中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030402

幂祕層層--二次等幂和之「金蟬脫殼數組」再探討

學校名稱：彰化縣立大同國民中學

作者：	指導老師：
國二　賴柏舟 國二　江如晴 國二　許立穎 國二　賴俊佑	顏福泉 蘇宴慧

關鍵詞：　等幂和、數的金蟬脫殼

摘要

等冪和數組是數學問題中極具魅力的一環。一、二次等冪和數組各數字之和與平方和相等，這之中有更讓人驚喜的數組！無論將各數字拆開或作有規律的刪減，這奧妙的數組恍如金蟬脫殼般以溫和蘊藉的方式，展現它完美的等冪和性質。這正是這次我們深究的對象。爲何它有著金剛不壞之身？數組的結構與構成方法爲何？這耐人尋味的問題正牽引著大家去細細品味它的美……

壹、 研究動機

自去年科展結束後，研究腳步停滯的我們對這引人興趣但又令人迷惑的謎題，一直不知該繼續做或到此爲止。但教授提出的許多問題仍掛懷心中，因好奇心而難以忘卻。我們最後決定貫徹始終，立志在數學之海中爲等冪和問題找出一條明路。

貳、 研究目的

一、 「金蟬脫殼數組」規則之尋找

二、 利用「對稱性質」製作金蟬脫殼數組並驗證

三、 金蟬脫殼數組的推展

參、 研究設備及器材

計算工具：12 位計算機、Microsoft Office Excel 程式

肆、 研究過程及方法

一、 「金蟬脫殼數組」規則之尋找

$104^k+430^k+535^k+636^k+776^k+786^k=214^k+315^k+542^k+552^k+746^k+898^k$
$=303^k+313^k+453^k+554^k+659^k+985^k \quad (k=1, 2)$

等冪和是數論中一個有趣的問題，將兩不全等的等式兩邊各數字做同次方（冪）並相加後能成立（即滿足方程式 1）者稱作「等冪和」。上列數組便是其一。

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$$
$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k=b_1^k+b_2^k+\ldots+b_n^k$$

方程式 1

這次所探討者不但符合二次等冪和，同時把每項的首（末）位刪去相同位數至僅剩一數仍爲等冪和。將之「拆開」後也不變；甚至上述兩者雙管齊下，其性質仍不變。以下便是組常見的例子：

$1237^k+5619^k+6428^k=2428^k+3237^k+7619^k$
$123^k+561^k+642^k=242^k+323^k+761^k$
$12^k+56^k+64^k=24^k+32^k+76^k$
$1^k+5^k+6^k=2^k+3^k+7^k$
$237^k+619^k+428^k=428^k+237^k+619^k$
$37^k+19^k+28^k=28^k+37^k+19^k$
$7^k+9^k+28^k=8^k+7^k+9^k$
$12^k+37^k+56^k+19^k+64^k+28^k=24^k+28^k+32^k+37^k+76^k+19^k$

$$1^k+2^k+3^k+7^k+5^k+6^k+1^k+9^k+6^k+4^k+2^k+8^k$$
$$=2^k+4^k+2^k+8^k+3^k+2^k+3^k+7^k+7^k+6^k+1^k+9^k \ (k=1,2)$$

這數組竟有此奇特性質，難怪被稱爲「金蟬脫殼」。我們藉由上述特性尋找規則，推測它是由只有個位數的數組組成，即符合方程式 2：

$$a_1^k+a_2^k+a_3^k=b_1^k+b_2^k+b_3^k\ (k=1,2)$$

方程式 2

我們把上列數組拆開並檢驗後，結果皆符合！我們便找出所有符合此類型的「個位數等冪和數組」。等號兩邊數字不完全相等的有 16 組（如表 1），加上等式兩邊相等的共 236 組組合：

$$C_3^{10}+C_2^{10}\times 2+C_1^{10}+16=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}+\frac{10\times 9\times 2}{2\times 1}+10+16=236\,(\text{種組合})$$

0,3,3 / 1,1,4 (18)	0,5,7 / 1,3,8 (74)	1,6,8 / 2,4,9 (101)
1,4,4 / 2,2,5 (33)	3,6,6 / 4,4,7 (81)	4,7,7 / 5,5,8 (114)
0,4,5 / 1,2,6 (41)	0,5,8 / 2,2,9 (89)	3,7,8 / 4,5,9 (122)
2,5,5 / 3,3,6 (54)	2,6,7 / 3,4,8 (89)	5,8,8 / 6,6,9 (153)
1,5,6 / 2,3,7 (62)	0,7,7 / 1,4,9 (98)	
0,6,6 / 2,2,8 (72)	1,7,7 / 3,3,9 (99)	

表 1

蒐尋資料時，發現有篇文章（參考資料(二)）道：將數組依位數拆開、按大小排列、依原數連結後，可得一對稱圖形（如圖 1），改變箭頭形成對稱後，仍能構成等冪和數組。

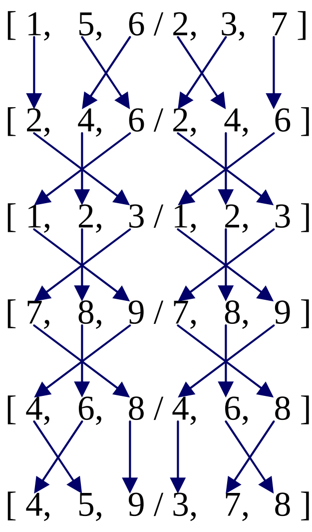


圖 1

試驗後確然。且將數組拆開的想法與我們不謀而合。我們把找出的 16 組數按此規則使用，初步試驗結果皆然！

但現在的問題是：要探討的數組數字十分龐大，必須簡化問題。先看看二位數的情形（如圖 2）：

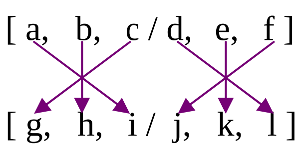


圖 2

若對稱性質爲真，照圖 2 及其性質可列出：

$$(10a+i)^2+(10b+h)^2+(10c+g)^2=(10d+l)^2+(10e+k)^2+(10f+j)^2$$
$$\Rightarrow 100a^2+20ai+i^2+100b^2+20bh+h^2+100c^2+20cg+g^2$$
$$=100d^2+20dl+l^2+100e^2+20ek+k^2+100f^2+20fj+j^2$$

由$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$, $g^2+h^2+i^2=j^2+k^2+l^2$消去後得：

$$\Rightarrow 20ai+20bh+20cg=20dl+20ek+20fj$$

$\Rightarrow ai+bh+cg=dl+ek+fj$

若對稱的特性爲真，那數組除須符合上式，加上其他對稱模式共有以下六組（式 3）：

$ag+bh+ci=dj+ek+fl$	$ag+bi+ch=dk+ej+fl$
$ah+bi+cg=dl+ej+fk$	$ah+bg+ci=dj+el+fk$
$ai+bg+ch=dk+el+fj$	$ai+bh+cg=dl+ek+fj$

式 3

換言之，符合此六式，對稱性質便會存在。但這限於二位數時，接著看三位數的狀況，仍假設對稱成立列出等式（如圖 3）：

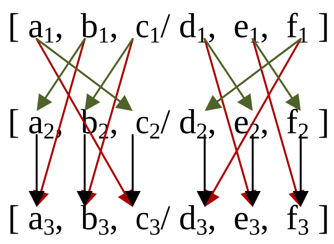


圖 3

$$(100a_1+10c_2+c_3)^2+(100b_1+10a_2+a_3)^2+(100c_1+10b_2+b_3)^2$$
$$=(100d_1+10e_2+e_3)^2+(100e_1+10f_2+f_3)^2+(100f_1+10d_2+d_3)^2$$

經整理及消去二次項可得：

$$\Rightarrow 1000(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)+100(a_1c_3+b_1a_3+c_1b_3)+10(c_2c_3+a_2a_3+b_2b_3)$$
$$=1000(d_1e_2+e_1f_3+f_1d_3)+100(d_2d_3+e_2e_3+f_2f_3)+10(d_1e_3+e_1f_2+f_1d_2)$$

運算後，都是箭頭兩端數字乘積之和須相等，由和平方公式便可知。其實三位數可看成三組二位數（如圖 3，箭號分爲綠、紅、黑）合併，即當各組二位數間符合對稱性質，更多位亦然。

