中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030403

天馬行空---n 后問題規律之探討

學校名稱：臺中市立立人國民中學

作者：	指導老師：
國三　劉怡欣 國三　高紹瑜 國三　黃雅琳 國三　張際雲	李漢祥

關鍵詞：　八皇后、馬步解、甜甜圈

天馬行空－n 后問題規律之探討

壹、 摘要

一、『馬步解』定義：向右二格、再向上一格稱爲『馬步 2』，推廣至向右 n 格、再向上一格稱爲『馬步 n』。

二、先逐一嘗試 $n\times n$ 方陣中馬步解成立與不成立之各種情形，並整理列表。

三、利用嘗試結果研究出馬步解的例外規則。

四、根據鑲嵌解概念推得『環面解』，再進一步推得『甜甜圈解』。

五、利用馬步解的特性，得到兩個重要性質：

（一）『加法對應性質』。 （二）『乘法對應性質』。

六、利用『遞降法』，算出乘法對應。

七、根據『費馬平方和定理』，推得 $4m$+1 型質數階方陣加法對應重覆之運算。

八、利用『削邊法』得到偶方陣的類馬步解，完成所有具有馬步規律解的尋找。

九、以往對於 n 后問題的研究著重於解題邏輯思考，或是比較程式演算法的優劣。本研究則是針對相同斜率規律格子點的解，探討其規則以及推廣。更重要的是對於經典的『八皇后問題』的解，也可利用甜甜圈解的概念加以精簡。

貳、 研究動機

一、 某次上課老師給了一個挑戰題：「在 5×5 的方格中，放入 5 個牛奶瓶，使得每個牛奶瓶所在位置的直、橫、斜線上，都沒有其他牛奶瓶。」同學們嘗試了一陣子，有人很快地求出符合要求的一個解，外觀上很像排成一個斜列。老師隨後說明還有一個解，外觀上也非常相像。這個問題引發我們強烈的好奇心，當方格數變大後是否也有類似的規律呢？這想法讓我們反覆思考研究這個問題，以下是我們的研究過程。

二、 相關教材教學單元：

（一）直角座標(康軒一下 2-1)：建立 n 階方陣中格子點的相對位置。

（二）質數(康軒一上 2-1)：$4m$+1 型質數階方陣加法對應關係會出現重覆情形。

（三）因數與倍數(康軒一上 2-1)：n 階方陣馬步解不成立的情形與 n 的因數有密切關係。

參、 研究目的

一、找出5×5方陣的所有解及規律。

二、利用5×5方陣解規律的研究推廣至$n\times n$方陣。

肆、 研究器材

方格紙、電腦

伍、 研究過程

一、名詞解釋

（一）八皇后問題：在西洋棋 8×8 棋盤方格中放置八個皇后，使得彼此不在同一直行、橫列、斜率 1 或－1 的四條線上。這個問題的答案是由 *Franz Nauck* 於 1850 年最先提出，高斯亦曾投入研究，猜測有 96 個解，但實際上只有 92 個形式解，本質解有 12 個。

（二）n后問題：將八皇后問題推廣至$n\times n$棋盤中放入n個皇后，規則相同。1969 年霍夫曼(J.E.Hofman)等證明：$n\geq 4$時，n后問題總有解。

（三）馬步解：取材自象棋中的馬，也可說是西洋棋中的騎士，向右二格、再向上一格。若向右數到最後一格時，回頭至最左第一格開始，稱爲『馬步 2』。推廣至向右n格、再向上一格稱爲『馬步n』。

（四）鑲嵌解(磚瓦解)：將存在有效馬步解的n階方陣，視作一塊大磁磚，向 8 個方向複製，成爲一大九宮格。在此大區塊中，任取n階方塊，均爲n階方陣有效解。此種延伸解稱爲馬步鑲嵌解，簡稱爲鑲嵌解。

（五）環面解：將有效解的第一行(列)連接至最後一行(列)，形成一圓柱形立體解，稱爲環面解。將圓柱形一刀裁開後攤平，即可得新的平面有效解，此與左右移動或上下移動的鑲嵌解相同。

（六）甜甜圈解：結合左右環面解及上下環面解成爲一甜甜圈的立體形狀，稱爲甜甜圈解。將甜甜圈直(橫)一刀裁開拉直，即可得新的有效環面解，再加橫(直)一刀裁開攤平，即可得新的平面有效解，此與結合上下及左右移動的鑲嵌解相同。

（七）形式解：廣義的有效解。只要符合n后問題規則，均稱爲一個形式解。

（八）本質解：將經由旋轉或鏡射後可得到相同的形式解，均視爲同一個本質解，數量大約爲形式解的$\frac{1}{8}$。

（九）基本解：將經由環面作左右上下移動，或是在甜甜圈的曲面上作移動後，可得到相同的本質解，均視爲同一個基本解。

（十）類馬步解：外觀形式與馬步解相同，但與馬步解定義不符，且無延伸之鑲嵌解。

（十一）對稱解：經由順(逆)時針旋轉90°的倍數後得到與原來相同的解。且棋子相對於中央格(點)形成點對稱。

（十二）加法與乘法對應性質：n階馬步有效解以四個不同的方向來看，可得到四種馬步解。彼此間之和爲n即爲加法對應，彼此間之積爲$nk\pm1$即爲乘法對應。

（十三）遞降法：馬步解乘法對應計算之迅速算法。

（十四）費馬平方和定理：$4m+1$型之質數皆可表達爲兩完全平方數之和。

（十五）削邊法：將存在(1，1)角落格的n階奇方陣有效馬步解，削去角落格所在行、列，可得低一階偶方陣解。

二、規則：在$n\times n$方格中放入n個棋子，使得棋子所在位置的直行、橫列、斜率 1 或－1 的四條直線上沒有其他棋子。

三、問題研究：本研究首先將探討：「5×5的方格中，置入 5 個棋子，並符合上列規則。」有哪些解？其規律爲何？進而推廣至$n\times n$的方格。

馬步解的探討

首先，我們檢視5×5方陣(以下簡稱 5 階方陣)已知的兩個解：

（1）

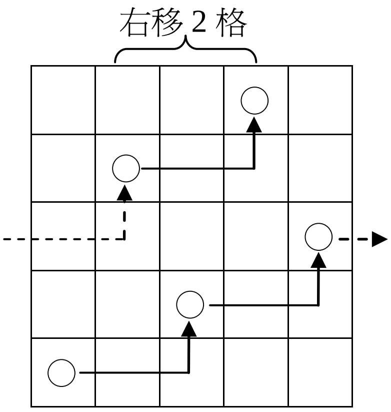
			○	
	○			
				○
		○		
○				

（2）

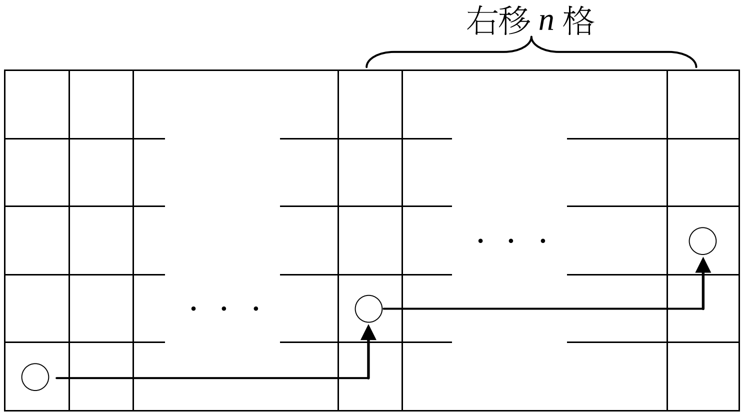
	○			
				○
		○		
○				
			○	

可以看出相鄰兩棋子均依相同的規律擺放。我們將從這裏出發，探討是否可以將同樣的規律推廣至所有的$n\times n$方陣。

由於橫列間的棋子移動類似象棋中的馬（或可說是西洋棋中的騎士），向右二格，再向上一格，若向右數到最後一格時，回頭至最左第一格開始。我們將這種擺放方式稱爲馬步 2。推廣至馬步n的規則，則是向右n格，再向上一格。



馬　步　2



馬　步　n

【座標化】將方格位置以直角座標呈現，例如 5 階方陣左下方角落格(1，1)、

右上方角落格(5，5)，

【起始點】爲了簡化問題，第一個棋子均放在(1，1)

【問題 1】馬步 2 是否對所有 n 階方陣皆會成立？(註：2 階、3 階方陣均不存在有效解。)

以下 n 暫以 35 爲限，且馬步均由(1，1)出發

【結果 1】

n 階方陣	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
是否爲有效解		•		•				•		•				•

