

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

030426

搞「軌」—有「跡」可循

學校名稱：新竹縣立竹北國民中學

作者： 國二 王亭婷 國二 彭斯婉 國二 陳葦樺 國二 徐聰榛	指導老師： 李宜仲 蔡瑩桂
---	-----------------------------

關鍵詞： 最小迴轉半徑、行車軌跡、電腦定位

摘要

路邊停車時，總需要三番兩次的調移車身，過程些許費時，因此，嘗試推算一次順利進出車格之軌跡。我們以開出停車格之軌跡做探討，軌跡建立之後再依循所建軌跡供車輛倒車行駛。

爲了能順利一次路邊停車，我們設定方向盤轉動量最大，讓前輪達到最大轉向角 θ （一般車輛是 35 度），以取得最小迴轉半徑 R ，利用車輛基本性質，包括：車前懸 a 、前後輪軸距 b 、車後懸 c 及車寬 d ，推導計算最小迴轉半徑 R ，所代出之公式經模擬實驗，其誤差率均小於 5%，值得引爲後續研究之用。

於路邊停車軌跡部分，先探討車輛出車格之軌跡，包括：左轉、直行及右轉軌跡，三個軌跡的反向連續軌跡，即爲路邊停車時倒車的應行進軌跡。於倒車入庫軌跡部份，則包含直行及右轉軌跡兩部份。

最後，對於誤差修正之探討，我們提出所謂前輪轉動受「軸承」控制之計算觀念，將車輪轉動中心砌合實際狀況轉移，於給定承軸及輪胎外側圓心之距時，將有更精密之數據展現。

壹、研究動機

當爸爸在路邊停車時，總會前後挪移車輛調整角度讓車子進入車格，重複兩三次進退完成動作是常有的狀況，到底如何駕馭車輛才能一氣呵成，節省時間，才不用一再調整。甚至有時看到媽媽要路邊停車，停了好幾次才知道根本停不進去，而最後的覺悟是因為：前後車的「慢 bar」發出撞壞的警告。所以在車子尚未操作路邊停車之前，以電腦定位偵測的概念切入，判斷車輛停入之可行性及一次停入之軌跡，如此提升停車駕駛之效率，將停車作業朝向省時（一次停入）、節能(減少油耗)、減碳(降排廢氣)之目標邁進，嘗試探討研究以為後續推展電腦定位停車系統之基礎。

貳、研究目的

- 一、尋找有效路邊停車（水平停車）及倒車入庫停車（垂直停車）的數理軌跡。
- 二、探詢車輛基本條件，並構成軌跡公式。
- 三、確認電腦自動停車系統之可行性。

參、研究器材

工程用電子計算機、筆記本、汽車模型、相機、筆、汽車資料、電腦、車輛、粉筆、棉線、童軍繩、圓規、量角器、白色膠帶、鉛垂線、皮尺。

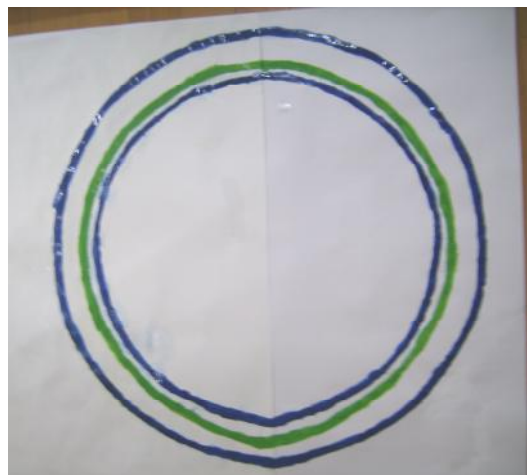
肆、研究過程與方法

一、模擬

利用遙控汽車(如圖一)模擬一般車輛旋轉時，四個車輪構成一同心圓圖像，驗證車輛固定轉動方向盤角度時，四個輪胎之轉動軌跡同心圓。(如圖二)



(圖一) 模型汽車照片



(圖二) 車輪軌跡同心圓模擬，強化二前輪及左後輪軌跡

二、演算

a=車前懸 b=軸距 c=車後懸 d=車寬 θ =前輪轉動角度

(一)迴轉半徑公式推導

本研究以水平停車時車輛左轉右前角能轉出車格的迴轉半徑為重點

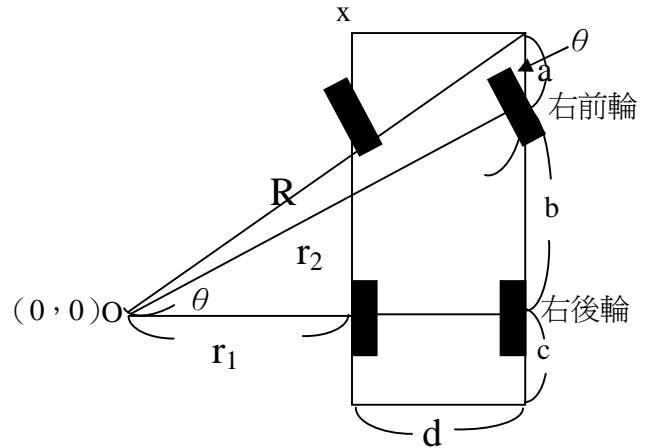
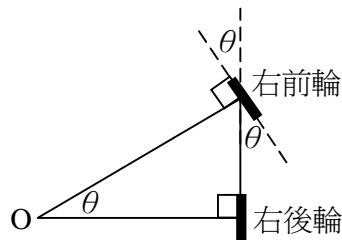
1. 導出迴轉半徑之公式 (以 R 表示)

(1)求迴轉半徑 R 之公式

$$R = \sqrt{(a+b)^2 + (r_1+d)^2}$$

(2)前輪轉動 θ 度分析

當右前輪轉動 θ 度時，將帶出右前輪中心垂直延伸線與二後輪中心連心線之交角為 θ ，其交點同時為車輛固定前輪轉動角度時，行駛軌跡之圓心。



(3)分析 r_1 、 r_2

$$r_1 = b \times \cot \theta - d$$

$$r_2 = \frac{b}{\sin \theta}$$

合併上述之推算，可將迴轉半徑公式以車輛基本特性參數 a、b、 θ 計算之，

$$\text{得 } R = \sqrt{(a+b)^2 + b^2 \cot^2 \theta}$$

2. 公式整理與說明

關鍵數據 車前懸=a 軸距=b 及 車輪轉動角度= θ

$$\text{最小迴轉半徑 } R = \sqrt{(a+b)^2 + b^2 \cot^2 \theta}$$

一般以車前輪轉動最大角度設定為 35° ，出停車格時將輪胎轉到最大轉動角度有利於一次開出車格，故以 $\theta = 35^\circ$ 代入計算車輛轉動之最小迴轉半徑。

(二)迴轉半徑公式驗證 (設定 $\theta = 35^\circ$)

1. BUICK - Rendezvous 車款

a=前懸=0.84m

$$b = \text{軸距} = 2.851 \text{m}$$

$$\cot 35^\circ = \frac{1}{\tan 35} = 1.428$$

$$b \times \cot 35^\circ = 2.851 \times 1.428 = 4.072$$

$$b^2 \cot^2 35^\circ = 4.072^2 = 16.578$$

$$(a + b)^2 = 13.623$$

$$R = \sqrt{(a + b)^2 + b^2 \cot^2 \theta} = \sqrt{13.623 + 16.578} = 5.496$$

實際車輛迴轉半徑：5.7m (駕駛手冊數據)

誤差約 0.204m

2. NISSAN - X-TRAIL 2.0 車款：a=前懸=0.88m、b=軸距=2.625m，得 R= 5.132

3. NISSAN - Verita 車款：a=前懸=0.72m、b=軸距=2.36m，得 R= 4.565

4. TOYOTA - VIOS 1.5E 車款：a=前懸=0.83m、b=軸距=2.5m，得 R= 4.88

5. HYUNDAI - ELANTRA 車款：a=前懸=0.91m、b=軸距=2.61m，得 R= 5.13

參數 車型	a	b		R	手冊 R	誤差	誤差率 誤差/手冊 R
BUICK Rendezvous	0.84m	2.851 m	35°	5.496 m	5.7 m	0.204 m	3.58%
NISSAN X-TRAIL 2.0	0.88 m	2.625 m	35°	5.132 m	5.3 m	0.17 m	3.21%
NISSAN VERITA	0.72 m	2.36 m	35°	4.565 m	4.6 m	0.03 m	0.65%
TOYOTA VIOS 1.5E	0.83 m	2.5 m	35°	4.88 m	4.9 m	0.02 m	0.41%
現代 ELANTRA	0.91 m	2.61 m	35°	5.13 m	5.06 m	0.07 m	1.38%

(表一) 迴轉半徑公式試算列表

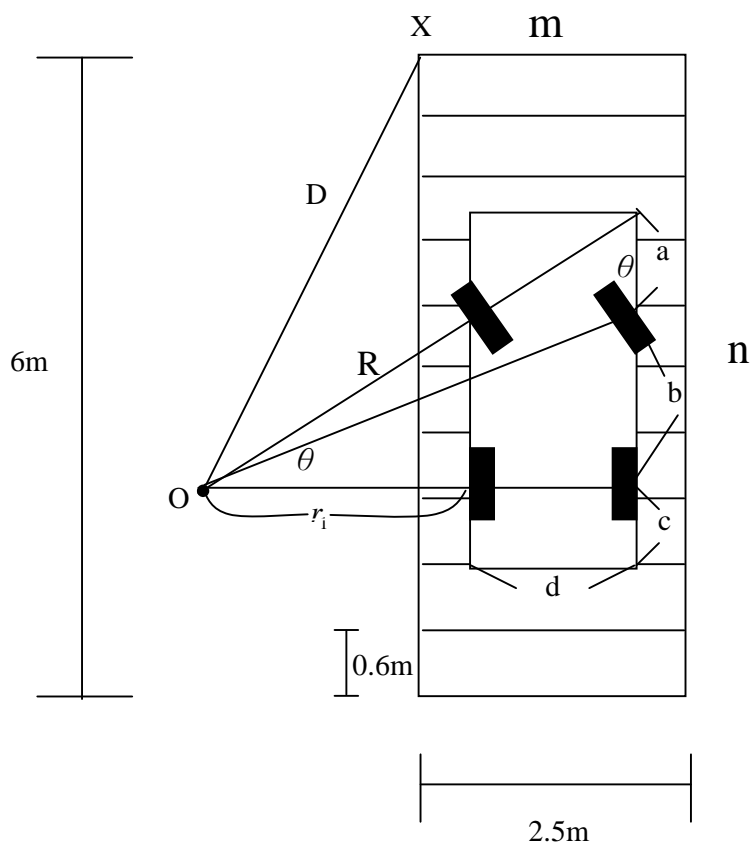
以上述數據進行探討分析，除 BUICK Rendezvous 之誤差率較高之外，其餘都與車廠提供之手冊 R 值相近，且全部驗證車輛誤差均在 5% 誤差率以內，可推定：本研究之最小迴轉半徑適合採用於後續研究。另外，本研究計算最小迴轉半徑與車商手冊提供數據之誤差，將於後面章節（陸一二—最小迴轉半徑誤差修正）討論之。