我們百思不解，也曾看過非對稱的情形，但多不合。可知對稱對金蟬脫殼數組十分重要。

二、利用「對稱性質」製作金蟬脫殼數組並驗證

我們又大量試驗等式兩邊完全相等的個位數等冪和數組，發現似乎僅呈「等差數列」的數組能與之前找出的數組構成等冪和。於是我們用一等差數組和一普通數組探討其關係。

首先設對稱成立，式中的數須符合式 3，依此可列出六個式子，斯僅舉一爲例（如圖 4）：

$(a-k)\ d + ae + (a+k)\ f = (a-k)\ g + ah + (a+k)\ i$

$\Rightarrow ad-kd+ae+af+kf=ag-kg+ah+ai+ki$

$\Rightarrow a(d+e+f)+k(f-d)=a(g+h+i)+k(i-g)$

$\because\ d+e+f=g+h+i$

$\therefore\ k(f-d)=k(i-g)$

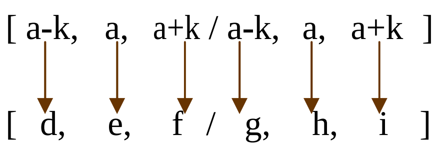


圖 4

遂得：當k=0，數組保持不變，因上列所有數皆相等，無疑符合式 3；但當k≠0 時，就得符合f-d=i-g的關係。而其餘對稱狀況所得關係如下：

f-d=i-g	e-d=i-h	f-e=h-g
d-f=g-i	d-e=h-i	e-f=g-h

六組關係中有三組相同，式子代表著數字間差的關係。且它們相對應的差的位置，居然也呈對稱！（如圖 5）

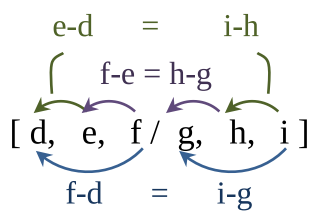


圖 5

接著就要看這結構有無特殊性質。我們先設一數組爲[a-r, a, a+k/b-k, b, b+r]，並限定其和相等，即可列式：

$$(a-r)+a+(a+k)=(b-k)+b+(b+r)$$
$$\Rightarrow 3a+k-r=3b-k+r$$
$$\Rightarrow 3(a-b)=2(r-k)$$

同乘(a+b)：

$$\Rightarrow 3(a-b)(a+b)=2(r-k)(a+b)$$
$$\Rightarrow 3(a^2-b^2)=2(ar-ak-bk+br)$$
$$\Rightarrow 3a^2-2ar+2ak=3b^2-2bk+2br$$
$$\Rightarrow (a-r)^2+a^2+(a+k)^2=(b-k)^2+b^2+(b+r)^2$$

由此可知符合[a-r, a, a+k/b-k, b, b+r]的數組，若左右之和相等，則平方和便會相等。故在眾多個位數等冪和數組中，應只有構成等差數列的數組可用；另外表 1中[0, 7, 7/1, 4, 9]和[0, 5, 8/2, 2, 9]兩組亦不符此形式，故暫不討論。

接著，我們幫這些有符合的數組歸類，由上式可知 a、b 之差和 r、k 之差有一定的比例關係，故可以一邊的平均爲基準作進一步的化簡：

$$[a-3,\ a,\ a/b,\ b,\ b+3] \quad 6\text{組}\begin{cases}[0,3,3/1,1,4]\\ [1,4,4/2,2,5]\\ [2,5,5/3,3,6]\\ [3,6,6/4,4,7]\\ [4,7,7/5,5,8]\\ [5,8,8/6,6,9]\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}[a-2,\ a+1,\ a+1/a-1,\ a-1,\ a+2]\\ (\,[a-2m,\ a+m,\ a+m/a-m,\ a-m,\ a+2m]\,)\end{matrix}$$

$$[a-4,\ a,\ a+1/b-1,\ b,\ b+4] \quad 4\text{組}\begin{cases}[0,4,5/1,2,6]\\ [1,5,4/2,3,7]\\ [2,6,5/3,4,8]\\ [3,7,6/4,5,9]\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}[a-3,\ a+1,\ a+2/a-2,\ a-1,\ a+3]\\ (\,[a-3m,\ a+m,\ a+2m/a-2m,\ a-m,\ a+2m]\,)\end{matrix}$$

[a-5, a, a+2/b-2, b, b+5]　2組$\begin{cases}[0,5,7\,/\,1,3,8] \\ [1,6,8\,/\,2,4,9]\end{cases}$ ⇒ [a-4, a+1, a+3/a-3, a-1, a+4]
([a-4m, a+m, a+3m/a-3m, a-m, a+4m])

[a-6, a, a/b, b, b+6]　2組$\begin{cases}[0,6,6\,/\,2,2,8] \\ [1,7,7\,/\,3,3,9]\end{cases}$ ⇒ [a-4, a+2, a+2/a-2, a-2, a+4]
([a-2m, a+m, a+m/a-m, a-m, a+2m])

其中[a-2, a+1, a+1/a-1, a-1, a+2]與[a-4, a+2, a+2/a-2, a-2, a+4]又都屬[a-2m, a+m, a+m/a-m, a-m, a+2m]。而呈等差數列的數組因 r-k=0，⇒a=b，可直接表示爲[a-m, a, a, a+m/a-m, a, a+m]。

上列數組經化簡後，全變成[a-m-n, a+m, a+n/a-n, a-m, a+m+n]的形式，因其兩邊和相等，且也屬[a-r, a, a+k/b-k, b, b+r]，故它也是一等冪和數組。

[a-(m+n), a+m, a+n / a-n, a-m, a+(m+n)]

[b-(p+q), b+p, b+q / b-q, b-p, b+(p+q)]

圖 6

如右圖 6，我們先舉一種對稱形式來說明此結構，其他型態亦同。據式 3：箭頭兩端數字之乘積和須相同才能構成等冪和數組：

[a-(m+n)][b-(p+q)]+(a+m)(b+q)+(a+n)(b+p)=(a-n)(b-p)+(a-m)(b-q)+[a+(m+n)][b+(p+q)]

依分配率，每個數中因都有 a、b，故不影響結果：

⇒[-(m+n)][-(p+q)]+mq+np=(-n)(-p)+(-m)(-q)+(m+n)(p+q)

剩下會影響計算結果的僅 m、n、p、q。但數組兩邊結構中的 m、n、p、q 正負號恰好相反，因此負負得正，使等式兩邊相等。由此可知爲何要做對稱圖形了！

現在我們將之前擱置的兩數組[0, 7, 7/1, 4, 9]和[0, 5, 8/2, 2, 9]與其它 14 組符合的個位數數組（見表 1）配對，檢驗式 3後發現：它還是能與特定數組以特定路線構成金蟬脫殼數組，且那些數組皆屬[a-3, a+1, a+2/a-2, a-1, a+3]，在左右不對調的狀況下，箭頭路線都呈鉛錘線（即式 3中的ag+bh+ci=dj+ek+fl）。

經觀察發現：此二數組的結構是相似的！它們的結構可以代號表示爲：

[0, 7, 7/1, 4, 9] ⇒ [a, a+7, a+7/a+1, a+4, a+9]（此處 a=0）
[0, 5, 8/2, 2, 9] ⇒ [b-9, b-4, b-1/b-7, b-7, b]（此處 b=9）

如圖 7，同樣略去基準值，因這兩數組數字左右、正負皆相反，做變換後可見兩組情形一模一樣，故此二數組與其他數組能成立的箭頭路線也會相等。

由數組結構來看，即可知：其實不只[a-3, a+1, a+2/a-2, a-1, a+3]能與之構成等冪和數組；只要屬[a-3m, a+m, a+2m/a-2m, a-m, a+3m]的數組皆能成立。

但製作此類特別數組時須留意此二數組與其它層數組須皆屬[a-3m, a+m, a+2m/a-2m, a-m, a+3m]。如此等式兩邊各三個數的「金蟬脫殼」數組的做法便昭然若揭了！（關於此二數組及[a-3m, a+m, a+2m/a-2m, a-m, a+3m]之對稱關係見附錄(一)）