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
	•				•		•				•		•				•

•代表馬步解成立。

【猜想 1】：n 階方陣中($n \geq 4$)，

(1) n 爲 2 的倍數時，馬步 2 不成立。

(2) n 爲 3 的倍數時，馬步 2 不成立。

綜合(1)(2) 當 n 不爲 2 或 3 的倍數時，馬步 2 成立。

【問題 2】馬步 3 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 2】

n 階方陣	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
是否爲有效解		•		•				•		•				•

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
	•				•		•				•		•				•

※ 符合猜想 1。

【問題 3】馬步 4 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 3】

n 階方陣	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
是否爲有效解			•				•		•				•	

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
•				•						•		•				

※ 猜想 1 出現例外情形：$n=25$、35 時不成立。

【問題 4】馬步 5 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 4】

n 階方陣	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
是否爲有效解		•				•		•				•	

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
•				•						•		•				

※ 例外同馬步 4：$n=25$、35 時不成立。

【問題 5】馬步 6 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 5】

n 階方陣	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
是否爲有效解					•		•				•		•

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
			•						•		•				

※ 例外同馬步 4： $n = 25$ 、35 時不成立。

【問題 6】馬步 7 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 6】

n 階方陣	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
是否爲有效解				•		•				•		•

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
			•		•				•		•				

※出現新的例外情形： $n = 25$ 成立，但 $n = 35$ 時不成立。

【問題 7】馬步 8 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 7】

n 階方陣	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
是否爲有效解			•		•				•		•	

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
		•		•				•		•				

※ 例外同馬步 7： $n = 25$ 成立，但 $n = 35$ 時不成立。

【問題 8】馬步 9 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 8】

n 階方陣	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
是否爲有效解		•		•				•		•	

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
		•						•		•				

※ 例外同馬步 4： $n = 25$ 、35 時不成立。

【問題 9】馬步 10 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 9】

n 階方陣	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
是否爲有效解			•				•		•		

22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
	•						•		•				

※ 例外同馬步 4： $n = 25$ 、35 時不成立。

【問題 10】馬步 11 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 10】

n 階方陣	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
是否爲有效解		•				•		•		

22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
	•						•		•				

※ 例外同馬步 4： $n = 25$ 、35 時不成立。

【問題 11】馬步 12 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 11】

n 階方陣	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
是否為有效解					•		•			

23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
•		•				•		•				•

※同馬步 2、馬步 3，符合猜想 1。

【問題 12】馬步 13 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 12】

n 階方陣	14	15	16	17	18	19	20	21	22
是否為有效解				•		•			

23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
•		•				•		•				

※ 例外同馬步 7： $n=25$ 成立，但 $n=35$ 時不成立。

【問題 13】馬步 14 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 13】

n 階方陣	15	16	17	18	19	20	21	22	23
是否為有效解			•		•				•

24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
					•		•				

※例外同馬步 4： $n=25$ 、35 時不成立。

【問題 14】馬步 15 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 14】

n 階方陣	16	17	18	19	20	21	22	23
是否爲有效解		•		•				•

24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
					•		•				

※ 例外同馬步 4： $n = 25$ 、35 時不成立。

【問題 15】馬步 16 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 15】

n 階方陣	17	18	19	20	21	22	23	24
是否爲有效解			•				•	

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
				•		•				

※ 例外同馬步 4： $n = 25$ 、35 時不成立。

【問題 16】馬步 17 是否對所有 n 階方陣皆會成立？

【結果 16】

n 階方陣	18	19	20	21	22	23	24
是否爲有效解		•				•	

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
•				•		•				•

※ 同馬步 2、馬步 3，符合猜想 1。

※僅試驗至馬步 17 即可，馬步 18 以後均會出現重覆情形(註：加法對應，參閱 *P17*)。

整理列表

n 階奇方陣	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
馬步 2	$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$
馬步 3	$\tilde{\bullet}$	$\bullet_{(2)}$		$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$
馬步 4		$\tilde{\bullet}$		$\bullet_{(3)}$	$\bullet_{(3)}$		$\bullet_{(*)}$	$\bullet$		$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$		
馬步 5		$\tilde{\bullet}$		$\bullet_{(2)}$	$\bullet_{(*)}$		$\bullet$	$\bullet_{(4)}$		$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$		
馬步 6				$\tilde{\bullet}$	$\bullet_{(2)}$		$\bullet_{(3)}$	$\bullet_{(3)}$		$\bullet_{(4)}$			$\bullet_{(5)}$	$\bullet_{(5)}$		
馬步 7				$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		$\bullet_{(5)}$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet_{(*)}$		$\bullet_{(4)}$	$\bullet$		
馬步 8				$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		$\bullet_{(2)}$	$\bullet_{(7)}$		$\bullet_{(3)}$	$\bullet_{(3)}$		$\bullet$	$\bullet_{(4)}$		
馬步 9				$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		$\tilde{\bullet}$	$\bullet_{(2)}$		$\bullet_{(5)}$			$\bullet$	$\bullet_{(7)}$		
馬步 10					$\tilde{\bullet}$		$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		$\bullet_{(7)}$			$\bullet_{(3)}$	$\bullet_{(3)}$		
馬步 11					$\tilde{\bullet}$		$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		$\bullet_{(2)}$			$\bullet_{(8)}$	$\bullet$		
馬步 12							$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		$\tilde{\bullet}$	$\bullet_{(2)}$		$\bullet_{(*)}$	$\bullet$		$\bullet_{(3)}$
馬步 13							$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		$\bullet_{(9)}$	$\bullet_{(12)}$		
馬步 14							$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		$\tilde{\bullet}$			$\bullet_{(2)}$	$\bullet_{(11)}$		
馬步 15							$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		$\tilde{\bullet}$			$\tilde{\bullet}$	$\bullet_{(2)}$		
馬步 16								$\tilde{\bullet}$		$\tilde{\bullet}$			$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		
馬步 17								$\tilde{\bullet}$		$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\bullet}$		$\bullet_{(2)}$

註：$\bullet_{(2)}$ 括號內數字代表乘法對應，$(*)$代表加法對應重覆，

$\tilde{\bullet}$代表加法對應，參閱 *P18*。

【猜想 2】將猜想 1 修正為：n 階方陣中，若 a_1 為 n 的因數，則馬步 $ka_1 - 1$、馬步 ka_1、馬步 $ka_1 + 1$ (k 為正整數)均不成立。

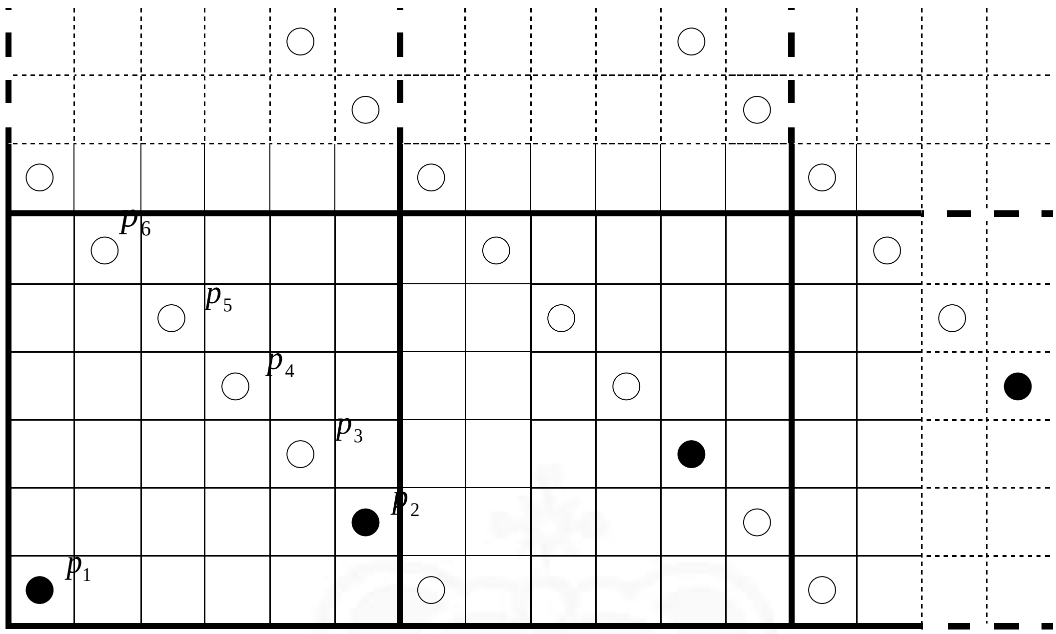
【說明 2】從實際操作中我們發現：

若：1、將 n 階方陣的解向右、向上多次複製。

2、將 y 坐標相同者均視為同一點，如 6 階方陣中(1，1)≡(7，1)≡(13，1)≡……… 。

則：(1)當兩點的 x 坐標差加上 y 坐標差等於 0 或 n 的倍數時，通過此兩點的直線的斜率爲 -1，也就是說此時馬步解不成立。例如下圖的 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 、 P_6 。

