

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 理化科

031609

懸崖勒馬-力的探討

學校名稱：南投縣立竹山國民中學

作者： 國二 劉子源 國二 戴琦 國二 劉笛婕 國二 林霈汶	指導老師： 戴昌慶 邱平洋
--	-----------------------------

關鍵詞： 摩擦力、力矩、彈力

作品名稱:懸崖勒馬—力的探討

摘要:

「力」是生活中不可或缺的，有 摩擦力、拉力、彈力……。藉由「懸崖勒馬」這個實驗，探討這些力對我們的作用與關係。我們以改變重量、接觸面、下壓重量等因素，來探討此實驗。紙馬前進的原理是利用最大靜摩擦力，當水平施力大於最大靜摩擦力時，紙馬就會前進，但不會變成滑動，是因為馬腳受彈力位能緩衝所致。

影響紙馬步距的因素是最大靜摩擦力，最大靜摩擦力越大，則腳的彈力就越大，彈出的幅度就會加大，因此步距就會加大。

馬停止時與桌緣的距離受步距的影響，若要縮小與桌緣的距離，則拉力不能太大，必須實際實驗或利用試算表來試算，才能得到最佳值。

關鍵字：摩擦力、力矩、彈力

壹、研究動機

參加科學研習時，老師教我們利用紙盒與衣夾製作紙馬，用絲線夾上適當的重物當拉力，紙馬就會一步一步的向前走。最後讓大家比賽，看看誰的馬能在桌緣之前自動停止，當馬停下來時，馬腳距離桌子邊緣最接近者便是贏家。老師提示我們這現象與摩擦力有關。剛好，我們理化也教到“力”這個單元，於是便以此為題材，進一步探討，以了解紙馬前進與停止的原理。

貳、研究目的

- 一、 探討紙馬前進與停止的原理
- 二、 探討影響紙馬前進步距的變因
- 三、 探討影響紙馬起動的拉力因素是最大靜摩擦力或是力矩
- 四、 探討如何使紙馬停止時最接近桌緣

參、研究設備及器材

- 一、測量器材：皮尺、米尺、數位照相機、三腳架、平面鏡、大型量角器
- 二、實驗器材：滑輪、洗衣夾、墊圈、棉線、300P 西卡紙、玻璃板、上蠟木板、棉紙板、

上蠟木板

三、電腦硬體：電腦、數位相機、印表機

四、電腦軟體：PHOTOIMPACT、繪聲繪影、Excel、Word

肆、研究過程與方法

一、組裝實驗器材

(一) 製作紙馬：

我們先用厚紙板(或紙盒)作出馬的身體、腳和馬頭後，用洗衣夾夾住馬腳，使馬腳和桌面之摩擦力增加，以便在跑步時會有一步一步移動的感覺(如圖 1)。用釘書機將棉線釘在紙盒前方適當高度上，棉線懸掛適當重量時，便可一步一步的向前走，並在桌緣之前自動停止。

實驗時，我們以下列方式改變變因：

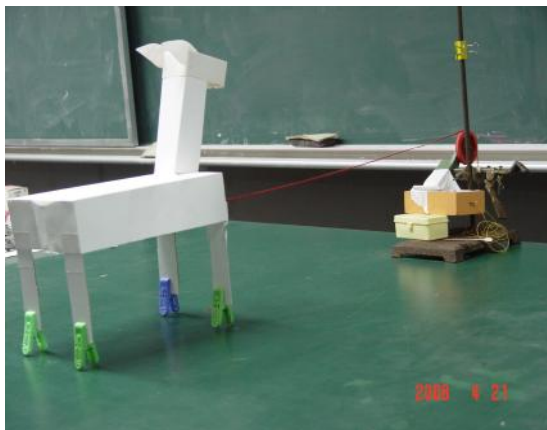
1. 馬的重量：夾不同數量的洗衣夾。
2. 馬體的重心：將洗衣夾夾在馬的前方或後方，夾在側面者則以偏向前方或偏向後方來改變。
3. 馬腳長度：直接剪掉腳長或改變洗衣夾夾口的位置，或變換不同的馬腳，用雙面膠黏上並以釘書機釘牢。
4. 改變馬腳的變因：腳的長度、寬度、厚度、材質及洗衣夾的材質與大小。



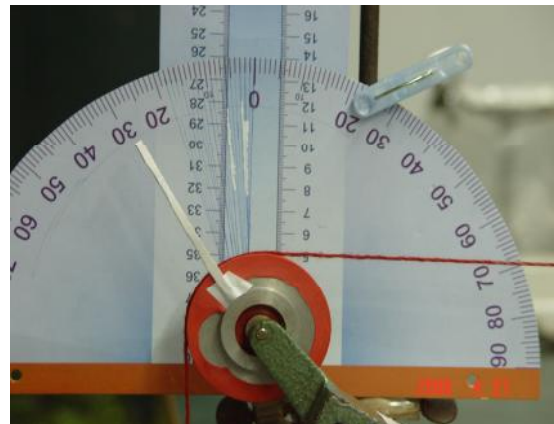
(圖 1) 紙馬外觀

(二) 測量裝置

1. 測量馬腳與桌面間的最大靜摩擦力或動摩擦力時裝置如(圖 2)
2. 測量馬的水平位移裝置時裝置如(圖 3)



(圖 2) 測量最大靜摩擦力與動摩擦力裝置



(圖 3) 測量馬的水平位移裝置

二、研究步驟

(一) 探討紙馬受力狀況與運動原理

畫出力圖並分析紙馬運動與受力之關係

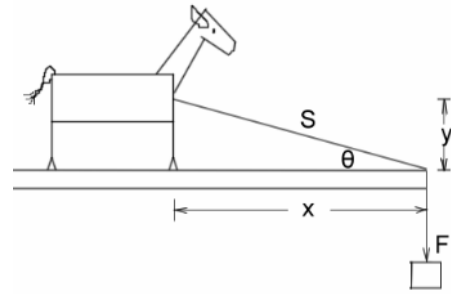
1. 圖 4 為紙馬受拉力 F 作用之示意圖，圖中

θ 為棉線與桌面之夾角

S 為施力點到桌緣的距離

x 為馬腳前端與桌緣的距離

y 為馬腳的高度，其中 $S^2 = x^2 + y^2$



(圖 4) 紙馬受拉力 F 作用示意圖

2. 圖 5 為紙馬所受力圖，圖中

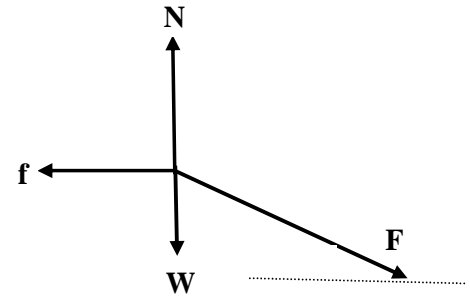
F 為紙馬所受拉力，即棉線所懸掛的重量

W 為紙馬的重量

N 為桌面將紙馬上推的力

f 為紙馬所受摩擦力

棉線與桌緣間的摩擦力忽略不計。



(圖 5) 紙馬所受力圖

3. 圖 6 為紙馬所受拉力 F 的分解圖，圖中

F_x 為拉力 F 在水平方向的分力

F_y 為拉力 F 在垂直方向的分力。

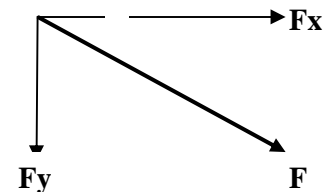
4. 圖 6 中 F 、 F_x 、 F_y 可以形成直角三角形，且與圖 4 中 S 、 x 、 y 所形成的直角三角形相似且互相對應，其大小之比相等，即：

$$F : F_x : F_y = S : x : y$$

所以可推得

$$\text{水平分力 } F_x = F \times \frac{x}{S} \quad (1)$$

$$\text{垂直分力 } F_y = F \times \frac{y}{S} \quad (2)$$



(圖 6) 拉力 F 的分解圖

5. 由圖 5 的力圖可知，若忽略棉線與桌緣間的摩擦力，

$$\text{則 } N = W + F_y, \quad W = mg \quad (3)$$

$$F_x - f = ma \quad (4)$$

$$f_{\max} = \mu N = \mu (W + F_y) = \mu \left(W + F \times \frac{y}{S} \right) \quad (5)$$