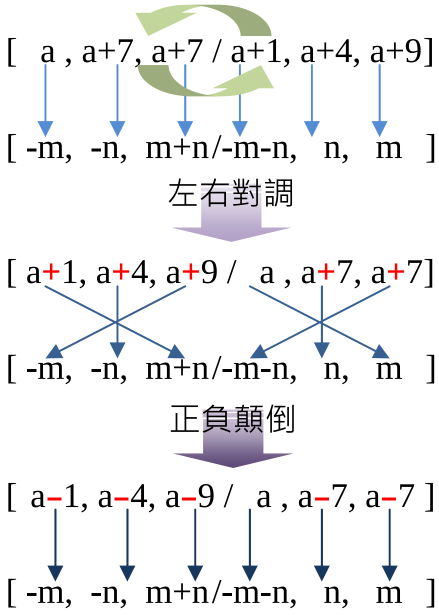


圖 7

為了推展到更多位數，我們先由三個數的狀況猜想四個數的情形。依三個數的模式來看，四個數應非下列式 4 莫屬：

$$[a-m, a-n, a+p, a+q/a-q, a-p, a+n, a+m] \ (m+n=p+q)$$

式 4

結果不出所料，此式果然可行，但我們馬上想到：如果其他種形式呢？我們遂又列出了
式 5：

$$[a-m, a-n, a-p, a+q/a-q, a+p, a+n, a+m] \ (q=m+n+p)$$

式 5

經計算，式 5 亦然。細究之，這其實也應屬式 4 之一，因我們習慣正整數計算，但若 $p<0$，那式 4 就變成式 5 了。故只要符[a+m, a+n, a+p, a+q/a-q, a-p, a-n, a-m] (m+n+p+q=0)的式子皆成立。

而更多數的狀況由和平方公式可推得應由式 6構成：

$$[a+m_1, a+m_2, a+m_3, \ldots, a+m_n/a-m_n, \ldots, a-m_3, a-m_2, a-m_1] \quad (\text{其中}\sum_{k=1}^{n} m_k = 0)$$

式 6

由三數的狀況就同理可知更多數也可以對稱的結構形成多樣的等冪和數組。如此「金蟬脫殼」等冪和的性質就成立了！

三、金蟬脫殼數組的推展

(一) 部分符合「金蟬脫殼」性質的數組

我們之前要求在構成數組時，其中的數須保持個位，否則無法製作；但現在又有新意：如圖 8，若把每一層看作一位，那就能用加、減法的進、借位來構成數組。而利用式 6，即可輕易創造出個位數外的數組。

百位 → $[a_1, a_2, a_3 / a_4, a_5, a_6]$
十位 → $[b_1, b_2, b_3 / b_4, b_5, b_6]$
個位 → $[c_1, c_2, c_3 / c_4, c_5, c_6]$

圖 8

舉一組要進、借位的例子。如圖 9，一切如前，但有了二位數和負數的加入，可得一等冪和數組：

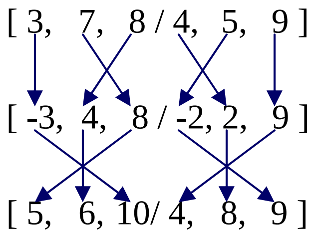


圖 9

$$[3\times100+(-3)\times10+10]^k+(7\times100+8\times10+5)^k+(8\times100+4\times10+6)^k$$
$$=(4\times100+2\times10+8)^k+[5\times100+(-2)\times10+9]^k+(9\times100+9\times10+4)^k$$
$$\Rightarrow 280^k+785^k+846^k=428^k+489^k+994^k \quad (k=1, 2)$$

經驗證成立！我們之前正是用此法製作數組。因而就可放寬製作數組的限制了。但在進、借位後，數字間會重新合併，數組的結構也隨之改變，而失去部分「金蟬脫殼」性質。

[0, 7, 7/1, 4, 9]和[0, 5, 8/2, 2, 9]兩組數組，也同理可推展。故[1, 8, 8/2, 5, 10]或[2, 7, 10/4, 4, 11]等也能與[a-3m, a+m, a+2m/a-2m, a-m, a+3m]構成等冪和。

(二) 利用電腦製造等冪和數組

能用簡單的方法製出等冪和數組後，爲省日後之計算，我們決定用基本程式之一——Microsoft Excel 來寫函數。

用函數 SUM 和 SUMSQ 便可輕易檢驗數組。但要製作一個數組就不易了！其實「製作」是指：給出數組一邊的結構，便能算出另一邊的結構並顯示出整個數組。當然知道了結構，數組必能求出。

但在寫函數時，我們卻難以給定「箭頭的排列」這個參數。

數日後，我們想到：(如圖 10，基準值同樣略去) 把箭頭拉直後，圖形的對稱就移到數字裡使其也「對稱」了！便能用該數與基準值的差算出另一邊的數。而因箭頭都「拉直」，故數字皆已至相對應的位置，只消再將同一欄的數組起來即可得到數組。

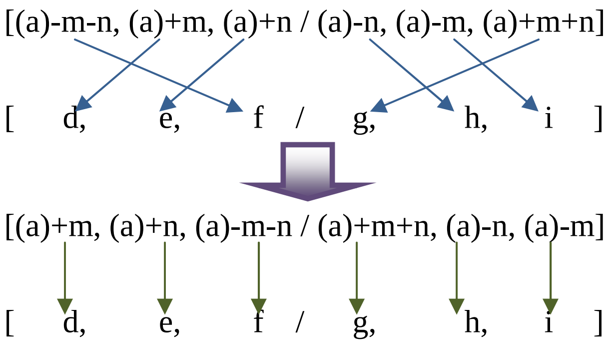


圖 10

此處僅說明函數的理念，關於「製作等冪和數組」的細節請見附錄(二)。

(三) 三式相互成立的等冪和數組

釐清金蟬脫殼數組的原理後，我們想起了棄置已久的一個問題：是否可以此構成三串式子相互成立的等冪和數組？（即 $f_1(x)=f_2(x)=...=f_n(x)$ ）

先看看三個數的情況：[a-m-n, a+m, a+n/a-n, a-m, a+m+n]。看這式子不太可能，因數字全固定住了。但既然三個數不能，那數多一點呢？用兩組三數數組來試吧！

此處有一式[0, 3, 3, 3, 7, 8]，把這組數組放進 Excel 檔中計算得[0, 3, 3, 3, 7, 8/5, 5, 8, 0, 1, 5]，但把[0, 3, 3/1, 1, 4]和[3, 7, 8/4, 5, 9]兩數組合併可得另一數組[0, 3, 3, 3, 7, 8/1, 1, 4, 4, 5, 9]，如此便可得到一組由三式構成的數組—— [0, 3, 3, 3, 7, 8/5, 5, 8, 0, 1, 5/1, 1, 4, 4, 5, 9]。

不過，為何以兩種不同方式來製作數組所得結果迥異呢？後來發現，此二方式構成數組時，它們的基準值（即上式中的a）不同，據式 6中所述的結構即可知同一數在基準值改變時，它所對應到的數便會不同。

故六個數分成兩組後，若兩組基準值相同，表示分開和合起的結果一樣。若能找到不同的「分組」方法，也可能得更多式子。如：$0^k+3^k+3^k+3^k+7^k+8^k=1^k+1^k+4^k+4^k+5^k+9^k=0^k+1^k+5^k+5^k+5^k+8^k=0^k+1^k+4^k+5^k+7^k+7^k$ (k=1, 2)。

要注意的是：當其中一層數組分成兩組後，其它層數組也須相對應分組再進行同步對稱，否則數組結構不同，此法便不通。

當數組不只一位時，除涉及箭頭圖案外，還與式中的分組及分組完後不同層的配對有關。看來金蟬脫殼數組其實也不孤單！

(四) 等冪和數組與幻方（魔方陣）

報告至此，應已到一段落。但我們又看到了一篇文章（參考資料(三)）中有著饒富趣味的資料：等冪和與三階幻方間奇妙的關係。

請見右圖 11參照其中的關係：

2	9	4
7	5	3
6	1	8

圖 11

1. 上（左）邊三數和下（右）邊三數形成等冪和數組
   $2^k+9^k+4^k=6^k+1^k+8^k$
   $2^k+7^k+6^k=3^k+4^k+8^k$ (k=1, 2)

2. 兩條中線及對角線形成金蟬脫殼數組
   $951^k+357^k+258^k+654^k=456^k+852^k+753^k+159^k$ (k=1, 2)

