

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

最佳團隊合作獎

030420

利用循環節位數作質數判斷與因數分解

學校名稱：臺北縣私立及人高級中學

作者： 國二 朱麒安 國二 劉冠緯 國二 魏奕筑 國二 程皓	指導老師： 楊松銘 曾世寬
--	-----------------------------

關鍵詞： 循環數、K 個 1

摘要:

- 壹. 本作品主旨在於利用將 $\frac{1}{n}$ 化爲循環小數後所得之循環節位數來作質數的判斷,並將 n 分解成標準分解式。因質因數 2,3,5 易於判斷,故本文所提的自然數 n 排除 2,3,5 的倍數。
- 貳. 一. $\frac{1}{n}$ 化爲循環小數後所得之循環節位數以 $\langle n \rangle$ 表之,稱爲『 n 的循環數』。
二. $\underbrace{111\cdots 111}_{K\text{個}}$ (K 個 1) 能被 n 整除之最小正整數 K 即爲 $\langle n \rangle$, 本作品以 Excel 程式來求 K 。
- 叁. 一. 若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 不爲整數,則確定 n 不是質數。
二. 若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle} = 1$ 或 2,則確定 n 爲質數。
三. 若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 爲大於 2 的整數,本作品無法立即確定其是否爲質數。
- 肆. 若經第叁點處理,爲一.或三.之狀況,可先將 $\langle n \rangle$ 分解,再檢查小於或等於 \sqrt{n} 的質數中,所有循環數爲 $\langle n \rangle$ 的因數者是否整除 n ,即可判斷 n 爲質數或順利找到其質因數將之分解成標準分解式。

壹. 研究動機

老師曾在課堂上提到，所有有理數都可化為小數，包括有限小數、混循環小數及純循環小數，也介紹了分數與小數互化的方法。在去年暑假，我們就開始研究循環小數，意外發現，循環節位數與因數、倍數之間，蘊藏著美妙而密切的關係。藉著數據的啟發以及老師的引導，我們開始回想，在國一上冊的數學課本第二章中，有個重要的課題是將一個正整數分解成質因數的連乘積。在這過程中，質因數的找尋與質數的判斷是非常重要的。我們嘗試利用循環節位數來研究、解決這些問題。這一年來，困惑與挑戰很多，突破難關與新發現的喜悅也不少，由於老師辛苦熱心的指導，我們每一天都充滿著學習與成長的喜悅。

貳. 研究目的

- 一. 給定一個非 2,3,5 倍數的整數 n , 將 $\frac{1}{n}$ 化為循環小數後探討其循環節位數及其循環之內容。
- 二. 給定一個非 2,3,5 倍數的整數 n , 判定 n 是否為質數。若非質數, 則設法分解成標準分解式。

參. 研究設備及器材

電腦

肆. 研究過程或方法

一 名詞及符號說明：

因質因數 2、3、5 易於判斷，故本作品所研究之正整數 n 排除 2、3、5 的倍數。本文將 $\frac{1}{n}$ 化為循環小數後，所得之循環節位數以 $\langle n \rangle$ 表之，稱為「 n 的循環數」。

$$\langle \text{例} \rangle : \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}, \therefore \langle 7 \rangle = 6$$

$$\frac{1}{13} = 0.\overline{076923}, \therefore \langle 13 \rangle = 6$$

$$\frac{1}{11} = 0.\overline{09}, \therefore \langle 11 \rangle = 2$$

$$\frac{1}{37} = 0.\overline{027}, \therefore \langle 37 \rangle = 3$$

二 將小數化爲分數的方法：

(一) 純循環小數：

<例>將 $0.\overline{251}$ 化爲分數

$$\text{解: 令 } x = 0.\overline{251} = 0.251251251\dots\dots \text{---(1)}$$

$$\text{則 } 1000x = 251.251251251\dots\dots \text{---(2)}$$

$$(2)-(1) \text{ 得 } 999x = 251 \Rightarrow x = \frac{251}{999}$$

(二) 混循環小數:

<例>將 $0.45\overline{13}$ 化爲分數

$$\text{解: 令 } x = 0.45\overline{13} = 0.4513131313\dots\dots \text{---(1)}$$

$$\text{則 } 100x = 45.1313131313\dots\dots \text{---(2)}$$

$$(2)-(1) \text{ 得 } 99x = 45.13 - 0.45 \Rightarrow x = \frac{45.13 - 0.45}{99} = \frac{4513 - 45}{9900}$$

(三) 有限小數

$$\text{<例> } 0.2531 = \frac{2531}{10000}$$

(四) 結論:

- 1.有限小數的分母的質因數只有 2 或 5,反推亦然。
- 2.混循環小數的分母質因數兼有 2 或 5 及其他質因數,反推亦然。
- 3.純循環小數分母的質因數沒有 2 或 5,只有其他的質因數,反推亦然。
- 4.純循環小數化爲分數,若循環節有 K 位,則分母填 K 個 9,分子爲其循環節之內容。

- 5.故若 n 非 2,3,5 之倍數,則 $\frac{1}{n}$ 化爲循環小數,若其循環節有 K 位,循環節內容爲

$$y, \text{ 則 } \frac{1}{n} = \frac{y}{99\dots 9} = \frac{9y_1}{9(\underbrace{111\dots 111}_{K \text{ 個}})} \text{ (因 } (n,9) = 1) = \frac{y_1}{\underbrace{111\dots 111}_{K \text{ 個}}} \text{ 故 } \underbrace{111\dots 111}_{K \text{ 個}} (K \text{ 個 } 1)$$

必爲 n 的倍數, K 即爲 n 的循環數且由 $ny_1 = k \text{ 個 } 1 \Rightarrow y_1 = \frac{k \text{ 個 } 1}{n}$, 故 $\underbrace{111\dots 111}_{K \text{ 個}} (K$

個 1)除以 n 所得之商乘以 9 倍,即為循環節的內容。

<例>：在 Excel 檔案中輸入 271，得 $\langle 271 \rangle = 5$ ，11111 除以 271 的商為 41，將之乘以 9 得 369，故 $\frac{1}{271} = 0.\overline{00369}$ 。

三 循環數的性質

為了方便研究循環節的位數，老師在 Excel 設計一個程式，每次加一個 1 來尋找 k 個 1 能被 n 整除之最小正整數 K ，此即為 $\langle n \rangle$ 。我們發現許多有趣的現象：

現象 1：若 n 是 p 的倍數，則 n 的循環數為 p 的循環數的倍數。

<例> $\langle 7 \rangle = 6$ ， $\langle 119 \rangle = 48$ ，119 為 7 的倍數，則 48 為 6 的倍數。

現象 2：若 p_1, p_2, \dots, p_k 為相異質數，則 $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ 的循環數即為 $\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \dots, \langle p_k \rangle$ 的最小公倍數。

<例 1> $\langle 7 \rangle = 6$ ， $\langle 11 \rangle = 2$ ， $\langle 13 \rangle = 6$ ， $\langle 17 \rangle = 16$ ， $\langle 19 \rangle = 18$ ， $\langle 23 \rangle = 22$ ， $\langle 29 \rangle = 28$ 我們輸入檢驗得 $\langle 7 \times 11 \rangle = [6, 2] = 6$ ， $\langle 7 \times 13 \rangle = [6, 6] = 6$ ， $\langle 7 \times 17 \rangle = [6, 16] = 48$ ， $\langle 11 \times 13 \rangle = [2, 6] = 6$ ， $\langle 17 \times 19 \rangle = [16, 18] = 144$ ， $\langle 13 \times 23 \rangle = [6, 22] = 66$ ， $\langle 7 \times 11 \times 23 \rangle = [6, 2, 22] = 66$ ， $\langle 7 \times 19 \times 29 \rangle = [6, 18, 28] = 252$ ， $\langle 17 \times 23 \times 29 \rangle = [16, 22, 28] = 1232$