其中 m 為紙馬系統中全部的質量； f 為紙馬所受摩擦力； f_{\max} 為最大靜摩擦力； μ 為靜摩擦係數(與兩接觸面有關，後面繼續探討)； a 為加速度。

6. 紙馬的速度由靜止開始，當 $a > 0$ 時就會向前加速而變快； $a = 0$ 時就會等速前進，

$a < 0$ 時就會減速而變慢，最後回到靜止。由(1)~(5)式可以看出 a 會受拉力(F)、質量(m)、馬腳前端與桌緣的距離(x)、馬腳的高度(y)及接觸面(μ)等因素的影響。

(二) 探討影響紙馬運動的相關變因

1. 測量最大靜摩擦力與紙馬重量之關係

(1) 操縱改變的變因：紙馬的重量。

分別在馬身上夾不同數量的洗衣夾來改變馬的重量。

(2) 測量的量：最大靜摩擦力。

在棉線下方懸掛墊圈產生拉力，逐漸增加墊圈數量直到馬腳向前跨步時的重量為最大靜摩擦力。

(3) 控制的變因：馬腳的長度、寬度、厚度及材質、洗衣夾的大小與材質、馬行走的地板材質…等都保持不變。

2. 比較與接觸面的性質改變時最大靜摩擦力有何變化

(1) 與上面的步驟一樣，但將馬行走的地板材質分別用玻璃板、上蠟木板、棉紙板、膠皮桌面等分別重複上述的操作過程。

(2) 將所得資料計算出平均值後，整理到同一表格中，方便比較。

(3) 以紙馬重量為橫軸，最大靜摩擦力為縱軸，畫出各接觸面的圖形，並計算出各直線的斜率，以便比較。

(4) 斜率的計算式：斜率 = (最大靜摩擦力的差值) / (重量的差值)

3. 探討馬腿彈性的影響，測量馬身前進的距離與拉力之關係

(1) 實驗假設：

我們觀察到，紙馬受到墊圈的拉力一步一步的走，且發現在施加重量的過程中，腳會漸漸彎曲，直到一定程度便彈出，我們推測這與彈力有關。

(2) 實驗方法：

用棉線固定在馬的前面，棉線另一端懸掛墊圈，調整滑輪位置使拉力方向成水平。改變不同的拉力大小，測量馬身前進的距離。

(3) 實驗裝置：

馬前進的距離很小，為增進測量的精確度，我們設計了放大的裝置：在滑輪上接一支輕桿使半徑放大 5 倍，並用氣球套在滑輪上，增加棉線和滑輪的摩擦力。背側放置大型量角器作為測量之輔助刻度。

(4) 控制變因：腳長:11 公分 腳寬:4 公分 腳厚:0.13 公分 腳材質 洗衣夾 紙馬重量 :110.02g

(5) 名詞定義：

前進係數 = $\frac{\text{馬前進的距離}}{\text{水平拉力}}$ ，前進係數為馬腿彈力係數的倒數。

(三) 測量紙馬開始運動的拉力與馬腳高度的關係

1. 實驗目的：了解影響紙馬前進的拉力大小是力矩或是最大靜摩擦力。

2. 實驗假設：

我們知道：力矩=力臂×力。(水平拉力)×(馬腳底到施力點高度)為順時鐘的力矩；

(下壓重量)×(重心到馬前腳的水平距離)為逆時鐘的力矩。如果影響紙馬前進的因素是力矩，則改變馬腳高度時，紙馬開始運動的拉力就會改變。若紙馬開始運動的拉力與馬腳高度無關，則影響紙馬前進的拉力因素為最大靜摩擦力。

3. 實驗過程：

此過程與測量最大靜摩擦力與紙馬重量之關係相似，但我們不改變其下壓重量，而是改變其紙馬馬腳高度(16.14.11.9cm)，我們分別測量兩組下壓重量(110.02 克重、125.27 克重)

4. 控制變因：腳寬:4 公分，腳厚:0.13 公分，材質:洗衣夾，

紙馬重量:110.02 克重和 125.27 克重，接觸面:玻璃。

(四) 設計試算表試算紙馬停止及產生翻轉之位置

1. 步數：代表馬前腳跨出的步數，剛開始為 0。

2. 水平 x ：為馬前腳到桌緣的距離，每跨出一步，則扣掉一個步距(Δx)的距離。
步數為 0 時馬前腳到桌緣的距離必須自行填入，當作起始值。

3. 斜邊 S ：為棉線自施力點到桌緣的距離。

4. 水平拉力：即 F_x ，如式(1)， $F_x = F \times \frac{x}{S}$

5. 垂直分力：如式(2)， $F_y = F \times \frac{y}{S}$ ，式中 y 為馬腳高度。

6. 下壓重量：即式(3)中的 N ， $N = W + F_y$ ， W 為紙馬的重量。

7. 最大靜摩擦力：為(摩擦係數)×(下壓重量)。「摩擦係數」為表 5 所得結果。

8. 步距 Δx ：為(最大靜摩擦力)×(前進係數)。「前進係數」為探討「馬身前進的距離與拉力之關係」時所測得的結果。

9. 動或停：判斷該步馬腳是否能夠彈出，若 $F_x >$ 最大靜摩擦力則為「動」，否則「停」。

10. 重心距前腳：(紙馬重量)×(未施力時重心與前腳距離)/(紙馬重量+下壓重量)

11. 重力力矩：(紙馬重量)×[(重心距前腳)–(步距 Δx)]，即：逆時鐘方向的力矩。

12. 拉力力矩：(水平拉力)×(馬腳高度)+(垂直分力)×(步距 Δx)，即：順時鐘方向的力矩。

13. 是否向前翻轉：判斷馬是否會向前翻倒。若(拉力力矩) $>$ (重力力矩)則為「是」，否則為「否」。

伍、研究結果

一、馬前進與停止的原理

1. 馬向前跑

- (1) 當水平拉力 $F_X \leq$ 最大靜摩擦力 f_{max} 時， $f = F_X$ 由式(4)可知馬腳加速度為 0，會保持靜止。但馬身因受水平拉力而向前移動，使馬腳發生形變而具有彈力，當彈力 $= F_X$ 時整隻馬就會保持平衡而停止不動。
- (2) 當水平拉力 $F_X >$ 最大靜摩擦力 f_{max} 時，馬身先向前使馬腳發生形變而具有彈力，當彈力 $> f_{max}$ 時，馬腳就會彈出而加速向前。
- (3) 當馬腳向前運動時，受彈力作用，會先向前加速再減速停止。
- (4) 若水平拉力太大，超過馬腳的彈性限度，則摩擦力變成動摩擦力，馬會被拉力拖著向前加速移動，而非一步一步「答！答！答！」地向前走。

