

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 生活與應用科學科

030817

墾丁風鈴季的狂想曲--調音風鈴的製作與研究

學校名稱：屏東縣立明正國民中學

<p>作者：</p> <p>國一 陳恒諺</p> <p>國一 龔怡禎</p> <p>國一 楊清禾</p> <p>國一 洪一汝</p>	<p>指導老師：</p> <p>陳榮盛</p>
--	-------------------------

關鍵詞： 十二平均率、頻譜分析、調音風鈴

墾丁風鈴季的狂想曲—調音風鈴的製作與研究

摘要

藉由樂器發音原理的探究，了解頻率與發音體形狀的關係。我們發現鋼琴基頻和泛音整數倍頻關係的特性並不適用於鐵琴與圓形鋁棒上。敲擊鐵琴所產生的頻譜會有三~五個鋒值，即共三~五個不成整數倍的頻率所組成。而對圓形鋁棒而言，越細越長的鋁棒敲擊所產生的頻譜會越複雜。而我們利用 Excel 分析鐵琴頻率與長度關係為乘冪關係，並使用同樣方法求出 15mm 圓型鋁棒長度與發音頻率的乘冪關係為 $y=867x^{-0.5109}$ ，而 15mm 不鏽鋼管的乘冪關係式為 $y=1113.3x^{-0.5202}$ ，其中 y 為長度、 x 為頻率。利用這兩個關係是我們順利製造出第六個八度音階的鋁材質調音風鈴，與具有 C5 到 C7 兩個八度音的不鏽鋼材質風鈴，可懸掛於門後做為迎賓風鈴也可彈奏簡單的樂曲。

壹、研究動機

每到東北季風盛行的冬季，恆春地區便吹起落山風，在強勁落山風的吹襲下，對居民產生許多生活上的不便，面對如此惡劣的環境，只能苦中作樂，掛起風鈴，期待福鈴、福臨！

自 2002 年起，恆春鎮舉辦了好幾年的墾丁風鈴季特展。有來自世界各國，各式各樣、不同材質的風鈴，其中最吸引眾人目光的，便是有調音師簽名的調音風鈴。當落山風吹拂時，隨著風向強弱而傳出一陣一陣的樂音。當強風襲來時，鏗鏘有力的鈴聲彷彿是悲愴的生命樂章，歌頌著落山風下充滿堅韌生命力的恆春居民，而微風徐徐時，輕盈柔和的樂音又宛如在撫慰居民，惡劣天候過去後，隨之而來的是風和日麗，四季如春的天氣即將來臨。

當上學期準備報名學校科展時，想到即將來臨的墾丁風鈴季，我們經由討論決定研究發音體形狀和頻率的關係，並嘗試自製調音風鈴，享受這一季東北季風所演奏的自然之音。

貳、研究目的

- 一、比較鋼琴（擊絃樂器）、鐵琴（打擊樂），發音特性與影響音階高低的因素。
- 二、研究鋼琴發音頻率、琴鍵配置並驗證十二平均率的音階特性。
- 三、研究鐵琴材質和幾何形狀、質與量和頻率的關係，並找出控制鐵琴音調的關鍵因素。

四、研究圓型實心鉛棒與不鏽鋼管兩種材質，測量直徑與長度和發音頻率的關係，分析並嘗試找出長度與頻率的數學關係式，用以製作調音風鈴。

參、實驗器材

一、器材：

(1) 鋼鋸一支 (2) 小形砂輪機一台 (3) 鐵工銼刀一個 (4) 鋼琴一架 (5) 鐵琴一座 (6) 鐵琴擊槌一支 (7) 直徑 6mm、8mm、10mm、12mm 的 130 公分鉛條各一條 (8) 直徑 15mm 的 120 公分圓形銅條一條 (9) 直徑 15mm 的 250 公分圓形鉛條一條 (10) 外徑 15mm 的不鏽鋼管 (11) 三號釣魚線一捲 (12) 筆記型電腦一台 (13) 領夾式麥克風一支 (14) Cool Edit Pro 2.0 試用版軟體一套 (15) 電子秤一座 (16) 鑽檯一座 部份器材如圖一與圖二所示。



圖一 本實驗所使用的材料與工具

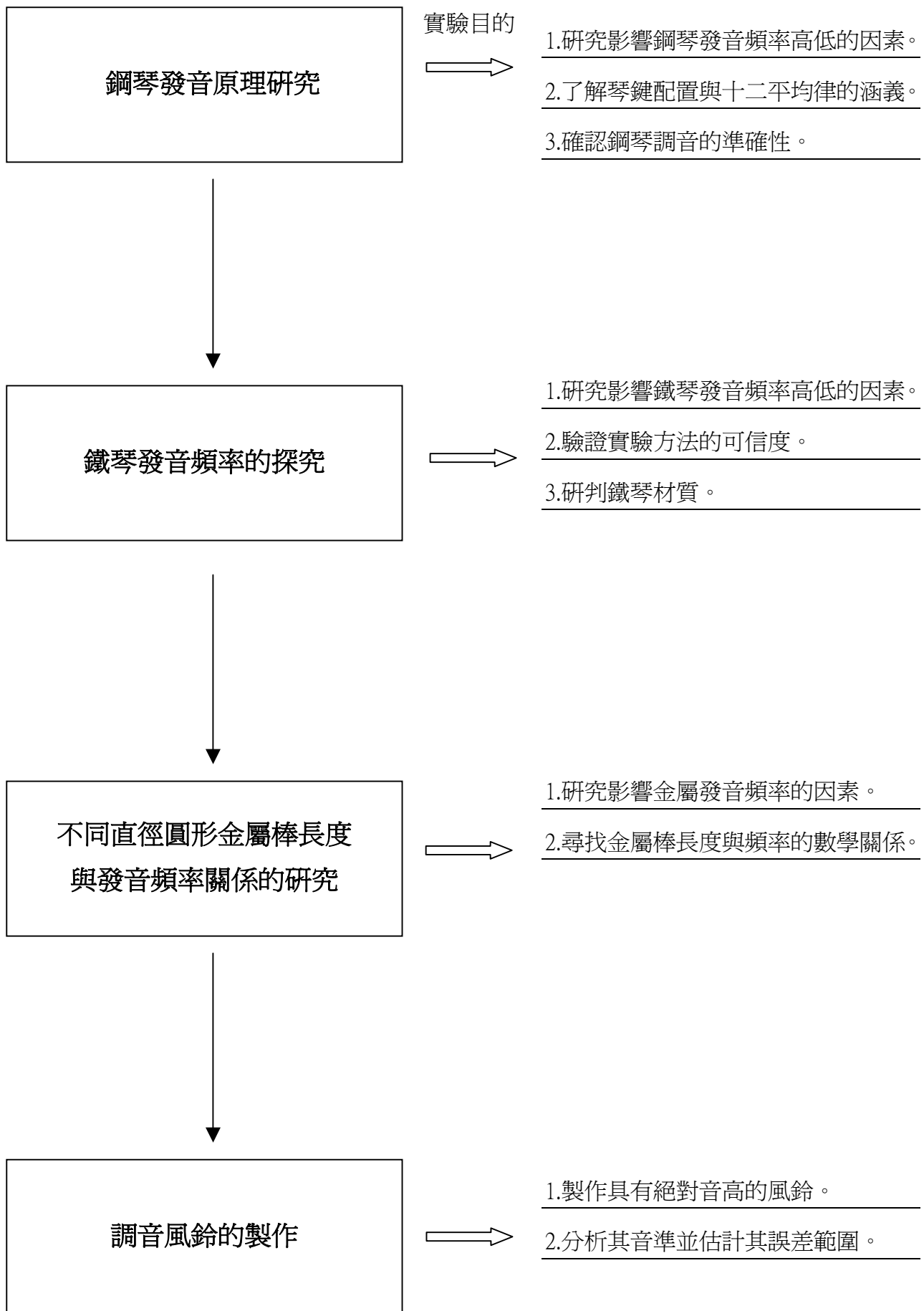


圖二 測量頻率所使用的電腦與軟體

肆、研究過程與方法

在我們確認研究目標後，我們研究團隊中對樂理並不那麼清楚。於是我們於網路上搜尋相關資料，發現介紹調音風鈴的網頁很多，但卻沒有製作程序。然而我們也從以往科展的作品中找到有用的資訊，很多研究各式樂器的作品，包括陶笛、風笛等等而對風鈴並未有相關作品。所以我們決定從手邊最易見到鋼琴下手，研究發音頻率與弦長粗細的關係。接著研究鐵琴長度與發音頻率的關係後，研究鉛棒長度與頻率關係，並藉以製作調音風鈴。

我們把研究過程與對應的實驗的目的，表列於如下的流程圖:



一、 鋼琴發音原理研究

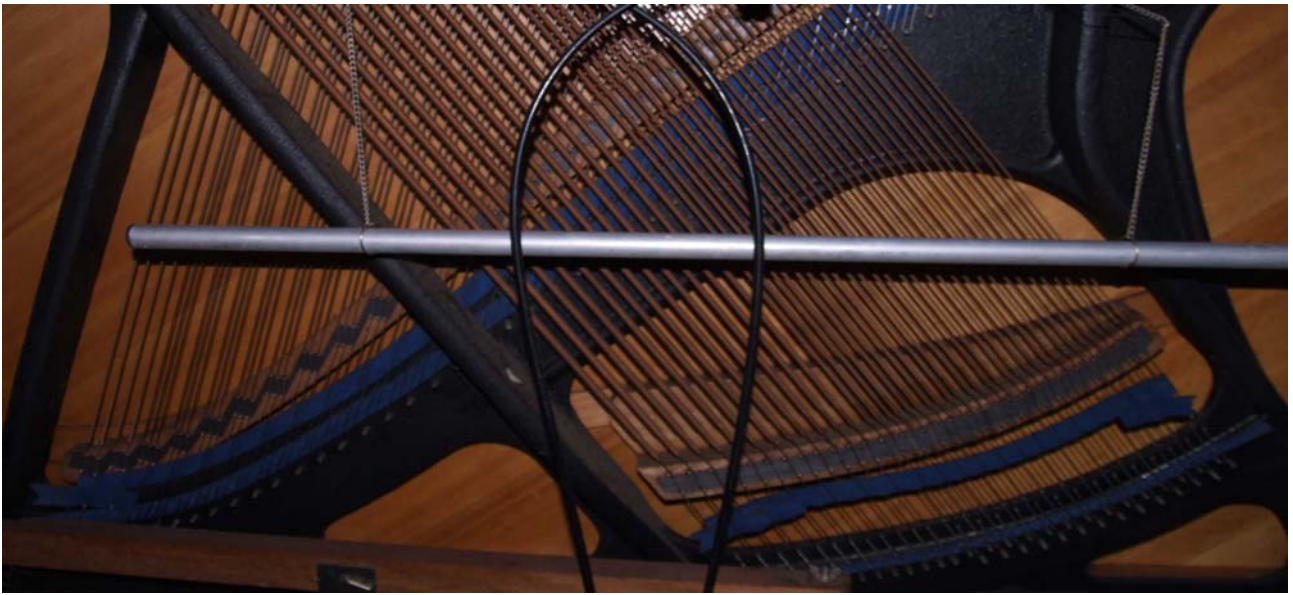
打開鋼琴可以發現共有 88 組擊鎚，連結 88 個白鍵與黑鍵，如圖三。相鄰的黑白鍵音階相差半音。內部排列著密密麻麻粗細不一的弦，由左而右逐漸變細，如圖四。而鋼琴的底部的弦排列，如圖五，可以發現音階越高弦越短。而記得每年調音師調整音高的時候，會使用特製的扳手旋轉調整螺絲。單一根弦的音階由弦的鬆緊來決定，所以調音師會根據該根弦所發出音調的高低來調整鬆緊。由此可知鋼琴的音階由弦的粗細、長短與鬆緊來控制，越粗、越短與越緊則音調越高。