三、尋找將車輛開出停車格之判定公式

基本假設數據說明：標準停車格長 $m=6$ 公尺、寬 $n=2.5$ 公尺（此為標準車格大小，可隨車格實際大小變動），並將停車格分為 10 等份、20 等份作分析，試計算各種車款能「一次」開出停車格的倒車極限，如此可提供電腦定位判讀之數據（車子須置中）。假設倒車至第 s 等分線，則

$$X\left(r_i - \frac{m-d}{2}, \frac{s}{10}n - c\right)$$

$$D = \overline{XO} = \sqrt{\left(r_i - \frac{m-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{10}n - c\right)^2}$$



(一) 以 BUICK Rendezvous 爲例 $a=0.84m$, $b=2.851m$, $c=0.89m$, $d=1.871m$

把車子退到第 10 條線

$$R = \sqrt{(a+b)^2 + b^2 \cot^2 \theta}$$

$$= 5.49$$

$$X \left(r_1 - \frac{2.5-d}{2}, \frac{s}{10}n - c \right)$$

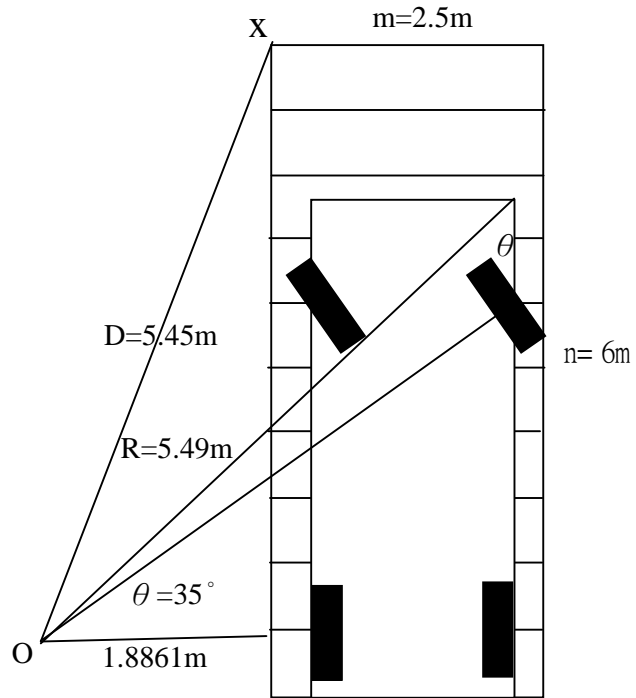
$$= X(1.8861, 5.11)$$

$$D = \sqrt{(1.8861-0)^2 + (5.11-0)^2}$$

$$= 5.446969177 \approx 5.45m$$

$$\therefore R > D$$

\therefore 車子無法開出



(二) 以 NISSAN (X-TRAIL) 爲例 $a=0.88m$, $b=2.625m$, $c=1.07m$, $d=1.765m$

1 把車子退到第 10 條線

$$R = \sqrt{(a+b)^2 + b^2 \cot^2 \theta}$$

$$= 5.13$$

$$X \left(r_1 - \frac{2.5-d}{2}, \frac{s}{10}n - c \right)$$

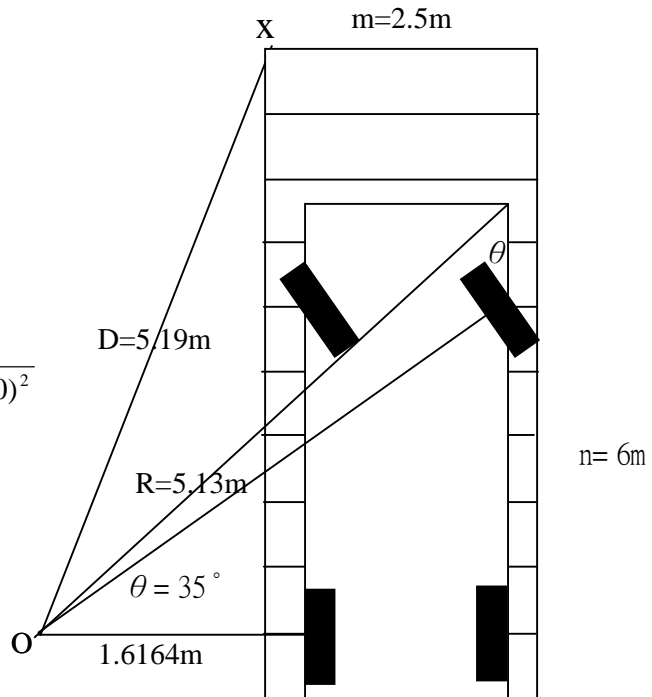
$$= X(1.6164, 4.93)$$

$$D = \sqrt{(1.6164-0)^2 + (4.93-0)^2}$$

$$= 5.188222139 \approx 5.19m$$

$$\therefore R < D$$

\therefore 車子可開出



2 把車子退到第 9 條線

$$R = \sqrt{(a+b)^2 + b^2 \cot^2 \theta} = 5.13$$

$$X \left(r_1 - \frac{2.5-d}{2}, \frac{s}{10} n - c \right)$$

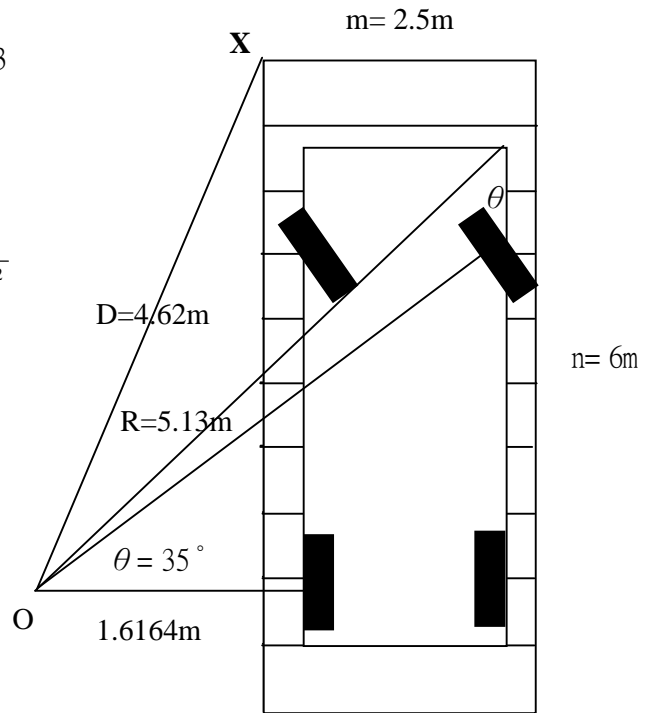
$$= X(1.6164, 4.33)$$

$$D = \sqrt{(1.6164-0)^2 + (4.33-0)^2}$$

$$= 4.621866394 \approx 4.62\text{m}$$

$$\therefore R > D$$

\therefore 車子無法開出



(三) 以 NISSAN VERITA 爲例 $a=0.72\text{m}$, $b=2.36\text{m}$, $c=0.62\text{m}$, $d=1.585\text{m}$

1 把車子退到第 9 條線

$$R = \sqrt{(a+b)^2 + b^2 \cot^2 \theta}$$

$$= 4.6$$

$$X \left(r_1 - \frac{2.5-d}{2}, \frac{s}{10} n - c \right)$$

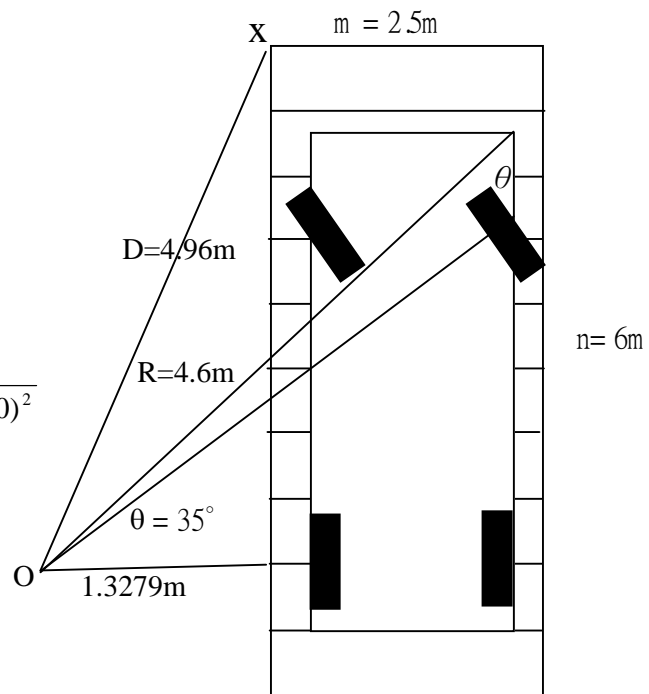
$$= X(1.3279, 4.18)$$

$$D = \sqrt{(1.3279-0)^2 + (4.18-0)^2}$$

$$= 4.961019896 \approx 4.96\text{m}$$

$$\therefore R < D$$

\therefore 車子可開出



2 把車子退到第 8 條線

$$R = \sqrt{(a+b)^2 + b^2 \cot^2 \theta}$$

$$= 4.6$$

$$X \left(r_1 - \frac{2.5-d}{2}, \frac{s}{10} n - c \right)$$

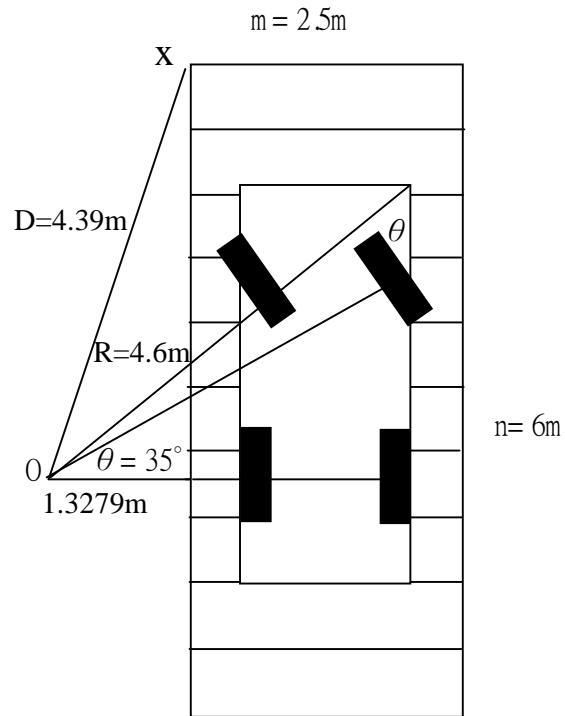
$$= X (1.3279, 4.18)$$

$$D = \sqrt{(1.3279-0)^2 + (4.18-0)^2}$$

$$= 4.385854353 \approx 4.39\text{m}$$

$$\therefore R > D$$

\therefore 車子無法開出



(四) 以 TOYOTA VIOS 1.5E 為例 $a=0.83\text{m}$, $b=2.5\text{m}$, $c=0.98\text{m}$, $d=1.69\text{m}$