2. 馬的停止

- (1) 當馬越靠近桌緣時， θ 便越來越大，由式(1)及式(2)兩式可以看出：水平分力 F_X 會越來越小，但垂直分力 F_y 卻越來越大。
- (2) 由式(5)可知， F_y 越來越大會使最大靜摩擦力 f_{max} 越來越大，當 $F_X < f_{max}$ 時，紙馬就停止不動了。

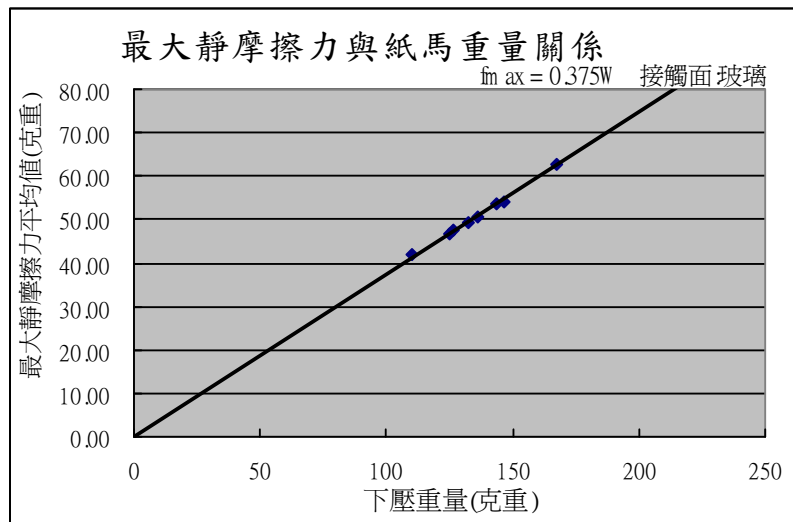
二、影響紙馬運動的變因

(一)最大靜摩擦力與紙馬的重量之關係

1. 控制的變因：表 1~表 4 之資料都是以長 11cm，寬 4cm，厚 0.13cm (300P 卡紙)製作的馬腳；馬腳的材質為洗衣夾；接觸面分別為玻璃板、木板上蠟、棉紙與實驗桌面時所得的結果。
2. 操縱的變因：紙馬的重量 W
3. 測量的量(因變量)：最大靜摩擦力 f_{max}
4. 實驗結果：
 - (1) 由(圖 7)~(圖 10)可以看出，馬腳所受最大靜摩擦力和馬的重量成正比。
 - (2) 最大靜摩擦力和馬的重量關係，可以表示為： $f_{max} = \mu W$ ，式中 μ 稱為靜摩擦係數
 - (3) 靜摩擦係數 μ 之值與接觸面之性質有關。

(表 1)接觸面為玻璃時，最大靜摩擦力與紙馬重量之關係

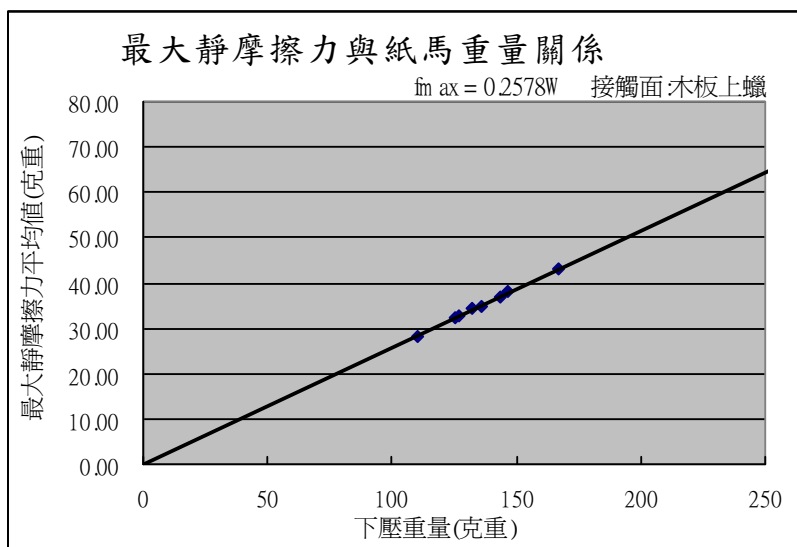
紙馬重量 (克重)	最大靜摩擦力										平均值	標準差
	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次		
110.02	40.98	40.98	43.67	39.43	39.43	42.53	43.67	42.53	42.53	42.53	41.82	1.55
125.27	45.17	46.83	47.65	46.83	48.54	46.13	47.23	46.13	46.50	46.83	46.83	0.82
126.82	46.50	47.65	47.65	48.54	48.54	47.18	47.18	46.50	48.54	47.18	47.43	1.82
132.42	47.18	47.18	51.83	50.28	48.73	48.73	50.28	50.28	50.28	48.73	49.35	1.49
135.87	51.09	51.76	51.09	49.36	49.36	53.11	52.97	50.28	48.73	49.36	50.48	1.31
143.62	53.38	52.97	54.93	53.11	53.11	52.97	53.74	54.93	52.97	54.93	53.70	0.80
146.47	54.99	52.97	52.97	54.99	53.12	55.81	54.37	53.12	53.12	54.99	54.07	1.09
167.07	62.71	61.58	62.71	63.48	62.71	64.86	62.42	62.13	61.63	62.71	62.69	0.94



(圖 7) 接觸面為玻璃時最大靜摩擦力與紙馬重量關係

(表 2)接觸面為木板上蠟時，最大靜摩擦力與紙馬重量之關係

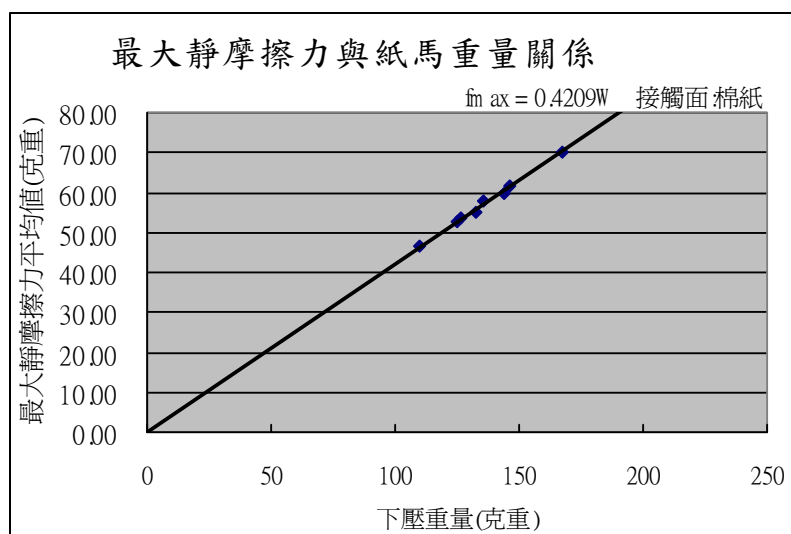
紙馬重量 (克重)	最大靜摩擦力										平均值	標準差
	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次		
110.02	27.43	28.58	29.61	28.43	27.43	28.01	28.58	28.58	29.61	27.87	28.14	0.77
125.27	31.68	33.23	32.54	31.68	31.14	31.68	33.76	31.14	33.23	32.68	32.27	0.93
126.82	33.23	31.68	31.68	34.78	31.68	33.23	33.23	31.68	33.23	32.54	32.67	1.03
132.42	33.23	34.78	34.78	35.53	33.23	34.78	33.23	34.78	35.06	33.71	34.31	0.86
135.87	35.53	34.38	35.53	33.68	35.90	33.68	34.78	35.68	34.78	35.68	34.96	0.83
143.62	37.43	35.53	38.58	36.33	37.43	36.33	35.90	37.43	36.33	37.81	36.91	0.96
146.47	39.63	38.58	39.73	37.43	37.43	36.33	38.58	36.81	38.28	39.18	37.97	1.16
167.07	43.68	42.93	42.93	40.98	42.03	42.93	43.68	44.22	43.68	42.93	42.99	0.93