6 階方陣馬步 5(無效馬步解)



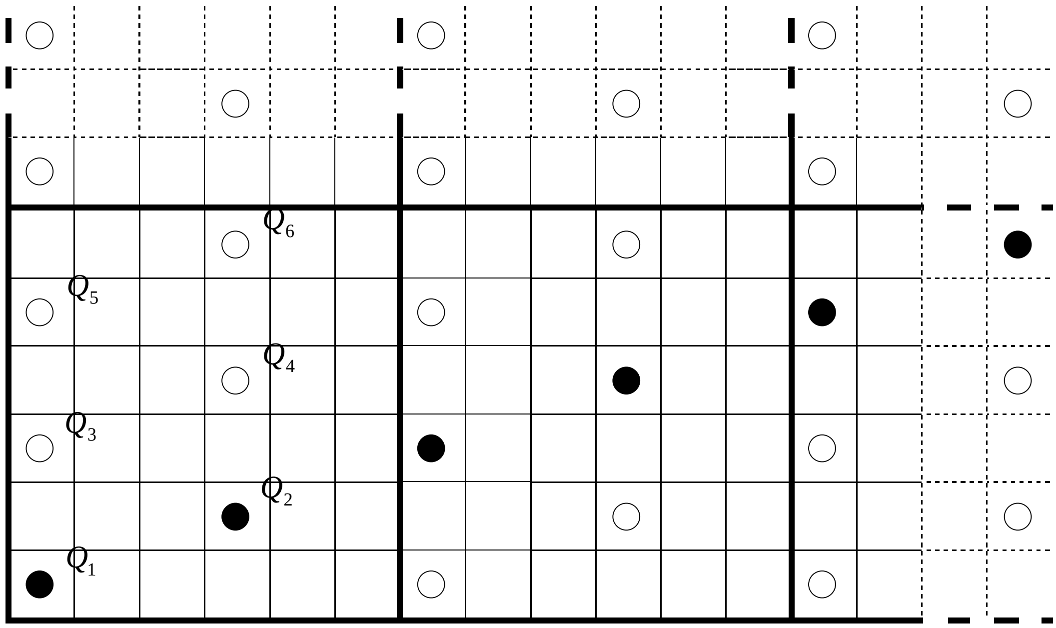
$P_1(1,1) \equiv (7,1) \equiv (13,1) \equiv \cdots\cdots$ ；　$P_2(6,2) \equiv (12,2) \equiv (18,2) \equiv \cdots\cdots$ ；

$P_3(5,3) \equiv (11,3) \equiv (17,3) \equiv \cdots\cdots$ ；　$P_4(4,4) \equiv (10,4) \equiv (16,4) \equiv \cdots\cdots$ ；

$P_5(3,5) \equiv (9,5) \equiv (15,5) \equiv \cdots\cdots$ ；　$P_6(2,6) \equiv (8,6) \equiv (14,6) \equiv \cdots\cdots$ ；

(2)當兩點的 x 坐標差等於 0 或 n 的倍數時，通過此兩點的直線爲一條鉛垂直線，也就是說此時馬步解不成立。例如下圖的 Q_1 、 Q_3 、 Q_5 。

6 階方陣馬步 3(無效馬步解)



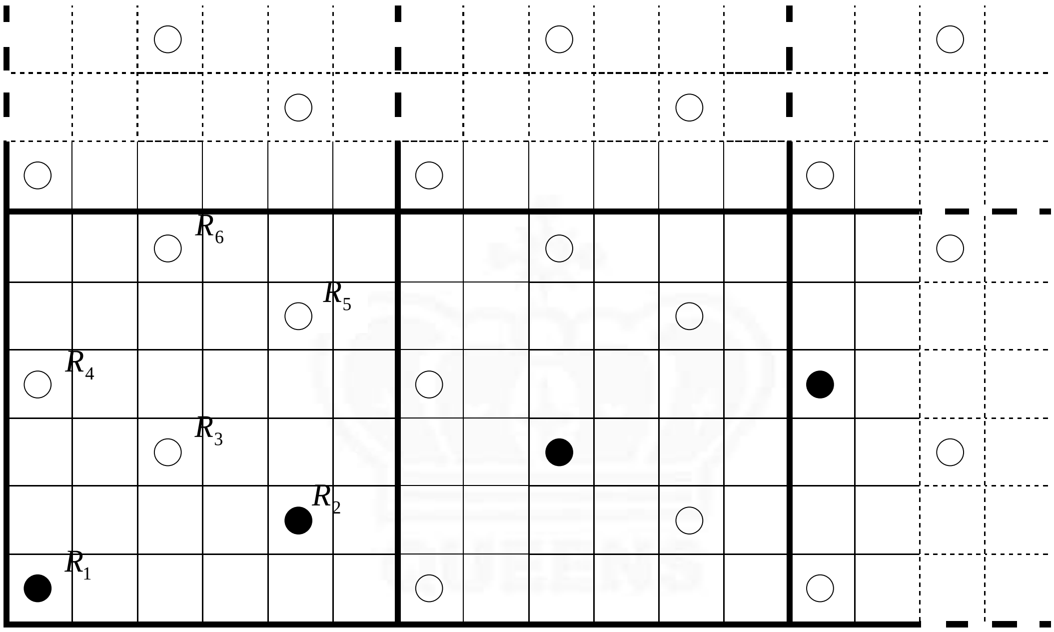
$Q_1(1,1) \equiv (7,1) \equiv (13,1) \equiv \cdots\cdots$；　$Q_2(4,2) \equiv (10,2) \equiv (16,2) \equiv \cdots\cdots$；

$Q_3(1,3) \equiv (7,3) \equiv (13,3) \equiv \cdots\cdots$；　$Q_4(4,4) \equiv (10,4) \equiv (16,4) \equiv \cdots\cdots$；

$Q_5(1,5) \equiv (7,5) \equiv (13,5) \equiv \cdots\cdots$；　$Q_6(4,6) \equiv (10,6) \equiv (16,6) \equiv \cdots\cdots$；

(3)當兩點的 x 坐標差減去 y 坐標差，等於 0 或 n 的倍數時，通過此兩點的直線的斜率為 1，也就是說此時馬步解不成立。例如下圖的 R_1 、 R_3 、 R_5 。

6 階方陣馬步 4(無效馬步解)



$R_1(1,1) \equiv (7,1) \equiv (13,1) \equiv \cdots\cdots$；　$R_2(5,2) \equiv (11,2) \equiv (17,2) \equiv \cdots\cdots$；

$R_3(3,3) \equiv (9,3) \equiv (15,3) \equiv \cdots\cdots$；　$R_4(1,4) \equiv (7,4) \equiv (13,4) \equiv \cdots\cdots$；

$R_5(5,5) \equiv (11,5) \equiv (17,5) \equiv \cdots\cdots$；　$R_6(3,6) \equiv (9,6) \equiv (15,6) \equiv \cdots\cdots$；

【證明 2】n 階方陣中

$n = a_1^{k_1} \times a_2^{k_2} \times \cdots\cdots \times a_m^{k_m}$，則（$n$，$a_1$）$= a_1$