1 把車子退到第 10 條線 , $\therefore R = 4.88 < D \approx 5.23$ \therefore 車子可開出

2 把車子退到第 9 條線 , $\therefore R = 4.88 > D \approx 4.66$ \therefore 車子無法開出

(五) 以 現代 HYUNDAI ELANTRA 為例 $a=0.91\text{m}$, $b=2.61\text{m}$, $c=0.96\text{m}$, $d=1.72\text{m}$

1 把車子退到第 10 條線 , $\therefore R = 5.1 < D \approx 5.29$ \therefore 車子可開出

2 車子退到第 9 條線 , $\therefore R = 5.13 > D \approx 4.73$ \therefore 車子無法開出

若將停車格分為 20 等份 , 我們可求出更精確的極限位置。

(六) 以 NISSAN X-TRAIL 為例 $a=0.88\text{m}$, $b=2.625\text{m}$, $c=1.07\text{m}$, $d=1.765\text{m}$

1 把車子退到第 19 條線 , $\therefore R = 5.13 > D \approx 4.9$ \therefore 車子無法開出

(七) 以 NISSAN VERITA 為例 $a=0.72\text{m}$, $b=2.36\text{m}$, $c=0.62\text{m}$, $d=1.585\text{m}$

1 把車子退到第 17 條線 , $\therefore R = 4.6 < D \approx 4.67$ \therefore 車子可開出

(八) 以 TOYOTA VIOS 1.5E 為例 $a=0.83m, b=2.5m, c=0.98m, d=1.69m$

1 把車子退到第 19 條線， $\because R = 4.88 < D \approx 4.95 \therefore$ 車子可開出

(九) 以 現代 HYUNDAI ELANTRA 為例 $a=0.91m, b=2.61m, c=0.96m, d=1.72m$

1 把車子退到第 19 條線， $\because R = 5.13 > D \approx 5.01 \therefore$ 車子無法開出

結論 1：彙表整理

若把停車格分成 10 等分，倒車時車尾要在哪一條線才能開出？

車牌	車停在第 8 條線	車停在第 9 條線	車停在第 10 條線(底線)
BUICK (Rendezvous)	X	X	X
NISSAN (X-TRAIL)	X	X	✓
NISSAN (VERITA)	X	✓	✓
TOYOTA (V IOS 1.5E)	X	X	✓
現代 (HYUNDAI ELANTRA)	X	X	✓

(表二)車格十等分 車尾停止線開出分析

若把停車格分成 20 等分，倒車時車尾要在哪一條線才能開出？

車牌	第 17 條線	第 18 條線	第 19 條線	第 20 條線(底線)
BUICK (Rendezvous)	X	X	X	X
NISSAN (X-TRAIL)	X	X	X	✓
NISSAN (VERITA)	✓	✓	✓	✓
TOYOTA (V IOS 1.5E)	X	X	✓	✓
現代(HYUNDAI ELANTRA)	X	X	X	✓

(表三)車格二十等分車尾停止線開出分析

結論 2：再述公式

$$D = \sqrt{\left[b \times \cot \theta - d - \left(\frac{m-d}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{s}{10}n - c\right]^2}$$

$$R = \sqrt{(b \times \cot \theta)^2 + (a + b)^2}$$

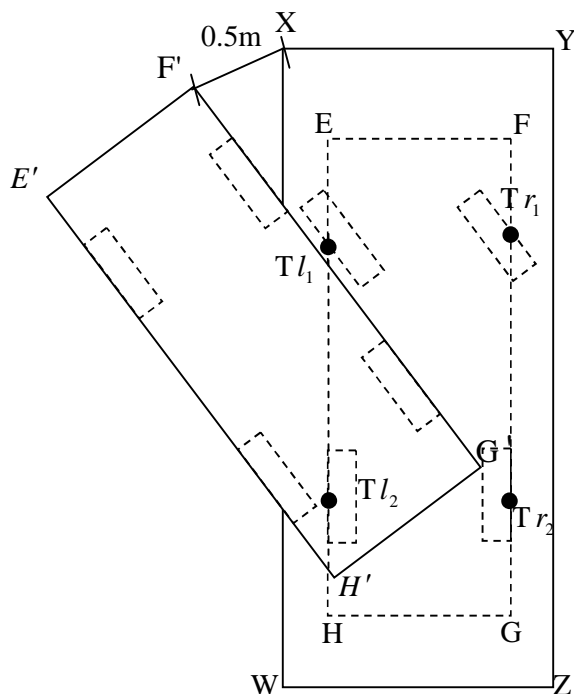
a =車前懸 , b =輪距 , c =車後懸 , d =車寬 , m =停車格寬 , n =停車格長 ,
 s =車子停的位置(以十等分為原則停放第 s 條線上)

車子能順利開出車格之判別： $R < D$

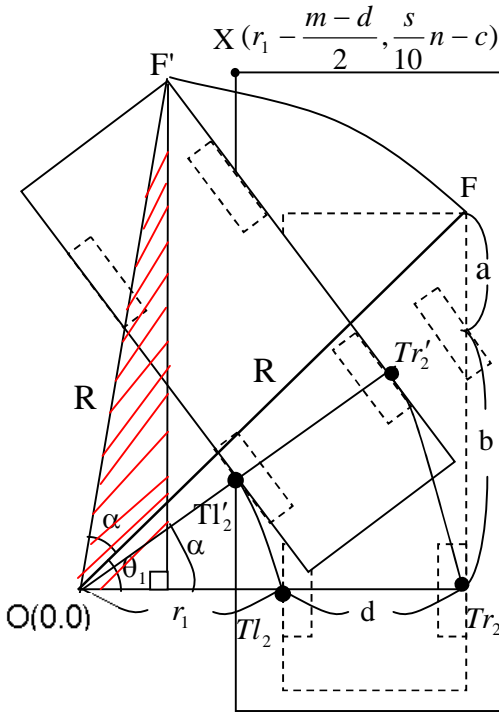
四、推演車輛出車格之可行軌跡

(一)安全距離假設與路邊停車左轉軌跡建立

我們從上推算得知，當 $R < D$ 時車子方能開出停車格，而使車右前角(F)不碰到左前方車格角(X)。但若要讓全車轉出停車格，而不使車右後角(G)碰到左前方停車角(X)，必須預留一段安全距離，我們定此距離為 0.5 公尺。



Tl_1	車輛左前輪點
Tr_1	車輛右前輪點
Tl_2	車輛左後輪點
Tr_2	車輛右後輪點



$$\tan \theta_1 = \frac{a+b}{r_1+d}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{a+b}{r_1+d} \right)$$

假設 α 為車輛向左轉動之度數

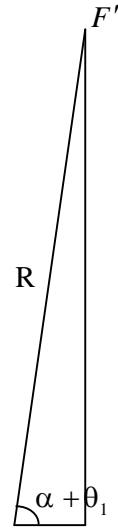
$$\cos(\alpha + \theta_1) = \frac{F' \text{的X座標}}{R}$$

$$F' \text{的X座標} = R \cdot \cos(\alpha + \theta_1)$$

$$\sin(\alpha + \theta_1) = \frac{F' \text{的Y座標}}{R}$$

$$F' \text{的Y座標} = R \cdot \sin(\alpha + \theta_1)$$

則 $F' (R \cdot \cos(\alpha + \theta_1), R \cdot \sin(\alpha + \theta_1))$



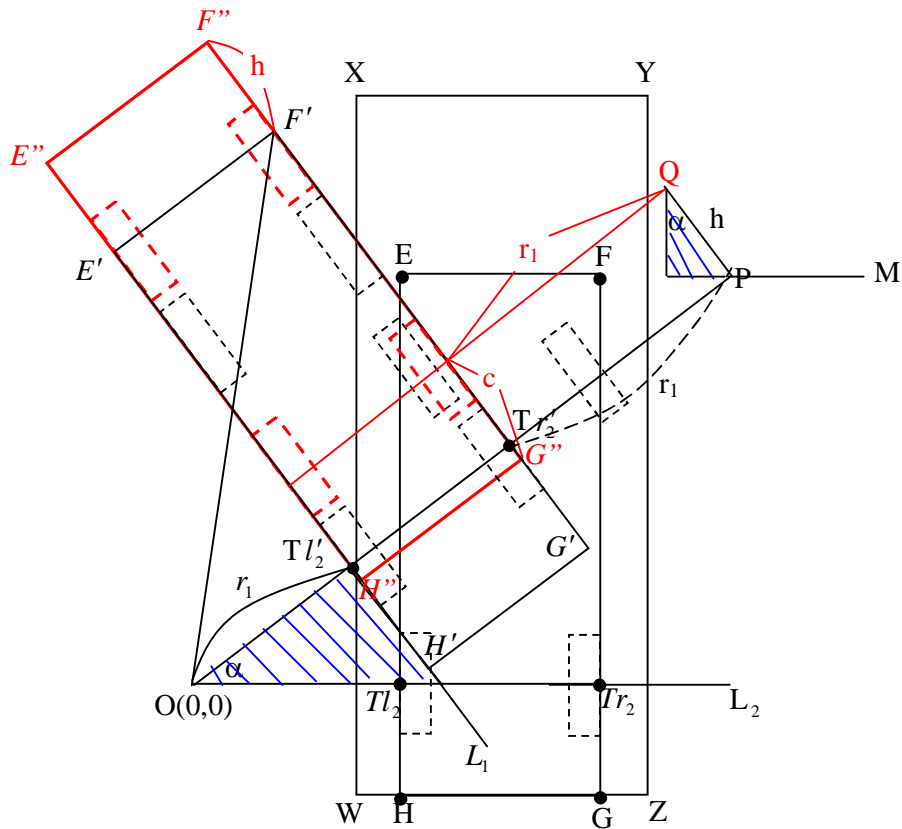
$$\overline{F'X} = \sqrt{\left[R \cdot \cos(\alpha + \theta_1) - \left(r_1 - \frac{m-d}{2} \right) \right]^2 + \left[R \cdot \sin(\alpha + \theta_1) - \left(\frac{s}{10} n - c \right) \right]^2} \geq 0.5$$

動點	軌跡	條件	備註
Tl_2	$y = \sqrt{r_1^2 - x^2}$ $r_1 \cos \alpha \leq x \leq r_1$	$R < \overline{OX}$ $\overline{F'X} \geq 0.5$ $F'_x = R \cos(\alpha + \theta_1) < r_1 - \frac{m-d}{2}$	符合條件時 車輛應已向 左轉動 α
Tr_2	$y = \sqrt{(r_1 + d)^2 - x^2}$ $(r_1 + d) \cos \alpha \leq x \leq r_1 + d$		
F	$y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $R \cos(\alpha + \theta_1) \leq x \leq r_1 + d$		

