

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 生物及地球科學科

031710

往內往外傻傻分不清楚-百合雌蕊柱頭的負向地性

學校名稱：宜蘭縣立羅東國民中學

| | |
|--|-------------------------|
| <p>作者：</p> <p>國一 余晨熏</p> <p>國一 羅文伶</p> <p>國一 鄭哲宇</p> <p>國一 林易成</p> | <p>指導老師：</p> <p>吳嵩慶</p> |
|--|-------------------------|

關鍵詞： 柱頭、向性、重力場

壹、摘要：

我們觀察到於花店買到的園藝種百合花柱頭具有「負向地性」，與百合花所受的地球引力的方向剛好相反：但雄蕊無負向地性。百合雌蕊柱頭負向地性的因素會因為「雄蕊花藥」存在而影響，負向地性持續的時間只佔整個花期的一部份。改變百合所面臨的重力場方向，亦會改變百合雌蕊柱頭的澱粉粒分佈。因此雌蕊柱頭內薄壁細胞的「澱粉粒分佈」可能與百合柱頭具有「負向地性」可能有關。百合柱頭具有「負向地性」與百合授粉的生殖行為有關。

貳、研究動機：

爲了佈置家裡，有一天媽媽買了一束百合花。過了幾天，花開了，開口爲水平方向的花柱頭竟然有往上彎曲的現象，讓我想到了是不是柱頭也有向性？跟老師與其他同學討論過後，便開始了這一串的實驗。

參、研究目的：

- 一、探討「開花後柱頭的形態」與「光線」的關係—去除光線後觀察柱頭的方向。
- 二、探討「開花後柱頭的形態」與「重力場」的關係—利用吊扇改變重力場的方向。
- 三、探討影響百合花雌蕊柱頭負向地性的因素—雄蕊花藥的影響、澱粉粒的角色。
- 四、百合花雌蕊柱頭具負向地性對花粉傳播的影響。

肆、研究設備及器材：

- 一、器材：溫度計、百合花（於花店買到固定的百合品系）、吊扇、數位照相機、水平儀、複式顯微鏡。
- 二、藥品：碘液。

伍、研究過程或方法：

一、文獻回顧：

(一) 何謂植物「向光性」？植物「向地性」？

向光性(Phototropism)；植物之器官對一定方向射來之光線的刺激，發生反應，所誘發的生長活動。

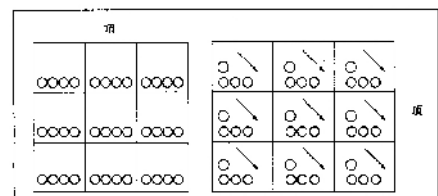
負向地性(Negative geotropism)：莖部逆向地心方向生長現象稱爲負向地性。

(二) 百合柱頭有「向性」嗎？

大部份書上以及網路上介紹植物向性（向光性、向地性）大多以莖及根爲主，對於柱頭有沒有向性則無相關文獻記載。

(三) 造成根的「向性」的因素—澱粉粒的影響。

植物藉由所謂的「平衡石」(statolith)感知重力。細胞內最主要也最重要的「平衡石」是澱粉粒。德國科學家左里柯夫爾與艾塔爾(Zollkoffer & Etlah)在本世紀初，曾使植物處於「饑餓」狀態，他們發現當根冠細胞的澱粉粒逐漸消失時，根的向地性也逐漸減弱。美國的利奧波德(Leopold)以一種突變種玉米作實驗，這種玉米所含



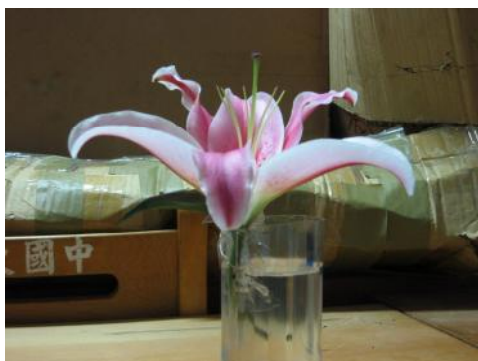
圖一：植物組織由直立位置(左)轉爲傾斜(右)時，使平衡石移動，從而造成澱粉顆粒分布不均。

的澱粉粒比野生型玉米的來得小，也來得少，結果發現這種突變種玉米的向地性也較不顯著。雖然並非所有的實驗都指出澱粉粒就是「平衡石」，但在大部分感知重力的組織中，澱粉粒的確扮演了相當重要的「平衡石」角色及功能。