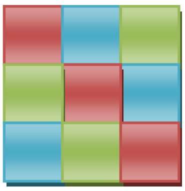


圖 12

3. 三條平行線形成金蟬脫殼數組
   $294^k+753^k+618^k=816^k+357^k+492^k$
   $276^k+951^k+438^k=834^k+159^k+672^k$
   $258^k+714^k+693^k=852^k+417^k+396^k$ (圖 12)
   $654^k+213^k+798^k=897^k+312^k+456^k$ (圖 13) (k=1, 2)

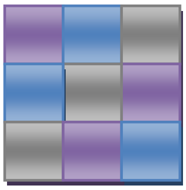


圖 13

4. 橫（縱）三線上任一相同位置上之二數和相等
   （如：29+75+61=16+75+92……）

有兩組形成等冪和數組：

$24^k+73^k+68^k=86^k+37^k+42^k$

$26^k+91^k+48^k=84^k+19^k+62^k$ (k=1, 2)

其實一開始看到[2, 9, 4/6, 1, 8]和「金蟬脫殼性質」就可知這應與我們的主題關係密切。

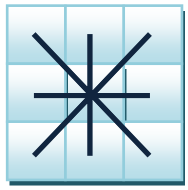


圖 14

因等冪和的結構已知曉，故我們由幻方的結構先下手：

如圖 14，設此幻方的數總和為 9a，天元（正中央）為a_5，據圖上的線即可列式 $4\times3a=9a+3a_5\Rightarrow a=a_5$。

a-n	a-p	a-m
a-q	a	a+q
a+m	a+p	a+n

圖 15

為維持任一排的和為 3a，若一數為a+n，⇒中心對面的數=a-n。故三階幻方的形式可寫成圖 15的結構。並得n+m+p=0、n+q=m。據此二式，可再將其進一步整理為圖 16。那些性質即可一一解釋。

a-n	a+m+n	a-m
a-m+n	a	a+m-n
a+m	a-m-n	a+n

圖 16

關於性質 1：左右（上下）兩排顯然形成等冪和，因它符合式 6。若不限幻方中每數都不等，也可將任意一三數等冪和數組放入幻方中，使之任一直線上數字和皆同。（如圖 17）

性質 2 的部分，現在有四條線構成數組，但因可由右向左或左向右唸，故有八個數字形成數組。

先來看最高位一層。現在要將這八數字分兩組，而每一組都會用到這四條線（即取一數bac⇒cab在等式另一邊，a為天元）。也就是要取圖 16中每種顏色的方格各一作等式一邊第一層的數。

1	5	6
9	4	-1
2	3	7

圖 17

據式 6，任一層數等式兩邊的和須相等。而在第一層取一愈大的數時，等式另一邊得的數便會愈小。若圖 16中n≧m≧0, m≠n，在其中一邊取a+m+n時，就須取a-n，和才能相等。

當我再取 a-m+n 和 a+m⇒m=-n；取 a-m 和 a-m+n 或取 a-m 和 a+m-n⇒m=n；取 a+m 和 a+m-n⇒3m=n，此魔方陣恰是這種狀況，會符合也是一個奇蹟！

當「和」成立後，因每條線的平均皆為 a，且四線皆過天元，故任一層中的一數，在等式另一邊對應的就是幻方中對面的數，即將數字「倒過來」後的百位數。金蟬脫殼性質便成立了。

性質 3 的話，等式一邊的數字同樣為另一邊的數字倒過來而成，任一邊都恰會用完九個數，且讀取路線的方向皆同。

如圖 18，設藍色代表左式的百位，綠色十位，紅色個位；右式反之。則不同數字便是不同組合法，縱向路線只消將幻方翻轉後即可呈此模式。

和的部分，因每欄之和相同，故符。平方和的部分，因左式的百位在右式會變個位，故這兩欄皆符式 6，問題在於「對稱形態」。

設左式的首數之百位數為 a-n，右式末數的百位數便是 a+n；故可知這些數字連線與其以天元為中心的點對稱圖形不得重疊，否則數字無法用完。

a-n	a+m+n	a-m
a-m+n	a	a+m-n
a+m	a-m-n	a+n

圖 18

故此類金蟬脫殼數組應不只上述幾項，圖 19 中的類型均是（圖中箭頭表示等式一邊數字的讀取方向）。但除 a、b 外，其餘規律性便較弱。

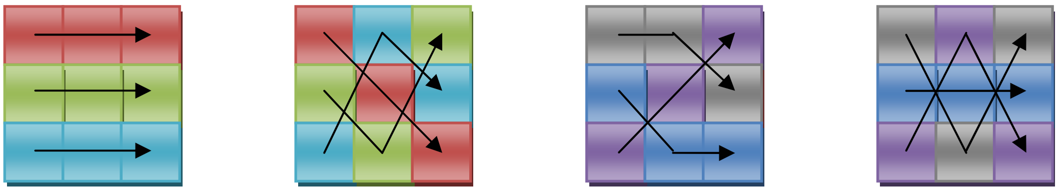


圖 19 (由左到右標號 a, b, c, d)

接下來的性質 4，比性質 2、3 較顯而易見。其實只是性質 3 的簡化模式。

由這些性質和式 6可知：幻方和等冪和數組因結構而關係密切。若一幻方任一格與對面一格（兩格連線中點為天元）之和為此幻方平均的兩倍，則性質 1 與性質 3 必成立。（如圖 20）

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	2
4	14	15	1

圖 20

我們循尋冪祕，然冪祕層層，而後「層層」相因。在這浩瀚學海中，等冪和僅是其中一小環，可見生也有涯，知也無涯！

伍、討論

一、 我們曾提到符合[a-3m, a+m, a+2m/a-2m, a-m, a+3m]的數組能與[a, a±7, a±7/a±1, a±4, a±9]以特定對稱方式構成等冪和，雖然已檢驗過所有個位數況後除此二組並無它例，但是否每種符合式 6的等冪和數組都會有特例的存在呢？又怎麼找到這些特例呢？

二、 在大致了解二次金蟬脫殼數組後，我們一度想探討三次方。為使數組有金蟬脫殼的性質，先假設[a-m-n, a+m, a+n/a-n, a-m, a+m+n]符合三次方和相等的性質：

$$(a-m-n)^3+(a+m)^3+(a+n)^3=(a-n)^3+(a-m)^3+(a+m+n)^3$$

$$\Rightarrow mn(m+n)=0 \quad \Rightarrow m=0,\ n=0,\ \text{or } m=-n$$

結果須符合[a-m, a, a+m/a-m, a, a+m]方能成立，而由和立方公式展開得知三次方數

組要成立，除用箭頭連接後箭頭兩端乘積和要相等（式 3）外，箭頭兩端的數的和也要相同，如此唯有左右的圖形一樣才得以符合。可見此式對三次方數組無效，不知能否製造二次以上的金蟬脫殼數組呢？

陸、 研究結果

一、　等冪和數組爲將兩不全等的式子兩邊各數字做同次方(冪)相加後，能使等式成立者。我們稱爲「金蟬脫殼數組」的數組，不但符合二次等冪和性質，且從每項的首位或末位消去相同位數，直到只剩一數時仍符合等冪和數組。

二、　我們發現將此類數組依照位數拆開後，每層皆是等冪和數組。並由資料得知：將每層數組依大小排列再依原數連結後可得一左右對稱的圖案。

三、　若此性質成立，則右方各位數數組將符合下列式子：

ag+bh+ci=dj+ek+fl　　ag+bi+ch=dk+ej+fl

ah+bi+cg=dl+ej+fk　　ah+bg+ci=dj+el+fk

ai+bg+ch=dk+el+fj　　ai+bh+cg=dl+ek+fj

[a, b, c / d, e, f]

[g, h, i / j, k, l]

即只要數組符合上式，對稱性質便能成立。等式兩邊不全等的個位數等冪和數組多符合。

四、　我們發現等式兩邊全相等的數組中，構成等差數列的數組方能與其它個位數數組構成金蟬脫殼數組。依此列式得到了右圖的關係（[a, b, c/d, e, f]爲一個位數等冪和數組）。

b-a = f-e

c-b = e-d

[a, b, c / d, e, f]

c-a = f-d

五、　依上一點的關係與金蟬脫殼的性質運算，更進一步化簡了三數金蟬脫殼數組的結構爲[a-m-n, a+m, a+n/a-n, a-m, a+m+n]，只要符合此結構，對稱的性質便成立。並也依此推出了更多數時的情況，都能符合對稱性質，即下式：

$$[a+m_1, a+m_2, a+m_3, \ldots, a+m_n/a-m_n, \ldots, a-m_3, a-m_2, a-m_1] \quad (\text{其中}\sum_{k=1}^{n} m_k = 0)$$