(表四) 車輛路邊停車向左開出軌跡分析

(二) 路邊停車直行軌跡建立

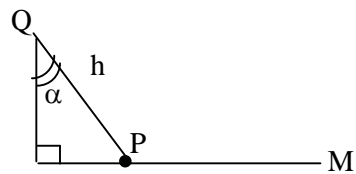
若以上述步驟直接右轉，車右後角仍無法順利轉出停車格，因此我們假設車子向前行駛 h 公尺後，再作推算。



車頭從停車格出來後，前進 h ，所以車子的右前方頂點 F' ，前進了 h 。欲使車子開出停車格向右轉直時，必須滿足 $\overline{G''Q} > \overline{QX}$ (Q 為車輛右轉時所形成之同心圓圓心，其性質同左轉同心圓圓心 O)，車子方能開出車格。

$$\overline{G''Q} = \sqrt{r_1^2 + c^2}$$

$$P \left((2r_1 + d)\cos\alpha, (2r_1 + d)\sin\alpha \right)$$



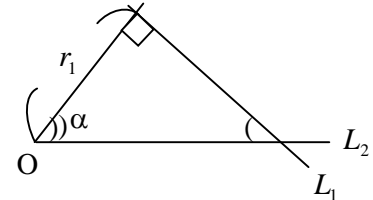
另如右圖所示

$$\because M \parallel L_2 \text{ 且 } L_1 \parallel PQ$$

$$\therefore \angle Q = \alpha$$

則可推得

$$Q \left((2r_1 + d)\cos\alpha - h\sin\alpha, (2r_1 + d)\sin\alpha + h\cos\alpha \right)$$



$$\overline{QX} = \sqrt{\left[(2r_1 + d)\cos\alpha - h\sin\alpha - \left(r_1 - \frac{m-d}{2} \right) \right]^2 + \left[(2r_1 + d)\sin\alpha + h\cos\alpha - \left(\frac{s}{10}n - c \right) \right]^2}$$

接下來有關上圖 \overline{PQ} 斜率之計算

$$m_{\overline{PQ}} = -\cot \alpha = m_{\overline{E'H'}}$$

$$\text{又 } Tl_2'(r_1 \cdot \cos \alpha, r_1 \cdot \sin \alpha)$$

$$Tr_2'((r_1 + d) \cdot \cos \alpha, (r_1 + d) \cdot \sin \alpha)$$

$$\overline{E'H'} : y - r_1 \cdot \sin \alpha = -\cot \alpha (x - r_1 \cdot \cos \alpha)$$

$$\overline{F'G'} : y - (r_1 + d) \cdot \sin \alpha = -\cot \alpha [x - (r_1 + d) \cdot \cos \alpha]$$

動點	軌跡	條件	備註
Tl_2'	$y - r_1 \times \sin \alpha = -\cot \alpha (x - r_1 \cdot \cos \alpha)$ $r_1 \cos \alpha - h \sin \alpha \leq x \leq r_1 \cos \alpha$	前進 h	h 將滿足 $\overline{QG''} > \overline{QX}$
Tr_2'	$y - (r_1 + d) \cdot \sin \alpha = -\cot \alpha [x - (r_1 + d) \cdot \cos \alpha]$ $(r_1 + d) \cos \alpha - h \sin \alpha \leq x \leq (r_1 + d) \cos \alpha$		
F'	$y - (r_1 + d) \cdot \sin \alpha = -\cot \alpha [x - (r_1 + d) \cdot \cos \alpha]$ $R \cos(\alpha + \theta_1) - h \sin \alpha \leq x \leq R \cos(\alpha + \theta_1)$		

(表五) 車輛路邊停車向前移動 h 軌跡分析

(三) 路邊停車右轉軌跡建立

車輛完全出車格必須是 G''' 離開車格，

我們先假設 Q 點座標為

$$Q((2r_1 + d) \cos \alpha - h \sin \alpha, (2r_1 + d) \sin \alpha + h \cos \alpha) = Q(M, N)$$

$$\overline{QG''} = \sqrt{r_1^2 + c^2}$$

$$X \left(r_1 - \frac{m-d}{2}, \frac{s}{10} n - c \right)$$

$$\overline{EO} = \sqrt{(a+b)^2 + r_1^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{a+b}{r_1} \right)$$

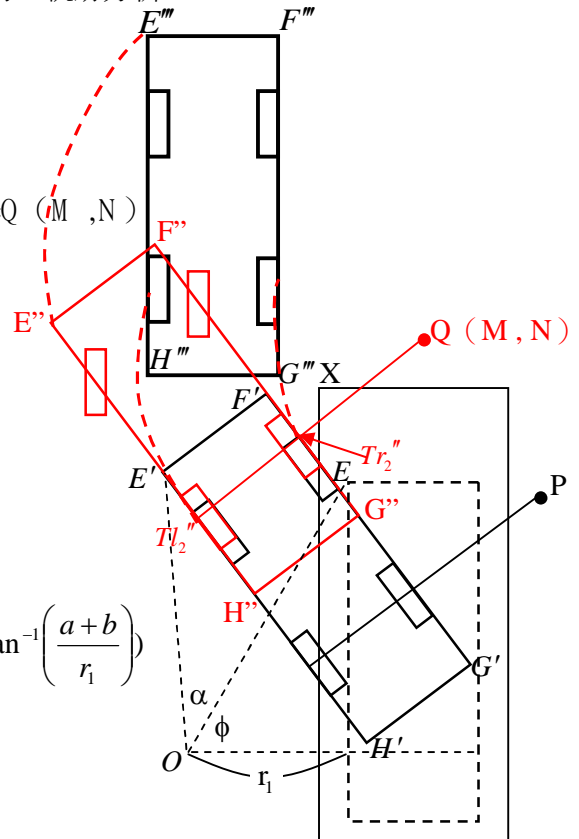
$$E_x' = \overline{EO} \cos(\alpha + \phi) = \sqrt{(a+b)^2 + r_1^2} \cos \left(\alpha + \tan^{-1} \left(\frac{a+b}{r_1} \right) \right)$$

則

$$E_x'' = E_x' - h \sin \alpha$$

且

$$\overline{QX} = \sqrt{\left[(2r_1 + d) \cos \alpha - h \sin \alpha - \left(r_1 - \frac{m-d}{2} \right) \right]^2 + \left[(2r_1 + d) \sin \alpha + h \cos \alpha - \left(\frac{s}{10} n - c \right) \right]^2}$$



車輛完全出車格必須滿足 $\overline{QG''} > \overline{QX}$ ，完成後 G'' 將移至 G''' 。

動點	軌跡	條件	備註
Tl_2''	$y = -\sqrt{(r_1 + d)^2 - (x - M)^2} + N$ $M - (r_1 + d) \leq x \leq r_1 \cos \alpha - h \sin \alpha$	$\overline{QG''} > \overline{QX}$ $G_x'' < r_1 - \frac{m-d}{2}$	G'' : $(x - M)^2 + (y - N)^2 = r_1^2 + c^2$
Tr_2''	$y = -\sqrt{r_1^2 - (x - M)^2} + N$ $M - r_1 \leq x \leq (r_1 + d) \cos \alpha - h \sin \alpha$		
E''	$y = \sqrt{R^2 - (x - M)^2} + N$ $\sqrt{(a+b)^2 + r_1^2} \cos(\alpha + \tan^{-1}(\frac{a+b}{r_1})) - h \sin \alpha$ $\leq x \leq M - (r_1 + d)$		

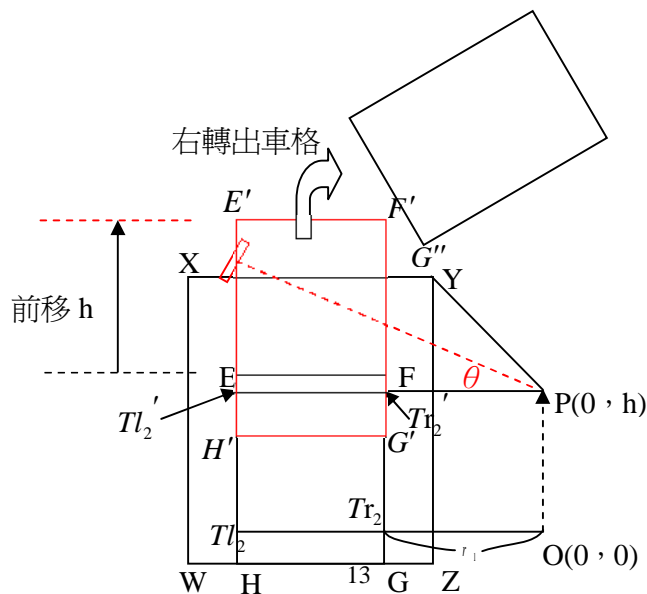
(表六) 車輛路邊停車向右轉動軌跡分析

(四) 倒車入庫直行軌跡建立

假設車輛必須先前進 h 公尺之後才能順利右轉出車格，故探討 Tl_2 、 Tr_2 及 E 等三點之軌跡。

動點	軌跡	條件	備註
Tl_2	$x = -(b \times \cot \theta)$ $0 \leq y \leq h$	前進 h	h 將 滿足 $\overline{PG'} > \overline{PY}$
Tr_2	$x = -r_1 = -(b \cot \theta - d)$ $0 \leq y \leq h$		
E	$x = -(b \times \cot \theta)$ $a + b \leq y \leq a + b + h$		