二、研究過程或方法：

(一) 探討「開花後柱頭的形態」與「光線」的關係—去除光線後觀察柱頭的方向。

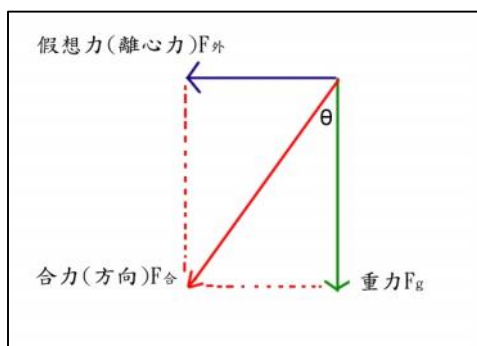
於學校地下室裝置一個完全無光的環境。去除光線的影響，看柱頭有無改變方向。



【完全黑暗下，柱頭仍具有負向地性，此時只有在拍攝照片時才開燈】

(二) 探討「開花後柱頭的形態」與「重力場」的關係—利用吊扇改變重力場的方向。

利用吊扇倒置，製造一個改變的重力場方向。從而觀察雌蕊柱頭的方向。



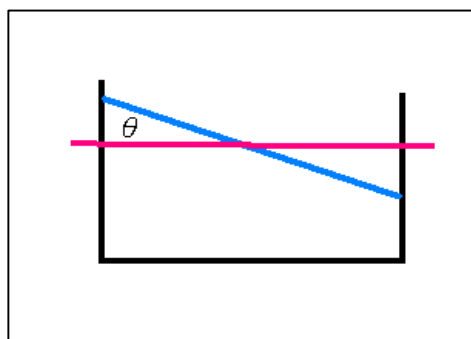
【改變重力場裝置圖】



【實際圖示】



【觀察雌蕊柱頭轉移方向】

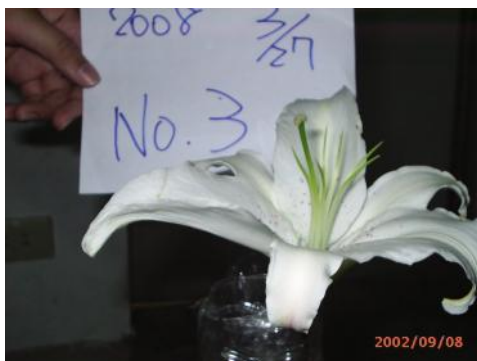


【 θ 的檢驗】

因為我們判斷的是雌蕊柱頭的負向地性是否存在，故引入假想力離心力的概念，目的在檢測雌蕊柱頭所感受的負向地性，而不是觀察者在平地的負向地性。而 θ 的檢驗是將測量因吊扇旋轉，測量容器半徑與水的改變高度，就可以得到 θ 。

(三) 探討影響百合花雌蕊柱頭負向地性的因素－雄蕊花藥的影響。

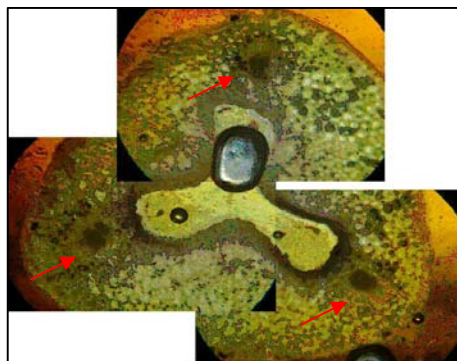
在實驗過程中，我們發現柱頭所展現的負向地性並不是佔整個開花期，而是於花開後約 2-3 天時，柱頭就沒有負向地性了，因此我們判斷可能是花已經授粉了，所以柱頭才不表現負向地性。因此實驗時將雄蕊的花藥全部拔除，於吊扇裝置上觀察雌蕊是否表現負向地性。