(圖 8) 接觸面為木板上蠟時最大靜摩擦力與紙馬重量關係

(表 3) 接觸面為棉紙時，最大靜摩擦力與紙馬重量之關係

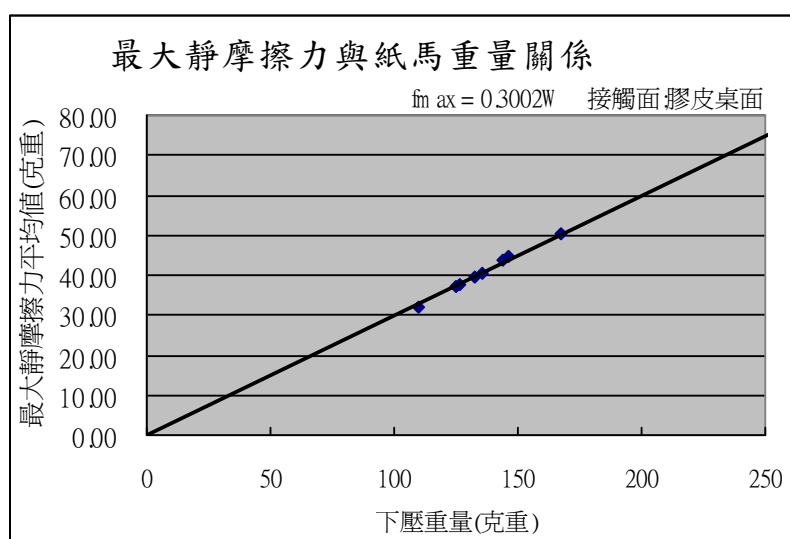
紙馬重量 (克重)	最大靜摩擦力										平均值	標準差
	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次		
110.02	47.98	48.73	45.63	45.01	45.63	48.60	46.58	47.98	46.58	44.91	46.76	1.46
125.27	51.74	52.33	52.93	53.13	52.33	52.93	53.68	51.13	53.68	52.65	52.65	0.80
126.82	52.93	53.38	52.93	53.38	54.93	52.65	54.93	53.38	55.18	54.93	53.86	1.00
132.42	56.48	54.93	54.93	54.93	55.18	56.48	54.25	54.93	55.18	55.18	55.25	0.70
135.87	57.13	57.38	56.58	56.93	58.63	57.38	58.68	58.13	58.63	58.63	57.69	0.77
143.62	59.64	58.91	60.13	59.13	61.03	60.75	59.13	59.61	59.13	59.13	59.85	0.83
146.47	61.73	61.38	61.53	60.93	62.67	62.08	61.73	61.03	61.73	61.73	61.69	0.52
167.07	70.03	70.68	69.73	72.31	69.73	70.03	69.11	70.68	69.11	69.11	70.14	0.93



(圖 9) 接觸面為棉紙時最大靜摩擦力與紙馬重量關係

(表 4)接觸面為實驗桌面時，最大靜摩擦力與紙馬重量之關係

紙馬重量 (克重)	最大靜摩擦力										平均值	標準差
	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次		
110.02	31.68	33.23	32.81	32.23	33.23	31.03	31.68	33.23	31.14	31.68	32.19	0.87
125.27	37.58	37.13	38.03	36.88	37.58	36.43	38.38	38.03	36.43	37.58	37.40	0.67
126.82	39.43	37.14	39.43	37.88	36.33	37.88	38.03	36.33	38.76	36.33	37.75	1.21
132.42	40.98	39.73	38.03	38.76	40.98	39.43	39.71	38.76	40.98	39.43	39.68	1.03
135.87	40.58	40.13	39.73	41.18	41.03	39.98	40.58	41.18	40.13	41.18	40.57	0.55
143.62	45.63	42.53	43.47	42.53	45.63	44.08	42.53	44.08	42.53	43.98	43.54	1.03
146.47	45.63	44.08	45.63	44.84	43.98	42.53	45.63	44.84	43.93	44.03	44.51	1.00
167.07	50.03	49.58	51.28	49.43	50.83	49.58	51.28	52.08	49.58	51.28	50.50	0.96



(圖 10) 接觸面為膠皮桌面摩擦力與紙馬重量關係

(二) 接觸面的性質改變時最大靜摩擦力有何變化

1. 控制的變因：馬腳長 11cm，寬 4cm，厚 0.13cm (300P 卡紙)；馬腳的材質為洗衣夾；
2. 操縱的變因：接觸面(分別為玻璃板、木板上蠟、棉紙與實驗桌面)。
3. 測量的量(因變量)：最大靜摩擦力 f_{max}

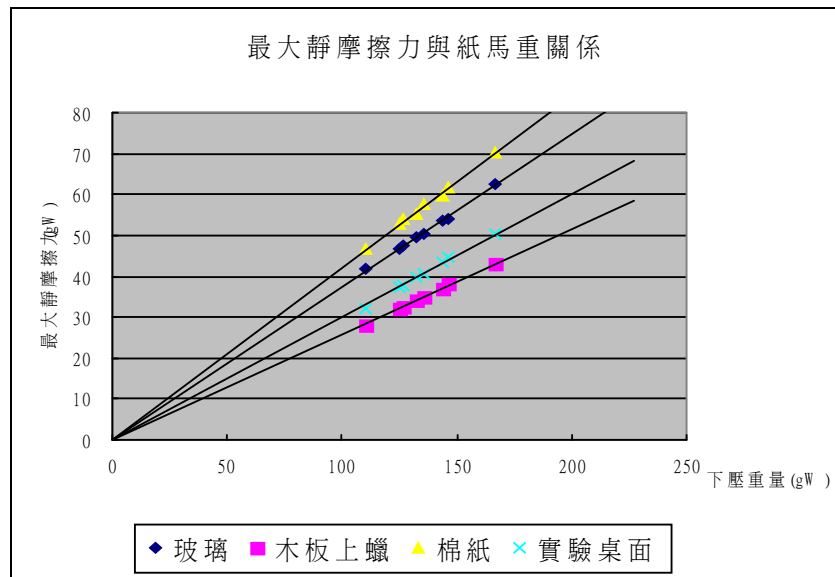
4. 實驗結果：

- (1) 不同接觸面的最大靜摩擦力也不同，由表 5 與圖 11 可知摩擦力大小順序為：棉紙>玻璃>實驗桌面>木板上蠟。
- (2) 靜摩擦係數 μ 之值為：玻璃 0.375，木板上蠟：0.258，棉紙：0.422，實驗桌面：0.301
- (3) 最大靜摩擦力與重量關係圖的斜率即為靜摩擦係數 μ ，可以代表接觸面的性質。若直