(表七) 車輛倒車入庫直行軌跡分析



(五) 倒車入庫右轉軌跡建立

若欲使車子開出停車格向右轉且不碰到車格，需判定

$$\overline{PG'} > \overline{PY}$$

$$\text{其中， } \overline{PY} = \sqrt{\left(r_1 - \frac{m-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{10}n - c - h\right)^2}$$

$$\overline{PG'} = \sqrt{r_1^2 + c^2}$$

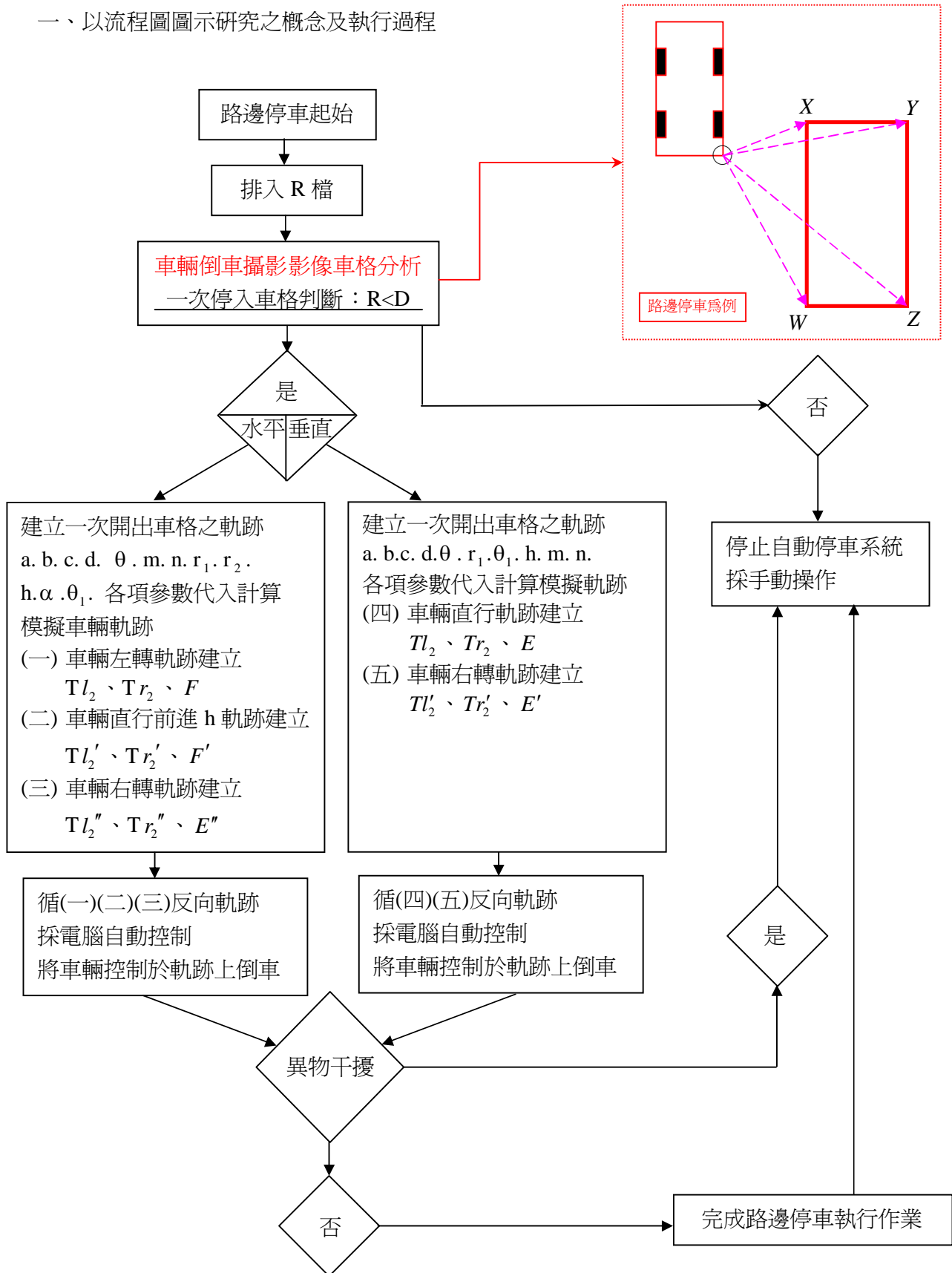
另外，右轉軌跡示意如下：

動點	軌跡	條件	備註
Tl'_2	$y = \sqrt{(r_1 + d)^2 - x^2} + h$ $-b \times \cot\theta \leq x \leq 0$	$\overline{PG'} > \overline{PY}$ $G''_y > \frac{s}{10}n - c$	$G'' : (x-0)^2 + (y-h)^2 = r_1^2 + c^2$
Tr'_2	$y = \sqrt{r_1^2 - x^2} + h$ $-(b \times \cot\theta - d) \leq x \leq 0$		
E'	$y = \sqrt{R^2 - x^2} + h$ $-b \cot\theta \leq x \leq a + b$		

(表八) 車輛倒車入庫右轉軌跡分析

伍、研究結果

一、以流程圖圖示研究之概念及執行過程



二、路邊停車(水平停車)及倒車入庫(垂直停車)之反向循軌跡模式

原則上車輛採三大步驟建立出格軌跡，包括：左轉軌跡、直行軌跡及右轉軌跡，並依循反向軌跡可執行路邊停車之倒車動作。另外，倒車入庫模式包含：直行軌跡及右轉軌跡之反向軌跡建立。

(一路邊停車(水平停車)反向循軌跡建立

1 左轉軌跡

動點	軌跡	條件	備註
Tl_2	$y = \sqrt{r_1^2 - x^2}$ $r_1 \cos \alpha \leq x \leq r_1$	$R < \overline{OX}$ $\overline{F'X} \geq 0.5$ $F'x = R \cos(\alpha + \theta_1) < r_1 - \frac{m-d}{2}$	符合條件時車輛應已向左轉動 α
Tr_2	$y = \sqrt{(r_1 + d)^2 - x^2}$ $(r_1 + d) \cos \alpha \leq x \leq r_1 + d$		
F	$y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $R \cos(\alpha + \theta_1) \leq x \leq r_1 + d$		

2. 直行軌跡

動點	軌跡	條件	備註
Tl'_2	$y - r_1 \times \sin \alpha = -\cot \alpha (x - r_1 \cdot \cos \alpha)$ $r_1 \cos \alpha - h \sin \alpha \leq x \leq r_1 \cos \alpha$	前進 h	h 將滿足 $\overline{QG''} > \overline{QX}$
Tr'_2	$y - (r_1 + d) \cdot \sin \alpha = -\cot \alpha [x - (r_1 + d) \cdot \cos \alpha]$ $(r_1 + d) \cos \alpha - h \sin \alpha \leq x \leq (r_1 + d) \cos \alpha$		
F'	$y - (r_1 + d) \cdot \sin \alpha = -\cot \alpha [x - (r_1 + d) \cdot \cos \alpha]$ $R \cos(\alpha + \theta_1) - h \sin \alpha \leq x \leq R \cos(\alpha + \theta_1)$		

3 右轉軌跡

動點	軌跡	條件	備註
Tl''_2	$y = -\sqrt{(r_1 + d)^2 - (x - M)^2} + N$ $M - (r_1 + d) \leq x \leq r_1 \cos \alpha - h \sin \alpha$	$\overline{QG''} > \overline{QX}$ $G'''_x < r_1 - \frac{m-d}{2}$	$G''' : (x - M)^2 + (y - N)^2 = r_1^2 + c^2$
Tr''_2	$y = -\sqrt{r_1^2 - (x - M)^2} + N$ $M - r_1 \leq x \leq (r_1 + d) \cos \alpha - h \sin \alpha$		
E''	$y = \sqrt{R^2 - (x - M)^2} + N$ $\sqrt{(a+b)^2 + r_1^2} \cos \alpha + \tan^{-1} \left(\frac{a+b}{r_1} \right) - h \sin \alpha \leq x \leq M - (r_1 + d)$		

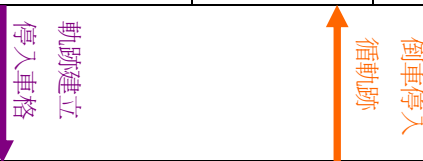
(二)倒車入庫(垂直停車)反向循軌跡建立

1.直行軌跡

動點	軌跡	條件	備註
Tl_2	$x = -(b \times \cot\theta)$ $0 \leq y \leq h$	前進 h	h 將 滿足 $\overline{PG'} > \overline{PY}$
Tr_2	$x = -r_1 = -(b \cot\theta - d)$ $0 \leq y \leq h$		
E	$x = -(b \times \cot\theta)$ $a + b \leq y \leq a + b + h$		

2.右轉軌跡

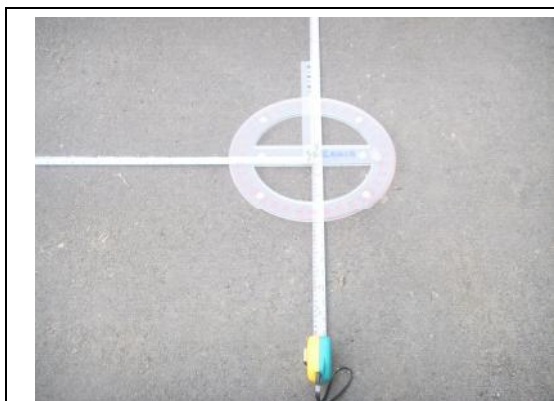
動點	軌跡	條件	備註
Tl'_2	$y = \sqrt{(r_1 + d)^2 - x^2} + h$ $-b \times \cot\theta \leq x \leq 0$	$\overline{PG'} > \overline{PY}$ $G''_y > \frac{s}{10}n - c$	$G'' : (x - 0)^2 + (y - h)^2 = r_1^2 + c^2$
Tr'_2	$y = \sqrt{r_1^2 - x^2} + h$ $-(b \times \cot\theta - d) \leq x \leq 0$		
E'	$y = \sqrt{R^2 - x^2} + h$ $-b \cot\theta \leq x \leq a + b$		



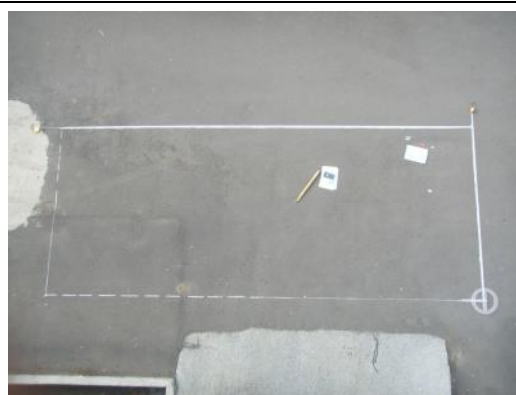
陸、討論

一. 模擬圖說

我們以實際的模擬來討論此研究。在校園中建立一個模擬車格，以我們推算出的公式，畫出車子的行進軌跡。



(圖三)



(圖四)

首先，我們使用量角器與皮尺，做出停車格四個角的垂直（圖三）。用粉筆沿著皮尺畫出停車格 $6m \times 2.5m$ 的四邊（圖四）。

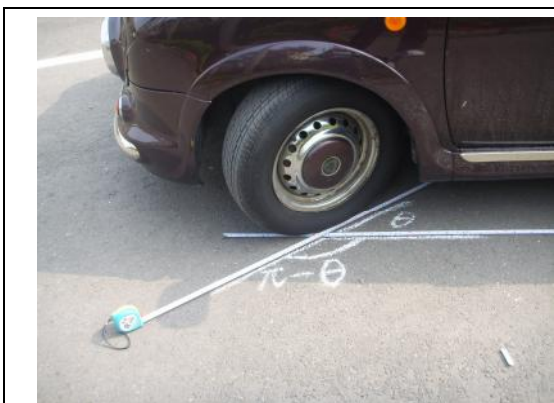


(圖五)



(圖六)

用白色膠帶框出停車格的四周，使其輪廓明顯（圖五）。再次使用量角器，檢查停車格的每一角是否為直角（圖六）。



(圖七)



(圖八)

實際轉動車前輪，測得其最大角度為 35° ，符合先前設定的 θ 值（圖七、八）。



(圖九)



(圖十)