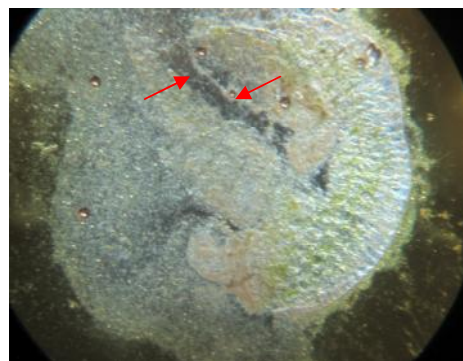
【雌蕊柱頭表現負向地性直到花謝】

(四) 探討影響百合花雌蕊柱頭負向地性的因素－澱粉粒的角色。我們由文獻資料中知道根的向地性有部分原因與澱粉粒有關，因而我們檢測澱粉粒在雌蕊柱頭的分佈。

橫切時，以兩刀片相夾後，橫切雌蕊的柱頭。利用複式顯微鏡觀察如下：
實驗組－經改變重力場裝置的雌蕊柱頭橫切經碘液染色澱粉粒分佈 100X
對照組－不改變重力場裝置的雌蕊柱頭橫切經碘液染色澱粉粒分佈 100X



【對照組雌蕊柱頭經碘液染色澱粉粒分佈 100X】



【實驗組雌蕊柱頭經碘液染色澱粉粒分佈 100X】

由圖可觀察出兩者的澱粉粒分佈是有差異的。改變重力場裝置的雌蕊柱頭經碘液染色澱粉粒分佈有集中的現象。所以澱粉粒的分佈可能與柱頭的負向地性有關係。

(五) 百合花雌蕊柱頭具負向地性對花粉傳播的影響。



【對照組雌蕊柱頭負向地性】



【實驗組雌蕊柱頭負向地性】

陸、研究結果

- 一、探討「開花後柱頭的形態」與「光線」的關係—去除光線後觀察柱頭的方向。完全黑暗下，柱頭仍具有負向地性。除去光線是為了避免柱頭的向性運動是因為向光性的關係。
- 二、探討「開花後柱頭的形態」與「重力場」的關係—利用吊扇改變重力場的方向。柱頭往內傾斜的現象明顯。
- 三、探討影響百合花雌蕊柱頭負向地性的因素—雄蕊花藥的影響。在實驗過程中將雄蕊的花藥全部拔除，於吊扇裝置上觀察雌蕊是否表現負向地性。若不拔除花藥，則雌蕊表現負向地性約三天後即無負向地性；若拔除花藥，則雌蕊表現負向地性直到花謝。負向地性持續的時間只佔整個花期的一部份。我們由此判斷雄蕊花藥存在與否與雌蕊所展現的負向地性有明顯關係。另外，我們也觀察到雄蕊花藥無負向地性的存在。
- 四、探討影響百合花雌蕊柱頭負向地性的因素—澱粉粒的角色。改變重力場情況下，雌蕊柱頭的澱粉粒分佈有集中於中軸的現象。
- 五、百合花雌蕊柱頭具負向地性對花粉傳播的影響。

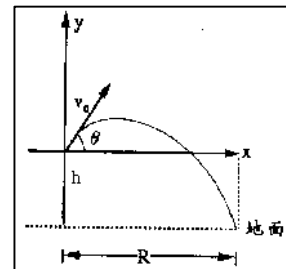
【高度為 h 的人由頭頂丟一顆球的觀點】

假設在重力加速度為 g 的情況下，由一個高度為 h 的人由頭頂丟一顆初速度為 V_0 的球，仰角為 θ ，則可丟到最長距離為 R

的角度 $\cos 2\theta = gh / (V_0^2 + gh)$ 【如附件二】，因為 $\cos 2\theta = gh / (V_0^2 + gh) \geq 0$ 。

$0 \leq \cos 2\theta < 1$ ； $0^\circ < \theta \leq 45^\circ$ ，也就是當 h 很小時， $\theta = 45^\circ$ 時可以丟到最遠，但若 h 不可忽略時， $\theta < 45^\circ$ 時才有最遠的距離 R 。

當投擲的物體愈輕，則投擲初速 v_0 便會愈大，這樣身高 h 的影響，便會相對減小，尤其當初速 v_0 相當大時，身高 h 的變因甚至可以忽略不計，此時投擲的角度愈接近 45° 時，射程愈遠。