六、　只要符合上列式子的數組，無論是否爲個位數都能構成等冪和數組。就如做加減法時的「進位」「借位」，但因數組結構會被改變，故會失去部分金蟬脫殼性質。如：[1, 4, 4/2, 2, 5]和[4, 8, 9/5, 6, 10]構成[14, 48, 49/25, 26, 60]。

七、　[0, 7, 7/1, 4, 9]和[0, 5, 8/2, 2, 9]兩數組雖不符上式，但結構卻都屬[a, a±7, a±7/a±1, a±4, a±9]，與[a-3m, a+m, a+2m/a-2m, a-m, a+3m]能以特定對稱方式構成金蟬脫殼數組。

八、　我們能利用上述結構構成一等冪和數組，若此等冪和數組恰好能做分組，且都能分別找出等式另一邊的數字時，就可能創造出三式以上相等的等冪和數組。

九、　等冪和數組與幻方有著特殊的關係，只要了解幻方的結構，便可發現其中玄機。若

一幻方任意一格與對面一格（兩格連線之中點爲幻方中心）之和爲此幻方平均的兩倍，那麼平行且中垂線之中點位於幻方中心的兩條縱（橫）線，就會是等冪和數組。

柒、 結論

一、　金蟬脫殼數組是指二次等冪和數組中能將各數字作相同動作的刪減或有規律的拆開各數字，仍能符合二次等冪和者。此類數組將位數拆開層層排列，依原數作連線後會形成一個對稱圖形，且每一層皆是個位數數組，而一層層的數組則代表不同的位數。

二、　只要有一數組符合下式，就能依對稱方式構成等冪和數組，若其中每個數都是個位數，或將數字合併再依位數拆開後每一層仍是等冪和數組，那此數組便是一「金蟬脫殼數組」。

$[a+m_1, a+m_2, a+m_3, \ldots, a+m_n/a-m_n, \ldots, a-m_3, a-m_2, a-m_1]$ （其中 $\sum_{k=1}^{n} m_k = 0$）

三、　[0, 7, 7/1, 4, 9]和[0, 5, 8/2, 2, 9]兩組數組雖不符合上式，但仍有[a, a±7, a±7/a±1, a±4, a±9]的共同結構，並能與[a-3m, a+m, a+2m/a-2m, a-m, a+3m]這類數組以特定對稱方式構成金蟬脫殼數組。

四、　等冪和數組和幻方有著密不可分的關係，只要了解幻方結構，就能發現其中可能藏有許多等冪和，甚至金蟬脫殼數組。而三階幻方中更存有許多奧妙關係。

五、　在兩次科展後，總算小有所成。經驗，使我們獲益良多；懸疑，讓我們體會解出問題的困難；成果，帶來愉悅與滿足。我們期望下次還有機會面對各路挑戰，就像這次……

捌、 參考資料及其它

一、　參考資料

(一) 劉應泉(民 87)。神奇的數組 (一)──壁報趣題。數學家族(一)，第 95~97 頁。台北市：九章出版社。

(二) 数的“金蝉脱壳”法(無日期)。湖北：黄冈中学网校。民國 95 年 12 月 12 日，取自：http://www.huanggao.net/hgweb/student/dekt/sx3110702.htm。

(三) 黃志華(2001)。三階幻方內涵再認識(黃家鳴，編輯) 數學教育(13)。民國 96 年 12 月 1 日，取自：http://www.hkame.org.hk/html/modules/tinyd2/content/Edumath/v13/12WongCW.pdf。

(四) *唯一完全費思量*(民 88)。發現月刊，第 40 期，第 3 頁。

二、　附錄

(一) 等式兩邊三個數的特殊單一位數數組組成對照表(p.14)

(二) 金蟬脫殼數組製造程式（等式兩邊 1~9 個數）(p.14~24)

附錄(一) 等式兩邊三個數的特殊單一位數數組組成對照表

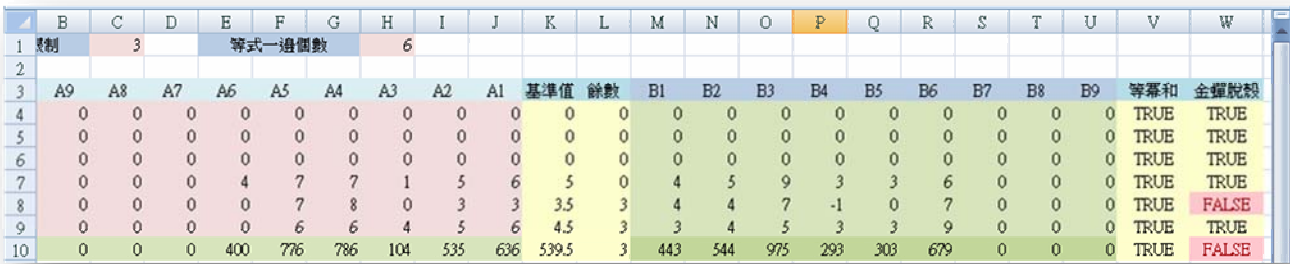
表格上方式子代表對稱形態（詳見式 3），不符合者標示 0，符合者標示爲TRUE。本表僅列出[0, 7, 7/1, 4, 9]和[0, 5, 8/2, 2, 9]兩組所構成的特別狀況。

a b c/d e f 數組1	g h i/j k l 數組2	ag+bh+ci= dj+ek+fl?	ag+bi+ch= dk+ej+fl?	ah+bi+cg= dl+ej+fk?	ah+bg+ci= dj+el+fk?	ai+bg+ch= dk+el+fj?	ai+bh+cg= dl+ek+fj?
0 5 8 2 2 9	0 4 5 1 2 6	TRUE	0	0	0	0	0
0 5 8 2 2 9	1 5 6 2 3 7	TRUE	0	0	0	0	0
0 5 8 2 2 9	2 6 7 3 4 8	TRUE	0	0	0	0	0
0 5 8 2 2 9	3 7 8 4 5 9	TRUE	0	0	0	0	0
0 5 8 2 2 9	0 7 7 1 4 9	TRUE	TRUE	0	TRUE	0	TRUE
0 7 7 1 4 9	0 4 5 1 2 6	TRUE	0	0	0	0	0
0 7 7 1 4 9	1 5 6 2 3 7	TRUE	0	0	0	0	0
0 7 7 1 4 9	2 6 7 3 4 8	TRUE	0	0	0	0	0
0 7 7 1 4 9	3 7 8 4 5 9	TRUE	0	0	0	0	0
其餘有關於左右調換後的狀況亦相似，本表便不詳細列出。							

附錄(二) 金蟬脫殼數組製造程式（等式兩邊 1~9 個數）

這個簡易的金蟬脫殼數組製作程式目的是：給予等式其中一邊的結構能找出想對應右式的結構及數組，數字最多可達等式兩邊各 9 個六位數。依照本表儲存格編號填至 Excel 2007 中即可得到正確的運算結果。K 欄中部分函數與舊版程式不相容請將函數進行更改（如 K4 可改爲：= SUM(B4:J4)/H$1）。但這將失去此程式原有的篩檢功能，意即等式另一邊得出的數字可能不是整數，若不要求此條件，也可將之更改。

此表格中，括號內的文字代表附註或對本格函數作說明。儲存格編號一欄中的顏色可用以區分儲存格的性質：欄(列)標題、參數填入區、數組之計算結果、數組性質之計算結果（顯示 TRUE 代表符合，FALSE 反之）。



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1	制	3		等式一邊個數			6															
2																						
3	A9	A8	A7	A6	A5	A4	A3	A2	A1	基準值	餘數	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	等冪和	金蟬脫殼
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	TRUE	TRUE
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	TRUE	TRUE
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	TRUE	TRUE
7	0	0	0	4	7	7	1	5	6	5	0	4	5	9	3	3	6	0	0	0	TRUE	TRUE
8	0	0	0	0	7	8	0	3	3	3.5	3	4	4	7	-1	0	7	0	0	0	TRUE	FALSE
9	0	0	0	0	6	6	4	5	6	4.5	3	3	4	5	3	3	9	0	0	0	TRUE	TRUE
10	0	0	0	400	776	786	104	535	636	539.5	3	443	544	975	293	303	679	0	0	0	TRUE	FALSE