以皮尺測量出停車格的長是否為 6 公尺，並將它等分成 20 等份，使每一小格之間距皆為 30cm(圖九、十)。



(圖十一)

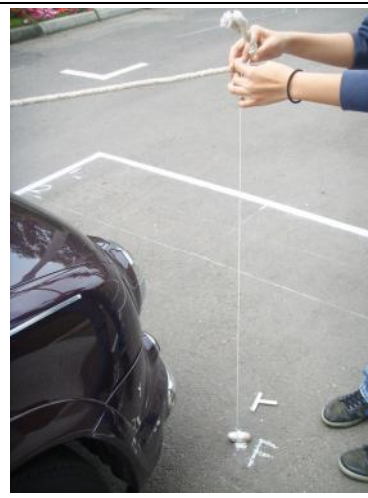


(圖十二)

利用粉筆灰塗抹於棉線上，並以其連接車格邊的 20 個等分點，用力彈之，使粉筆灰清楚的落於地板上，形成 20 條直線 (圖十一)。將車子停入至第 17 條線上 (參考肆-三-(七))，並置中 (圖十二)。



(圖十三)



(圖十四)

我們從右前輪拉垂直線使其與二後輪連線交於圓心 O (圖十三)，才能做後續軌跡建立。再將車右前角 F 與圓心 O 連線確認最小迴轉半徑以利繪圖。

接下來，利用鉛垂線與童軍繩拉出車子的最小迴轉半徑 $R = \overline{OF}$ (圖十四)。

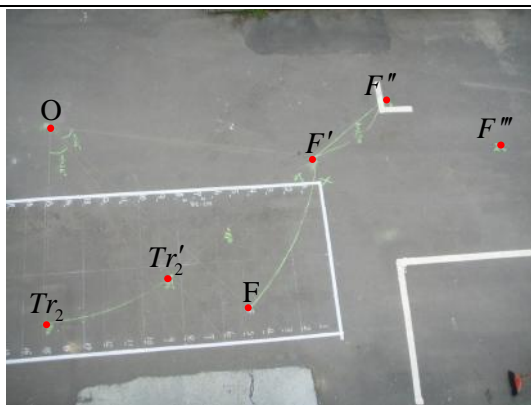


(圖十五)

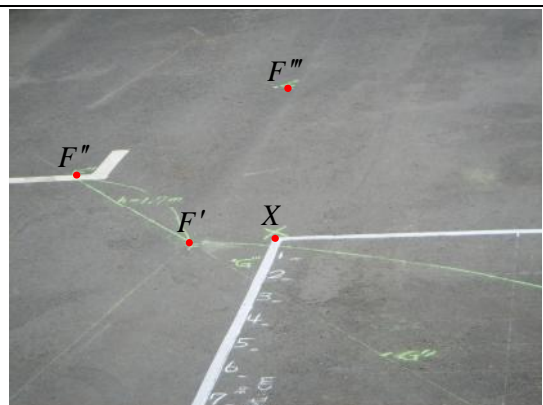


(圖十六)

經計算得 α (車子向左轉動且出格之最小角) 為 36° 後，我們便從 F 點畫出一圓心角為 36° 的弧線，是為車子 F 點出格行進路線至 F' 點 (圖十五、十六)。



(圖十七)

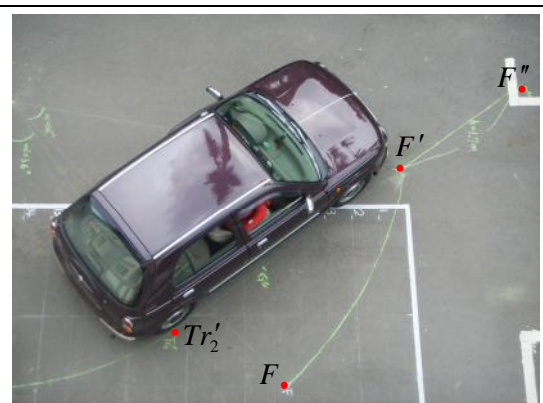


(圖十八)

我們又畫出 F' 前進 h 的點，為 F'' ， h 經計算為 1.7m 。 F''' 為車子右後角完全出格後，車右前角的點 (圖十七、八)。



(圖十九)

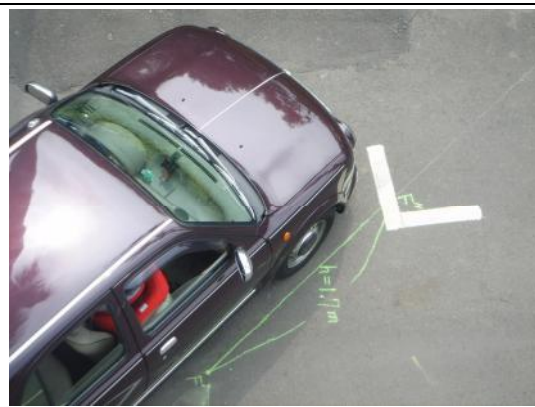


(圖二十)

實際將車輛停入車格置中，並倒車至第 17 條等分線上，確實操作一次，以瞭解所建立數理軌跡之可行性 (圖十九)。將車子輪胎轉至最大角度，將車子向前開，確認是否依循所建軌跡，車右前角至 F' 點，右後輪至 Tr_2' 點，完成第一步驟 (圖二十)。

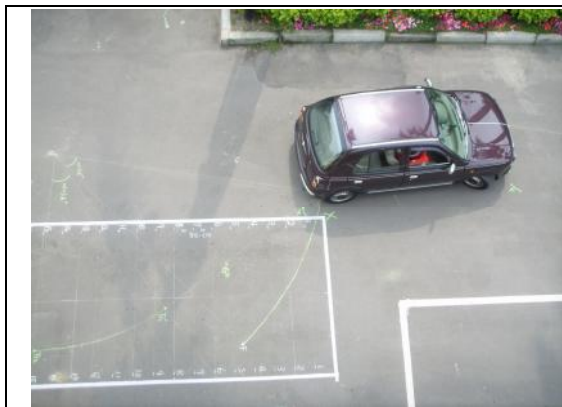


(圖二十一)

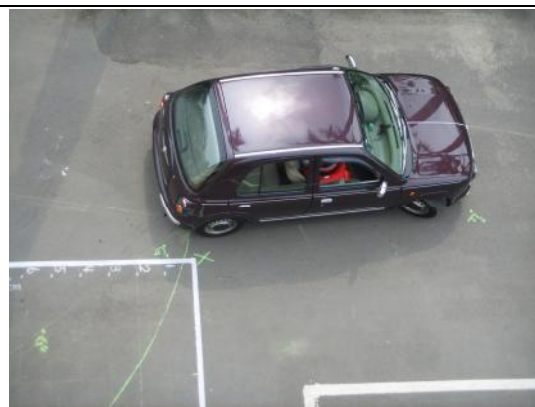


(圖二十二)

車子向前開 h 至 F'' ，完成第二步驟 (圖二十一、二十二)。



(圖二十三)



(圖二十四)

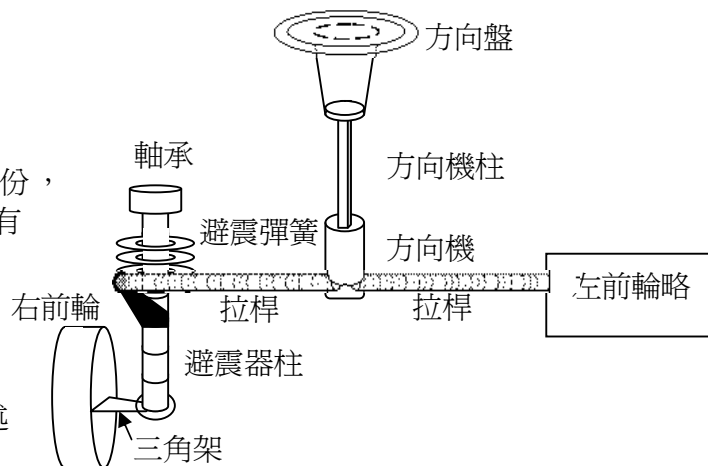
前輪向右轉動至最大角度，車輛向前恰開出車格，且右前角落於 F'''' 點上，完成第三步驟 (圖二十三、二十四)。

我們推算出車子要如何一次順利開出車格的路徑，且不撞到任何異物。希望未來能運用電腦系統運算路邊停車或倒車入庫時的軌跡，甚至完全交由電腦系統導航，有助於駕駛執行自動停車系統。