圖三 鋼琴黑白鍵配置，十二個黑白鍵涵蓋一個八度。每差一個八度頻率增加一倍。



圖四 鋼琴內部擊槌與弦分布情形



圖五 鋼琴底部蓋子掀開，可見弦長短與粗細的配置。

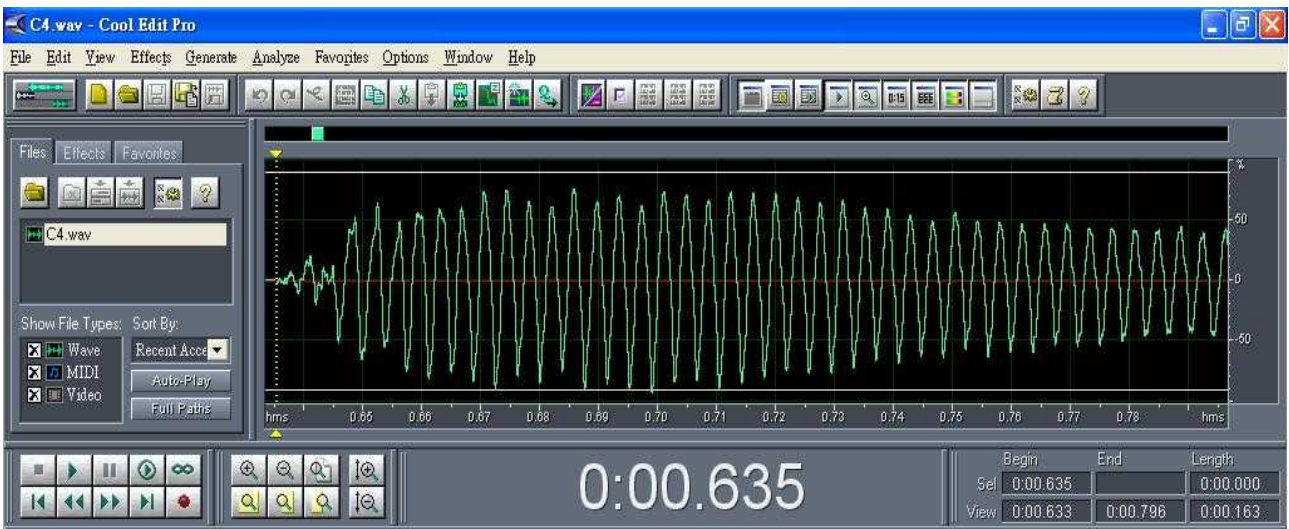
在音樂的發展史上，18 世紀進入 12 平均律的年代，所謂 12 平均律即每一組八度音由七個(音名：C、D、E、F、G、A、B)和五個半音(音名:C#、D#、E#、F#、G#、A#)組成。每一個 8 度音之間頻率相差 2 倍，而每一半音相差 $^{12}\sqrt{2} \doteq 1.059463$ 倍(謝佳叡，民 89)。而鋼琴鍵盤由左而右相對音名依序為 A0、A#0、B0、C1、C#1、D1、D#1、E1、E#1、F1、G1、G#1、A、A#1、B1.....其中 C1~B1 為第一個八度音。接下來 C2~B2、C3~B3、C4~B4、C5~B5、C6~B6、C7~B7 共 7 個八度再加 B7 右邊尚有一最高音 C8 共 88 個音。

仔細觀察擊鏈下的弦有三區最左邊低音，由單一粗弦振動發音，第二區由較細的兩弦振動發音，第三區由三條最細的弦振動發音。了解了鋼琴結構後，我們著手進行測量。測量步驟敘述如下：

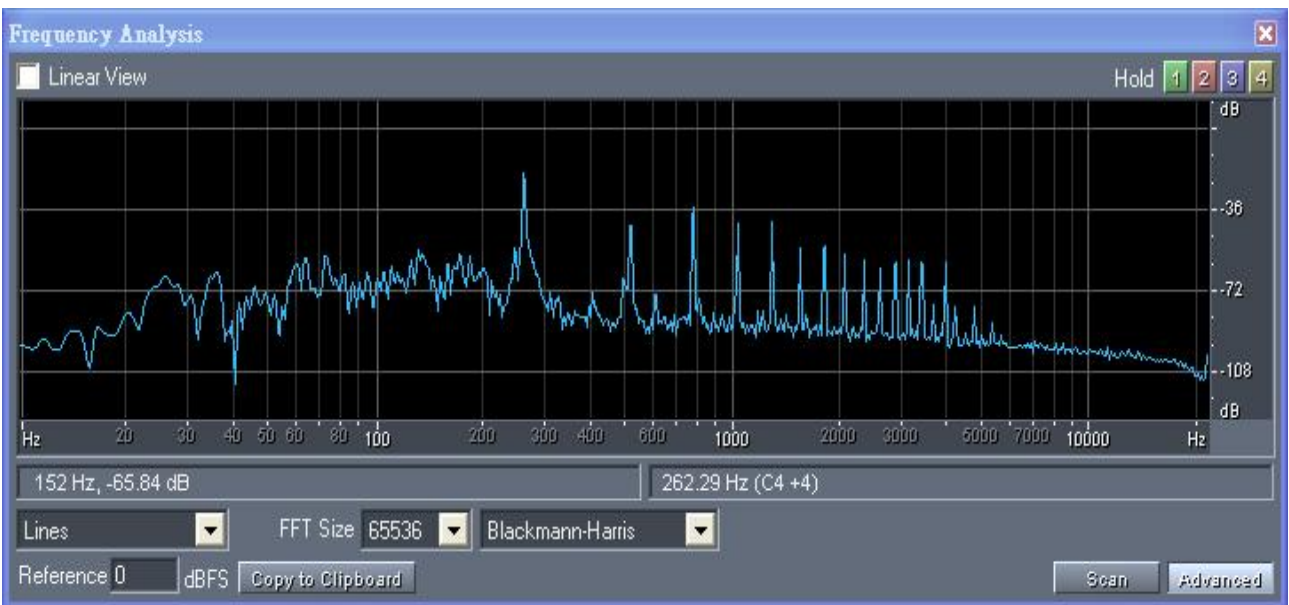
- (一) 將領夾式麥克風放入鋼琴內收音，如圖六，而訊號線連接到筆電 Mic 接孔。
- (二) 由低而高依序彈奏並錄音後以音名存檔如圖七。波形經放大顯示如圖八
- (三) 將各音名基頻由 Cool Edit pro 2.0 的頻譜分析功能測定出來並求平均如圖九，列於表一。



圖六 測量時安裝在鋼琴內部的領夾式麥克風。圖七 鋼琴發音頻率的測量情形。



圖八 彈奏鋼琴中央 C 所錄得的波形放大圖形。

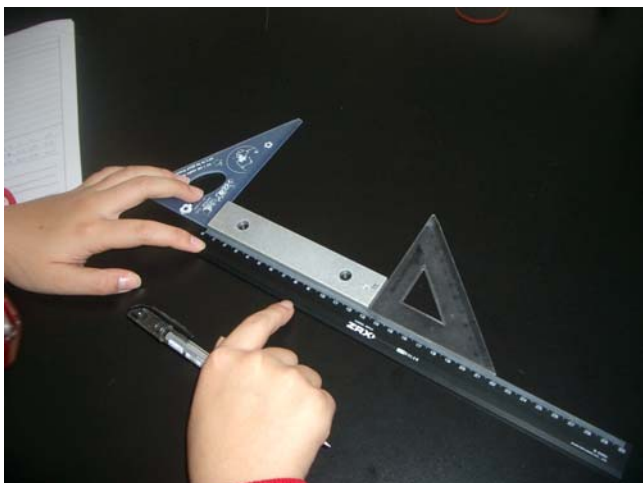


圖九 鋼琴中央 C 的頻譜分析，基頻約 262Hz，可見到其他整數倍頻的泛音。

二、 鐵琴發音頻率的探究

有了鋼琴的研究使我們對樂理與發音原理有更深入的認識。但鋼琴屬於擊弦樂器，跟我們終極目標調音風鈴好像有一點距離。於是我們著手研究鐵琴。步驟如下

- (一) 拆解鐵琴，將標有音名的金屬片拆下。
- (二) 測量每片鐵琴長度與質量如圖十與圖十一。
- (三) 以排水法測量編號 F5、F#5、G5 與 G#5 的體積，計算密度列於表二。
- (四) 以鐵琴上音名對照表一中由 12 平均律所得標準音，並同樣列入表二。
- (五) 以釣魚線懸吊用鐵琴的擊鎚敲擊(和風鈴發音時條件較接近)，以相同的領夾麥克風及筆記型電腦錄音，如圖十二。