【倒過來想的觀點】

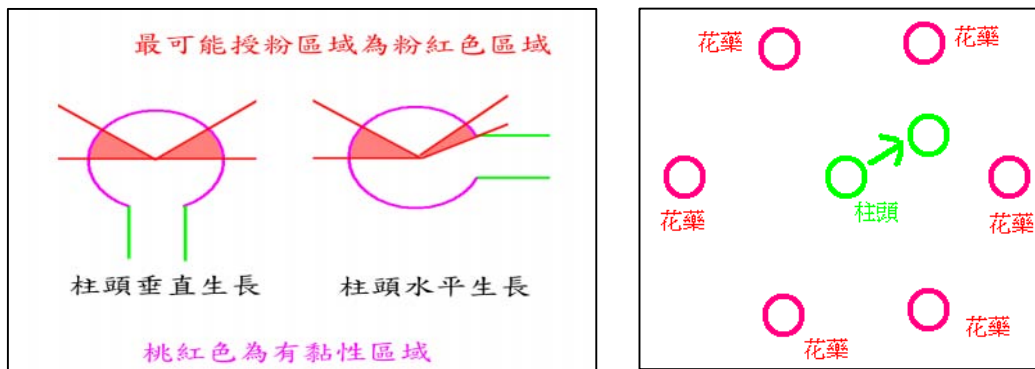
重力加速度為 g 的情況下，若地面丟一顆球至一個高度為 h 的人頭上（ h 不可忽略），若最長距離為 R 固定，則若入射進入人頭的速度為 V_0 ，此時的入射角度最可能為 $\cos 2$

$\theta = \arctan(V_0 / \sqrt{V_0^2 + gh})$, $\theta < 45^\circ$ 。此觀點的好處是最長距離為 R 固定下，由地面斜向拋出並且打中高度 h 的人頭的傾斜角度一定是且只能是 θ （此時 θ 為小於 45° 的一個特定值）。至於 θ 低於 45° 的程度則與入射速度 V_0 有關。這也與花粉粒很輕（ V_0 值大），入射進入人頭的速度為 V_0 ，若 V_0 與 h 的比較下差異很大，則 h 的效果就不是那麼重要，反而要考慮花藥對柱頭水平距離 R 的影響。也就是當最長距離 R 固定下，由地面丟一顆球打到一個高度為 h 人頭的機會為最小。

若以此實驗解釋，在沒有風的情況下，雌蕊的負向地性主要以異花授粉為主（負向地性的表現為遠離自身的雄蕊）；而雄蕊達到自花授粉的機率並不高（最遠距離 R 固定，由雄蕊的花藥達到自身的柱頭造成自花授粉的機率低）。

我們觀察到雌蕊柱頭的縱切面中，有黏性的部分為桃紅色，最可能授粉區域為粉紅色區域。若柱頭垂直生長（展現負向地性），則較柱頭水平生長有更多機會授粉。此前提為柱頭為均勻的黏性且位於無風的狀態。若有風的情況下，需考慮的變數（風速、溫度、濕度）便需增加。

另外，我們已經證明若除去光線則百合花的生長方向有明顯負向地性。但自然界中其實百合花所存在的環境仍為有光線與風的存在。因此花朵開放所對的方向就不完全是向天頂生長。若柱頭表現負向地性，則與其他 6 個無負向地性的雄蕊花藥的水平距離 R 在不管花朵開向何處，一定有 2 個以上柱頭的水平距離 R 變少，若水平距離 R 變少，則自花授粉的機率增加，達到花朵生殖的目的。



柒、討論

- 一、探討「開花後柱頭的形態」與「光線」的關係—去除光線後觀察柱頭的方向。完全黑暗下，柱頭仍具有負向地性。除去光線是為了避免柱頭的向性運動是因為向光性的關係。所以我們這裡只探討雌蕊柱頭的負向地性。
- 二、探討「開花後柱頭的形態」與「重力場」的關係—利用吊扇改變重力場的方向。柱頭往內傾斜的現象明顯。 θ 算出來=約為 30 度。
- 三、我們利用百合切花而不用百合全株（種在土壤花盆）來進行此實驗是因為花盆土壤太重，沒有適當的設備來模擬更改重力場方向的裝置，亦即翻倒的吊扇撐不住花盆的重量。

四、探討影響百合花雌蕊柱頭負向地性的因素－雄蕊花藥的影響。

在實驗過程中將雄蕊的花藥全部拔除，於吊扇裝置上觀察雌蕊是否表現負向地性，雌蕊表現負向地性直到花謝。雄蕊的花藥存在與否與雌蕊所展現的負向地性有明顯關係。負向地性持續的時間只佔整個花期的一部份我們判斷可能花在授粉之後，雌蕊柱頭負向地性的功能就功成身退，故觀察到以上的結果。