（1） 馬步（$a_1 - 1$）

$P_1(1,1)$，$P_2(a_1,2)$，$P_3(2a_1-1,3)$，・・・・・・・，

$P_f(a_1(f-1)-(f-2), f)$，・・・・・・・，$P_e(a_1(e-1)-(e-2), e)$，・・・・・・・

必可找到兩點 P_e 、 P_f

使得 x 坐標差 $= (e-f)a_1 - (e-f)$

、y坐標差$=(e-f)$

兩者和$=(e-f)a_1=n$或n的倍數

此時$e-f=a_1^{k_1-1}\times a_2^{k_2}\times\cdots\cdots\times a_m^{k_m}\times b$

※代表每跳$(e-f)$個點，則必在同一條斜率爲-1直線上重覆出現。

同理可證馬步（ka_1-1）

（2） 馬步（a_1）

$Q_1(1,1)$ ，$Q_2(a_1+1,2)$ ，$Q_3(2a_1+1,3)$ ，・・・・・・・，

$Q_h(a_1(h-1)+1,h)$，・・・・・・・，$Q_g(a_1(g-1)+1,g)$，・・・・・・・

必可找到兩點Q_g、Q_h

使得x坐標差$=(g-h)a_1=n$或n的倍數

此時$g-h=a_1^{k_1-1}\times a_2^{k_2}\times\cdots\cdots\times a_m^{k_m}\times b$

※代表每跳$(g-h)$個點，則必在同一條鉛垂直線上重覆出現。

同理可證馬步（ka_1）

（3） 馬步（a_1+1）

$R_1(1,1)$ ，$R_2(a_1+2,2)$ ，$R_3(2a_1+3,3)$ ，・・・・・・・，

$R_j(a_1(j-1)+j,j)$，・・・・・・・，$R_i(a_1(i-1)+i,i)$，・・・・・・・

必可找到兩點R_i、R_j

使得x坐標差$=(i-j)a_1+(i-j)$

、y坐標差$=(i-j)$

兩者差$=(i-j)a_1=n$或n的倍數

此時$i-j=a_1^{k_1-1}\times a_2^{k_2}\times\cdots\cdots\times a_m^{k_m}\times b$

※代表每跳$(i-j)$個點，則必在同一條斜率爲 1 直線上重覆出現。

同理可證馬步（ka_1+1）

此證明結果成功地解釋，何以n階方陣中，n爲 2 或 3 的倍數時，均不存在有效馬步解。

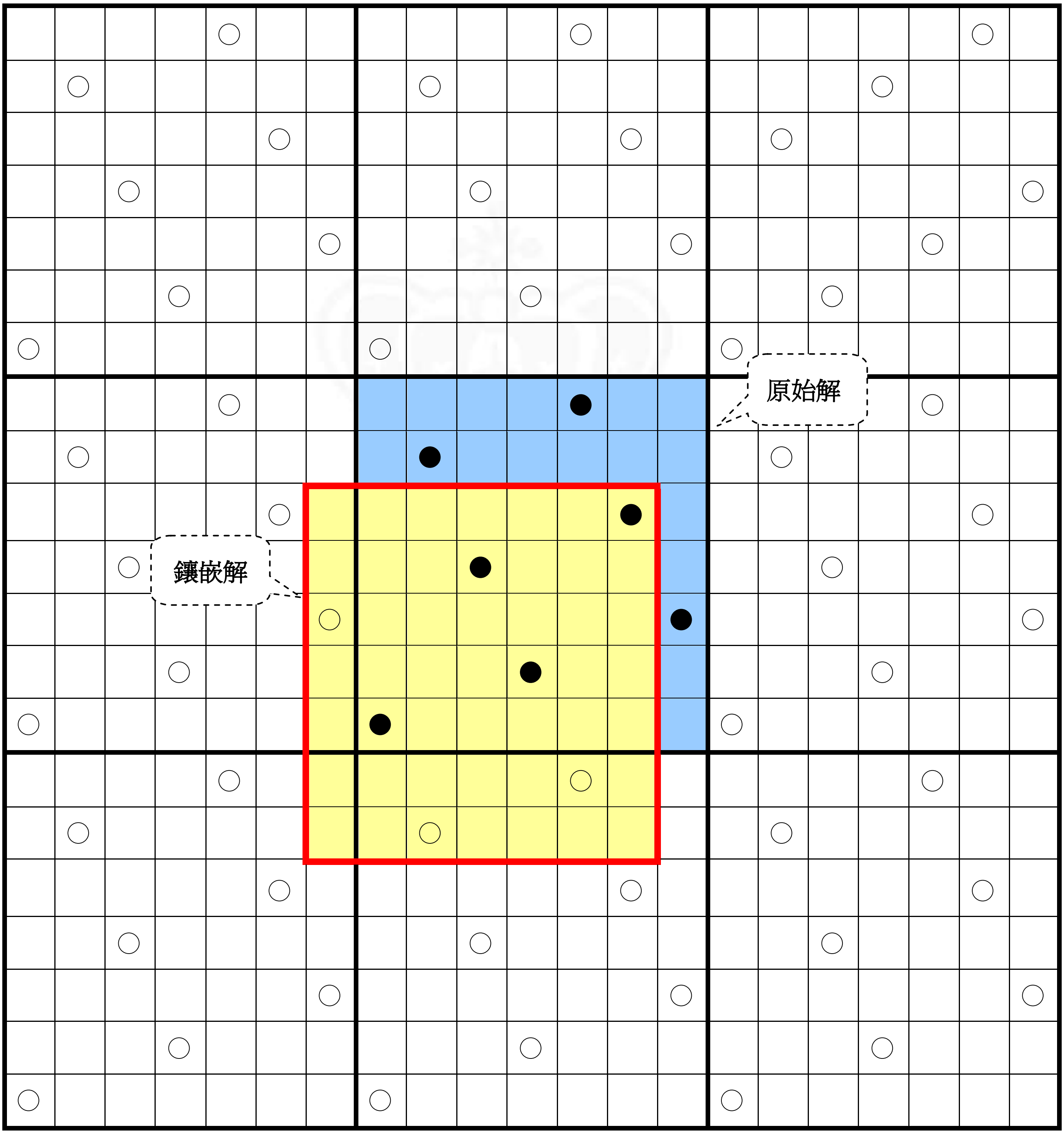
並進一步推廣，若n有 2、3 以外的因數時，也會造成有效馬步解數量的減少。

陸、 討論

鑲嵌(磚瓦)解的探討：

【思考】將存在馬步解的 n 階方陣，視作一塊大磚瓦，向 8 個方向複製，成為一大九宮格。在此大區塊中，任取 n 階方塊，均為 n 階方陣有效解。由於類似鑲嵌概念，我們將由這種方式所得到的解稱為鑲嵌(磚瓦)解(以下簡稱鑲嵌解)。

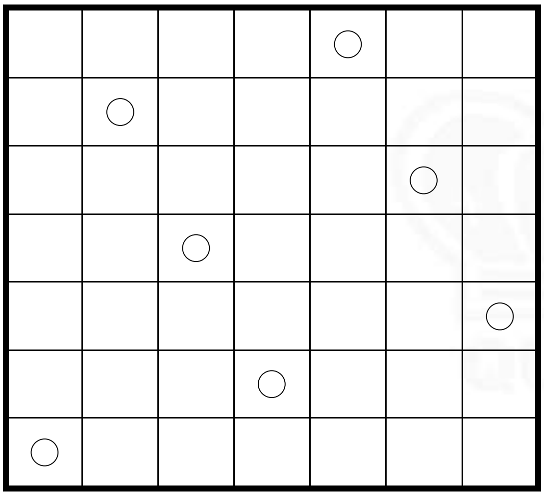
下圖以 7 階方陣馬步 3 為例：



【定序號】因向上、向下、向左、向右或結合移動之鑲嵌解，均可在向右移動之鑲嵌解中找到相同解，爲了釐清順序，規定一律向右移動，起始解爲鑲嵌解左下角落格在原馬步解(1, 1) 位置，稱爲『 n 階方陣-馬步 m -鑲嵌 1』，簡稱爲『鑲嵌 $n-m-1$ 解』。方塊向右平移 1 格，使左下角落格在原馬步解(2，1)位置，稱爲『 n 階方陣-馬步 m -鑲嵌 2』，簡稱爲『鑲嵌 $n-m-2$ 解』，向右以此類推。