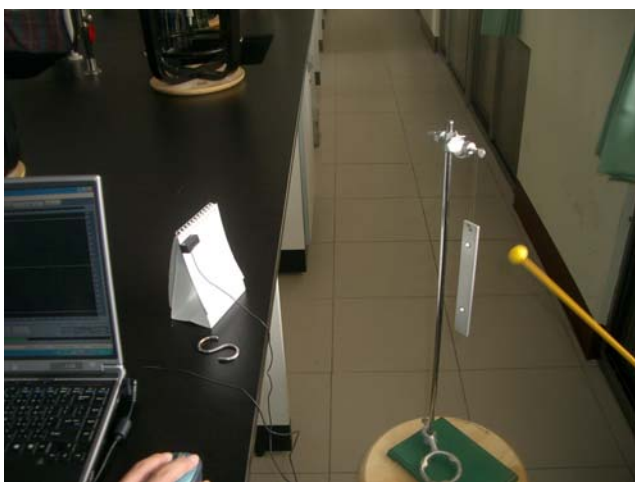


圖十 鐵琴長度的測量情形。



圖十一 鐵琴質量測量情形。

- (六) 以 Cool Edit pro 2.0 軟體中，頻譜分析功能量測頻率，其中波形與頻譜例子，如圖十四與圖十五。



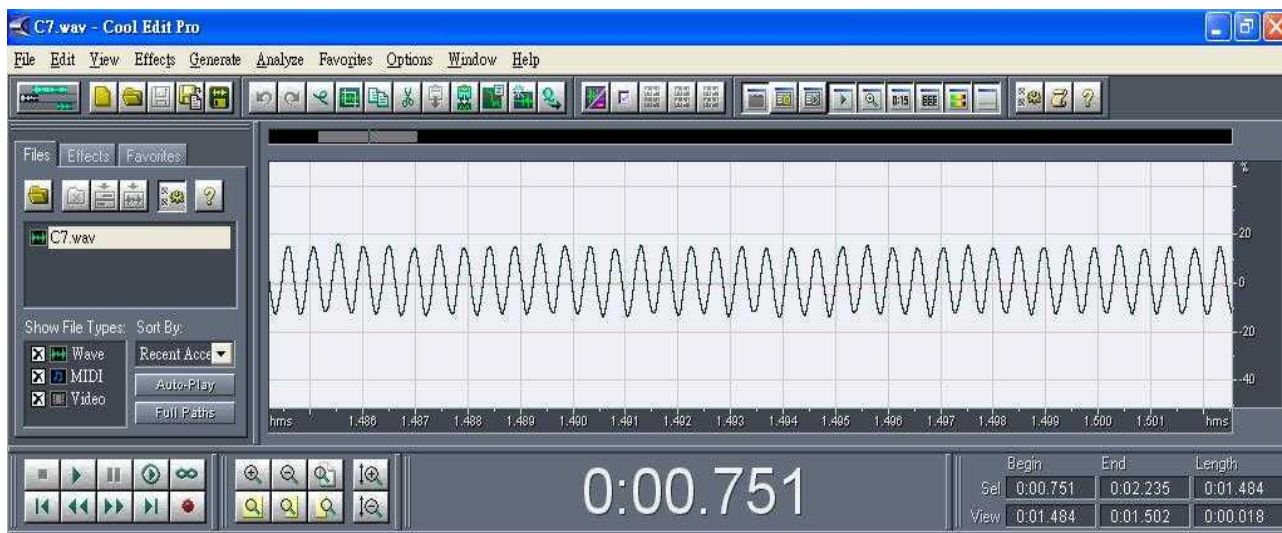
圖十二 敲擊鐵琴測量發音頻率。



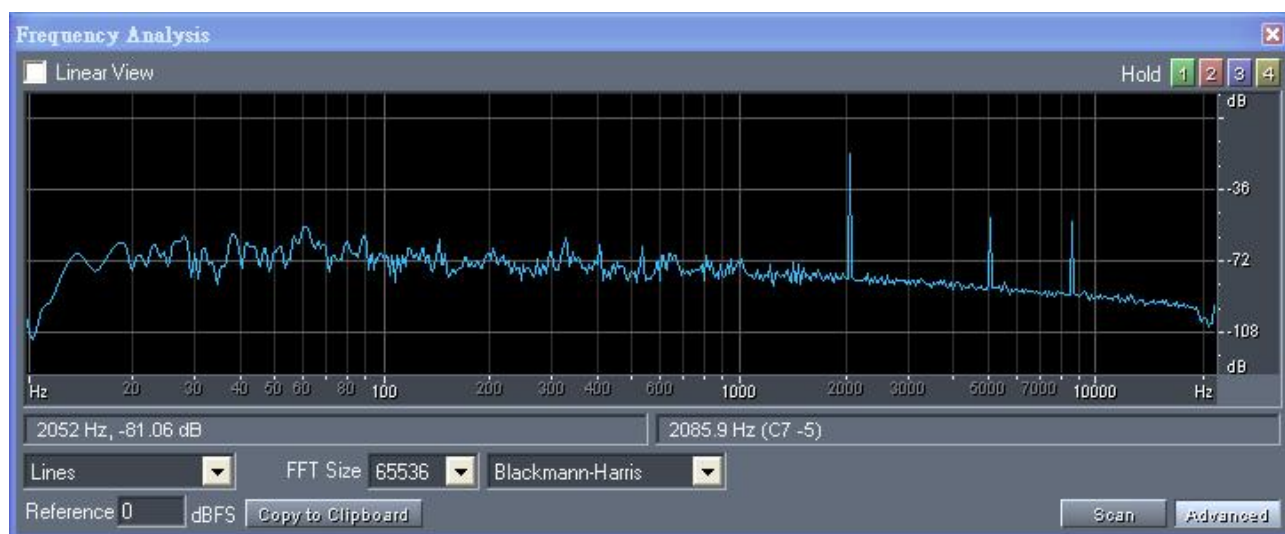
圖十三 用來確認測量準確性的 A4 標準音叉。

(七) 另外爲了確認測量數據的準確性，比較樂器調音用 A4 標準音(440Hz) 如圖十三，所測量的結果，列入表二。並計算測量誤差。

由鐵琴所得的波形單純一致，幾乎和音叉一樣，而由底下頻譜分析結果，可發現數個互不相關的頻率所組成，不像鋼琴有明確的基頻與泛音關係。



圖十四 鐵琴音名 C7 的波形單純規律的波形



圖十五 鐵琴音名 C7 波形的頻譜分析，可見三個峰值，但非基頻與泛音關係。

三、 不同直徑圓形金屬棒長度與發音頻率關係的研究

依據我們分析鋼琴與鐵琴與參考自然與生活科技課本內容所得結果，原先的認爲只要將所購買的鉛棒依序裁切成小段，每裁切一段測量所剩與裁切的部分，可以測得更多的數據，而得到更精確的分析數據。而我們的想法再第一次測量時便產生嚴重的考驗！未裁切的原長測得的波形與頻譜如圖十七與圖十八。由頻譜可知其複雜程度。完全不同於鋼琴基頻與泛音的關係。測量時長鉛棒嚴重搖晃與抖動可能是造成產生不同頻率的主要因素。回過頭檢測鐵

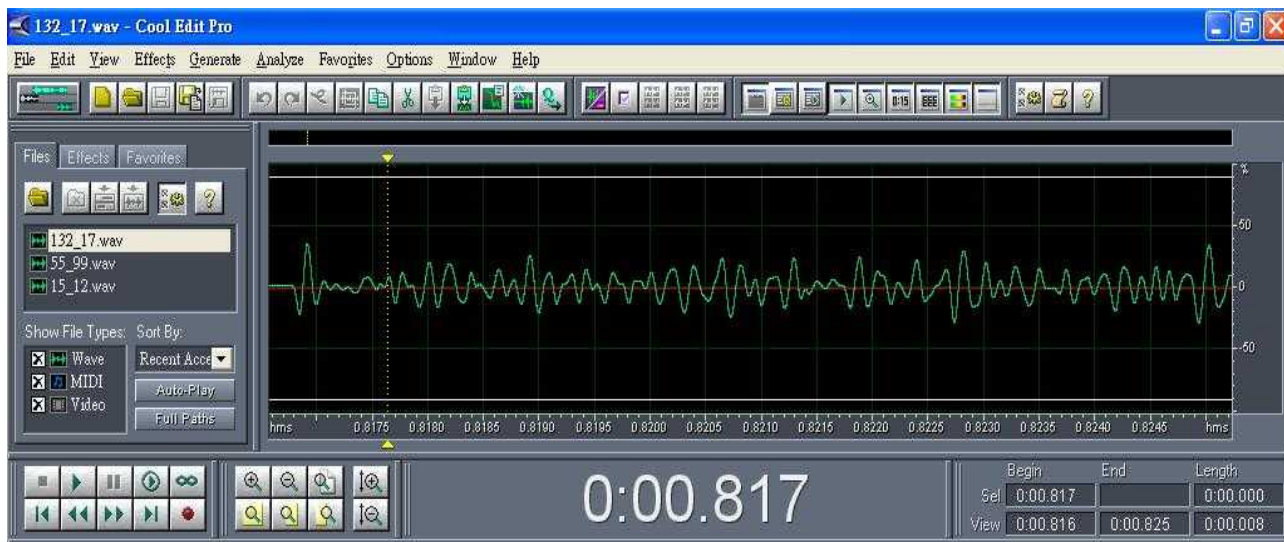
琴，發現其長短並不會差異太大，所以我們把研究方法改成一次裁切、鑽孔與測量。詳細步驟依序如下：

- (一) 取各直徑實心圓形鋁棒，並將其鋸成 5、10、25、20、25、30 公分，測量實際長度，鑽孔如圖十六，以釣魚線懸吊。
- (二) 與鐵琴測量方式相同，並用鐵琴擊鎚敲擊。
- (三) 錄音並將錄音檔依長度命名存檔，待日後頻譜分析。
- (四) 得有波形、頻譜如圖十九～圖二十。

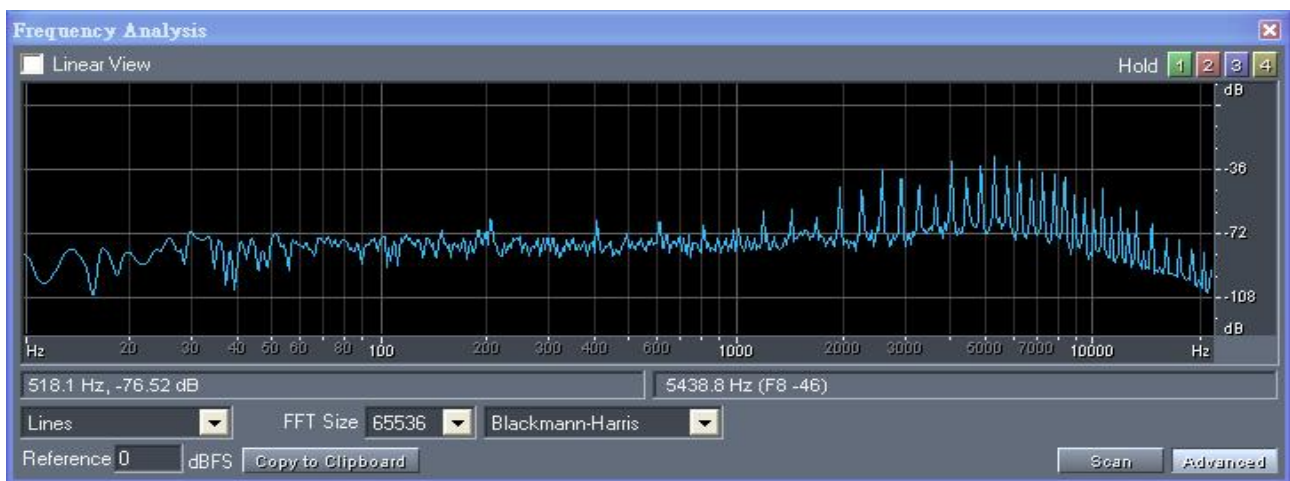
由波形可知當同一粗細的鋁棒時長度愈長波形愈複雜，其頻譜可見有多種不同頻率所組成。而例圖中 15cm 的波形和頻譜相對單純許多。