五、探討影響百合花雌蕊柱頭負向地性的因素－澱粉粒的角色。

改變重力場裝置的雌蕊柱頭經碘液染色澱粉粒分佈有集中的現象。所以澱粉粒的分佈應與柱頭的負向地性有關係。若是可以改變插花的水性質（例如改用不同的蔗糖溶液應該可以看出雌蕊柱頭的負向地性所受影響）

六、我們觀察到澱粉粒在雌蕊柱頭橫切後的分佈無論在實驗組或是對照組均是不均勻的，不是所有柱頭薄壁細胞並均含有澱粉粒。但在對照組中的澱粉粒散佈於維管束週圍薄壁細胞內；而實驗組的澱粉粒分佈集中在中軸的薄壁細胞內。

七、利用碘液染澱粉時，因碘液對澱粉的敏感度極高（ $2 \times 10^{-5} \text{N}$ ），故無須考慮碘液的量會不會影響澱粉粒的呈色。

八、百合花雌蕊柱頭具負向地性對花粉傳播的影響。為何花藥對柱頭的水平距離 R 減少會增加自花授粉的機率？我們由課堂上學習的達爾文天擇說提倡適者生存，且風媒植物會為了盡可能散布子代會盡可能的將花粉粒散佈的遠一點的觀點，我們找了很多答案，和老師討論後，老師用八年級的課程（斜向拋射）選擇作為其中一個解釋達爾文天擇說觀點的解釋。但這個前提還沒考慮到風的影響，之後的延伸實驗可能還要把「風速」考慮進去，那就更複雜了。

九、如何固定吊扇以及百合花的位置

(1) 用參考書及報紙疊在吊扇兩旁，固定吊扇，讓吊扇保持平衡。

(2) 將寶特瓶剪成一半，把百合花放入並加水，用膠帶固定百合。

十、我們做出來的結果只針對於花店買到的特定園藝種，至於台灣原生種百合因取得材料有困難，故對所有品種的百合花柱頭是否有負向地性乃至於其他不同種類花的雌蕊是否具有負向地性仍具有討論的空間。

十一、百合柱頭具有「負向地性」與百合授粉的生殖行為有關。但目前我們先由同一朵花的雌雄蕊關係來探討到百合的授粉機會，我們發現雌蕊的柱頭表現負向地性應與增加異花授粉機會有關。同時雄蕊會盡量增加授粉的機會（不管是自花或異花授粉），使得在有光線及風的自然狀態下，雌蕊不會完全進行異花授粉此種風險性極高的選擇（全中或全不中）。只是我們由實驗結果判讀百合的負向地性對花朵生殖的影響應是趨向於異花授粉，要證實我們的假設可以分析百合花所結種子的 DNA 看其自花授粉多或是異花授粉多，不過限於經費，我們目前無法證明。若有適當的經費及工具，應該可以驗證我們的假設。

十二、在延伸實驗中我們可以考慮利用不同品種的百合花作為實驗的材料，觀察不同品種的百合花或是其他種類的開花植物，其雌蕊柱頭是否也具有負向地性。

捌、結論

- 一、百合柱頭具有「負向地性」，與地球引力的方向剛好相反；雄蕊無負向地性。
- 二、百合雌蕊柱頭負向地性持續的時間只佔整個花期的一部份，且雌蕊柱頭負向地性會因為「雄蕊花藥」存在而影響。
- 三、改變百合所面臨的重力場方向，亦會改變百合雌蕊柱頭的澱粉粒分佈。所以雌蕊柱頭的「澱粉粒分佈」可能與百合柱頭具有「負向地性」有關。
- 四、百合柱頭具有「負向地性」與百合是否授粉的生殖行為有關。在無風的因素干擾下，雌蕊表現負向地性主要目的為異花授粉，但在真實情況中，雌蕊表現的負向地性仍會避免授粉時全部異花授粉或全部不授粉的極端情況發生。

玖、參考資料及其他

- 1 植物感應 http://www.tshs.tp.edu.tw/yeh/new_page_21.htm
- 2 如何可使物體拋得最遠？ <http://203.68.20.65/science/content/1993/00030279/0013.htm>
- 3 澱粉粒 <http://ap6.pccu.edu.tw/encyclopedia/data.asp?id=6082&nowpage=1>
- 4 根的向性——淺談向地性及向溫性 <http://203.68.20.65/science/content/1991/00090261/0005.htm>
- 5 基因轉殖作物花粉流佈測量技術的原理、方法與趨勢。科學農業 53(78):171-179, 2005.
- 6 碘遇澱粉呈藍色的推究 <http://www.dfm.com.tw/dasp/dfaux/o03-a.htm>

