$a_1=10m-2$，$d=2m-1$，

利用$a_n=a_1+(n-1)d$，得到$a_n=2mn+8m-n-1$。

陸、　討論

一、在討論基本型時，我們雖然發現特例（底層的M瓶在正中間）的存在，但是並不能明確的將它在其他推廣型與最終型中找出，所以我們在這些地方不討論有特例發生的情形，都是以基本狀況爲主。

二、在推廣型與最終型的討論中，由於我們是將基本型旋轉九十度產生的，所以無法找出正確酒櫃寬度的範圍；但是根據基本型的討論，酒櫃的寬度不會影響到擺放的總瓶數，所以我們大膽的假設在推廣型與最終型中，酒櫃寬度也是不會影響總瓶數的，但正確結果仍需多方討論。

三、如果不將基本型旋轉九十度，是否能有其他的方法可以直接討論出瓶數跟底層的關係呢？這部份就期待日後有其他同好能跟我們一起互相討論與加油了。

柒、　結論

一、基本型：底層保持只有三瓶，向上堆疊時：

【基本】

第ｎ次頂層的一樣高，則需要１０ｎ＋３瓶。（ｎ是一個正整數）

【特例】　（底層M瓶在正中間時）

第ｎ次頂層的一樣高，則需要５ｎ＋３瓶。（ｎ是一個正整數）

二、推廣型：底層向右邊增加，底層瓶數分爲奇數和偶數：

【底層爲奇數】

底層爲２ｍ＋１瓶，第１次頂層的一樣高，則需要１０ｍ＋３瓶。（ｍ是一個正整數）

【底層爲偶數】

底層爲２ｍ瓶時，第１次頂層的一樣高，則需要１０ｍ－２瓶。（ｍ是一個正整數）

三、最終型：底層向右增加，排列ｎ次等高：

【底層爲奇數】

底層爲２ｍ＋１瓶，第ｎ次頂層的一樣高，

則需要（８ｍｎ＋２ｍ＋２ｎ＋１）瓶。（ｍ、ｎ都是正整數）

【底層爲偶數】

底層爲２ｍ瓶時，第ｎ次頂層的一樣高，

則需要（２ｍｎ＋８ｍ－ｎ－１）瓶。（ｍ、ｎ都是正整數）

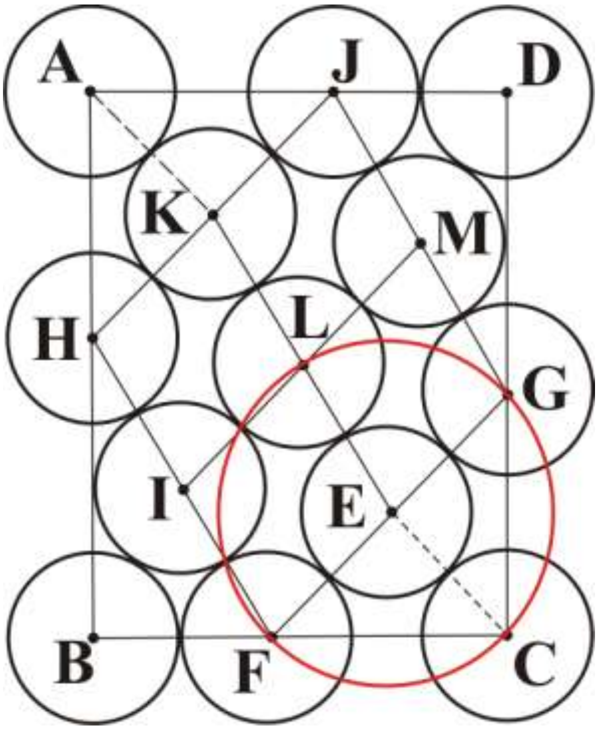
捌、　參考資料

一、陳冒海(民 97)。第一單元。南一版國中第四冊數學課本。台南市：南一。

二、許志農(民 96)。十三個酒瓶的遊戲。戲說數學，5-8。

玖、　附錄

【附錄一】



【證明】　四邊形ＨＦＧＪ是一個菱形

【定理】　在圓中，一個圓周角爲九十度，則所對的弦必定是直徑。

連接 $\overline{CE}$ ，因爲 $\overline{CE}$ 、 $\overline{EF}$ 和 $\overline{EG}$ 都等於酒瓶的直徑ｒ，

則Ｃ、Ｆ、Ｇ這三個點都會落在以Ｅ爲圓心且半徑爲ｒ的圓周上，又 $\angle FCG = 90°$ ，

利用定理，我們可以知道：Ｆ、Ｅ、Ｇ這三點恰好在同一條直線（直徑）上。

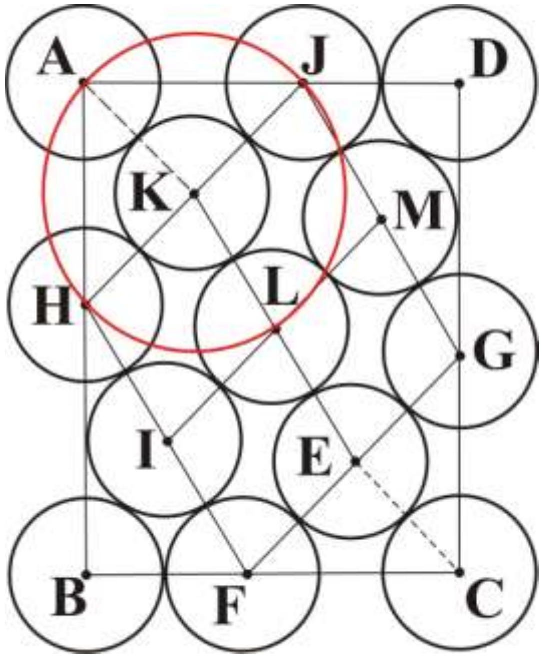
同理，Ｈ、Ｉ、Ｆ這三點也在同一條直線上。

而且這四個四邊形ＦＩＬＥ、ＩＨＫＬ、ＬＫＪＭ、ＥＬＭＧ都是全等的菱形，

（對應邊邊長都是ｒ，對應角相等）

我們可以推論出**四邊形ＨＦＧＪ是一個菱形**。

【附錄二】



【證明】　四邊形ＡＢＣＤ是一個長方形

【定理】　在圓中，直徑所對的圓周角必為九十度。

連接 $\overline{AK}$ ，因為 $\overline{AK}$ 、$\overline{KH}$ 和 $\overline{KJ}$ 都等於酒瓶的直徑ｒ，

所以Ａ、Ｈ、Ｊ這三點都會落在以Ｋ為圓心且半徑為ｒ的圓周上，

又因為Ｈ、Ｋ、Ｊ這三個點共線（為菱形ＨＦＧＪ的一邊)，故所連成的是圓形的直徑，

利用定理，我們可以知道：這條直徑所對應的圓周角 $\angle HAJ = 90°$ 。

同理，我們可以得到 $\angle JDG = 90°$ 。

再加上 $\angle FCG = 90°$ 、$\angle HBF = 90°$ ，

因此，可以知道**四邊形ＡＢＣＤ正好為一長方形**。

【評語】030405

1. 題材有趣。
2. 從作品中可看出同學努力的痕跡。
3. 如能以數學式子呈現結果更佳。