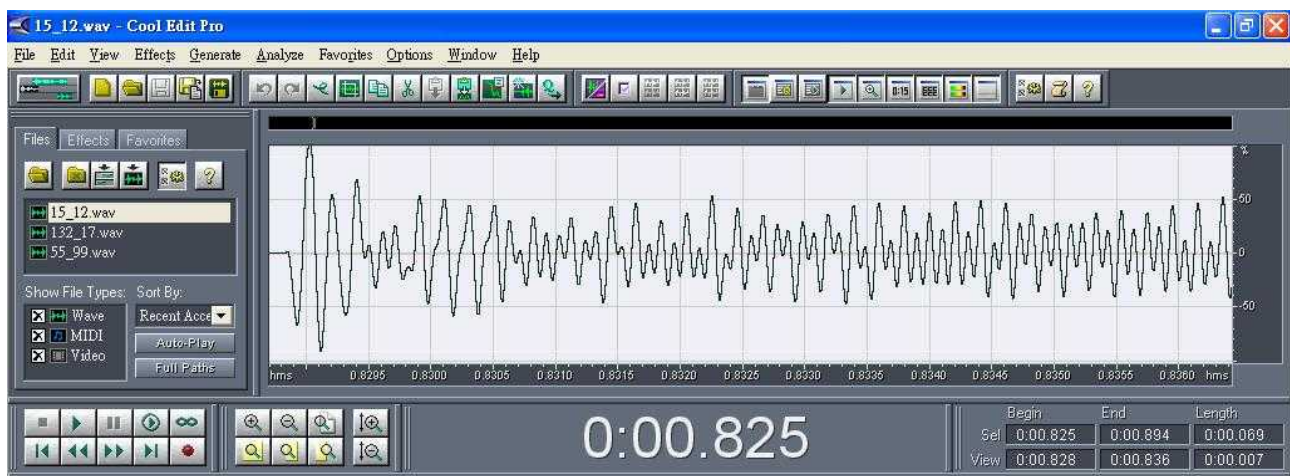
圖十六 圓形鋁棒鑽孔情形。



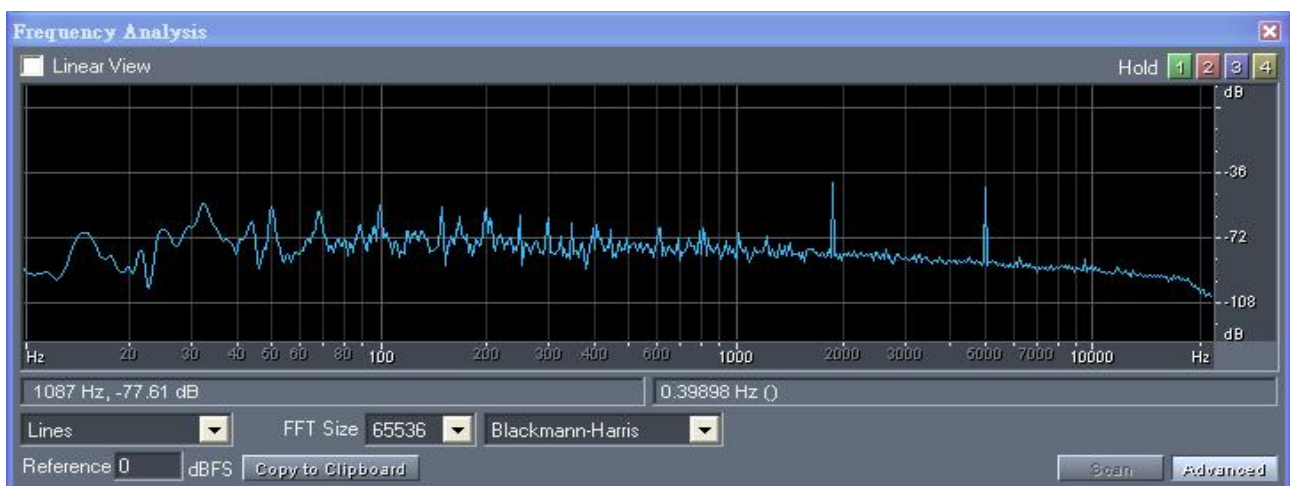
圖十七 10mm 直徑 132.17cm 圓形鋁棒敲擊後所形成的複雜波形。



圖十八 10mm 直徑 132.17cm 圓形鋁棒波形的頻譜分析，組成頻率的複雜程度由此可見。



圖十九 10mm 直徑 15.12cm 圓形鋁棒敲擊後所形成的波形，明顯單純許多。



圖二十 10mm 直徑 15.12cm 圓形鋁棒波形的頻譜分析，只有兩個峰值且不相關的頻率，和鐵琴相似。

四、調音風鈴的製作

我們選定 15mm 圓型鋁棒與 15mm 不鏽鋼管來製作調音風鈴，主要基於兩個理由（一）頻率不會太高。（二）分析結果頻率隨長度變化最規律。首先用現有資料用 Excel 作資料分析，利用趨勢線推估。詳細步驟如下：

（一）圓形鋁棒調音風鈴

1. 由 15mm 鋁棒分析所得趨勢線公式 $y=881.55x^{-0.5133}$ 估算 C6~C7 所需長度分別為 24.8~17.40 公分。

2. 由上一實驗 15mm 鋁棒選擇合適長度，並使用手動砂輪機邊磨邊測量，以增加數據並提升趨勢線準確性，過程拍攝如圖二十一。

3. 如無合適長度鋁棒由新材料中鋸下，鑽孔後同步驟 2. 邊磨邊測量，直到接近各音名標準音。

4. 最後將風鈴組裝起來，懸吊風鈴的頂部圓盤使用回收布丁桶底座，擊鎚底部則懸吊掛報廢光碟片，順便廢物利用一番。成品如圖二十七。



圖二十一 調整鋁棒長度以調整其發音頻率。

（二）不鏽鋼管迎賓調音風鈴

1. 由 15mm 不鏽鋼管分析所得趨勢線公式 $y=1079.6x^{-0.5158}$ 估算 C5~C7 所需長度分別為 42.60~21.04 公分。

2. 裁切適當長度不鏽鋼管，鑽孔後一邊用砂輪機修正長度一邊測量，直到接近各音名標準音。

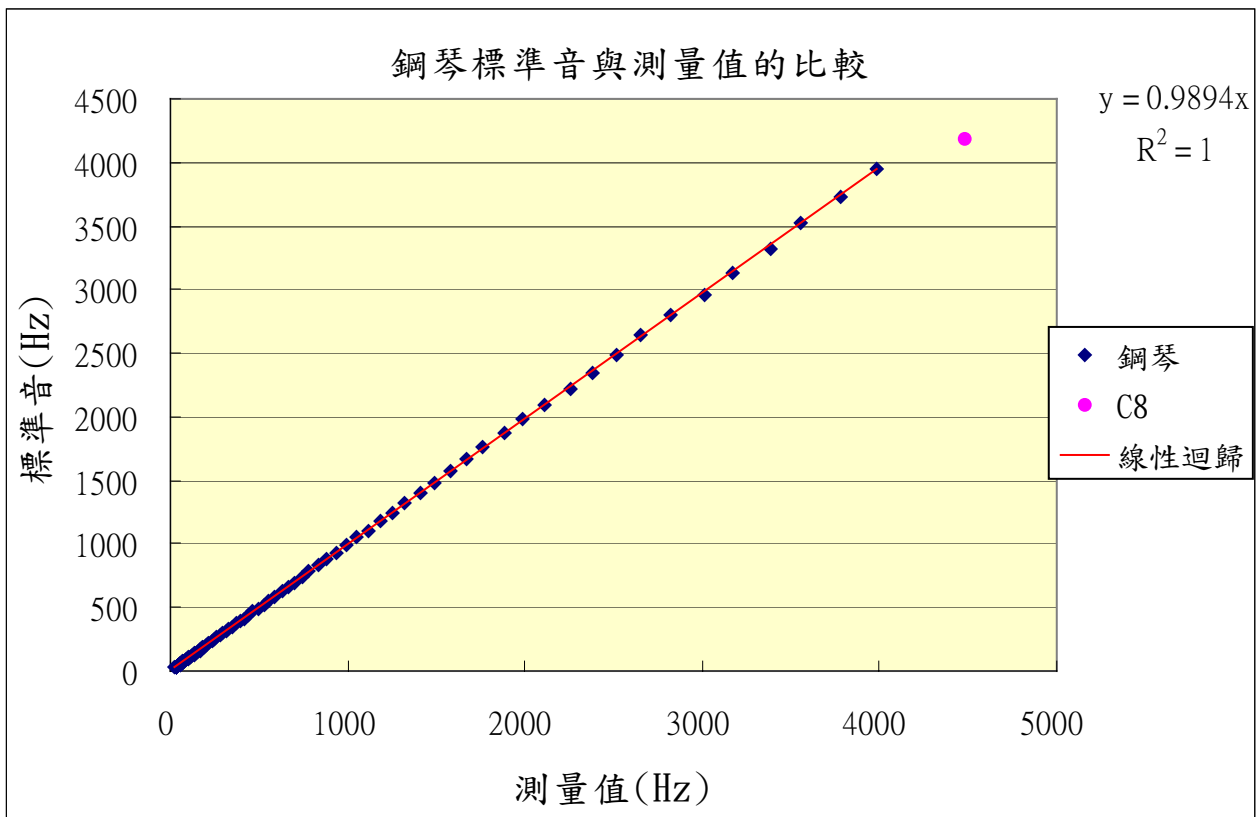
3. 將調好音的各不鏽鋼管，懸吊在木板下，成為可敲出簡單樂曲的調音風鈴，也可以懸掛在自動門後做迎賓風鈴。如圖二十八。

伍、研究結果與討論

一、鋼琴剖析

鋼琴所測得 A0~C8 共 88 個音階列在表一，每一個音連續彈奏 4 次並測量頻率，求平均值。以標準音 F4(440Hz)為準，依十二平均率計算各音各標準頻率也列在表一，理論上測量結果和標準值應該相同，但實際上鋼琴因彈奏、溫度、溫度變化每年要調音一次，所以我們把標準音和測量平均作圖並作線性迴歸（使用 Excel 線性趨勢迴歸）如果線性關係良好表示音準很高。所得圖形如圖二十二，扣除誤差達 7.023%的 C8 這個極端值，其他數據相關係數平方達到 1 ($R^2=1$)，表示線性關係良好，讓我們不得不對鋼琴調音師的專業能力感到佩服，靠著耳朵人工辨識調音竟能調得如此精準。

而從鋼琴的內部結構，我們可知弦發音頻率的高低是由弦的粗細、長短與鬆緊來控制，越左邊的鍵連接擊槌會敲擊越粗越長的線。而經由調音師的描述，越緊的弦音調越高。所以越輕、越薄、越短、越小、越緊的發音體音調越高，我們從鋼琴的研究可以得到驗證。



圖二十二 鋼琴標準音和測量平均值分布圖，由線性迴歸分析可知鋼琴調音是否準確。

依 12 平均律中每一個半音相差 $^{12}\sqrt{2} \approx 1.059463$ 。所以十二個黑白鍵，組成一個八度音，

每差一個八度音，弦的振動頻率剛好相差一倍。例如 A4=440Hz，而高一個八度的 A5 就等於 880Hz，這種特性也可在我們的測量實驗結果得到驗證。

表一 鋼琴各鍵音名、標準音與實際測量結果

音名	標準音 (Hz)	測量一 (Hz)	測量二 (Hz)	測量三 (Hz)	測量四 (Hz)	平均值 (Hz)	誤差 (%)
A0	27.50	27.58	27.58	27.58	27.58	27.58	0.291%
A#0	29.14	28.93	28.93	28.93	28.93	28.93	-0.704%
B0	30.87	30.95	30.95	30.95	30.95	30.95	0.267%
C1	32.70	32.29	32.29	32.29	32.29	32.29	-1.263%
C#1	34.65	34.31	34.31	34.31	34.31	34.31	-0.975%
D1	36.71	36.33	36.33	36.33	36.33	36.33	-1.030%
D#1	38.89	38.35	38.35	38.35	38.35	38.35	-1.391%
E1	41.20	41.04	41.04	41.04	41.04	41.04	-0.397%
F1	43.65	43.73	43.73	43.73	43.73	43.73	0.175%
F#1	46.25	45.75	45.75	45.75	45.75	45.75	-1.080%
G1	49.00	48.44	48.44	48.44	48.44	48.44	-1.142%
G#1	51.91	51.81	51.81	51.81	51.81	51.81	-0.199%
A1	55.00	54.5	54.5	54.5	54.5	54.50	-0.909%
A#1	58.27	58.54	58.54	58.54	58.54	58.54	0.463%
B1	61.74	61.23	61.23	61.23	61.23	61.23	-0.819%
C2	65.41	65.27	65.27	65.27	65.27	65.27	-0.209%
C#2	69.30	69.3	69.3	69.3	69.3	69.30	0.006%
D2	73.42	73.34	73.34	73.34	73.34	73.34	-0.104%
D#2	77.78	78.05	78.05	78.05	78.05	78.05	0.345%
E2	82.41	82.76	82.76	82.76	82.76	82.76	0.428%
F2	87.31	87.47	87.47	87.47	87.47	87.47	0.187%
F#2	92.50	92.86	92.86	92.86	92.86	92.86	0.391%
G2	98.00	98.24	98.24	98.24	98.24	98.24	0.246%
G#2	103.83	104.9	104.9	104.9	104.9	104.9	1.034%
A2	110.00	110.3	111	111	111	110.8	0.750%
A#2	116.54	117.7	117.7	117.7	117.7	117.7	0.995%
B2	123.47	123.8	123.8	123.8	123.8	123.8	0.267%
C3	130.81	131.2	131.2	131.2	131.2	131.2	0.296%
C#3	138.59	138.6	138.6	138.6	138.6	138.6	0.006%
D3	146.83	146	146	146	146	146.0	-0.567%
D#3	155.56	155.4	155.4	155.4	155.4	155.4	-0.105%
E3	164.81	164.1	164.1	164.1	164.1	164.1	-0.433%