【附件一：基本記錄】

| | 08/02/11(一) | 08/02/12(二) | 08/02/13(三) | 08/02/14(四) | 08/02/15(五) | 08/02/16(六) | 08/02/17(日) |
|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 第一朵 | | 未開花 | 未開花 | 未開花,向外倒 | 未開花 | | |
| 第二朵 | | 未開花 | 未開花 | 已開花,柱頭往內 | 柱頭往內 | | |
| 第三朵 | | 未開花 | 未開花 | 未開花(向外倒) | 已開花,柱頭往內 | | |
| 第四朵 | | 未開花 | 未開花 | 已開花(有枯萎現象) | 已經枯萎 | | |
| 第五朵 (對照組) | | 未開花 | 未開花 | 已開花 | 正常 | | |

| | 08/02/18(一) | 08/02/19(二) | 08/02/20(三) | 08/02/21(四) | 08/02/22(五) | 08/02/23(六) | 08/02/24(日) |
|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------------|------------------|-------------|-------------|
| 第一朵 | 已開花,柱頭有往內現象 | 柱頭有明顯往內 | 柱頭有明顯往內 | 柱頭有一點往外(有能已授粉完畢) | 柱頭有一點往外(有能已授粉完畢) | | |
| 第二朵 | 柱頭沒有朝內現象 | 柱頭往外 | 柱頭歪了 | 柱頭有明顯往外 | 柱頭有明顯往外 | | |
| 第三朵 | 枯萎了 | 枯萎了 | 枯萎了 | 枯萎了 | 枯萎了 | | |
| 第四朵 | 枯萎了 | 枯萎了 | 枯萎了 | 枯萎了 | 枯萎了 | | |
| 第五朵 (對照組) | 正常 | 正常 | 正常 | 花有往電燈的方向移動(柱頭有歪掉) | 正常 | | |

| | 08/02/25(一) | 08/02/26(二) (換新花) | 08/02/27(三) | 08/02/28(四) | 08/02/29(五) | 08/03/01(六) | 08/03/02(日) |
|--------------|-------------|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 第一朵 | 枯萎了 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 |
| 第二朵 | 枯萎了 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 |
| 第三朵 | 枯萎了 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 |
| 第四朵 | 枯萎了 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 |
| 第五朵 (對照組) | 枯萎了 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 |

| | 08/03/03(一) | 08/03/04(二) | 08/03/05(三) | 08/03/06(四) | 08/03/07(五) (換新花) | 08/03/08(六) | 08/03/09(日) |
|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------------|-------------|---------------|
| 第一朵 | 未開花 | 因為跳電,所以不能觀察 | 花開了一點 | 花開了一點 | 未開花 | 未開花 | 未開花 |
| 第二朵 | 花開了一點 | | 已開花,柱頭有往內一點 | 柱頭無往內現象 | 無往內現象 | 柱頭往外 | 柱頭往外(可能以授粉完畢) |
| 第三朵 | 花開了一點 | | 開花,柱頭無往內 | 柱頭無往內現象 | 往頭往內一點點 | 柱頭往內 | 柱頭往內 |
| 第四朵 | 未開花 | | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 |
| 第五朵 (對照組) | 花開了一點 | | 正常,柱頭偏了一些 | 正常,柱頭偏了一些 | 柱頭有點偏了 | 正常 | 正常 |

| | 08/03/10(一) | 08/03/11(二) | 08/03/12(三) | 08/03/13(四) | 08/03/14(五) | 08/03/15(六) | 08/03/16(日) |
|--------------|-------------|----------------------|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 第一朵 | 未開花 | 未開花(但花藥卻已經成熟,萼片枯了一點) | 花斷了 | 花斷了 | 花斷了 | | |
| 第二朵 | 柱頭往內 | 柱頭往外(萼片枯了一點) | 柱頭往外(萼片枯了一點) | 花斷了 | 花斷了 | | |
| 第三朵 | 柱頭往內 | 柱頭往內(萼片枯了一點) | 柱頭往內(萼片枯了一點) | 花斷了 | 花斷了 | | |
| 第四朵 | 花開了一些 | 花開了一些(花藥已成熟) | 花開了一些(花藥已成熟) | 花開了一些 | 花斷了 | | |
| 第五朵 (對照組) | 正常 | 萼片枯了 | 柱頭往外(萼片枯了一些) | 枯萎了 | 枯萎了 | 未開花 | 未開花 |