線越陡表示接觸面越粗糙。

(表 5) 不同接觸面時最大靜摩擦力與紙馬重量關係

紙馬重量 (gW)	最大靜摩擦力(gW)			
	玻璃	木板上蠟	棉紙	實驗桌面
110.02	41.82	28.14	46.76	32.19
125.27	46.83	32.27	52.65	37.40
126.82	48.54	32.67	53.86	37.75
132.42	50.28	34.31	55.25	39.68
135.87	48.73	34.96	57.69	40.57
143.62	52.97	36.61	59.85	43.54
146.47	53.12	37.97	61.69	44.51
167.07	61.63	42.99	70.14	50.50
摩擦係數	0.375	0.258	0.422	0.301



(圖 11) 不同接觸面時最大靜摩擦力與紙馬重量關係

(三) 馬身前進的距離與拉力之關係

1. 以不同之接觸面測得馬腳尚未移動時，馬身前進的距離與拉力之關係如表 6~表 10 及圖 12~圖 15 所示，前進的距離與拉力成正比。可用 $F=kx$ 或 $x=\frac{1}{k}F$ 表示，式中 k 稱

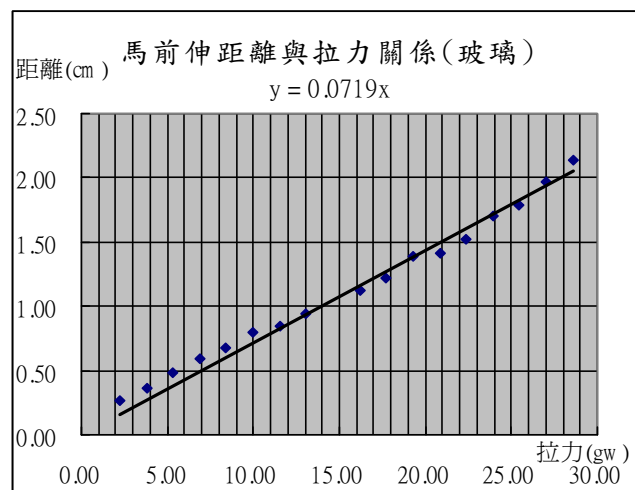
為彈力係數，我們將 $1/k$ 稱為「前進係數」。

2. 實驗數據：

- (1) 接觸面為玻璃時，馬腳的前進係數為 0.0719 cm/gW ，由(表 5)可知玻璃之靜摩擦係數為 0.375 ，當紙馬重量為 110.02 gw 時，最大靜摩擦力為 41.26 gw ，以此拉力可以推算馬身會向前 2.96 cm 。

(表 6) 接觸面為玻璃時馬向前距離與拉力之關係

拉力 (gW)	馬身前進的距離 (cm)			
	第一次	第二次	第三次	平均值
2.23	0.29	0.25	0.25	0.26
3.78	0.33	0.42	0.33	0.36
5.33	0.45	0.58	0.42	0.48
6.88	0.54	0.75	0.50	0.60
8.43	0.70	0.80	0.54	0.68
9.98	0.83	0.92	0.63	0.79
11.53	0.87	1.00	0.67	0.85
13.08	0.95	1.08	0.79	0.94
16.18	1.16	1.25	0.96	1.12
17.73	1.25	1.33	1.08	1.22
19.28	1.33	1.58	1.25	1.39
20.83	1.41	1.50	1.33	1.41
22.38	1.50	1.58	1.50	1.53
23.93	1.66	1.83	1.63	1.71
25.48	1.75	1.92	1.71	1.79
27.03	1.91	2.08	1.92	1.97
28.58	2.08	2.17	2.17	2.14

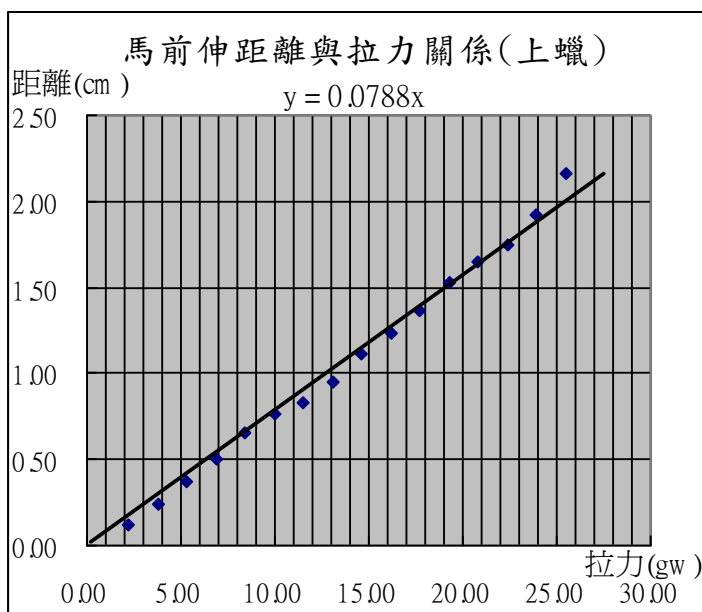


(圖 12) 接觸面為玻璃時馬向前距離與拉力之關係

(2) 接觸面為上蠟木板時，馬腳的前進係數為 0.0788cm/gW ，由(表 5)可知最大靜摩擦力為 28.14gW ，以此拉力可以推算馬身會向前 2.22cm 。

(表 7) 接觸面為上蠟木板時馬向前距離與拉力之關係

拉力 (gW)	馬身前進的距離(cm)			
	第一次	第二次	第三次	平均值
2.23	0.13	0.13	0.13	0.13
3.78	0.17	0.29	0.25	0.24
5.33	0.29	0.42	0.42	0.38
6.88	0.38	0.58	0.54	0.50
8.43	0.54	0.75	0.67	0.65
9.98	0.71	0.75	0.83	0.76
11.53	0.75	0.83	0.92	0.83
13.08	0.83	0.92	1.08	0.94
14.63	1.00	1.13	1.21	1.11
16.18	1.17	1.25	1.29	1.24
17.73	1.29	1.33	1.46	1.36
19.28	1.42	1.50	1.67	1.53
20.83	1.46	1.75	1.75	1.65
22.38	1.58	1.75	1.92	1.75
23.93	1.75	1.92	2.08	1.92
25.48	1.92	2.08	2.50	2.17

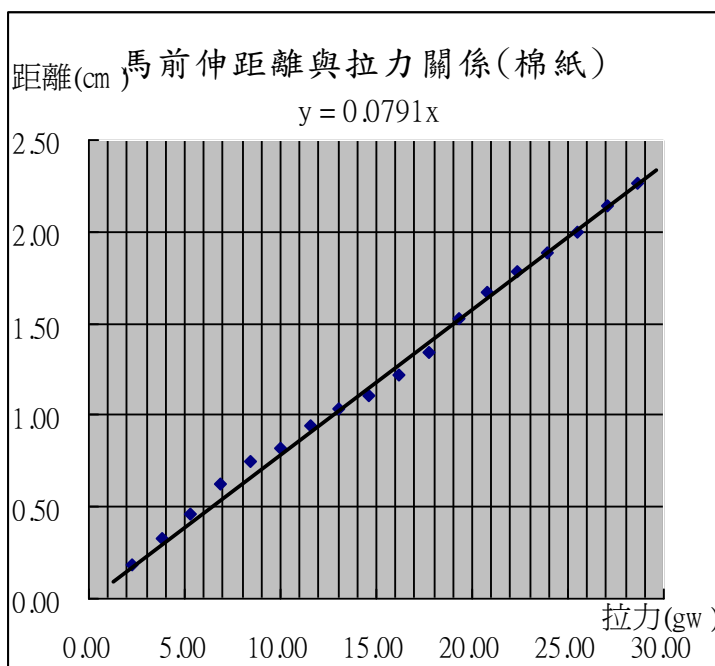


(圖 13) 接觸面為上蠟木板時馬向前距離與拉力之關係

(3) 接觸面為棉紙時，馬腳的前進係數為 0.0791cm/gW ，由(表 5)可知最大靜摩擦力為 47.45gW ，以此拉力可以推算馬身會向前 3.75cm 。