F3	174.61	174.9	174.9	174.9	174.9	174.9	0.164%
F#3	185.00	185	185	185	185	185.0	0.002%
G3	196.00	196.3	196.3	196.3	196.3	196.3	0.154%
G#3	207.65	208.6	208.6	208.6	208.6	208.6	0.456%
A3	220.00	220	220	220	220	220.0	0.000%
A#3	233.08	234.1	234.1	234.1	234.1	234.1	0.437%
B3	246.94	247.6	247.6	247.6	247.6	247.6	0.267%
C4	261.63	262.4	262.4	262.4	262.4	262.4	0.296%
C#4	277.18	278.5	278.5	278.5	278.5	278.5	0.475%
D4	293.66	294.7	294.7	294.7	294.7	294.7	0.353%
D#4	311.13	312.9	312.9	312.9	312.9	312.9	0.570%
E4	329.63	331	331	331	331	331.0	0.416%
F4	349.23	349.9	349.9	349.9	349.9	349.9	0.192%
F#4	369.99	371.4	371.4	371.4	371.4	371.4	0.380%
G4	392.00	394.3	394.3	394.3	394.3	394.3	0.588%
G#4	415.30	418.5	418.5	418.5	418.5	418.5	0.769%
A4	440.00	439.4	439.4	439.4	439.4	439.4	-0.136%
A#4	466.16	467.6	467.6	467.6	467.6	467.6	0.308%
B4	493.88	495.2	495.2	495.2	495.2	495.2	0.267%
C5	523.25	526.8	526.8	526.8	526.8	526.8	0.678%
C#5	554.37	558.4	558.4	558.4	558.4	558.4	0.728%
D5	587.33	590.1	590.1	590.1	590.1	590.1	0.472%
D#5	622.25	628.5	628.5	628.5	628.5	628.5	1.004%
E5	659.26	663.4	663.4	662.8	662.8	663.1	0.583%
F5	698.46	700.5	700.5	700.5	700.5	700.5	0.293%
F#5	739.99	744.9	744.9	744.9	744.9	744.9	0.664%
G5	783.99	781.9	781.9	781.9	781.9	781.9	-0.267%
G#5	830.61	837.7	837.7	837.7	837.7	837.7	0.854%
A5	880.00	880.8	880.8	880.8	880.8	880.8	0.091%
A#5	932.33	938.7	938.7	938.7	938.7	938.7	0.684%
B5	987.77	992.6	992.6	992.6	992.6	992.6	0.489%
C6	1046.50	1053	1053	1053	1053	1053	0.621%
C#6	1108.73	1114	1115	1115	1115	1115	0.543%
D6	1174.66	1184	1184	1184	1184	1184	0.795%
D#6	1244.51	1252	1252	1252	1252	1252	0.602%
E6	1318.51	1323	1323	1323	1323	1323	0.341%
F6	1396.91	1406	1406	1403	1406	1405	0.597%
F#6	1479.98	1485	1485	1485	1485	1485	0.339%
G6	1567.98	1579	1579	1579	1579	1579	0.703%

G#6	1661.22	1668	1668	1668	1668	1668	0.408%
A6	1760.00	1760	1760	1760	1760	1760	0.000%
A#6	1864.66	1888	1888	1888	1888	1888	1.252%
B6	1975.53	1991	1990	1991	1990	1991	0.758%
C7	2093.00	2112	2112	2112	2112	2112	0.908%
C#7	2217.46	2253	2253	2254	2253	2253	1.614%
D7	2349.32	2379	2379	2379	2379	2379	1.263%
D#7	2489.02	2522	2522	2522	2524	2523	1.345%
E7	2637.02	2655	2655	2655	2655	2655	0.682%
F7	2793.83	2816	2817	2817	2816	2817	0.812%
F#7	2959.96	3014	3013	3015	3015	3014	1.834%
G7	3135.96	3167	3166	3166	3166	3166	0.966%
G#7	3322.44	3390	3390	3391	3391	3391	2.049%
A7	3520.00	3553	3553	3553	3553	3553	0.937%
A#7	3729.31	3783	3783	3783	3783	3783	1.440%
B7	3951.07	3987	3987	3987	3987	3987	0.909%
C8	4186.01	4480	4480	4480	4480	4480	7.023%

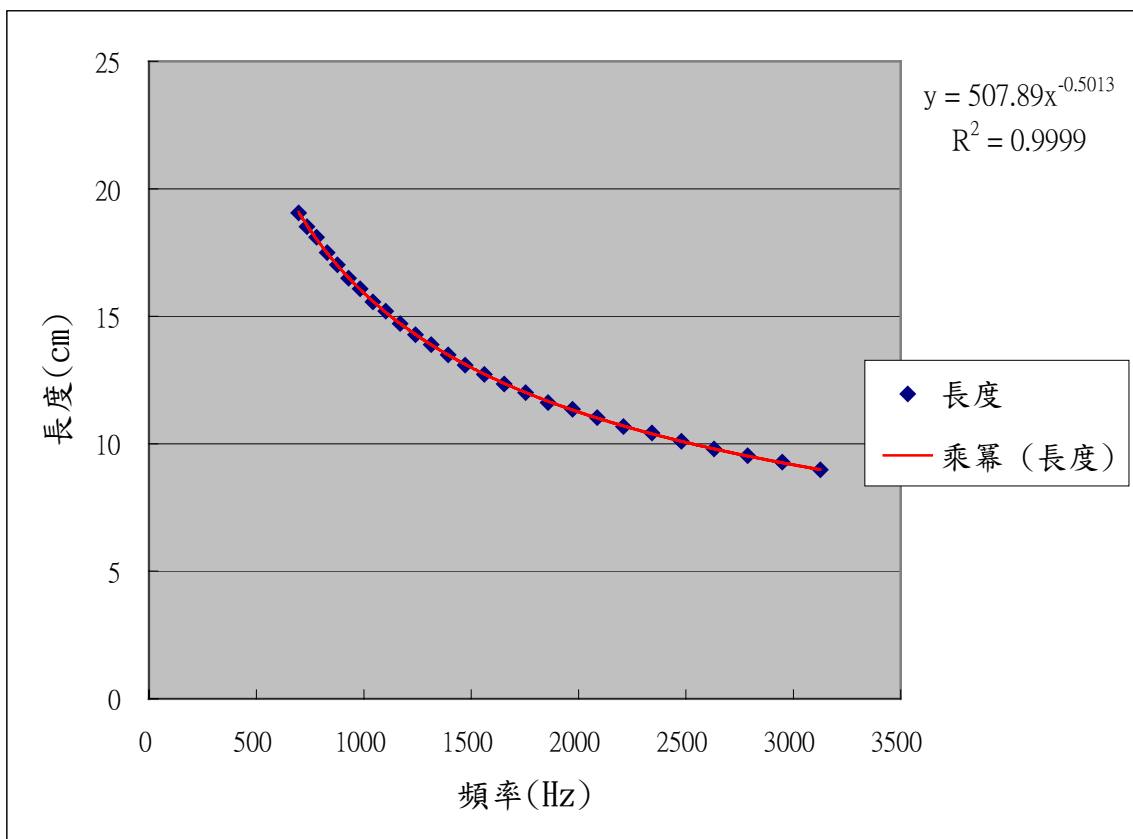
二、鐵琴剖析與測量方法的可信度分析

雖然叫做鐵琴，但是其材質經由質量測量與排水法測體積所得結果換算，平均密度約為 2.7g/cm^3 ，比對自然課本中物質密度可發現材質應該為鋁金屬或鋁的合金。質量、長度與頻率測量結果列於表二。而由鐵琴上所標示音名標準頻率分別與長度、重量作趨勢線分析可以發現和長度相關係數平方最接近 1。圖形分別如圖二十三與圖二十四，而把標準音和測量平均作線性迴歸，其圖形如圖二十五。因為鐵琴出廠時已不像鋼琴需要定時調音，故良好的線性關係表示我們測量方法的可信度良好。而比較各測量值和標準音誤差範圍，即使最大的誤差也只有 0.63%。最後我們使用調音用的標準音叉(A4 440Hz)來確認，測量結果的誤差只有 0.14%，因此實驗測量值是可信的。

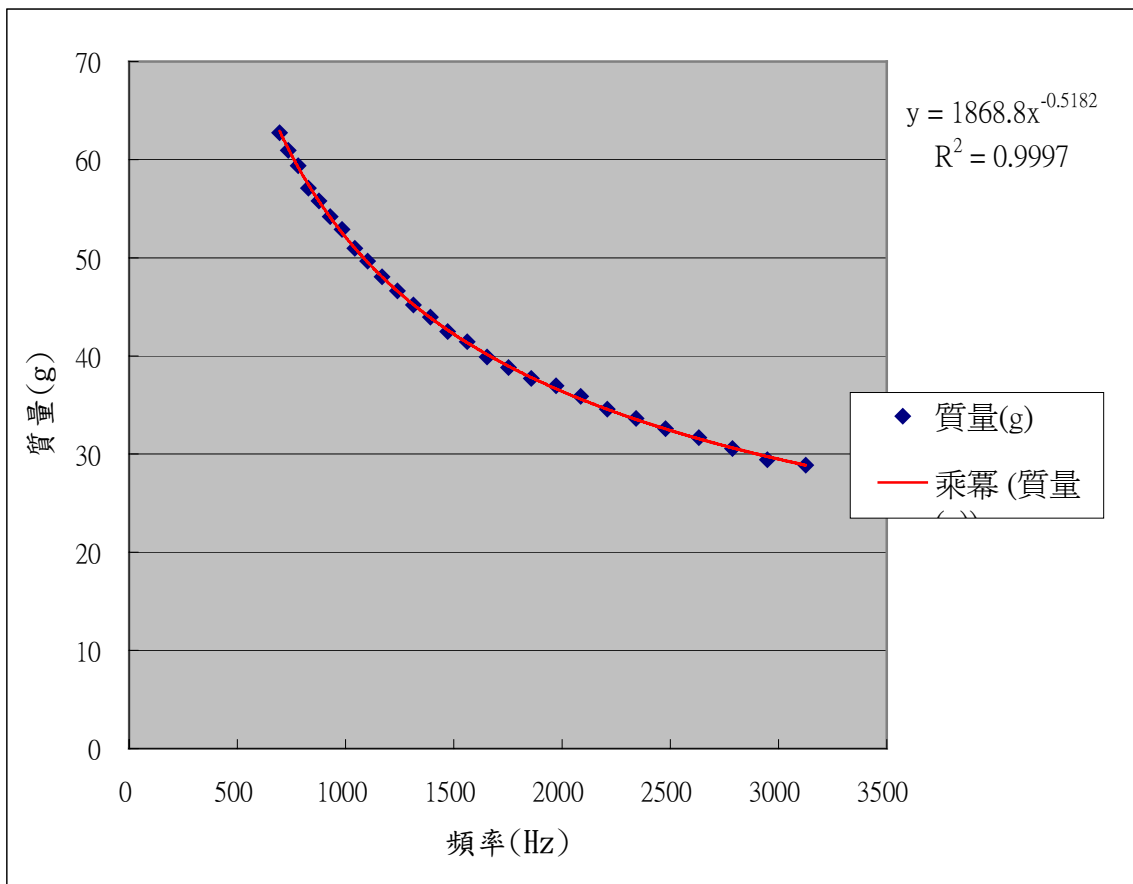
仔細研究鐵琴，可以清楚看出鐵琴發音頻率隨著長度變短而變高，所以鐵琴的製作過程應該和我們製作調音風鈴的原理相同，找出長度與頻率的關係。但是翻到背面時可見鐵琴製作時調音所鑽的孔，但是有些孔鑽在中間，有些鑽在側邊。雖然我們並不了解它的差異，但純以邏輯推理，兩種鑽法應該對發音頻率的影響不同。我們推測鐵琴的音調高低調整可用鑽孔位置做調整，一個調高，另一個調低，因此造成質量和頻率的線性關係變的比較差。而實際原因應該可另外設計實驗證實。