【重覆剔除】以 7 階方陣馬步 3 爲例，可得到 7 個鑲嵌解，如下圖。但其中除了具有中央格的 7-3-7 之外，其餘均出現成對重覆(旋轉180°)情形，

如 7-3-1 與 7-3-6；　7-3-2 與 7-3-5；　7-3-3 與 7-3-4。

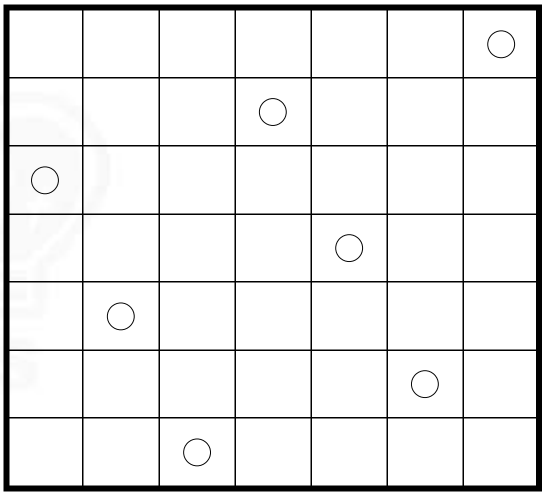


7-3-1

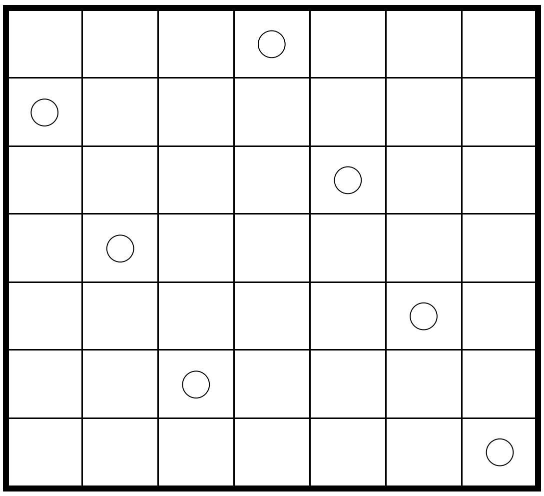
逆時針

旋轉180°

⇒



7-3-6

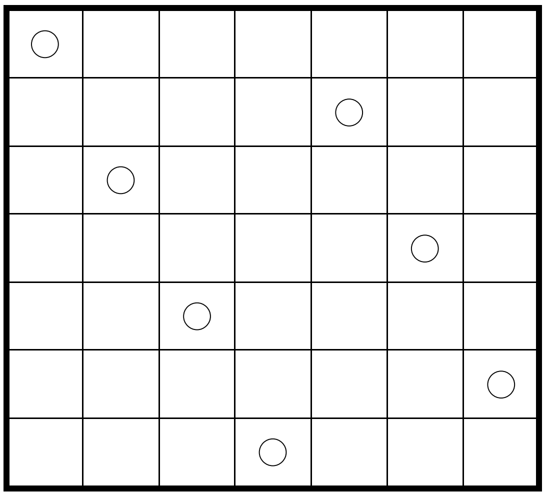


7-3-2

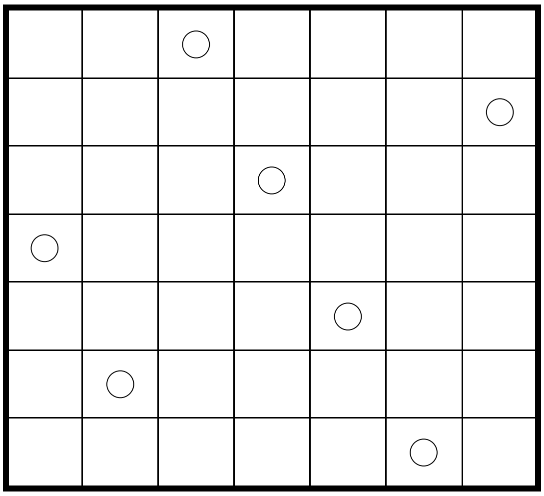
逆時針

旋轉180°

⇒



7-3-5

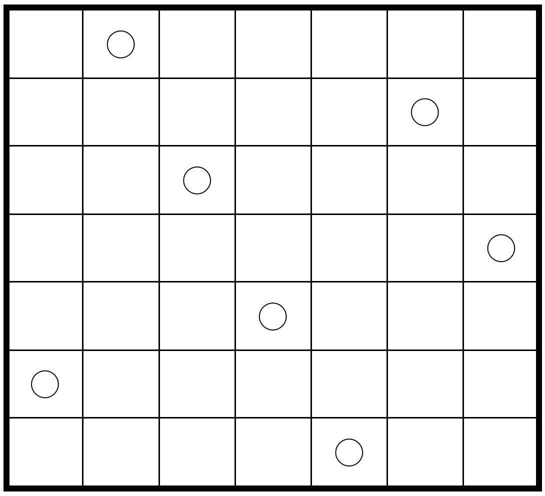


7-3-3

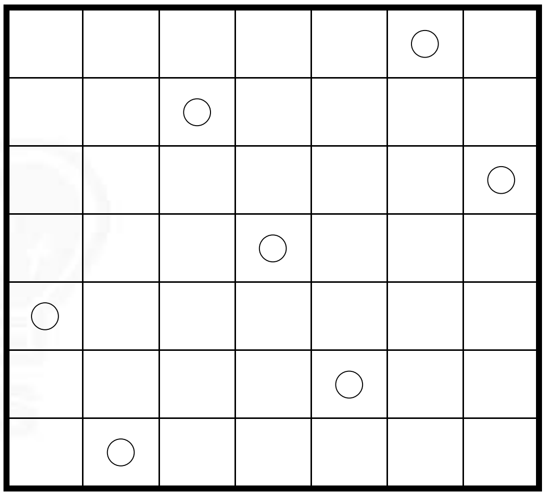
逆時針

旋轉180°

$\Rightarrow$



7-3-4



7-3-7

【結果】

在 n 階奇方陣馬步 m 的 n 個鑲嵌解中必有一個鑲嵌解$(n-m-p)$爲對稱解(對稱於中央格)。其它的鑲嵌解恰可找到另一個鑲嵌解，與原來的解互相形成180°旋轉對稱。故在剔除重覆後，可得到$\frac{n+1}{2}$個不同的本質解。

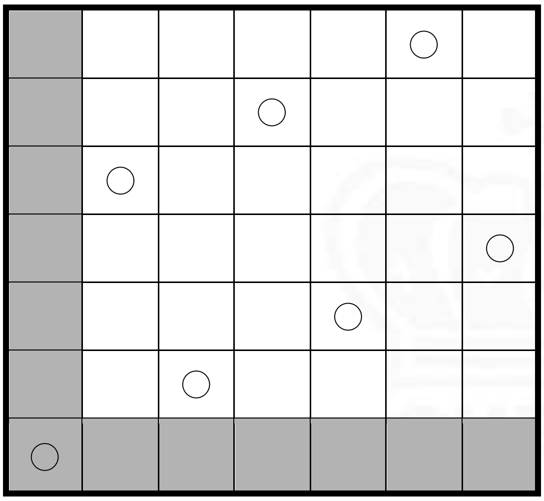
(1)若 m 爲偶數，則 $p=\frac{n-m+3}{2}$ 。　(2)若 m 爲奇數，則 $p=\frac{2n-m+3}{2}$ 。

削邊法與奇偶對應

一、n 階奇方陣每一種馬步解可對應 $\frac{n+1}{2}$ 個鑲嵌解，其中必有一個存在(1，1)角落格，削去角落格所在行、列，可得低一階偶階方陣。故 $\frac{n+1}{2}$ 個 n 階奇方陣馬步解可對應 1 個低一階偶方陣解。由於與馬步解定義不符，但外觀上極為相像，故此種偶方陣解稱為類馬步解，且此種解無法再對應鑲嵌解。

二、由上列方法得到之偶方陣，棋子必相對於中央點形成對稱。

以 7 階馬步 2 為例：

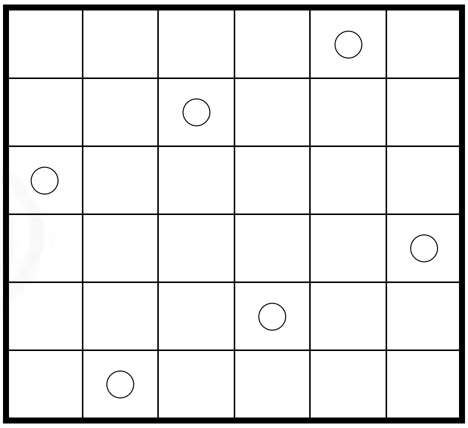


7 階馬步 2

削去角落格

所在行列

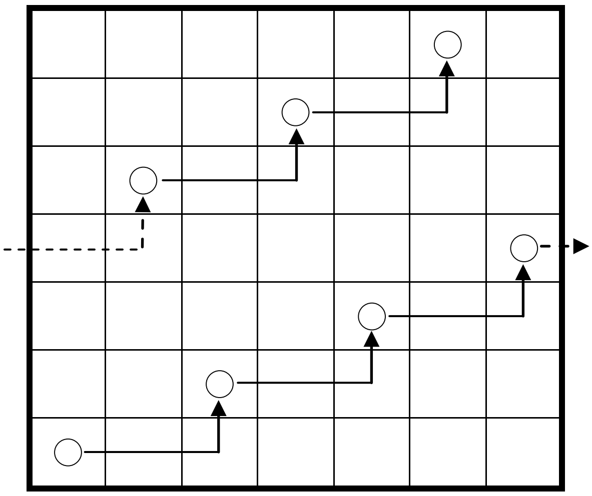
⇒



6 階類馬步解

加法對應與乘法對應性質探討

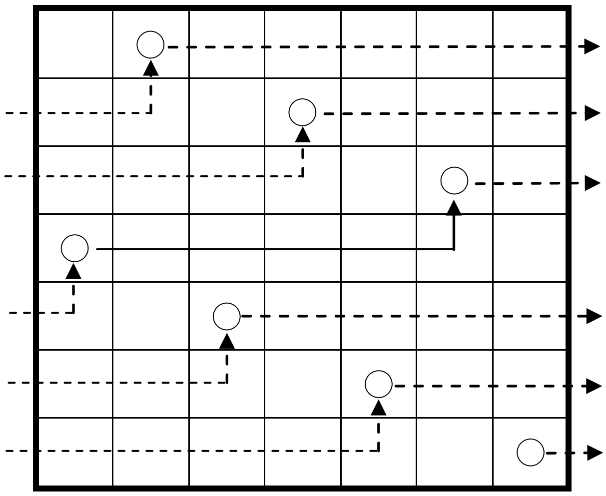
(1) 加法對應：在 n 階方陣中，若馬步 m 解為有效解，則馬步 $(n-m)$ 解為其鏡射解。圖示如下：(例：n=7、m=2、$n-m=5$)