(表 8) 接觸面為棉紙時馬向前距離與拉力之關係

拉力 (gW)	馬身前進的距離(cm)			
	第一次	第二次	第三次	平均值
2.23	0.17	0.21	0.17	0.18
3.78	0.33	0.33	0.33	0.33
5.33	0.46	0.46	0.46	0.46
6.88	0.58	0.67	0.63	0.63
8.43	0.71	0.83	0.71	0.75
9.98	0.75	0.92	0.79	0.82
11.53	0.83	1.08	0.92	0.94
13.08	0.92	1.17	1.00	1.03
14.63	1.00	1.25	1.08	1.11
16.18	1.17	1.33	1.17	1.22
17.73	1.29	1.50	1.25	1.35
19.28	1.42	1.67	1.50	1.53
20.83	1.58	1.75	1.67	1.67
22.38	1.67	1.92	1.75	1.78
23.93	1.75	2.00	1.92	1.89
25.48	1.92	2.08	2.00	2.00
27.03	2.00	2.29	2.13	2.14
28.58	2.08	2.42	2.29	2.26

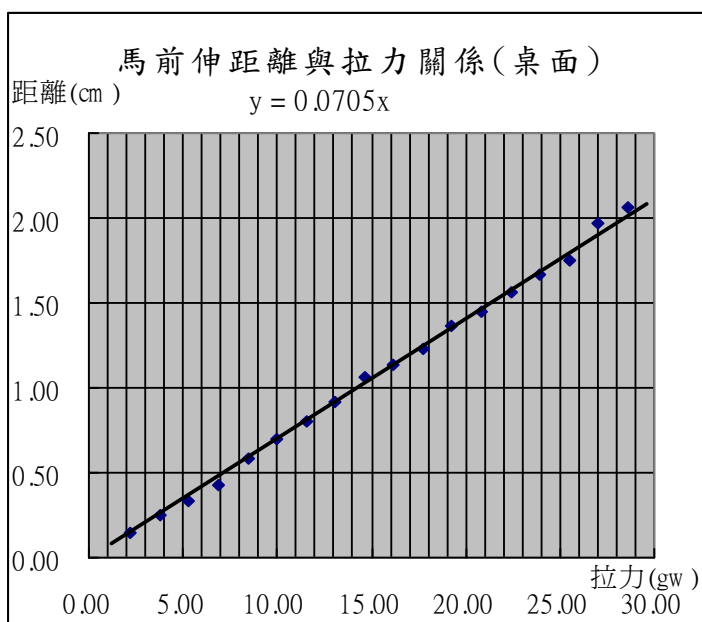


(圖 14) 接觸面為棉紙時馬向前距離與拉力之關係

(4) 接觸面為膠皮桌面時，馬腳的前進係數為 0.0705 cm/gW ，由(表 5)可知最大靜摩擦力為 32.06 gW ，以此拉力可以推算馬身會向前 2.26 cm 。

(表 9) 接觸面為膠皮桌面時馬向前距離與拉力之關係

拉力 (gW)	馬身前進的距離 (cm)			
	第一次	第二次	第三次	平均值
2.23	0.17	0.08	0.18	0.14
3.78	0.25	0.25	0.26	0.25
5.33	0.33	0.33	0.35	0.34
6.88	0.42	0.42	0.43	0.42
8.43	0.58	0.58	0.60	0.59
9.98	0.67	0.75	0.68	0.70
11.53	0.75	0.91	0.76	0.81
13.08	0.83	1.08	0.85	0.92
14.63	1.00	1.25	0.93	1.06
16.18	1.08	1.33	1.01	1.14
17.73	1.25	1.33	1.10	1.23
19.28	1.42	1.50	1.18	1.37
20.83	1.50	1.58	1.26	1.45
22.38	1.58	1.75	1.35	1.56
23.93	1.67	1.91	1.43	1.67
25.48	1.75	2.00	1.51	1.75
27.03	2.08	2.16	1.68	1.97
28.58	2.17	2.25	1.78	2.07



(圖 15) 接觸面為膠皮桌面時馬向前距離與拉力之關係

(5) 實驗數據(1)~(4)整理結果如表 10

(表 10)與與最大靜摩擦力之關係

接觸面	靜摩擦係數	最大靜摩擦力(gW)	前進係數	前進步距(cm)
玻璃	0.375	41.26	0.0719	2.96
木板上蠟	0.258	28.14	0.0788	2.22
棉紙	0.422	46.76	0.0791	3.70
實驗桌面	0.301	32.19	0.0705	2.26

3. 結果解釋：

- (1) 前進係數我們定義為彈性係數的倒數，表 10 中的結果是由相同的馬腳所得，其彈性係數應相等，前進係數也應相等。
- (2) 表中的前進係數分別為 0.0719、0.0788、0.0791、0.0705 是實驗誤差所致，其平均值 = 0.0750，標準差 = 0.0045 為平均值的 6%，表示我們的測量誤差有 69% 的機率在 6% 之內。
- (3) 改變不同的馬腿變因，得到之結果為前進係數和馬腿長度成正比，和馬腿厚度、寬度都成反比。
- (4) 前進係數在馬腿的彈性限度之內和最大靜摩擦力無關，但前進步距則和最大靜摩擦力成正比。

三、紙馬開始運動的拉力與馬腳高度的關係

(一) 實驗結果

1. 控制的變因：馬腳寬:4cm，厚:0.13cm (300P 卡紙)，與接觸面接觸物質：洗衣夾，
接觸面：玻璃板
2. 下壓重量=110.02 克重時，所得結果如表 11(a)及圖 16-(a)所示。下壓重量=125.27 克重時，所得結果如表 11(b)及圖 16-(b)所示。
3. 由表 11(a)(b)與圖 16-(a)(b)可以看出，馬起動時的水平拉力與馬腳的長度無關，和馬的重量則有關。