儲存格編號	函數或文字
A1	位數限制
A2	(空格)
A3	數組
A4	十萬位

A5	萬位	
A6	千位	
A7	百位	
A8	十位	
A9	個位	
A10	(最大數限制) =POWER(10,C1)	
B1	(與 A1 合併)	
B2	(空格)	
B3	A9	
B4	參數填入區	(左式十萬位第 9 個數字)
B5		(左式萬位第 9 個數字)
B6		(左式千位第 9 個數字)
B7		(左式百位第 9 個數字)
B8		(左式十位第 9 個數字)
B9		(左式個位第 9 個數字)
B10	(左式總數組第 9 個數字) =100000*B4+10000*B5+1000*B6+100*B7+10*B8+B9	
C1		位數限制
C2	(空格)	
C3	A8	
C4	參數填入區	(左式十萬位第 8 個數字)
C5		(左式萬位第 8 個數字)
C6		(左式千位第 8 個數字)
C7		(左式百位第 8 個數字)
C8		(左式十位第 8 個數字)
C9		(左式個位第 8 個數字)
C10	(左式總數組第 8 個數字) =100000*C4+10000*C5+1000*C6+100*C7+10*C8+C9	
D1	(空格)	
D2	(空格)	
D3	A7	
D4	參數填入區	(左式十萬位第 7 個數字)
D5		(左式萬位第 7 個數字)
D6		(左式千位第 7 個數字)
D7		(左式百位第 7 個數字)
D8		(左式十位第 7 個數字)
D9		(左式個位第 7 個數字)

D10	(左式總數組第 7 個數字)	
	=100000*D4+10000*D5+1000*D6+100*D7+10*D8+D9	
E1	等式一邊個數	
E2	(空格)	
E3	A6	
E4	參數填入區	(左式十萬位第 6 個數字)
E5		(左式萬位第 6 個數字)
E6		(左式千位第 6 個數字)
E7		(左式百位第 6 個數字)
E8		(左式十位第 6 個數字)
E9		(左式個位第 6 個數字)
E10	(左式總數組第 6 個數字)	
	=100000*E4+10000*E5+1000*E6+100*E7+10*E8+E9	
F1	(與 E1 合併)	
F2	(空格)	
F3	A5	
F4	參數填入區	(左式十萬位第 5 個數字)
F5		(左式萬位第 5 個數字)
F6		(左式千位第 5 個數字)
F7		(左式百位第 5 個數字)
F8		(左式十位第 5 個數字)
F9		(左式個位第 5 個數字)
F10	(左式總數組第 5 個數字)	
	=100000*F4+10000*F5+1000*F6+100*F7+10*F8+F9	
G1	(與 E1 合併)	
G2	(空格)	
G3	A4	
G4	參數填入區	(左式十萬位第 4 個數字)
G5		(左式萬位第 4 個數字)
G6		(左式千位第 4 個數字)
G7		(左式百位第 4 個數字)
G8		(左式十位第 4 個數字)
G9		(左式個位第 4 個數字)
G10	(左式總數組第 4 個數字)	
	=100000*G4+10000*G5+1000*G6+100*G7+10*G8+G9	
H1	6(等式一邊個數)	
H2	(空格)	
H3	A3	

<table>
<tr><td>H4</td><td rowspan="6">參數填入區</td><td>(左式十萬位第 3 個數字)</td></tr>
<tr><td>H5</td><td>(左式萬位第 3 個數字)</td></tr>
<tr><td>H6</td><td>(左式千位第 3 個數字)</td></tr>
<tr><td>H7</td><td>(左式百位第 3 個數字)</td></tr>
<tr><td>H8</td><td>(左式十位第 3 個數字)</td></tr>
<tr><td>H9</td><td>(左式個位第 3 個數字)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H10</td><td colspan="2">(左式總數組第 3 個數字)</td></tr>
<tr><td colspan="2">=100000*H4+10000*H5+1000*H6+100*H7+10*H8+H9</td></tr>
<tr><td>I1</td><td colspan="2">(空格)</td></tr>
<tr><td>I2</td><td colspan="2">(空格)</td></tr>
<tr><td>I3</td><td colspan="2">A2</td></tr>
<tr><td>I4</td><td rowspan="6">參數填入區</td><td>(左式十萬位第 2 個數字)</td></tr>
<tr><td>I5</td><td>(左式萬位第 2 個數字)</td></tr>
<tr><td>I6</td><td>(左式千位第 2 個數字)</td></tr>
<tr><td>I7</td><td>(左式百位第 2 個數字)</td></tr>
<tr><td>I8</td><td>(左式十位第 2 個數字)</td></tr>
<tr><td>I9</td><td>(左式個位第 2 個數字)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H10</td><td colspan="2">(左式總數組第 2 個數字)</td></tr>
<tr><td colspan="2">=100000*H4+10000*H5+1000*H6+100*H7+10*H8+H9</td></tr>
<tr><td>J1</td><td colspan="2">(空格)</td></tr>
<tr><td>J2</td><td colspan="2">(空格)</td></tr>
<tr><td>J3</td><td colspan="2">A1</td></tr>
<tr><td>J4</td><td rowspan="6">參數填入區</td><td>(左式十萬位第 1 個數字)</td></tr>
<tr><td>J5</td><td>(左式萬位第 1 個數字)</td></tr>
<tr><td>J6</td><td>(左式千位第 1 個數字)</td></tr>
<tr><td>J7</td><td>(左式百位第 1 個數字)</td></tr>
<tr><td>J8</td><td>(左式十位第 1 個數字)</td></tr>
<tr><td>J9</td><td>(左式個位第 1 個數字)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">J10</td><td colspan="2">(左式總數組第 1 個數字)</td></tr>
<tr><td colspan="2">=100000*J4+10000*J5+1000*J6+100*J7+10*J8+J9</td></tr>
<tr><td>K1</td><td colspan="2">(空格)</td></tr>
<tr><td>K2</td><td colspan="2">(空格)</td></tr>
<tr><td>K3</td><td colspan="2">基準值</td></tr>
<tr><td rowspan="2">K4</td><td colspan="2">(十萬位基準值)</td></tr>
<tr><td colspan="2">=IF(OR(GCD(SUM(B4:J4),H$1)=H$1,MOD(SUM(B4:J4),H$1)=H$1/2),
IF(COUNTIF(B4:J4,0)>=9-H$1,SUM(B4:J4)/H$1,FALSE),FALSE)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">K5</td><td colspan="2">(萬位基準值)</td></tr>
<tr><td colspan="2">=IF(OR(GCD(SUM(B5:J5),H$1)=H$1,MOD(SUM(B5:J5),H$1)=H$1/2),</td></tr>
</table>

	IF(COUNTIF(B5:J5,0)>=9-H$1,SUM(B5:J5)/H$1,FALSE),FALSE)
K6	(千位基準值) =IF(OR(GCD(SUM(B6:J6),H$1)=H$1,MOD(SUM(B6:J6),H$1)=H$1/2), IF(COUNTIF(B6:J6,0)>=9-H$1,SUM(B6:J6)/H$1,FALSE),FALSE)
K7	(百位基準值) =IF(OR(GCD(SUM(B7:J7),H$1)=H$1,MOD(SUM(B7:J7),H$1)=H$1/2), IF(COUNTIF(B7:J7,0)>=9-H$1,SUM(B7:J7)/H$1,FALSE),FALSE)
K8	(十位基準值) =IF(OR(GCD(SUM(B8:J8),H$1)=H$1,MOD(SUM(B8:J8),H$1)=H$1/2), IF(COUNTIF(B8:J8,0)>=9-H$1,SUM(B8:J8)/H$1,FALSE),FALSE)
K9	(個位基準值) =IF(OR(GCD(SUM(B9:J9),H$1)=H$1,MOD(SUM(B9:J9),H$1)=H$1/2), IF(COUNTIF(B9:J9,0)>=9-H$1,SUM(B9:J9)/H$1,FALSE),FALSE)
K10	(總數組基準值) =IF(OR(GCD(SUM(B10:J10),H$1)=H$1,MOD(SUM(B10:J10),H$1)=H$1/2),IF(COUNTIF(B10:J10,0)>=9-H$1,SUM(B10:J10)/H$1,FALSE),FALSE)
L1	(空格)
L2	(空格)
L3	餘數
L4	(十萬位數字數除個數字之和的餘數) =MOD(SUM(B4:J4),H$1)
L5	(萬位數字數除個數字之和的餘數) =MOD(SUM(B5:J5),H$1)
L6	(千位數字數除個數字之和的餘數) =MOD(SUM(B6:J6),H$1)
L7	(百位數字數除個數字之和的餘數) =MOD(SUM(B7:J7),H$1)
L8	(十位數字數除個數字之和的餘數) =MOD(SUM(B8:J8),H$1)
L9	(個位數字數除個數字之和的餘數) =MOD(SUM(B9:J9),H$1)
L10	(總數組數字數除個數字之和的餘數) =MOD(SUM(B10:J10),H$1)
M1	(空格)
M2	(空格)
M3	B1
M4	(右式十萬位第 1 個數字)