| | 08/03/17(一) (換新花) | 08/03/18(二) | 08/03/19(三) 中途有人把總電源關了 | 08/03/20(四) | 08/03/21(五) | 08/03/22(六) | 08/03/23(日) |
|-----|----------------------|-----------------------|---------------------------|---------------|-------------|-------------|-------------|
| 第一朵 | 未開花 | 因為前一天花沒有黏好,所以幾乎都被甩出來了 | 柱頭偏左 | 柱頭好像斷了(以授粉完畢) | 花斷了 | | |
| 第二朵 | 未開花 | | 柱頭往內(花開的特別大) | 柱頭偏了(以授粉完畢) | 花斷了 | | |

| | | | | | | | |
|--------------|-----|----|------------|-------------|-----|--|--|
| 第三朵 | 未開花 | | 花開了(看不到柱頭) | 柱頭往內(以授粉完畢) | 花斷了 | | |
| 第四朵 | 未開花 | | 柱頭往上 | 柱頭往內 | 花斷了 | | |
| 第五朵 (對照組) | 未開花 | 正常 | 柱頭偏了 | 柱頭偏掉 | 枯萎了 | | |

| | 08/03/24(一) (換新花,但 品種買成白 色的) | 08/03/25(二) | 08/03/26(三) | 08/03/27(四) | 08/03/28(五) | 08/03/29(六) | 08/03/30(日) |
|--------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------|-------------|----------------|-------------|-------------|
| 第一朵 | 未開花 | 未開花(雄蕊 已除去) | 未開花 | 未開花 | 未開花 | | |
| 第二朵 | 未開花 | 未開花(雄蕊 已除去) | 未開花 | 未開花 | 花開了一 些,柱頭偏了 | | |
| 第三朵 | 花開了一些 (雄蕊已除 去) | 開花,柱頭偏 掉(雄蕊已除 去) | 柱頭偏了 | 柱頭偏了 | 柱頭偏了 | | |
| 第四朵 | 未開花 | 未開花(雄蕊 已除去) | 未開花 | 未開花 | 柱頭往外 | | |
| 第五朵 (對照組) | 花開了(雄蕊 已除去) | 正常 | 柱頭傾斜非 常嚴重(可能 是水裝的不 夠多) | 柱頭偏了 | 枯萎了 | 未開花 | 未開花 |

| | 08/03/31(一) (換新花) | 08/04/01(二) | 08/04/02(三) | 08/04/03(四) | 08/04/04(五) | 08/04/05(六) | 08/04/06(日) |
|--------------|----------------------|-------------|-------------|----------------|-------------|-------------|-------------|
| 第一朵 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 柱頭往內 | | |
| 第二朵 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 柱頭往內 | | |
| 第三朵 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 整朵花歪了 | 柱頭往內 | | |
| 第四朵 | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 柱頭往內 | 柱頭往內 | | |
| 第五朵 (對照組) | 未開花 | 未開花 | 未開花 | 未開花(整朵 花歪了) | 正常 | | |

【附件二：】

假設在重力加速度為 g 的情況下，由一個高度為 h 的人由頭頂丟一顆初速度為 V_0 的球，仰角為 θ ，則可丟到最長距離為 R 的角度 $\cos 2\theta = gh / (V_0^2 + gh)$ 的證明：

若考慮投球者的身高（見右下圖），則水平初速仍為 $v_0 \cos \theta$ 而飛行時間改變了。

$$-h = (v_0 \sin \theta)t - 1/2 \cdot gt^2$$

$$1/2 \cdot gt^2 - (v_0 \sin \theta)t - h = 0$$

$$\therefore t = (v_0 \sin \theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}) / g \quad (\text{負值不合})$$