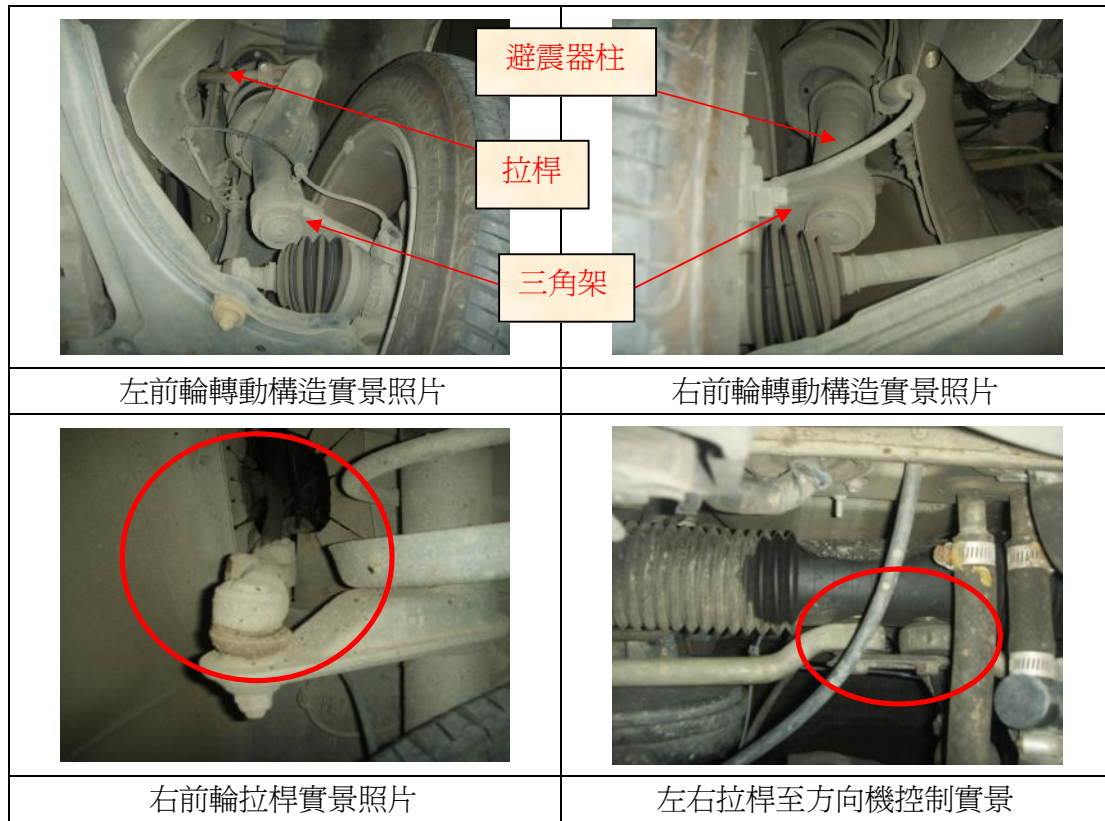
二、最小迴轉半徑誤差修正

(一) 汽車轉動結構分析

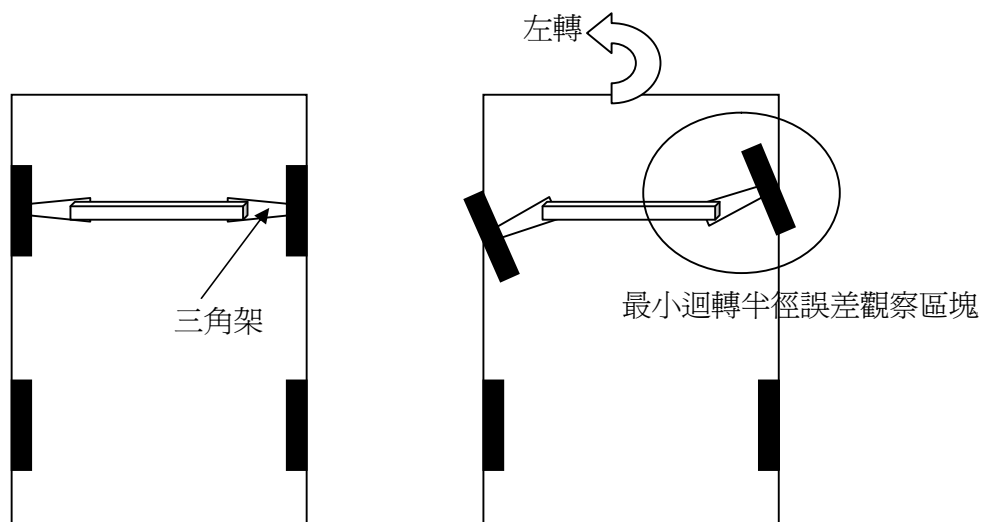
本研究在計算最小迴轉半徑部份，我們考量部份數據和實際車輛手冊有誤差，在實際觀察車輛後，也發現前車輪轉動是以車內部軸承所控制，並非我們先前所預設的前輪轉動中心為輪胎圓心 (輪胎中心)，惟此部份之論述尚有修正之必要，將於下作探討分析。如右圖所示，前輪轉動之結構為：「方向盤」轉動「方向機柱」並由「方向機」控制左右「拉桿」，再由「拉桿」牽引「避震彈簧柱」與「軸承」，最後促使「三角架」連動左右前輪輪盤，產生車輛轉動之效果。



汽車轉向系統示意圖 (車頭前觀察前視圖)



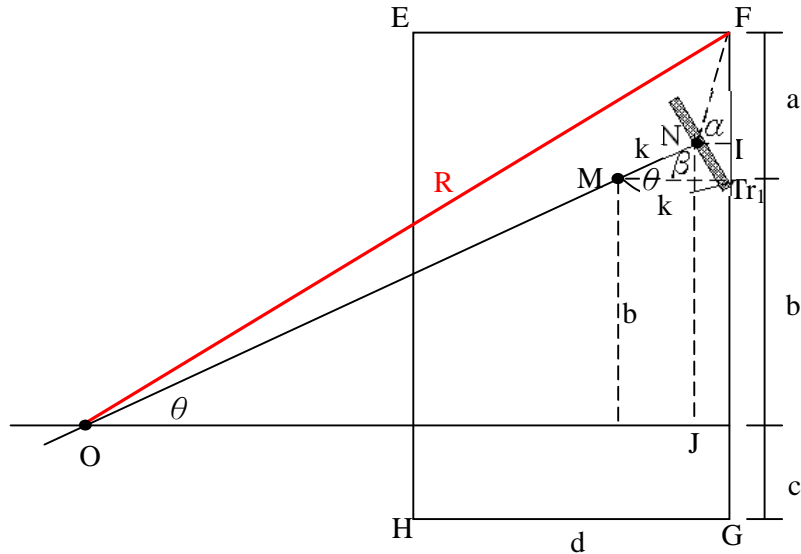
於下圖中加強前輪轉動時轉動中心為「避震彈簧柱」或「軸承」之概念，非先前所設定的輪胎中心，此部份所造成的誤差大小依前輪轉動角度之大小而定，而輪胎中心被三角架所帶離之偏差控制，應受限於三角架之長度，故欲降低計算最小迴轉半徑所產生之誤差，必須將三角架長度列入考量變因，始能獲致更精準之最小迴轉半徑數據。



汽車轉向左轉示意圖（車頂俯視圖）

(二)三角架長度 (k) 代入最小迴轉半徑計算

實際參考各家車輛大廠之駕駛手冊，並未發現有此一數據之提供，且於實際模擬測量時有其困難度及危險性，故本研究未將含有三角架數據之計算概念施行於實際模擬當中，僅於下進行計算探討分析。



汽車轉向最小迴轉半徑計算示意圖

若給定軸承 (M) 至右前輪中心 (Tr₁) 之距離 k 及前輪轉動角度 θ 時，可較精確計算車輛之最小迴轉半徑 (R)。假設右輪左轉時，輪心 (Tr₁) 轉至 N 之位置。

在直角 $\triangle FNI$ 中

$$\overline{FI} = a - k \sin \theta$$

$$\overline{NI} = k - k \cos \theta$$

$$\text{則 } \overline{NF} = \sqrt{\overline{FI}^2 + \overline{NI}^2} = \sqrt{(a - k \sin \theta)^2 + (k - k \cos \theta)^2}$$

$$\text{且 } \tan \alpha = \frac{\overline{FI}}{\overline{NI}} = \frac{a - k \sin \theta}{k - k \cos \theta} \quad \text{則 } \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{a - k \sin \theta}{k - k \cos \theta} \right) = \angle FNI$$

在直角 $\triangle ONJ$ 中

$$\overline{NJ} = b + k \sin \theta$$

$$\overline{OJ} = b \cot \theta + k \cos \theta$$

$$\overline{ON} = b \csc \theta + k$$

$$\text{另 } \tan \beta = \frac{\overline{OJ}}{\overline{NJ}} = \frac{b \cot \theta + k \cos \theta}{b + k \sin \theta} \quad \text{則 } \beta = \tan^{-1} \left(\frac{b \cot \theta + k \cos \theta}{b + k \sin \theta} \right) = \angle ONJ$$

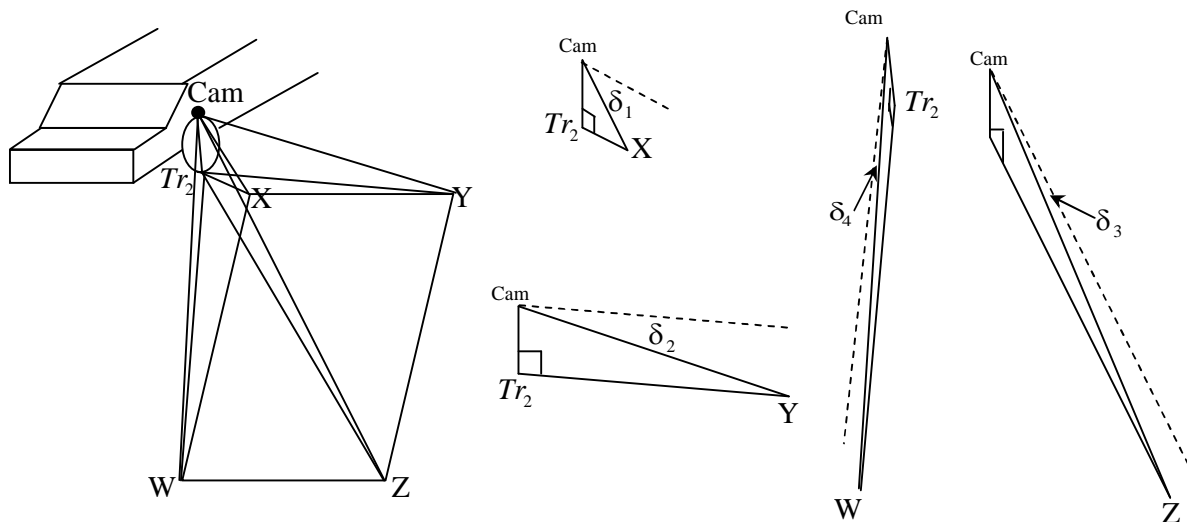
並利用餘弦定理計算最小迴轉半徑 R，得：

$$R = \sqrt{\overline{ON}^2 + \overline{NF}^2 - 2\overline{ON}\overline{NF} \cos \angle ONF}$$

$$R = \sqrt{(b \csc \theta + k)^2 + (a - k \sin \theta)^2 + (k - k \cos \theta)^2 - 2(b \csc \theta + k) \sqrt{(a - k \sin \theta)^2 + (k - k \cos \theta)^2} \cos(270 - \alpha - \beta)}$$

三、自動停車系統之電腦車格辨識概念

如要順利停入車格，除了精確的路邊停車軌跡系統外，還需要路邊車格的辨識系統，才能順利完成。我們假設偵測車格的攝影機架設於右後車輪之上方(Cam)，便可推算出車輛距離車格的遠近，假設攝影機(Cam)辨識影像找出車格線之四處轉折點，並確認四角之射線，包括 $Cam \rightarrow X$ 、 $Cam \rightarrow Y$ 、 $Cam \rightarrow Z$ 、 $Cam \rightarrow W$ 且各射線與水平線之夾角分別為 δ_1 、 δ_2 、 δ_3 與 δ_4 。



電腦車格辨識模擬實景

給定攝影機(Cam)與地面之距為 he ，且 Cam 與 Tr_2 在同一鉛垂線上，因為

$$\tan \delta_1 = \frac{he}{\overline{Tr_2 X}}, \text{ 可得: } \overline{Tr_2 X} = \frac{he}{\tan \delta_1}$$

$$\text{同理可得: } \overline{Tr_2 Y} = \frac{he}{\tan \delta_2}, \overline{Tr_2 Z} = \frac{he}{\tan \delta_3}, \overline{Tr_2 W} = \frac{he}{\tan \delta_4}$$

接下來將立體圖像轉換為平面圖像思考方位及問題，由上空俯視之，Cam 與 Tr_2 共點，
 設 \overline{CamX} 與 \overline{CamY} 所夾的角度為 γ_1 ；