	=IF($K4=FALSE,FALSE,IF(H$1<1,0,2*SUM($B4:$J4)/$H$1-J4))
M5	(右式萬位第 1 個數字) =IF($K5=FALSE,FALSE,IF(H$1<1,0,2*SUM($B5:$J5)/$H$1-J5))
M6	(右式千位第 1 個數字) =IF($K6=FALSE,FALSE,IF(H$1<1,0,2*SUM($B6:$J6)/$H$1-J6))
M7	(右式百位第 1 個數字) =IF($K7=FALSE,FALSE,IF(H$1<1,0,2*SUM($B7:$J7)/$H$1-J7))
M8	(右式十位第 1 個數字) =IF($K8=FALSE,FALSE,IF(H$1<1,0,2*SUM($B8:$J8)/$H$1-J8))
M9	(右式個位第 1 個數字) =IF($K9=FALSE,FALSE,IF(H$1<1,0,2*SUM($B9:$J9)/$H$1-J9))
M10	(右式總數組第 1 個數字) =IF($K10=FALSE,FALSE,IF(H$1<1,0,2*SUM($B10:$J10)/$H$1-J10))
N1	(空格)
N2	(空格)
N3	B2
N4	(右式十萬位第 2 個數字) =IF($K4=FALSE,FALSE,IF(H$1<2,0,2*SUM($B4:$J4)/$H$1-I4))
N5	(右式萬位第 2 個數字) =IF($K5=FALSE,FALSE,IF(H$1<2,0,2*SUM($B5:$J5)/$H$1-I5))
N6	(右式千位第 2 個數字) =IF($K6=FALSE,FALSE,IF(H$1<2,0,2*SUM($B6:$J6)/$H$1-I6))
N7	(右式百位第 2 個數字) =IF($K7=FALSE,FALSE,IF(H$1<2,0,2*SUM($B7:$J7)/$H$1-I7))
N8	(右式十位第 2 個數字) =IF($K8=FALSE,FALSE,IF(H$1<2,0,2*SUM($B8:$J8)/$H$1-I8))
N9	(右式個位第 2 個數字) =IF($K9=FALSE,FALSE,IF(H$1<2,0,2*SUM($B9:$J9)/$H$1-I9))
N10	(右式總數組第 2 個數字) =IF($K10=FALSE,FALSE,IF(H$1<2,0,2*SUM($B10:$J10)/$H$1-I10))
O1	(空格)
O2	(空格)
O3	B3
O4	(右式十萬位第 3 個數字) =IF($K4=FALSE,FALSE,IF(H$1<3,0,2*SUM($B4:$J4)/$H$1-H4))
O5	(右式萬位第 3 個數字) =IF($K5=FALSE,FALSE,IF(H$1<3,0,2*SUM($B5:$J5)/$H$1-H5))
O6	(右式千位第 3 個數字)

	=IF($K6=FALSE,FALSE,IF(H$1<3,0,2*SUM($B6:$J6)/$H$1-H6))
O7	(右式百位第 3 個數字) =IF($K7=FALSE,FALSE,IF(H$1<3,0,2*SUM($B7:$J7)/$H$1-H7))
O8	(右式十位第 3 個數字) =IF($K8=FALSE,FALSE,IF(H$1<3,0,2*SUM($B8:$J8)/$H$1-H8))
O9	(右式個位第 3 個數字) =IF($K9=FALSE,FALSE,IF(H$1<3,0,2*SUM($B9:$J9)/$H$1-H9))
O10	(右式總數組第 3 個數字) =IF($K10=FALSE,FALSE,IF(H$1<3,0,2*SUM($B10:$J10)/$H$1-H10))
P1	(空格)
P2	(空格)
P3	B4
P4	(右式十萬位第 4 個數字) =IF($K4=FALSE,FALSE,IF(H$1<4,0,2*SUM($B4:$J4)/$H$1-G4))
P5	(右式萬位第 4 個數字) =IF($K5=FALSE,FALSE,IF(H$1<4,0,2*SUM($B5:$J5)/$H$1-G5))
P6	(右式千位第 4 個數字) =IF($K6=FALSE,FALSE,IF(H$1<4,0,2*SUM($B6:$J6)/$H$1-G6))
P7	(右式百位第 4 個數字) =IF($K7=FALSE,FALSE,IF(H$1<4,0,2*SUM($B7:$J7)/$H$1-G7))
P8	(右式十位第 4 個數字) =IF($K8=FALSE,FALSE,IF(H$1<4,0,2*SUM($B8:$J8)/$H$1-G8))
P9	(右式個位第 4 個數字) =IF($K9=FALSE,FALSE,IF(H$1<4,0,2*SUM($B9:$J9)/$H$1-G9))
P10	(右式總數組第 4 個數字) =IF($K10=FALSE,FALSE,IF(H$1<4,0,2*SUM($B10:$J10)/$H$1-G10))
Q1	(空格)
Q2	(空格)
Q3	B5
Q4	(右式十萬位第 5 個數字) =IF($K4=FALSE,FALSE,IF(H$1<5,0,2*SUM($B4:$J4)/$H$1-F4))
Q5	(右式萬位第 5 個數字) =IF($K5=FALSE,FALSE,IF(H$1<5,0,2*SUM($B5:$J5)/$H$1-F5))
Q6	(右式千位第 5 個數字) =IF($K6=FALSE,FALSE,IF(H$1<5,0,2*SUM($B6:$J6)/$H$1-F6))
Q7	(右式百位第 5 個數字) =IF($K7=FALSE,FALSE,IF(H$1<5,0,2*SUM($B7:$J7)/$H$1-F7))
Q8	(右式十位第 5 個數字)

	=IF($K8=FALSE,FALSE,IF(H$1<5,0,2*SUM($B8:$J8)/$H$1-F8))
Q9	(右式個位第 5 個數字) =IF($K9=FALSE,FALSE,IF(H$1<5,0,2*SUM($B9:$J9)/$H$1-F9))
Q10	(右式總數組第 5 個數字) =IF($K10=FALSE,FALSE,IF(H$1<5,0,2*SUM($B10:$J10)/$H$1-F10))
R1	(空格)
R2	(空格)
R3	B6
R4	(右式十萬位第 6 個數字) =IF($K4=FALSE,FALSE,IF(H$1<6,0,2*SUM($B4:$J4)/$H$1-E4))
R5	(右式萬位第 6 個數字) =IF($K5=FALSE,FALSE,IF(H$1<6,0,2*SUM($B5:$J5)/$H$1-E5))
R6	(右式千位第 6 個數字) =IF($K6=FALSE,FALSE,IF(H$1<6,0,2*SUM($B6:$J6)/$H$1-E6))
R7	(右式百位第 6 個數字) =IF($K7=FALSE,FALSE,IF(H$1<6,0,2*SUM($B7:$J7)/$H$1-E7))
R8	(右式十位第 6 個數字) =IF($K8=FALSE,FALSE,IF(H$1<6,0,2*SUM($B8:$J8)/$H$1-E8))
R9	(右式個位第 6 個數字) =IF($K9=FALSE,FALSE,IF(H$1<6,0,2*SUM($B9:$J9)/$H$1-E9))
R10	(右式總數組第 6 個數字) =IF($K10=FALSE,FALSE,IF(H$1<6,0,2*SUM($B10:$J10)/$H$1-E10))
S1	(空格)
S2	(空格)
S3	B7
S4	(右式十萬位第 7 個數字) =IF($K4=FALSE,FALSE,IF(H$1<7,0,2*SUM($B4:$J4)/$H$1-D4))
S5	(右式萬位第 7 個數字) =IF($K5=FALSE,FALSE,IF(H$1<7,0,2*SUM($B5:$J5)/$H$1-D5))
S6	(右式千位第 7 個數字) =IF($K6=FALSE,FALSE,IF(H$1<7,0,2*SUM($B6:$J6)/$H$1-D6))
S7	(右式百位第 7 個數字) =IF($K7=FALSE,FALSE,IF(H$1<7,0,2*SUM($B7:$J7)/$H$1-D7))
S8	(右式十位第 7 個數字) =IF($K8=FALSE,FALSE,IF(H$1<7,0,2*SUM($B8:$J8)/$H$1-D8))
S9	(右式個位第 7 個數字) =IF($K9=FALSE,FALSE,IF(H$1<7,0,2*SUM($B9:$J9)/$H$1-D9))
S10	(右式總數組第 7 個數字)