表二 鐵琴上所標示音名、標準頻率、長度、重量、測量值與密度。

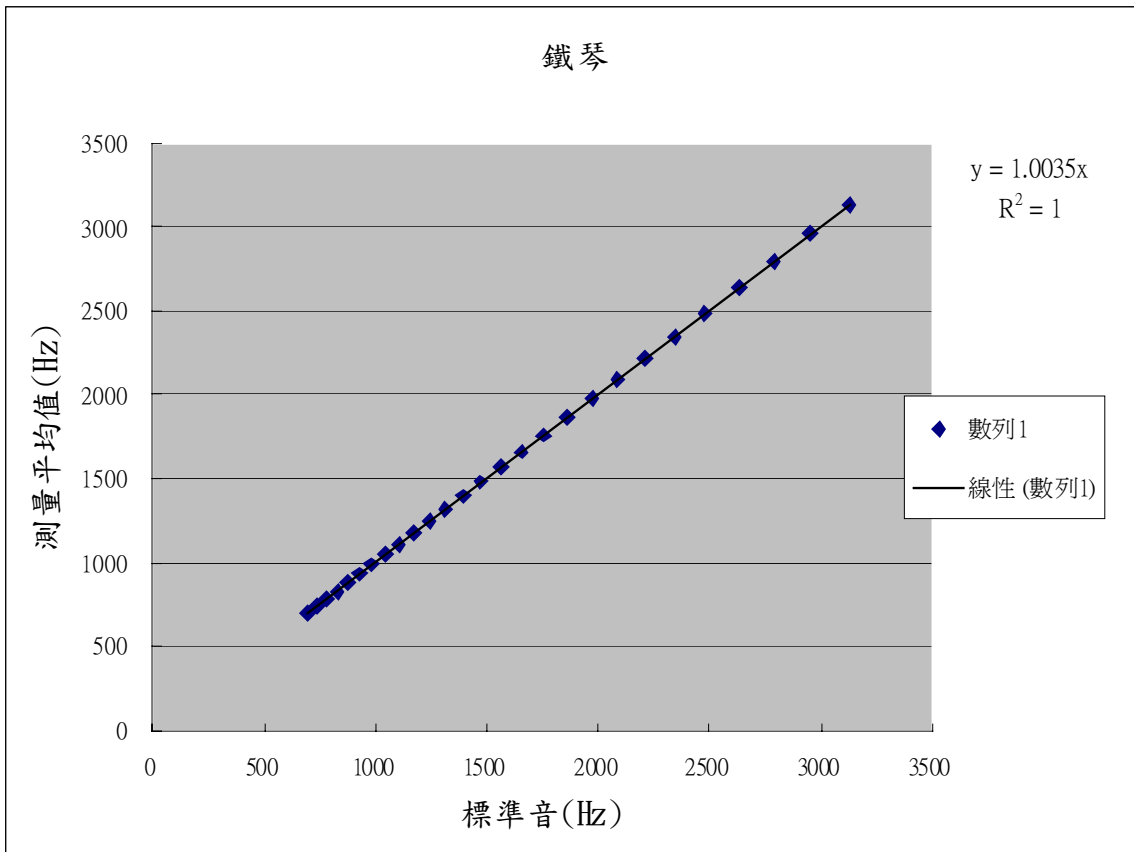
音名	標準音 (Hz)	質量 (g)	長度 (cm)	測量一 (Hz)	測量二 (Hz)	測量三 (Hz)	測量四 (Hz)	平均值 (Hz)	誤差 (%)	密度 (g/cm ³)
F5	698.46	62.74	19.06	695.1	696.4	696.4	695.1	695.8	-0.387%	2.67
F#5	739.99	60.94	18.52	737.5	734.8	734.8	734.1	735.3	-0.634%	2.68
G5	783.99	59.37	18.10	780.5	779.9	781.9	779.9	780.6	-0.439%	2.67
G#5	830.61	57.11	17.50	829.7	827	829.7	829.7	829.0	-0.191%	2.69
A5	880.00	55.80	17.02	875.4	880.8	878.1	875.4	877.4	-0.293%	平均密度
A#5	932.33	54.21	16.50	929.9	929.2	929.2	929.9	929.6	-0.298%	
B5	987.77	52.89	16.08	983.1	983.1	983.1	983.1	983.1	-0.472%	
C6	1046.5	50.97	15.57	1042	1043	1043	1044	1043	-0.335%	
C#6	1108.7	49.65	15.20	1103	1103	1101	1101	1102	-0.607%	
D6	1174.6	48.06	14.72	1169	1172	1167	1168	1169	-0.482%	
D#6	1244.5	46.65	14.28	1238	1240	1240	1242	1240	-0.362%	
E6	1318.5	45.20	13.88	1314	1312	1314	1314	1314	-0.380%	
F6	1396.9	43.96	13.48	1392	1392	1393	1393	1393	-0.316%	
F#6	1479.9	42.50	13.08	1470	1473	1472	1470	1471	-0.590%	
G6	1567.9	41.45	12.72	1563	1561	1562	1560	1562	-0.413%	
G#6	1661.2	39.88	12.34	1654	1656	1654	1654	1655	-0.404%	
A6	1760.0	38.81	12.00	1754	1754	1752	1752	1753	-0.398%	
A#6	1864.6	37.71	11.62	1858	1858	1858	1858	1858	-0.357%	
B6	1975.5	36.94	11.35	1971	1971	1973	1972	1972	-0.192%	
C7	2093.0	35.88	11.02	2086	2086	2086	2086	2086	-0.335%	
C#7	2217.4	34.58	10.68	2209	2209	2209	2209	2209	-0.382%	
D7	2349.3	33.64	10.42	2342	2342	2342	2342	2342	-0.312%	
D#7	2489.0	32.59	10.10	2478	2477	2478	2478	2478	-0.453%	
E7	2637.0	31.69	9.80	2631	2629	2631	2633	2631	-0.228%	
F7	2793.8	30.57	9.53	2787	2787	2787	2787	2787	-0.244%	
F#7	2959.9	29.44	9.28	2948	2948	2948	2948	2948	-0.404%	
G7	3135.9	28.86	8.98	3125	3125	3125	3125	3125	-0.350%	
音叉	440			439.4	439.4	439.4	439.4	439.4	-0.136%	



圖二十三 鐵琴長度與發音頻率的關係。



圖二十四 鐵琴質量與發音頻率的關係



圖二十五 鐵琴標準音和測量平均值分布圖，由線性迴歸分析可驗證測量方法的可信度。

三、不同直徑圓形金屬棒長度與發音頻率實驗結果

各個直徑的不同長度鉛棒頻率測量實驗中，15mm、5cm 長度敲擊所得的振動已無法由 Cool Edit Pro 分析出頻率。可能是頻率已超過 20000Hz，屬於超音波的部分無法由本軟體記錄分析，而敲擊所聽見的聲響則來自擊槌所產生無特定頻率的雜訊。至於頻譜分析後由那一個峰值當發音頻率，跟鋼琴或已知標準音的鐵琴不同，鋼琴有很明確的基頻與泛音關係，所以最低的發音頻率就是基頻。鐵琴則對照琴板上標的音名與標準音尋找接近的頻率(而均最低頻率)。而對於鉛棒我們依據下列準則(一)由長度最短開始分析，通常較短的頻譜均呈現一個峰值。(二)長度增加時隨長度變化的頻率會更低。(三)由鐵琴的分析，已確定長度和頻率成乘冪關係，因此由 Excel 趨勢分析找出 R^2 相關係數最高的值。由此規則分析取得結果如表三，而圖繪製結果如圖二十六。而由 Excel 分析所得的關係式列於表四。由圖中可見 15mm 直徑所得結果較有規則，且發音頻率較低。故我們選定 15mm 直徑圓形鉛棒製作調音風鈴。

而林昱甫等(民 96)在第四十六屆全國科展題目為天籟美聲樂"陶陶"的作品中提到，當他們製作陶板琴時發現越厚的陶板發出的音調越高的現象。好像跟自然課本中越輕、越薄、越

短、越小與越緊音調越高的原則相違背。在不同粗細鋁棒實驗中我們也看到相似的結果。從表四與圖二十六中可發現鋁棒可分成兩部分。6~10mm 鋁棒一組，頻率偏高而關係式中長度的次方約為-3；12 與 15mm 鋁棒一組頻率較低而關係式中長度的次方約為-0.5 且與銅棒、鋼管的相似。比較圖二十六中 6mm 鋁棒、8mm 鋁棒與 10mm 鋁棒，可知越粗的鋁棒發音頻率越高。而 15mm 鋁棒與 12mm 鋁棒，雖然相差不大，還是維持越粗的鋁棒發音頻率越高。我們在此提出可能的推測，在長度相同時，越粗的鋁棒相當於越緊的弦，這時候發音頻率由鬆緊程度佔最大的決定因素，至於為什麼分成兩類或有更多不同的類別，在我們的實驗中無法得到定論，需要更多不同直徑的金屬棒與額外的實驗來確認。而我們從其中選定 15mm 直徑鋁棒與 15mm 不鏽鋼管為調音風鈴材料的原因有一、隨長度變化的相關係數較好，二、頻率較低與三、成品重量部會太重。