7 階馬步 2

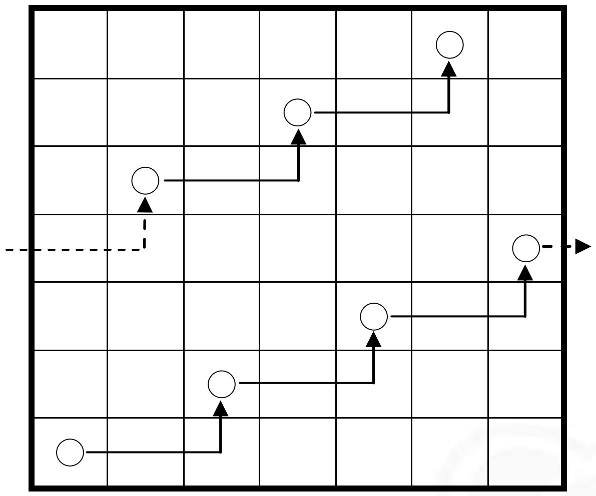
右鏡射

⇒



7 階馬步 5

(2) 乘法對應：在 n 階方陣中，若馬步 m 解爲有效解，則馬步 $\frac{kn+1}{m}$ 解或馬步 $\frac{kn-1}{m}$ 解爲其旋轉解。圖示如下：(例：n=7、m=2、k=1、 $\frac{kn+1}{m}=4$ 、 $\frac{kn-1}{m}=3$)

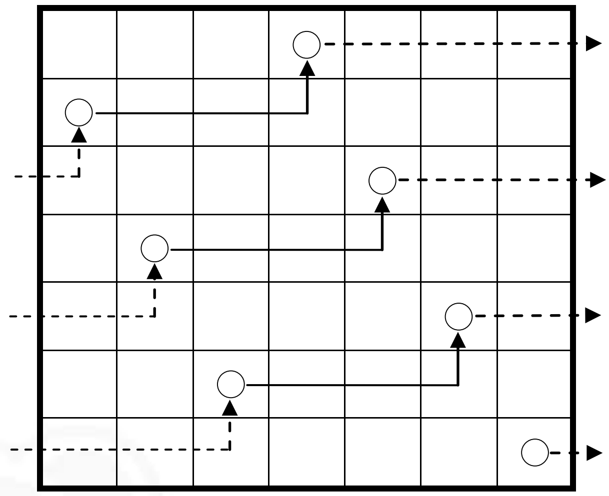


7 階馬步 2

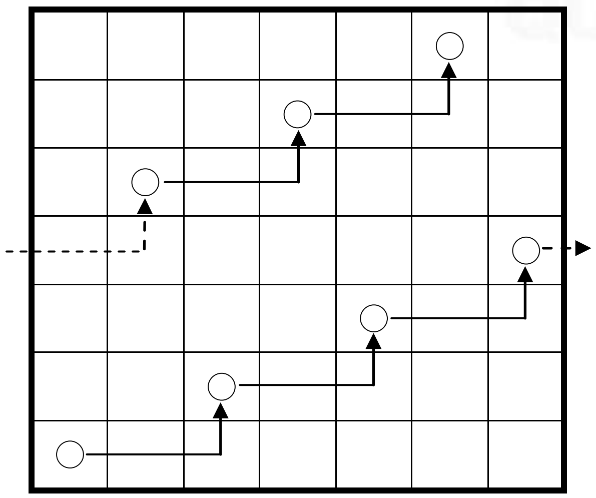
逆時針

旋轉 90°

$\Rightarrow$



7 階馬步 3



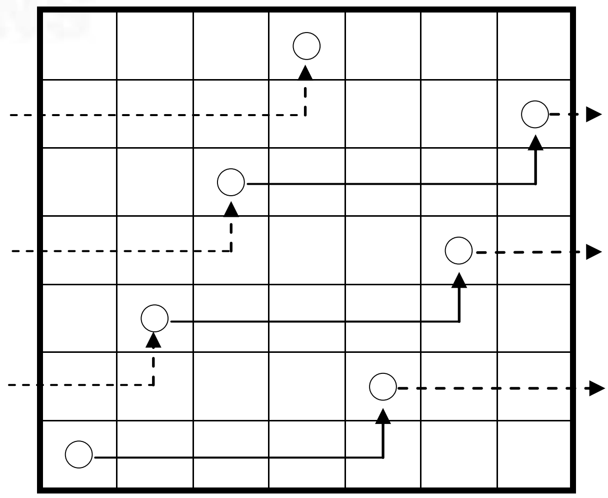
7 階馬步 2

逆時針

旋轉 90°

+右鏡射

$\Rightarrow$

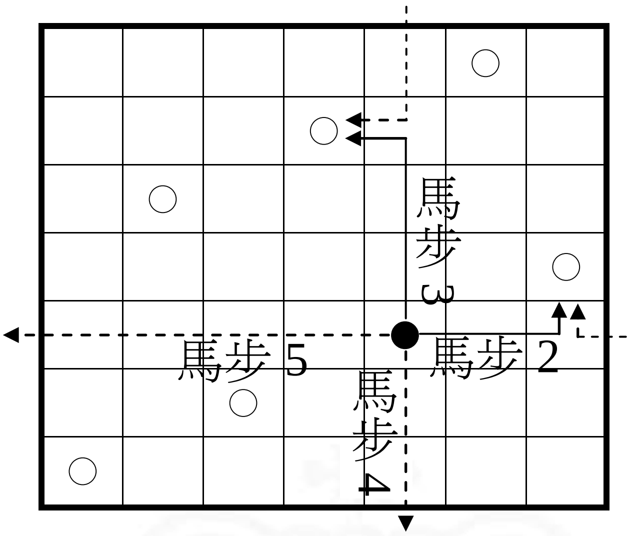


7 階馬步 4

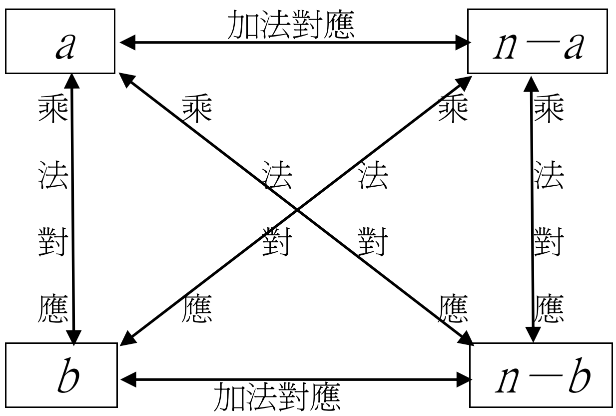
(3) 綜合(1)(2)，以 7 階馬步 2 中的(5，3)為基準點

向右則為馬步 2；向左則為馬步 5；向上則為馬步 3；向下則為馬步 4。

即在一般情形下，同一個形式解以四個不同的方向來看，可得到 4 種馬步解。



【猜想 3】若馬步 a 與馬步 b 為乘法對應解，即 $a \times b = kn+1$ 或 $kn-1$，則(1) a 與 $n-b$ 、(2) b 與 $n-a$ 、(3) $n-a$ 與 $n-b$ 亦為乘法對應解，如圖示。



【證明 3】若 $a \times b = nk \pm 1$

則(1) $(n-a)(n-b) = n^2 - na - nb + ab$

$= n^2 - na - nb + kn \pm 1$

$= n(n-a-b+k) \pm 1$

$= nk' \pm 1$　　故 $n-a$ 與 $n-b$ 為乘法對應

(2) $a(n-b)=na-ab$

$=na-nk\pm1$

$=n(a-k)\pm1$

$=nk''\pm1$ 故 a 與 $n-b$ 爲乘法對應

(3) 同理 $b(n-a)=nk'''\pm1$ 故 b 與 $n-a$ 爲乘法對應

【表達法】以矩陣形式表達加法對應及乘法對應，如 $\begin{pmatrix} a & n-a \\ b & n-b \end{pmatrix}$，彼此關係參照上圖。

【猜想 4】若 n 爲 $4m+3$ 之質數，則 n 階方陣必有 m 組屬於不同本質解的馬步解

【說明 4】由證明 3 可知同一種形式解以四個不同的方向來看，可視爲 4 種馬步解，故在扣除 1、$n-1$、n 等 3 個無法成立有效馬步解的數字後，再除以 4，可以得到 m 組不同解。以 $n=23$ 爲例，共有 $m=\frac{23-3}{4}=5$ 組解，如下列：