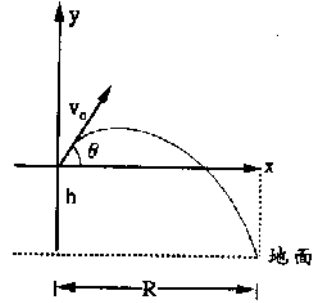
$$\text{故飛行距離 } R = v_0 \cos \theta \cdot t$$

$$= v_0 \cos \theta \cdot (v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}) / g$$

$$\therefore gR = v_0 \cos \theta \cdot v_0 \sin \theta + v_0 \cos \theta \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}$$

$$gR = 1/2 \cdot v_0^2 \sin 2\theta + v_0 \cos \theta \cdot \sqrt{v_0^2 \cdot 1/2(1 - \cos 2\theta) + 2gh}$$

$$= 1/2 \cdot v_0^2 \sin 2\theta + v_0 \cos \theta \sqrt{(v_0^2 / 2) + 2gh - (v_0^2 / 2) \cos 2\theta}$$



$$\text{令 } s = v_0^2 / 2, t' = (v_0^2 / 2) + 2gh, \therefore t' - s = 2gh$$

$$\text{則 } gR = s \cdot \sin 2\theta + \sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta} \cdot \sqrt{t' - s} \cdot \cos 2\theta$$

$$= s \cdot \sin 2\theta + \sqrt{v_0^2 (1 + \cos 2\theta)} / 2 \cdot \sqrt{t' - s} \cdot \cos 2\theta$$

$$= s \cdot \sin 2\theta + (\sqrt{s + s \cdot \cos 2\theta}) (\sqrt{t' - s} \cdot \cos 2\theta)$$

$$= \sqrt{s + s \cdot \cos 2\theta} \cdot \sqrt{t' - s} \cdot \cos 2\theta + s \cdot \sin 2\theta$$

$$\text{再令 } x = \cos 2\theta, s' = \lambda_1, s'' = \lambda_2, \therefore gR - s \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{\lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)x - \lambda_2 x^2} = 2gh$$

則欲求 gR 之最大值可利用一次導函數：

$$\frac{dgR}{dx} = \frac{s(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) - 2\lambda_2 x}{\sqrt{\lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)x - \lambda_2 x^2}} = 0$$

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2) - 2\lambda_2 x}{\sqrt{\lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)x - \lambda_2 x^2}} = \frac{s(2x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

兩邊平方並化簡得

$$(1-x^2) [(\lambda_1 - \lambda_2) - 2\lambda_2 x]^2 = [\lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)x - \lambda_2 x^2] \cdot s^2 (2x)^2 \quad (\because s^2 = \lambda_2)$$

$$\text{即 } (1-x^2) [\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - 4\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)x + 4\lambda_2^2 x^2]$$

$$= [\lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)x - \lambda_2 x^2] \lambda_2 (4x^2)$$

$$\text{展開得 } [(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)x - (4\lambda_2^2 - \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^2)x^2]$$

$$+ 4\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)x^3 - 4\lambda_2^2 x^4 - 4\lambda_2 \lambda_2 x^2 + 4\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)x^3 - 4\lambda_2^2 x^4$$

$$\text{化簡得 } (\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)x + (4\lambda_2^2 - \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^2)x^2 = 0$$

$$\text{即 } (\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)x + (3\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)x^2 = 0$$

$$\therefore (3\lambda_2 + \lambda_1)x^2 + 4\lambda_2 x + (\lambda_2 - \lambda_1) = 0$$

$$[st \neq s^2, \text{ 則 } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ 等式兩端消去 } (\lambda_2 - \lambda_1)]$$

$$\Rightarrow (3s^2 + st')x^2 - 4s^2 x \cdot (s^2 - st') = 0$$

$$(3s + t')x^2 + 4sx + (s - t') = 0 \quad (\text{消去 } s, s = v_0^2 / 2 \neq 0)$$

$$3sx^2 + 4sx + s + t'x^2 - t' = 0$$

$$s(3x^2 + 4x + 1) + t'(x^2 - 1) = 0$$

$$s(3x + 1)(x + 1) + t'(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$(x + 1)[(3s + t')x + (s - t')] = 0$$

$$\therefore x = -1 \quad \text{或} \quad x = \frac{t' - s}{3s + t'} = \frac{2gh}{2v_0^2 + 2gh} = \frac{gh}{v_0^2 + gh}$$

$$\text{故 } \cos 2\theta = -1 \quad \text{或} \quad \cos 2\theta = \frac{gh}{v_0^2 + gh}$$

【評語】 031710

1. 觀察力佳，對解決問題之思考合於邏輯。
2. 對於結果之解釋能力尚不足，必須加強課外及資料之收集，及進一步解釋。
3. 無論在學術及實用性上均不足。