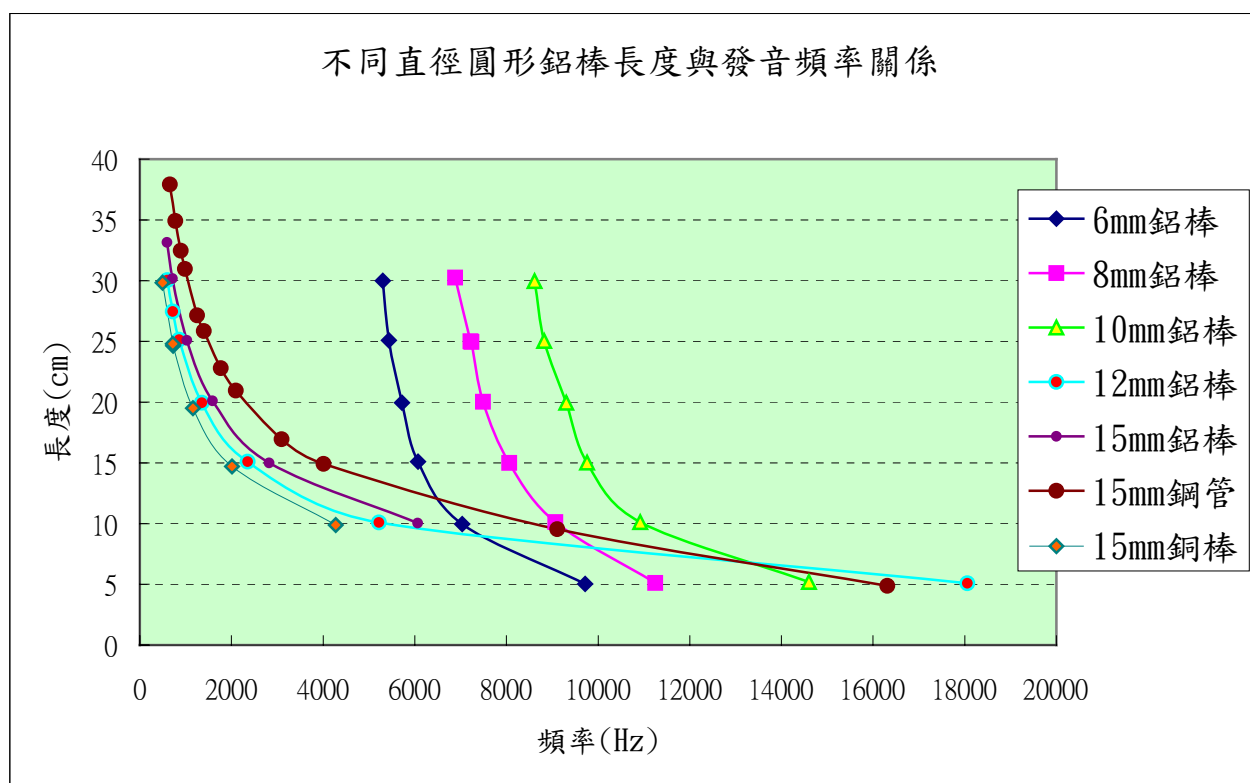
表三 不同直徑的各長度發音頻率測量值。

直徑	長度	頻率測量一	頻率測量二	頻率測量三	頻率測量四	平均
6	5.03	9739	9728	9729	9944	9714
	AI	9.95	7033	7027	6987	7038
		15.10	6073	6074	6068	6068
		19.95	5746	5749	5745	5747
		25.08	5427	5427	5430	5441
		30.00	5297	5297	5299	5297
8	5.10	11250	11260	11240	11230	11250
	AI	10.11	3406	3398	3398	3400
		15.00	1550	1549	1550	4193
		20.02	2372	2376	2374	2373
		24.95	1550	1550	1550	1550
		25.00	1541	1541	1541	1541
		30.25	1050	1050	1050	1050
10	5.20	14620	14620	14600	14640	14600
	AI	10.12	4147	4147	4147	4147
		15.02	2980	2980	2980	2980
		19.96	2985	2985	2985	2985
		25.02	1907	1907	1907	1907
		29.95	1332	1332	1332	1332
12	5.08	18070	18160	18160	18160	18060

Al	10.08	5219	5219	5220	5219	5221
	15.10	2354	2354	2354	2355	2354
	19.96	3651	3651	3654	3654	1352
	25.13	2349	2349	2349	2349	862.6
	27.45	1968	1968	1968	1968	721.3
	30.05	1641	1641	1641	1641	600.9
15	5.10	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	
Al	10.05	6064	6064	6064	6064	6064
	15.00	2820	2820	2820	2820	2820
	20.10	1586	1586	1586	1586	1586
	25.08	1027	1027	1027	1027	1027
	30.18	713.9	713.9	713.2	713.9	713.9
	33.15	713.9	713.9	713.2	713.9	592
15	4.88	16230	16230	16230	16240	16235
鋼	9.54	9110	9110	9110	9110	9110
管	14.92	4011	4011	4011	4011	4011
	16.95	3093	3093	3093	3094	3093.5
	19.65	2359	2359	2359	2359	2359
	22.75	1766	1766	1766	1766	1766
	24.35	1563	1563	1563	1563	1563
	27.15	1251	1251	1251	1251	1251
	30.96	983.7	983.7	983.7	983.7	983.7
	32.46	896.9	896.9	896.9	896.9	896.9
	34.92	773.8	773.8	773.8	773.8	773.8
	37.91	659.4	659.4	659.4	659.4	659.4
15	9.88	4275	4295	4295	4295	4285
Cu	14.70	2009	2009	2009	2009	2009
	19.50	1158	1158	1158	1158	1158
	24.64	730	730	730	730	730
	24.79	720	720	720	720	720
	29.82	497.2	497.2	497.2	497.2	497.2

表四 不同材質的各長度與發音頻率測量值由 Excel 趨勢分析所的關係式。

材質種類	長度與頻率關係式	相關係數平方
6mm 實心鋁棒	$Y=5 \times 10^{12} X^{-3.0182}$	$R^2=0.9853$
8mm 實心鋁棒	$Y=1 \times 10^{14} X^{-3.2873}$	$R^2=0.9936$
10mm 實心鋁棒	$Y=6 \times 10^{13} X^{-3.1493}$	$R^2=0.9899$
12mm 實心鋁棒	$Y=845.27 X^{-0.5199}$	$R^2=0.9996$
15mm 實心鋁棒	$Y=875.71 X^{-0.5125}$	$R^2=1$
15mm 不鏽鋼管	$Y=1079.6 X^{-0.5158}$	$R^2=0.9998$
15mm 實心銅棒	$Y=727.38 X^{-0.5136}$	$R^2=0.9999$



圖二十六 不同直徑鋁棒與不同材質素材，長度與發音頻率關係圖。

四、 調音風鈴製作成果

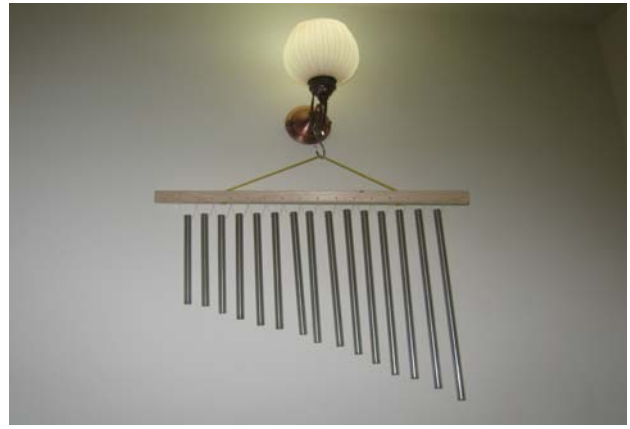
我們所製得的鋁質調音風鈴如圖二十七，由原先 15mm 圓形鋁棒數據，用 Excel 趨勢分析所得結果 $y=881.55x^{-0.5133}$ (其中 y 為長度、 x 為頻率) 推測出長度。鋸好大約長度後一邊以手工砂輪機修正一邊測量。並加入 Excel 作趨勢分析，所得數據和圖形分別如表四與圖二十八，最後所製得風鈴和標準音也列入表四。而最後長度與頻率關係式為 $y=867x^{-0.5109}$ ，而相關係數的平方為 0.9999。而表五中最後一欄的誤差值我們比對標準音把誤差值計算出來。由此數據結果可知最大誤差為 0.436%，如比對鋼琴調音完的音準誤差值，此結果應在可接受的誤差範圍內。

而不鏽鋼管所製成的調音風鈴如圖二十八，一樣一邊以手工砂輪機修正一邊測量。最後

長度與頻率關係式為 $y=1113.3x^{-0.5202}$ ，而相關係數的平方為 0.9997。調音所得結果列於表六，最大誤差為 0.817%，可懸掛於門後做為迎賓風鈴或彈奏簡單樂曲的調音風鈴。