(二) 結果解釋：可以推論影響起動拉力的因素是最大靜摩擦力，而非力矩。

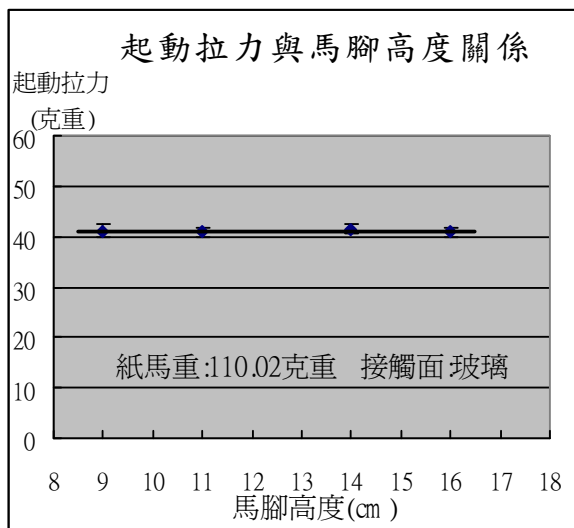
(表 11) 使紙馬起動之水平拉力與紙馬腳長之關係

(a)下壓重量=110.02 克重

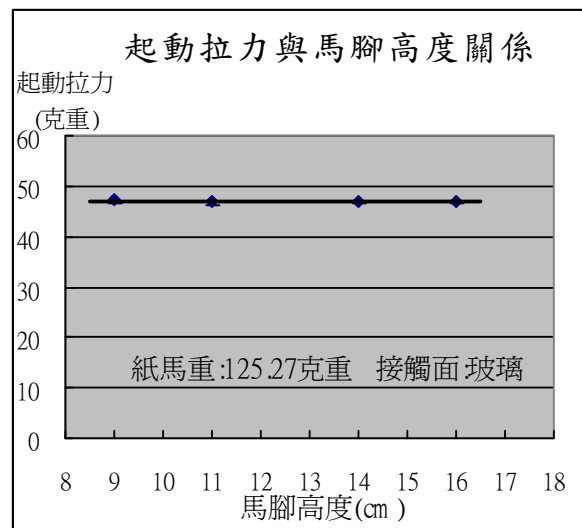
紙馬腳長 (cm)	起動水平拉力(克重)										平均值	標準差
	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次		
16.0	42.2	40.3	41.3	40.5	40.2	41.3	42.2	41.3	39.7	40.2	40.9	0.9
14.0	40.6	41.9	41.4	42.7	39.4	40.6	42.3	41.2	42.2	43.0	41.5	1.1
11.0	39.8	40.5	41.3	40.7	40.1	41.8	42.4	39.4	41.3	41.5	40.9	0.9
9.0	40.1	43.2	40.5	41.4	41.6	40.7	42.3	38.7	40.3	42.7	41.2	1.4

(b)下壓重量=125.27 克重

紙馬腳長 (cm)	起動水平拉力(克重)										平均值	標準差
	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次		
16	47.6	46.8	46.7	46.9	47.1	46.7	47.3	46.2	47.6	46.6	47	0.5
14	47.3	46.7	46.9	46.8	47.5	47.1	46.3	46.8	46.6	47.5	47	0.4
11	46.9	47.8	47.9	46.7	46.1	46.1	47.6	46.8	47.6	46.1	47	0.7
9	46.7	46.9	46.5	47.9	46.7	48.1	47.6	48.3	46.8	46.1	47.2	0.7



(a)下壓重量=110.02 克重



(b)下壓重量=125.27 克重

(圖 16)紙馬起動之水平拉力與紙馬腳長之關係

四、設計判斷紙馬前進、停止及翻轉的試算表進行模擬試算

- (一) 若以斜向拉力 80 gw 拉紙馬時，用試算表由水平距離桌緣 60 公分開始試算，由(表 12)中第 14 列可以看出，紙馬距離桌緣 8.63 公分前停止。
- (二) 若以斜向拉力 100 gw 拉紙馬時，由(表 13)中第 14 列可以看出，紙馬距離桌緣 5.57 公分前停止。
- (三) 若以斜向拉力 120 gw 拉紙馬時，由(表 14)中第 10 列可以看出，紙馬距離桌緣 26.16 公分前產生翻轉。
- (四) 由以上三點可以看出：拉力越大時，馬在桌緣前停止的距離未必越近，且可能翻轉。

(表 12) 紙馬前進或停止試算表 1

馬繩高度 $y = 11$ cm			接觸面種類：玻璃			無拉力時重心						
紙馬重量 = 110.02 gw			摩擦係數 0.375			與前腳距離：17cm						
斜向拉力 = 80 gw			前進係數 0.0719									
步數	水平 x (cm)	斜邊 S (cm)	水平拉力(gw)	垂直分力(gw)	下壓重量(gw)	最大靜摩擦力(gw)	步距 Δx (cm)	動或停	重心距前腳(cm)	重力力矩 (cm gw)	拉力力矩 (cm gw)	是否向前翻轉
0	60.00	61.00	78.69	14.43	124.45	46.67	3.36	動	15.03	1501.18	913.98	否
1	56.64	57.70	78.53	15.25	125.27	46.98	3.38	動	14.93	1498.74	915.37	否
2	53.27	54.39	78.35	16.18	126.20	47.32	3.40	動	14.82	1495.98	916.87	否
3	49.86	51.06	78.12	17.23	127.25	47.72	3.43	動	14.70	1492.85	918.47	否
4	46.43	47.72	77.85	18.44	128.46	48.17	3.46	動	14.56	1489.27	920.17	否
5	42.97	44.36	77.50	19.84	129.86	48.70	3.50	動	14.40	1485.12	921.98	否
6	39.47	40.97	77.06	21.48	131.50	49.31	3.55	動	14.22	1480.26	923.84	否
7	35.92	37.57	76.49	23.42	133.44	50.04	3.60	動	14.02	1474.49	925.71	否
8	32.32	34.15	75.73	25.77	135.79	50.92	3.66	動	13.77	1467.52	927.44	否
9	28.66	30.70	74.69	28.66	138.68	52.01	3.74	動	13.49	1458.95	928.76	否
10	24.92	27.24	73.19	32.30	142.32	53.37	3.84	動	13.14	1448.16	929.03	否
11	21.09	23.78	70.93	37.00	147.02	55.13	3.96	動	12.72	1434.22	926.89	否
12	17.12	20.35	67.31	43.24	153.26	57.47	4.13	動	12.20	1415.71	919.06	否
13	12.99	17.02	61.05	51.70	161.72	60.64	4.36	動	11.57	1390.62	896.99	否
14	8.63	13.98	49.38	62.94	172.96	64.86	4.66	停	10.81	1357.27	836.71	否
15	3.97	11.69	27.14	75.26	185.28	69.48	5.00	停	10.09	1320.74	674.48	否

(表 13) 紙馬前進或停止試算表 2

馬繩高度 $y = 11 \text{ cm}$		接觸面種類: 玻璃		無拉力時重心								
紙馬重量 = 110.02 gw		摩擦係數 0.375		與前腳距離: 17cm								
斜向拉力 = 100 gw		前進係數 0.0719										
步數	水平 $x(\text{cm})$	斜邊 $S(\text{cm})$	水平拉力(gw)	垂直分力(gw)	下壓重量(gW)	最大靜摩擦力(gW)	步距 $\Delta x(\text{cm})$	動或停	重心距前腳(cm)	重力力矩 (cm gW)	拉力力矩 (cm gW)	是否向前翻轉
0	60.00	61.00	98.36	18.03	128.05	48.02	3.45	動	14.61	1490.48	1144.23	否
1	56.55	57.61	98.16	19.09	129.11	48.42	3.48	動	14.49	1487.33	1146.23	否
2	53.07	54.19	97.92	20.30	130.32	48.87	3.51	動	14.35	1483.76	1148.42	否
3	49.55	50.76	97.62	21.67	131.69	49.38	3.55	動	14.20	1479.69	1150.81	否
4	46.00	47.30	97.26	23.26	133.28	49.98	3.59	動	14.03	1474.99	1153.41	否
5	42.41	43.81	96.80	25.11	135.13	50.67	3.64	動	13.84	1469.50	1156.24	否
6	38.76	40.30	96.20	27.30	137.32	51.49	3.70	動	13.62	1463.00	1159.29	否
7	35.06	36.75	95.41	29.93	139.95	52.48	3.77	動	13.36	1455.18	1162.52	否
8	31.29	33.17	94.34	33.17	143.19	53.69	3.86	動	13.06	1445.59	1165.78	否
9	27.43	29.55	92.81	37.22	147.24	55.22	3.97	動	12.70	1433.56	1168.73	否
10	23.46	25.91	90.54	42.46	152.48	57.18	4.11	動	12.27	1418.03	1170.48	否
11	19.35	22.26	86.93	49.43	159.45	59.79	4.30	動	11.73	1397.36	1168.73	否
12	15.05	18.64	80.73	59.01	169.03	63.39	4.56	動	11.06	1368.92	1156.99	否
13	10.49	15.20	69.01	72.37	182.39	68.40	4.92	動	10.25	1329.30	1115.03	否
14	5.57	12.33	45.19	89.21	199.23	74.71	5.37	停	9.39	1279.36	976.30	否
15	0.20	11.00	1.83	99.98	210.00	78.75	5.66	停	8.91	1247.38	586.25	否