$\begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 18 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 7 & 16 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$

【猜想 5】若 n 爲 $4m+1$ 之質數，則 n 階方陣必存在一組四個馬步解，其中的上下加法對應關係重覆，如 $\begin{pmatrix} p & n-p \\ p & n-p \end{pmatrix}$，屬於不同本質解的馬步解亦有 m 組。

【說明 5】若馬步 p 與馬步 p 爲乘法對應解，即 $p\times p=kn-1$。

依費馬平方和定理，可以得知 $4m+1$ 之質數皆可表達爲

兩相異平方數之和，即 $4m+1=a^2+b^2(a>b)$。

由實際操作我們發現，必可找到另一數 k (不一定爲質數)

亦可表達爲兩平方數（不一定相異）之和 ，即 $k=x^2+y^2(x\geq y)$。

使得 $4m+1$ 的 k 倍等於某個完全平方數加 1，即 $nk=(4m+1)k=p^2+1$。

假設 $n=4m+1=a^2+b^2, a>b>0$

$k=x^2+y^2, x\geq y>0$

則 $nk=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$=(a^2x^2+2axby+b^2y^2)+(b^2x^2-2bxay+a^2y^2)$

$=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$

$= p^2 + 1$

此時$a > b > 0, x \ge y > 0$

故$ax + by$必大於$bx - ay$

可對應出$ax + by = p$ ，$bx - ay = \pm 1$

將不定方程解出，即可得到數對 (x, y)

再代入$ax + by = p$即可得到 p

舉例：當$n = 29$時， $29 = 5^2 + 2^2$ ，故$a = 5$ ，$b = 2$

解不定方程$2x - 5y = \pm 1$，可得最小整數解$(x, y) = (2, 1)$

$(2, 1)$代入$ax + by = p$　　得$5 \times 2 + 2 \times 1 = p$

即 $p = 12$　，而$n - p = 29 - 12 = 17$

故重覆解爲$\begin{pmatrix} 12 & 17 \\ 12 & 17 \end{pmatrix}$，而$n = 29$時，共有$m = \dfrac{29 - 1}{4} = 7$組解

另 6 組解爲$\begin{pmatrix} 2 & 27 \\ 14 & 15 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 26 \\ 10 & 19 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 25 \\ 7 & 22 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 24 \\ 6 & 23 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}$

馬步解乘法對應計算之遞降法

說明：加法對應是極爲簡單的計算，但乘法對應卻無法像加法對應般立即計算出來，我們發展出『遞降法』可以迅速算出乘法對應。

方法：n 階方陣馬步 m 之乘法對應

Step-1：先建立 k+1 項數列：a_1、a_2、・・・・、a_i、・・・・、a_{k-1}、a_k、1

其中$a_1 = n$ ，$a_2 = m$ ，$a_i = a_{i-2} - a_{i-1} \times \left[\dfrac{a_{i-2}}{a_{i-1}} \right]$ ，$[\ ]$爲高斯符號，即第 3 項起，每一項均爲前二項相除所得之餘數。

Step-2：　利用　$a_{k-1} - a_k \times p_1 = 1$，　求出 p_1。

Step-3：　將 p_1代入　$a_{k-2} \times p_1 - a_{k-1} \times p_2 = -1$，　求出 p_2。

Step-4：　將 p_2代入　$a_{k-3} \times p_2 - a_{k-2} \times p_3 = 1$，　求出 p_3。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

Step-$(k-1)$：　將 p_{k-3}代入　$a_2 \times p_{k-3} - a_3 \times p_{k-2} = (-1)^{k-1}$，　求出 p_{k-2}。

Step-k：　將 p_{k-2}代入　$a_1 \times p_{k-2} - a_2 \times p = (-1)^k$，　求出 p。

則 n 階方陣馬步 m 之乘法對應爲馬步 p

$$\cdots\cdots\frac{a_{k-2}\times\frac{a_{k-1}+(-1)^{1}}{a_k}+(-1)^{2}}{\cdots\cdots}\cdots\cdots$$

以連分數表示 $$p=\cfrac{a_1\times\cfrac{a_2\times\cfrac{\cdots\cdots}{a_4}+(-1)^{k-2}}{a_3}+(-1)^{k-1}}{a_2}$$

舉例：29 階馬步 8。

Step1： 先算出數列 29，8，5，3，2，1

（$a_1=29$ ，$a_2=8$ ，$k=5$）

Step2： $3-2\times p_1=1$ ， $p_1=1$

Step3： $5\times p_1-3\times p_2=-1$ ， $p_2=2$

Step4： $8\times p_2-5\times p_3=1$ ， $p_3=3$

Step5： $29\times p_3-8\times p=-1$ ， $p=11$

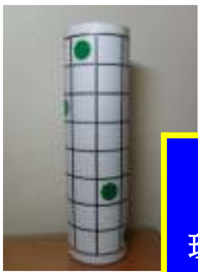
故 29 階馬步 8 乘法對應於馬步 11。

以連分數表示 $$p=\cfrac{29\times\cfrac{8\times\cfrac{5\times\frac{3-1}{2}+1}{3}-1}{5}+1}{8}=11$$

環面解、甜圈解的探討

在鑲嵌解探討中，曾經以九宮格方式說明，我們嘗試從另一種觀點思考：

一、將有效解的第一行連接至最後一行，形成一圓柱形立體解。將圓柱形一刀裁開，即可得新的平面有效解，此與左右移動的鑲嵌解相同。

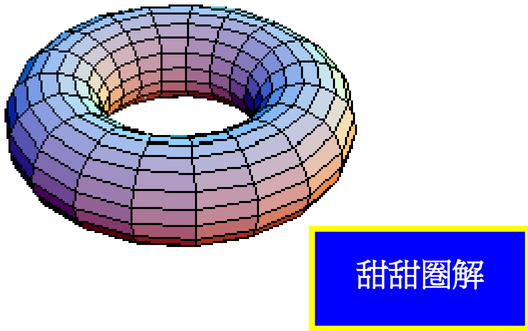


左右環面解

二、將有效解的第一列連接至最後一列，形成一圓柱形立體解。將圓柱形一刀裁開，即可得新的平面有效解，此與上下移動的鑲嵌解相同。

上下環面解

三、結合環面解的上下、左右可以得到甜甜圈解。將甜甜圈解直或橫一刀裁開，即爲圓柱形的環面解。再裁一刀，即爲平面解。



四、由有效馬步解結合而成的環面解或甜甜圈解，均可任意裁開得到新的有效馬步解，故有效馬步解必爲基本解。

五、以 11 階方陣爲例，有 2 組不同的有效馬步解，均爲基本解。

六、由非馬步解排列方式的其它有效解結合而成的環面解或甜甜圈解，則裁開後不一定可以得到新的有效解。也就是部分基本解無法經由甜甜圈曲面上的移動而得到另一個新的本質解。

七、以 8 階方陣爲例，有 92 個形式解，但不存在有效馬步解。扣除旋轉及對稱後，可得到 12 個本質解，其中有 7 個爲同一個甜圈解，其它 5 個解爲獨立的基本解，故共有 6 個基本解。

【說明】八皇后問題的 12 個本質解(unique solution)，按照維基百科(Wikipedia)順序排列，其中編號#1、#2、#3、#4、#6、#8、#10 共七個爲同一個甜圈解。

以#1 爲基準製作九宮格(詳見 *P15* 鑲嵌解說明)，移動方式及順序規定爲：

(1)上下平移：上(U)、下(D)。

(2)左右平移：左(L)、右(R)。

(3)鏡射：一律右鏡射，簡稱右鏡。

(4)旋轉：一律逆時針旋轉，如逆 90°。

結果整理如右：

編號	移動情形
#1	基準解
#2	D2＋L2(*p27*圖例)
#3	D1＋L1＋逆180°
#4	R1＋逆 270°
#6	D1＋逆180°
#8	L1＋右鏡
#10	D1＋R1