	=IF($K10=FALSE,FALSE,IF(H$1<7,0,2*SUM($B10:$J10)/$H$1-D10))
T1	(空格)
T2	(空格)
T3	B8
T4	(右式十萬位第 8 個數字) =IF($K4=FALSE,FALSE,IF(H$1<8,0,2*SUM($B4:$J4)/$H$1-C4))
T5	(右式萬位第 8 個數字) =IF($K5=FALSE,FALSE,IF(H$1<8,0,2*SUM($B5:$J5)/$H$1-C5))
T6	(右式千位第 8 個數字) =IF($K6=FALSE,FALSE,IF(H$1<8,0,2*SUM($B6:$J6)/$H$1-C6))
T7	(右式百位第 8 個數字) =IF($K7=FALSE,FALSE,IF(H$1<8,0,2*SUM($B7:$J7)/$H$1-C7))
T8	(右式十位第 8 個數字) =IF($K8=FALSE,FALSE,IF(H$1<8,0,2*SUM($B8:$J8)/$H$1-C8))
T9	(右式個位第 8 個數字) =IF($K9=FALSE,FALSE,IF(H$1<8,0,2*SUM($B9:$J9)/$H$1-C9))
T10	(右式總數組第 8 個數字) =IF($K10=FALSE,FALSE,IF(H$1<8,0,2*SUM($B10:$J10)/$H$1-C10))
U1	(空格)
U2	(空格)
U3	B9
U4	(右式十萬位第 9 個數字) =IF($K4=FALSE,FALSE,IF(H$1<9,0,2*SUM($B4:$J4)/$H$1-B4))
U5	(右式萬位第 9 個數字) =IF($K5=FALSE,FALSE,IF(H$1<9,0,2*SUM($B5:$J5)/$H$1-B5))
U6	(右式千位第 9 個數字) =IF($K6=FALSE,FALSE,IF(H$1<9,0,2*SUM($B6:$J6)/$H$1-B6))
U7	(右式百位第 9 個數字) =IF($K7=FALSE,FALSE,IF(H$1<9,0,2*SUM($B7:$J7)/$H$1-B7))
U8	(右式十位第 9 個數字) =IF($K8=FALSE,FALSE,IF(H$1<9,0,2*SUM($B8:$J8)/$H$1-B8))
U9	(右式個位第 9 個數字) =IF($K9=FALSE,FALSE,IF(H$1<9,0,2*SUM($B9:$J9)/$H$1-B9))
U10	(右式總數組第 9 個數字) =IF($K10=FALSE,FALSE,IF(H$1<9,0,2*SUM($B10:$J10)/$H$1-B10))
V1	(空格)
V2	(空格)
V3	等冪和

V4	=IF(AND(SUM(B4:J4)=SUM(M4:U4), SUMSQ(B4:J4)=SUMSQ(M4:U4)),TRUE,FALSE)
V5	=IF(AND(SUM(B5:J5)=SUM(M5:U5), SUMSQ(B5:J5)=SUMSQ(M5:U5)),TRUE,FALSE)
V6	=IF(AND(SUM(B6:J6)=SUM(M6:U6), SUMSQ(B6:J6)=SUMSQ(M6:U6)),TRUE,FALSE)
V7	=IF(AND(SUM(B7:J7)=SUM(M7:U7), SUMSQ(B7:J7)=SUMSQ(M7:U7)),TRUE,FALSE)
V8	=IF(AND(SUM(B8:J8)=SUM(M8:U8), SUMSQ(B8:J8)=SUMSQ(M8:U8)),TRUE,FALSE)
V9	=IF(AND(SUM(B9:J9)=SUM(M9:U9), SUMSQ(B9:J9)=SUMSQ(M9:U9)),TRUE,FALSE)
V10	=IF(AND(SUM(B10:J10)=SUM(M10:U10), SUMSQ(B10:J10)=SUMSQ(M10:U10)),TRUE,FALSE)
W1	(空格)
W2	(空格)
W3	金蟬脫殼
W4	=IF(SUMSQ(B10:J10)=SUMSQ(M10:U10),TRUE,FALSE)
W5	=IF(SUMSQ(MOD(B10,100000),MOD(C10,100000),MOD(D10,100000),MOD(E10,100000),MOD(F10,100000),MOD(G10,100000),MOD(H10,100000),MOD(I10,100000),MOD(J10,100000))=SUMSQ(MOD(M10,100000),MOD(N10,100000),MOD(O10,100000),MOD(P10,100000),MOD(Q10,100000),MOD(R10,100000),MOD(S10,100000),MOD(T10,100000),MOD(U10,100000)),TRUE,FALSE)
W6	=IF(SUMSQ(MOD(B10,10000),MOD(C10,10000),MOD(D10,10000),MOD(E10,10000),MOD(F10,10000),MOD(G10,10000),MOD(H10,10000),MOD(I10,10000),MOD(J10,10000))=SUMSQ(MOD(M10,10000),MOD(N10,10000),MOD(O10,10000),MOD(P10,10000),MOD(Q10,10000),MOD(R10,10000),MOD(S10,100000),MOD(T10,100000),MOD(U10,100000)),TRUE,FALSE)
W7	=IF(SUMSQ(MOD(B10,1000),MOD(C10,1000),MOD(D10,1000),MOD(E10,1000),MOD(F10,1000),MOD(G10,1000),MOD(H10,1000),MOD(I10,1000),MOD(J10,1000))=SUMSQ(MOD(M10,1000),MOD(N10,1000),MOD(O10,1000),MOD(P10,1000),MOD(Q10,1000),MOD(R10,1000),MOD(S10,1000),MOD(T10,1000),MOD(U10,1000)),TRUE,FALSE)
W8	=IF(SUMSQ(MOD(B10,100),MOD(C10,100),MOD(D10,100),MOD(E10,100),MOD(F10,100),MOD(G10,100),MOD(H10,100),MOD(I10,100),MOD(J10,100))=SUMSQ(MOD(M10,100),MOD(N10,100),MOD(O10,100),MOD(P10,100),MOD(Q10,100),MOD(R10,100),MOD(S10,100),MO

	D(T10,100),MOD(U10,100)),TRUE,FALSE)
W9	=IF(SUMSQ(MOD(B10,10),MOD(C10,10),MOD(D10,10),MOD(E10,10),MOD(F10,10),MOD(G10,10),MOD(H10,10),MOD(I10,10),MOD(J10,10))=SUMSQ(MOD(M10,10),MOD(N10,10),MOD(O10,10),MOD(P10,10),MOD(Q10,10),MOD(R10,10),MOD(S10,10),MOD(T10,10),MOD(U10,10)),TRUE,FALSE)
W10	=IF(COUNTIF(W4:W9,TRUE)=6,TRUE,FALSE)

【評語】030402

1. 看起來是有趣的題目，找出滿足特別性質的數串，令人有賞心悅目的感覺。
2. 這樣的題目比較容易流入「趣味數學」的層次，就整體數學的內涵來說，比較缺少「本質性」，不必花太多時間。
3. 不妨從一些初等數論的知識學起，這對往後研究會有幫忙。