(表 14) 紙馬前進或停止試算表 3

馬繩高度 $y = 11 \text{ cm}$			接觸面種類：玻璃					無拉力時重心				
紙馬重量 = 110.02 gw			摩擦係數 0.375					與前腳距離：17cm				
斜向拉力 = 120 gw			前進係數 0.0719									
步數	水平 x(cm)	斜邊 S(cm)	水平拉力 (gw)	垂直分 力(gw)	下壓重 量(gw)	最大靜摩擦 力(gw)	步距 Δx (cm)	動或 停	重心距前 腳(cm)	重力力矩 (cm gw)	拉力力矩 (cm gw)	是否向 前翻轉
0	6000	6100	11803	2164	13166	4937	355	動	1421	1479.78	1375.18	否
1	5645	5751	11778	2295	13297	4986	359	動	1407	1475.89	1377.92	否
2	5286	5400	11748	2445	13447	5042	363	動	1391	1471.46	1380.95	否
3	4924	5045	11711	2616	13618	5107	367	動	1373	1466.37	1384.31	否
4	4557	4688	11665	2816	13818	5182	373	動	1354	1460.44	1388.05	否
5	4184	4326	11606	3051	14053	5270	379	動	1331	1453.47	1392.23	否
6	3805	3961	11528	3332	14334	5375	386	動	1305	1445.12	1396.88	否
7	3419	3591	11423	3675	14677	5504	396	動	1274	1434.95	1402.01	否
8	3023	3217	11277	4103	15105	5664	407	動	1238	1422.26	1407.55	否
9	2616	2838	11062	4652	15654	5870	422	動	1195	1405.99	1413.12	是
10	2194	2454	10727	5379	16381	6143	442	動	1142	1384.42	1417.53	是
11	1752	2069	10163	6381	17383	6519	469	動	1076	1354.70	1416.98	是
12	1283	1690	9111	7809	18811	7054	507	動	994	1312.32	1398.32	是
13	776	1346	6918	9805	20807	7803	561	停	899	1253.12	1311.08	是
14	215	1121	2303	11777	22779	8542	614	停	821	1194.62	976.68	否
15	-399	1170	-4092	11281	22283	8356	601	停	839	1209.34	227.61	否

陸、討論

一、拉紙馬的水平拉力超過最大靜摩擦力之後，為何不會變成滑動摩擦呢？

因為紙馬的腳具有彈性，當水平拉力超過最大靜摩擦力則腳具有彈力向前彈出，彈出後會加速向前，恢復到平衡點時因速度最快而超越平衡點，之後又因反向的彈力而減速到停止。因拉力儲存的彈力位能先轉換為動能之後又回復為彈力位能，使馬腳恢復靜止，必須至下一次形變夠大才能再度彈出，因而可以一步一步「答！答！答」地前進。若水平拉力太大，超過馬腳的彈性限度，則摩擦力變成滑動摩擦力，馬會被拉力拖著向前加速移動，而非一步一步地走。

二、紙馬為何會在桌緣之前自動停止？

由(表 12)~表(14)可以看出，紙馬越接近桌緣時，水平分力越來越小，垂直分力越來越大，最大靜摩擦力也就隨之變大，當水平拉力小於最大靜摩擦力時，紙馬就停止了。

三、為何造成紙馬前進的因素是最大靜摩擦力而不是力矩？

因為力矩是影響物體轉動的物理量，向前加速的物理量則是力。馬要向前加速必須水平拉力大於馬腳與接觸面間的最大靜摩擦力，才会有向前加速的淨力。因此紙馬的前進受最大靜摩擦力影響，是否會翻轉才須考慮力矩。

四、為何斜向拉力為 100 克重時，停止的桌緣距離較拉力為 80 克重及 120 克重時的桌緣距離小？

因為馬前進時是一步一步前進，距離不是連續的。若拉力太小，很容易就會使得水平拉力小於最大靜摩擦力而停止；但拉力大時，最大靜摩擦力也因為垂直分力而加大，使前進一步的步距也加大了，有可能距桌緣較遠。當拉力太大時，馬向前移動的步距加大，造成向前轉動的力矩變大，重力產生的力矩變小，因而前傾翻倒。

柒、結論

一、紙馬前進的原理是利用最大靜摩擦力，當水平施力大於最大靜摩擦力時，紙馬就會前進，但不會變成滑動，是因為馬腳受彈力位能緩衝所致。

二、影響紙馬步距的因素是最大靜摩擦力，最大靜摩擦力越大，則腳的彈力越大時才會彈出，彈出的幅度就會加大，因此步距就會加大。

三、由討論三可知造成紙馬前進的因素是最大靜摩擦力而不是力矩。

四、馬停止時與桌緣的距離受步距的影響，若要縮小與桌緣的距離，則拉力不能太大，必須實際實驗或利用試算表來試算，才能得到最佳值。製作紙馬時，馬腳短一點、厚一點、寬一點，使馬腳的彈性係數大一點，則步距較小，停止時距桌緣會較小。

捌、參考資料

- 一、楊正傑、林宏益 (民 97)。自然與生活科技 4。台南市：南一。
- 二、林春輝(民 68)。學生科學辭典。台北市：光復。
- 三、邱鎮崑(2004)。用 Excel 精通統計學。台北市：文魁資訊。
- 四、王雅惠、林泰生(民 95)。奔騰紙馬-力學教學活動設計。逢甲大學，通識課 生活中之物理。線上檢索日期：2008 年 1 月 3 日。網址：<http://www.ppaen18.fcu.edu.tw/NO3/cs.htm>
- 五、黃福坤(2000 年 1 月 15 日)。物理與生活-摩擦力。台灣師大物理系，物理教學示範實驗教室。線上檢索日期：2008 年 2 月 27 日。網址：<http://www.phy.ntnu.edu.tw/moodle/index.php>
- 六、黃福坤(2008 年 1 月 7 日)。物理與生活-實驗數據的處理與分析。台灣師大物理系，物理教學示範實驗教室。線上檢索日期：2008 年 3 月 5 日。網址：
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/moodle/index.php>
- 七、維基百科。力矩。線上檢索日期：2008 年 3 月 5 日。網址：
<http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%8A%9B%E7%9F%A9&variant=zh-tw>

【評語】 031609

優點：有效分辨靜摩擦力及力矩之貢獻。

缺點：數據不夠精確。

未能完全重覆同一條件下之前進現象，代表變因控制上有所不足。