			○				
						○	
		○					
							○
	○						
				○			
○							
					○		

8 階方陣本質解#1

				○			
	○						
			○				
						○	
		○					
							○
					○		
○							

8 階方陣本質解#2

			○				
	○						
						○	
		○					
					○		
							○
				○			
○							

8 階方陣本質解#3

			○				
					○		
							○
		○					
○							
						○	
				○			
	○						

8 階方陣本質解#4

		○					
					○		
							○
○							
			○				
						○	
				○			
	○						

8 階方陣本質解#5

				○			
		○					
							○
			○				
						○	
○							
					○		
	○						

8 階方陣本質解#6

				○			
						○	
			○				
○							
		○					
							○
					○		
	○						

8 階方陣本質解#7

			○				
○							
				○			
							○
					○		
		○					
						○	
	○						

8 階方陣本質解#8

		○					
					○		
			○				
○							
							○
				○			
						○	
	○						

8 階方陣本質解#9

					○		
	○						
						○	
○							
			○				
							○
				○			
		○					

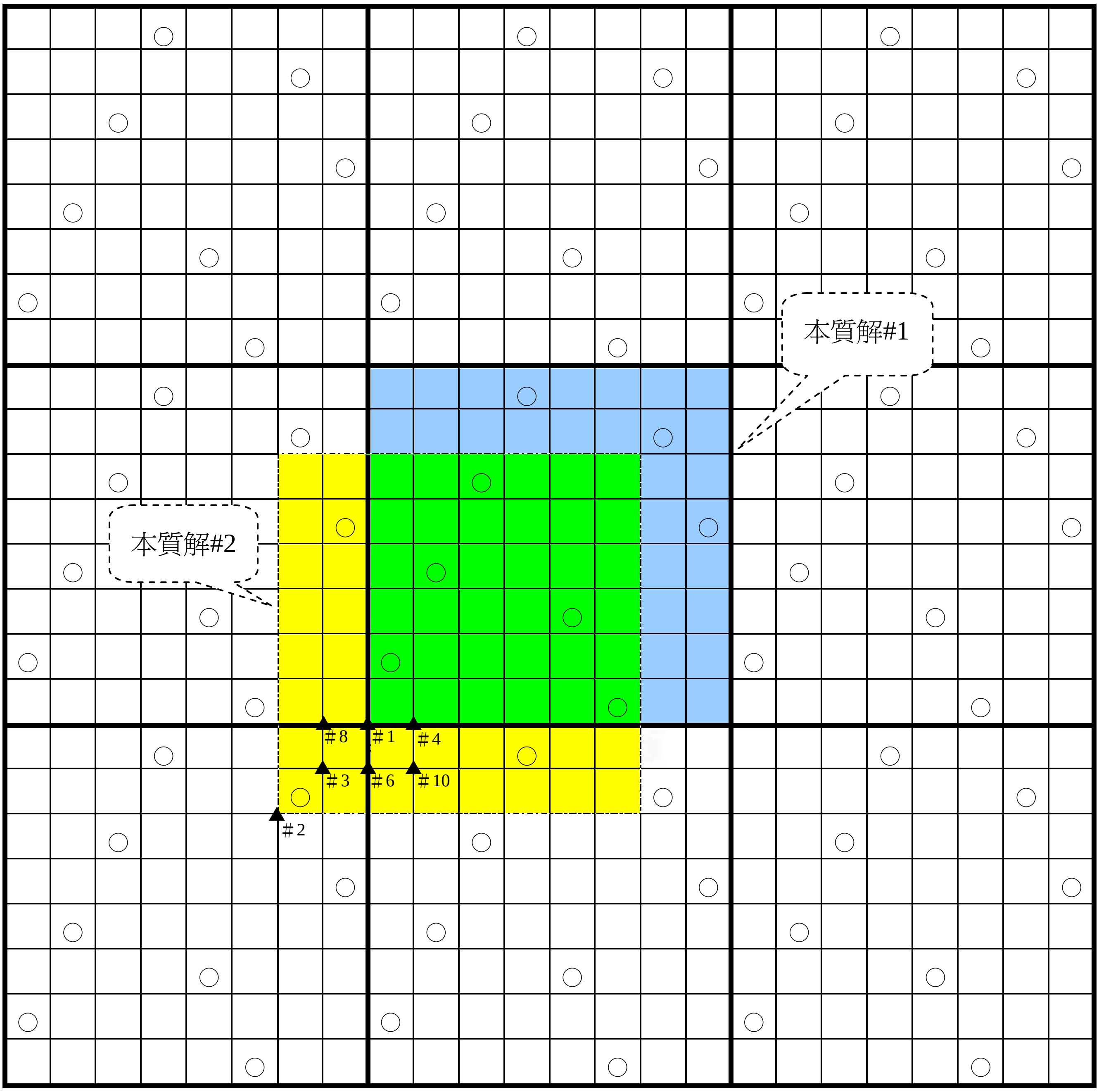
8 階方陣本質解#10

			○				
						○	
○							
							○
				○			
	○						
					○		
		○					

8 階方陣本質解#11

					○		
			○				
						○	
○							
							○
	○						
				○			
		○					

8 階方陣本質解#12



8 階方陣鑲嵌解之九宮格

(▲代表鑲嵌解移動時對準之左下角落點，數字代表對應編號)

柒、 結論

一、若 n 為大於 3 之正奇數，且 n 為質數，則 n 階方陣必有 $\left[\frac{n}{4}\right]$ 種不重覆的馬步解([ ]為高斯符號)。

二、若 n 爲大於 3 之正奇數，且 n 不爲質數，且不爲 3 的倍數，則 n 階方陣必有馬步解，

但數量少於 $\left[\frac{n}{4}\right]$ (視 n 的因數多寡而定，因數愈多，有效馬步解數量愈少)。

三、若 n 爲 2 或 3 的倍數，則 n 階方陣無馬步解。

四、存在有效馬步解的 n 階奇方陣，每一種馬步解可對應 $\frac{n+1}{2}$ 個鑲嵌(磚瓦)解。

五、若奇方陣有馬步解，則低一階偶方陣亦存在類馬步解(利用削邊法削去角落格所在行、列而得到)，但偶方陣無延伸之鑲嵌(磚瓦)解。反之，若奇方陣無馬步解，則低一階偶方陣亦不存在類馬步解，當然此時也沒有延伸的鑲嵌(磚瓦)解。

六、有效馬步解必爲基本解，但基本解不一定爲馬步解。

七、利用削邊法得到的低一階偶方陣，必具有旋轉對稱的性質。

八、奇階方陣每一種馬步解對應 $\frac{n+1}{2}$ 個鑲嵌(磚瓦)解中，必有一個存在中央格，此解必具有旋轉對稱性質。

九、各種解的數量如下表：

n 階方陣	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
形式解	2	10	4	40	92	352	724	2,680	14,200	73,712	365,596
本質解	1	2	1	6	12	46	92	341	1,787	9,233	45,752
馬步解		1		1				2		3	
馬步鑲嵌解		2(註)		4				12		21	
類馬步解	1		1				2		3		

n 階方陣	15	16	17	18	19
形式解	2,279,184	14,772,512	95,815,104	666,090,624	4,968,057,848
本質解	285,053	1,846,955	11,977,939	83,263,591	621,012,754
馬步解			4		4
馬步鑲嵌解			36		40
類馬步解		4		4	

n 階方陣	20	21	22	23	…
形式解	39,029,188,884	314,666,222,712	2,691,008,701,644	24,233,937,684,440	…
本質解	4,878,666,808	39,333,324,973	336,376,244,042	3,029,242,658,210	…
馬步解				5	…
馬步鑲嵌解				60	…
類馬步解			5		…

註：原本應爲 $\left[\frac{5}{4}\right]\times\frac{5+1}{2}=3$，此爲特殊例外。

捌、 應用

一、某城市的市區皆爲棋盤狀的道路，市政府要在街口裝設監視器，要求不管站在哪一條道路上，都在監視器的範圍內。若要用最少的數量來設立，可將格子線視爲馬路，依照馬步解的規律去設立，那麼不管站在道路何處，都會在監視器的監視範圍內。

二、在相同條件下，如裝設路燈、配置垃圾筒、設計警方巡邏車路線等，都可利用同樣的方式來處理。

三、遊戲：在 n 階奇方陣棋盤上，甲乙兩人對下，甲先下了一子，輪到乙下，但每次所下的棋子不能與之前的子在同一條直、橫、斜率 1 及－1 等四個方向上，當無法再下子時即結束。

玖、 參考資料

一、吳振奎(2003)。數學中的巧合、聯繫與統一。數學傳播季刊，第 27 卷第 3 期。

二、吳振奎(2005)。幾個與”形數”有關的問題。數學傳播季刊，第 29 卷第 1 期。

三、黃華民(2000)。從線性規劃到八個皇后。數學傳播季刊，第 24 卷第 4 期。

四、數學資料庫(無日期)。八后問題。民 97 年 2 月 20 日，取自：
http://db.math.ust.hk/competition/essay/0506/articles/S1.pdf。

五、Wikipedia, *Eight queens puzzle.* Retrieved March 8, 2008, from
http://en.wikipedia.org/wiki/Eight_queens_puzzle。

【評語】030403

1. 善用數學解決日常生活問題，學以致用。
2. 問題討論完整表達。
3. 應用部分談及最少數量設立公用器物，宜再深入說明。