\overline{CamX} 與 \overline{CamZ} 所夾的角度為 γ_2 ；

\overline{CamZ} 與 \overline{CamW} 所夾的角度為 γ_3 。

依餘弦定理之計算可得車格長格之數據如下：

$$\overline{XY} = \sqrt{\overline{Tr_2X}^2 + \overline{Tr_2Y}^2 - 2 \times \overline{Tr_2X} \times \overline{Tr_2Y} \times \cos \gamma_1}$$

$$\overline{YZ} = \sqrt{\overline{Tr_2Y}^2 + \overline{Tr_2Z}^2 - 2 \times \overline{Tr_2Y} \times \overline{Tr_2Z} \times \cos(\gamma_1 + \gamma_2)}$$

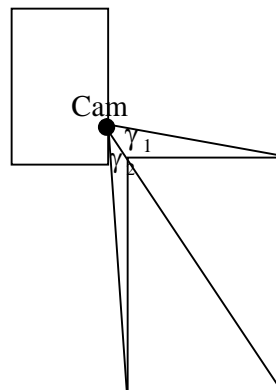
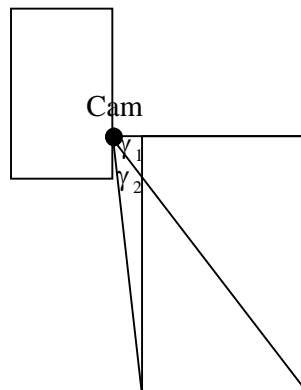
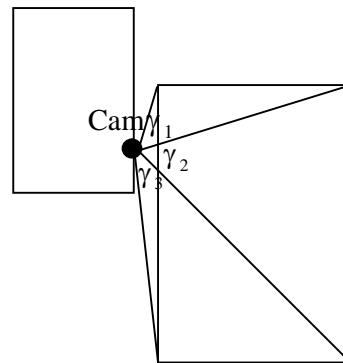
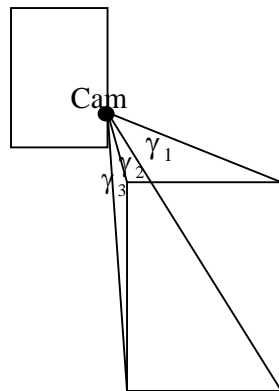
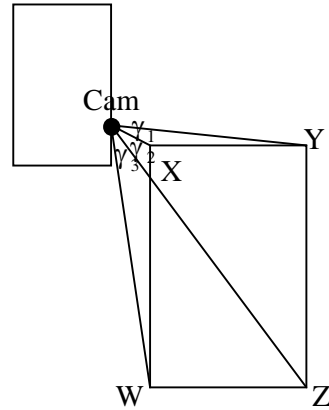
$$\overline{WZ} = \sqrt{\overline{Tr_2W}^2 + \overline{Tr_2Z}^2 - 2 \times \overline{Tr_2W} \times \overline{Tr_2Z} \times \cos \gamma_3}$$

$$\overline{XW} = \sqrt{\overline{Tr_2X}^2 + \overline{Tr_2W}^2 - 2 \times \overline{Tr_2X} \times \overline{Tr_2W} \times \cos(\gamma_2 + \gamma_3)}$$

車格長寬之數據可推得：

$$m = \min(\overline{XY}, \overline{WZ}) \quad n = \min(\overline{YZ}, \overline{XW})$$

但又因車輛倒車時位置前後不相同，所以另有以下四種不同情況需再行探討，此部份在此不另行詳述，僅以圖像呈現之。相對位置資訊供判定是否准予自動停車執行。



最後，我們仍將車輛與車格之相對位置關係以計算式呈現，以為電腦軌跡判讀之依據；

依面積恆定原理，假定 Tr_2 （Cam 共點）至車格邊距離為 $d(Tr_2, \overline{XW})$ ：

$$\frac{1}{2}d(Tr_2, \overline{XW}) \times \overline{XW} = \frac{1}{2} \times \overline{Tr_2X} \times \overline{Tr_2W} \sin(\gamma_2 + \gamma_3)$$

$$\text{則 } d(Tr_2, \overline{XW}) = \frac{\overline{Tr_2X} \times \overline{Tr_2W} \times \sin(\gamma_2 + \gamma_3)}{\overline{XW}}$$

於是，同時可推算出，車輛車尾至車格底線之距離

$$d(Tr_2, \overline{WZ}) = \sqrt{\overline{Tr_2W}^2 - d^2(Tr_2, \overline{XW})}$$

故 Cam 於座標平面中，相對於水平停車時，所衍生之左轉圓心，可將 Cam 之座標表示為：

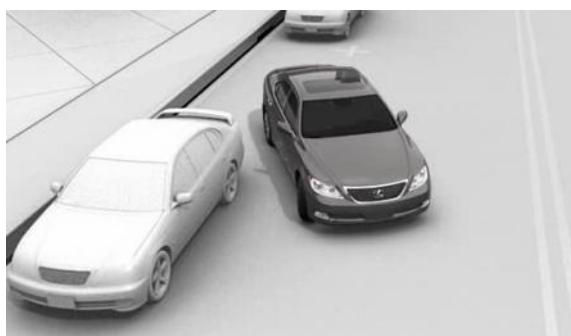
$$Cam \left(r_1 - \frac{m-d}{2} - d(Tr_2, \overline{XW}), d(Tr_2, \overline{WZ}) - (n - \frac{s}{10}n) - c \right)$$

到此，車輛與車格已產生我們所期待的親密關係（相對位置）。

柒、結論

目前研發中或已產出可用之汽車自動停車系統，經查詢各項資料，包括：Seimens VDO 的駕駛人輔助系統「Park Mate」、Volvo 的自動路邊停車的概念車 Evolve、Toyota 推出自動停車選配—「智慧停車輔助(Intelligent Parking Assist)」，配備在其日規的 Prius 混合動力車上、美國上市的 Lexus LS 460 和 Lexus LS 460L 都裝置了「先進停車導引系統(Advanced Parking Guidance System，簡稱 APGS)」、Volkswagen 衍生駕駛人下車遙控車輛倒車系統 (Park Assist Vision) 裝置在 Passat Estate 原型車上等。另外，也有所謂全自動駕駛車輛的推出，例如：BMW 330i 賽車道上自動駕駛、Volkswagen 自動化無駕駛人的 Golf GTi 車款、德國 Opel Vectra 頂級車款全自動偵測系統可在高速公路上以 60 英里時速自動駕駛。

不過，經詢問各車廠，上述各車廠之車型目前在台均未上市，原本想至車廠親窺其貌體驗「科技始終來自於人性」，後來只能上網看看感受一下。



LEXUS LS 460 and LS 460 展示範例 (<http://www.lexus.com> 及 <http://www.youtube.com/watch?v=IkEu-PdVlK0&url=http://car.pala88.com/2007/06/lexus-ls4601.htm>)

以下三張照片則是 Lexus RX 350 之停車輔助系統全景攝影展示範例 (實車照相)，倒車時即時監控後方狀況，並提醒駕駛者如何控制方向盤以利停入 (半自動)，並有防撞感應偵測。



在經過一連串緊鑼密鼓的深入研究之後，我們已經順利找出水平與垂直停車的行進軌跡，只要能搭配電腦車格辨識以及自動定位停車系統執行自動駕駛，將可以有效解決停車操作問題與節省時間。更進一步的，或許在快速前進時剛好有障礙物妨礙行進之路線，還可以用電腦迅速判斷出緊急應變之行車軌跡。除此之外，往高科技之全自動駕馭之夢想更進一步。

目前，車子真的是非常方便和實用，且已普遍應用在生活上的交通工具，但對於我們這些還尚未接觸過車輛的學生而言，它仍是一種十分奧妙的機器。因此，在尚未深入探討研究時，總認為此題目十分棘手，課本也鮮少有相關資料可提供查詢，採用此題目深入研究真是一項十分艱辛的課題。

然而，在打科展說明書的過程中，我們學到平時在學校中鮮少遇到的問題：該如何在有限時間內有效率的分配打字內容，而不影響其他進度；本研究畫圖是一項艱鉅挑戰，如何將平常隨意描繪的略圖畫在電腦軟體，確實下了一番工夫；車輛模擬時由老師駕駛，為完整呈現模擬過程，車子不斷開關進退，花了一天才將計算數據描繪於校園中；另外，學習如何在意見分歧時，以和諧理性的態度溝通解決問題。這不僅是學業、認知上的進步，也使我們在社交、人際方面的應對，有了更透徹的了解。

看見科展成果一一浮現，心中的成就和欣慰在不知不覺中湧出，在研究過程中出現的種種不快與念頭，頓時被拋到九霄雲外去。越艱辛的挑戰，越能激起我們的鬥志。這次的經驗真的十分深刻，它也在我們的國中生涯中留下了不可抹滅的記憶。

捌、參考資料

【書籍雜誌】

木棉。睡夢中學三角。天下文化。2006/1/23。

徐業良。汽車購買指南雜誌。2006 9 月號。史丹福專欄。自動駕駛的第一步 談自動停車技術。

張融哲。三角函數專攻。臺北縣。龍騰。

【網路資訊】

台大 FunLearn。三角函數。

<http://www.wretch.cc/blog/FunLearn>

昌爸數學工作坊

<http://www.mathland.idv.tw/>（完美停車遊戲）

汽車規格配備參考資料。BUICK Rendezvous。

http://www.e-gm.com.tw/buick/rendezvous/spec/d_ultra.asp?sub=d

汽車規格配備參考資料。TOYOTA Wish 2.0。

http://www.toyota.com.tw/2F_vehicle/vehicle_spec.asp?CARSID=9

汽車規格配備參考資料。NISSAN X-TRAIL。

<http://www.nissan.com.tw/car/x-trail/index.asp?level=2&top=2>

汽車規格配備參考資料。TOYOTA VIOS 1.5E。

http://www.toyota.com.tw/2F_vehicle/vehicle_spec.asp?CARSID=5

汽車規格配備參考資料。HYUNDAI ELANTRA。

<http://worldwide.hyundai-motor.com/common/html/showroom/passenger/elantra/spec.html>

神奇自動停車術。福斯。

<http://icar.yam.com/article/mkarticle.php?article=20080424001635>

Park Assist Vision 停車輔助系統。Volkswagen。

<http://news.u-car.com.tw/news-detail.asp?nid=7428>

維基百科（APGS）

http://en.wikipedia.org/wiki/Advanced_Parking_Guidance_System

Auto blog 中文版。自動駕駛的 BMW330i

<http://chinese.autoblog.com/tag/BMW+330i>

國家圖書館全國博碩士論文資訊網。路邊自動停車系統之研究與模擬。唐煬烈。

http://etds.ncl.edu.tw/theabs/site/sh/detail_result.jsp

全球華文行銷知識庫。陳清文。2008/1/28。自動停車系統訴求生手安心。

<http://www.cyberone.tw/ItemDetailPage/MainContent/05MediaContent.aspx?MMContentNoID=48>

[214](#)

【評語】 030426

1. 研究主題實用，生活化。
2. 三角函數相關式子的推導熟練。
3. 如能設計電腦動畫展示動態軌跡，會更生動有趣。
4. 主題、材料具鄉土性。