圖二十七 懸掛在牆邊等待和風吹拂的調音風鈴。



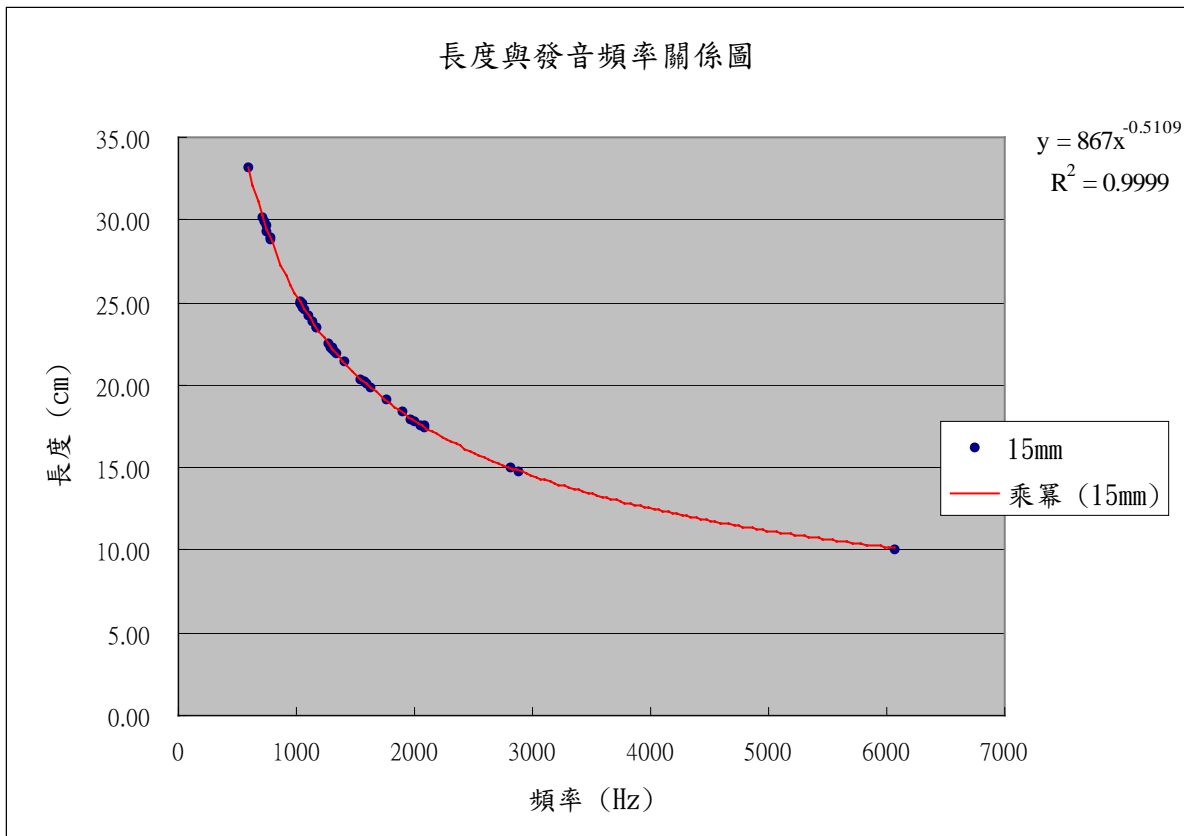
圖二十八 可彈奏簡易樂曲的調音風鈴或掛在門後作為迎賓風鈴。

表五 15mm 圓形鉛棒調音過程中所測得數據，有標示音名的為最後確定長度。

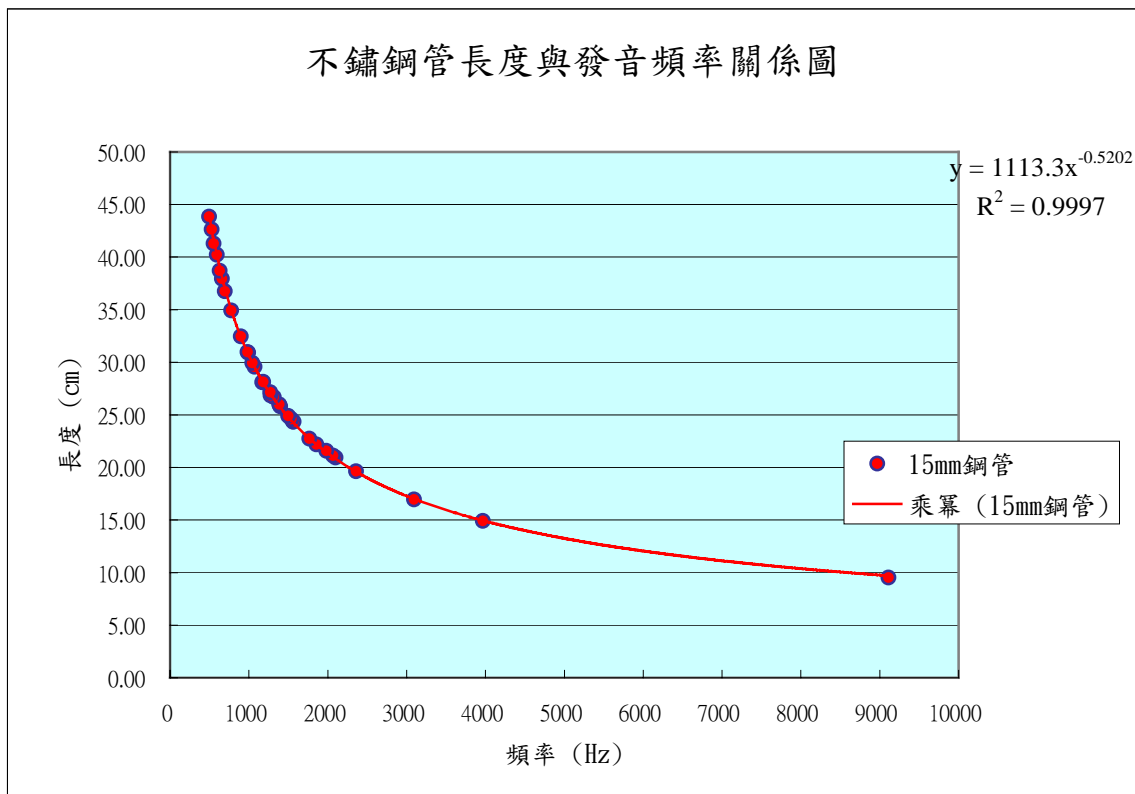
直徑 (mm)	音名	標準音	長度 (cm)	測量一 (Hz)	測量二 (Hz)	測量三 (Hz)	測量四 (Hz)	平均值 (Hz)	誤差(%)	
15 鋁 棒			10.05	6064	6064	6064	6064	6064		
			14.80	2878	2878	2878	2878	2878		
			15.00	2820	2820	2820	2820	2820		
		C7	2093	17.49	2090	2090	2090	2090	2090	-0.143
				17.54	2081	2080	2081	2080	2081	
				17.62	2051	2049	2051	2049	2050	
				17.85	2008	2007	2008	2007	2008	
		B6	1975	17.94	1974	1974	1975	1974	1974	-0.038
				18.40	1893	1892	1893	1892	1893	
		A6	1760	19.11	1757	1757	1756	1757	1757	-0.185
				19.86	1632	1632	1632	1632	1632	
				20.10	1586	1586	1586	1586	1586	
		G6	1568	20.22	1570	1570	1570	1571	1570	0.143
				20.35	1551	1550	1549	1550	1550	
		F6	1397	21.45	1402	1402	1402	1402	1402	0.357
				21.92	1345	1345	1345	1345	1345	
		E6	1318.5	22.05	1324	1324	1324	1325	1324	0.436
				22.21	1308	1308	1308	1308	1308	
				22.25	1302	1301	1301	1301	1301	
				22.30	1289	1289	1289	1289	1289	
				22.50	1273	1273	1273	1273	1273	
		D6	1174.6	23.45	1173	1172	1173	1172	1173	-0.179
				23.50	1168	1168	1168	1168	1168	
				23.88	1127	1127	1128	1127	1127	
				24.19	1104	1104	1104	1104	1104	
				24.58	1072	1072	1072	1072	1072	
				24.75	1053	1053	1053	1052	1053	
		C6	1046.5	24.89	1046	1046	1046	1046	1046	-0.048
				24.90	1041	1041	1041	1041	1041	
				24.98	1034	1034	1034	1034	1034	
			25.12	1027	1027	1027	1027	1027		
			28.85	777.8	777.8	777.8	777.8	777.8		
			28.90	775.1	775.1	775.1	775.1	775.1		
			29.30	752.9	753.6	753.6	752.9	753.3		
			29.65	738.8	738.8	738.8	738.8	738.8		
			29.90	724.7	724.7	724.7	723.3	724.4		
			30.18	713.9	713.9	713.2	713.9	713.7		
			33.15	592.1	592.1	592.1	592.1	592.1		

表六 不鏽鋼管調音過程中所得數據，有標示音名的為最後確定長度。

直徑 (mm)	音名	標準音	長度 (cm)	測量一	測量二	測量三	測量四	平均值 (Hz)	誤差(%)
15			9.54	9111	9111	9111	9111	9111	
不			14.92	3968	3968	3968	3968	3968	
鏽			16.95	3093	3093	3093	3093	3093	
鋼			19.65	2359	2359	2359	2359	2359	
管	C7	2093	20.96	2099	2099	2099	2099	2099	0.287%
			21.12	2067	2067	2067	2067	2067	
	B6	1975	21.58	1983	1983	1983	1982	1983	0.392%
			22.21	1857	1857	1857	1856	1857	
	A6	1760	22.75	1766	1766	1766	1766	1766	0.341%
			24.35	1563	1563	1563	1542	1558	
	G6	1568	24.36	1569	1569	1569	1569	1569	0.064%
			24.60	1537	1537	1537	1537	1537	
			24.90	1498	1498	1498	1498	1498	
	F6	1396.9	25.82	1400	1400	1400	1381	1395	-0.118%
			26.01	1384	1383	1384	1383	1384	
	E6	1318.5	26.70	1314	1314	1314	1314	1314	-0.341%
			26.86	1275	1275	1275	1275	1275	
			27.15	1269	1269	1269	1269	1269	
	D6	1174.7	28.10	1170	1170	1170	1170	1170	-0.400%
			28.14	1183	1183	1183	1183	1183	
			29.58	1071	1071	1071	1071	1071	
	C6	1046.5	29.92	1043	1043	1043	1043	1043	-0.334%
	B5	987.8	30.92	991.8	991.8	991.8	991.8	991.8	0.405%
			30.96	983.7	983.7	983.7	983.7	983.7	
			32.46	896.9	896.9	896.9	896.9	896.9	
			34.92	773.8	773.8	773.8	773.8	773.8	
	F5	698.5	36.75	693	693	693	693	693.0	-0.787%
	E5	659.2	37.95	659.4	659.4	659.4	659.4	659.4	0.030%
			38.71	627.8	633.2	627.8	633.2	630.5	
	D5	587.3	40.22	592.1	592.1	592.1	592.1	592.1	0.817%
			41.28	559.1	549.7	549.7	549.7	552.1	
	C5	523.3	42.62	526.2	526.2	526.2	526.2	526.2	0.554%
			43.86	497.2	497.2	497.2	497.2	497.2	



圖二十九 風鈴調音時我們依據鉛棒長短來調音，過程所錄製的頻率隨長度變化情形，以 Excel 做乘冪趨勢線分析可的良好的相關。



圖三十 不鏽鋼管風鈴調音時所得圖形與乘冪趨勢線分析，有良好的相關($R^2=0.9997$)。

陸、結論：

1. 由鋼琴的研究發現鋼琴利用弦的粗細、長短與鬆緊來控制音調的高低，實際觀測所的結果符合自然課本中越輕、越薄、越短、越小與越緊音調越高的原則。
2. 鋼琴測量所得的頻譜可見，鋼琴有明確的基頻與泛音的關係，即泛音頻率均為基頻頻率的整數倍。而這個關係在鐵琴與我們用以製作調音風鈴的鋁棒、不鏽鋼棒中並不明確。
3. 在我們的研究過程中，發現越細越長的鋁棒比較接近弦的特性；而越短越粗鋁棒敲起來的聲響單純無泛音，和鐵琴較相近。
4. 由鐵琴與不同材質直徑金屬棒可知，頻率與長度的關係為乘冪關係，即 $y=ax^{-b}$ 其中 y 為長度， x 為頻率， a 為 x 係數， $-b$ 為 x 次方。
5. 15mm 圓形鋁棒長度與頻率關係式為 $y=867x^{-0.5109}$ ，而相關係數的平方為 0.9999。我們使用此關係式用以製作調音風鈴，考慮材料的多寡與成品的重量，我們成功的製作了第六個八度音的調音風鈴，且最大的誤差還能控制在 0.436% 內。
6. 使用不鏽鋼管調音製成 C5~C7 兩個八度的調音風鈴，數據分析所得長度與頻率關係式為 $y=1113.3x^{-0.5202}$ ，相關係數的平方為 0.9997，最大誤差小於 0.817%。

柒、參考文獻

1. 林英智、李清勝、黃能堂、張永達、蔡尚芳(民 95)、主題活動：量產風鈴，國中自然與生活科技(第四冊 139-141 頁)、台北：康軒文教。
2. 姚衍、許貫中、方崇雄、陳世煌、李通藝(民 96)、3-4 音量、音調與音色，國中自然與生活科技(第二冊 75-77 頁)、台南：翰林出版事業有限公司。
3. 林昱甫、林彥成、沈一心、趙祐德(民 95)、天籟美聲樂"陶陶"，第四十六屆中小學科學展覽會作品說明書
4. 高翊凱、林依柔、戴敬珈、楊鵬蔚(民 95)、威『振』八方、不同凡『響』，第四十六屆中小學科學展覽會作品說明書
5. 張仁昌、李美英(民 88)、聲波的波形與頻率的關係，國立台灣師大物理教學示範實驗教室，<http://www.phy.ntnu.edu.tw/demolab/teacher/sound/>
6. 楊舒媛、莊曉萍、林宛瑩(民 96)、魔笛機密，第四十六屆中小學科學展覽會作品說明書
7. 廖彥婷、葉孟鑫、林啓維、方柏仁(民 95)、鄒之風聲-風笛，第四十六屆中小學科學展覽會作品說明書
8. 謝佳叡(民 89)、音樂中的數學，HPM 通訊第二卷第八期
<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol2no8b.htm>

【評語】 030817

該作品藉調音風鈴發音原理的探索，以了解頻率與發音體形狀的關係。未來在日常生活中，團隊可尋求相關科學可供應用之題材，繼續努力研究。