現象 3：若 n 的質因數有兩次以上的乘方，亦呈現美好之規律性。

<例> $\langle 11 \rangle = 2$ $\langle 7 \rangle = 6$ $\langle 11 \times 7^2 \rangle = 6 \times 7$
 $\langle 11^2 \rangle = 2 \times 11$ $\langle 7^2 \rangle = 6 \times 7$ $\langle 11 \times 7^3 \rangle = 6 \times 7^2$
 $\langle 11^3 \rangle = 2 \times 11^2$ $\langle 7^3 \rangle = 6 \times 7^2$ $\langle 11^2 \times 7^3 \rangle = 6 \times 11 \times 7^2$
 $\langle 11^4 \rangle = 2 \times 11^3$ $\langle 7^4 \rangle = 6 \times 7^3$ $\langle 11^3 \times 7^3 \rangle = 6 \times 11^2 \times 7^2$
 $\langle 7 \times 19^2 \times 17 \rangle = [\langle 7 \rangle, \langle 19 \rangle, \langle 17 \rangle] \times 19$
 $\langle 7^2 \times 19^2 \times 17 \rangle = [\langle 7 \rangle, \langle 19 \rangle, \langle 17 \rangle] \times 7 \times 19$
 $\langle 7^2 \times 19 \times 17^2 \rangle = [\langle 7 \rangle, \langle 19 \rangle, \langle 17 \rangle] \times 7 \times 17$

現象 4：若 p 為質數，則 $\langle p \rangle$ 為 $p-1$ 的因數。

<例> $\langle 29 \rangle = 28$ ， $\langle 37 \rangle = 36$ ， $\langle 41 \rangle = 40$ ， $\langle 23 \rangle = 22$ ， $\langle 61 \rangle = 60$ ， $\langle 67 \rangle = 66$ ， $\langle 79 \rangle = 78$ ， $\langle 83 \rangle = 82$ ， $\langle 97 \rangle = 96$ ， $\langle 101 \rangle = 100$ ， $\langle 103 \rangle = 102$

綜合以上現象，我們歸納循環數之性質，並說明如下：

(一) p 為質數，若 $p \mid n$ 則 $\langle p \rangle \mid \langle n \rangle$

<例> 若 $\langle n \rangle = 12 \Rightarrow 12$ 個 1 為 n 的倍數 $\Rightarrow 12$ 個 1 是 p 的倍數，若 $\langle p \rangle$ 不整除 12，如 $\langle p \rangle = 5$ ，則 $p \mid 11111$ 則 111111111111 與 111111111100 皆為 p 的倍數 \Rightarrow 兩式相減得 11 為 p 的倍數與 $\langle p \rangle = 5$ 矛盾，故為 $\langle p \rangle$ 必為 12 的因數，其餘例子皆仿此例可證。

(二) 若 $n = p_1 p_2$, 其中 p_1, p_2 皆為質數, 則 $\langle n \rangle = [\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle]$
 <說明>由(一)可知 $\langle n \rangle$ 為 $\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle$ 之公倍數。
 但 $[\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle]$ 個 1 既是 p_1 倍數, 又是 p_2 倍數故為
 $[p_1, p_2] = p_1 p_2 = n$ 的倍數。所以 $\langle n \rangle$ 即為 $[\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle]$
 <例>若 $n = 7 \times 23, \langle 7 \rangle = 6, \langle 23 \rangle = 22. \therefore \langle n \rangle = [6, 22] = 66$

(三) 若 $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, 其中 p_1, p_2, \cdots, p_k 皆為質數, 則
 $\langle n \rangle = [\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \cdots, \langle p_k \rangle]$
 <說明> $\langle n \rangle$ 為 $\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \cdots, \langle p_k \rangle$ 之公倍數
 $\therefore \langle n \rangle = [\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \cdots, \langle p_n \rangle]$ 的倍數,
 但 $[\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \cdots, \langle p_k \rangle]$ 個 1 是 p_1, p_2, \cdots, p_k 的公倍數, 故為
 $[p_1, p_2, \cdots, p_k] = p_1 p_2 \cdots p_k = n$ 的倍數。 $\therefore \langle n \rangle = [\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \cdots, \langle p_n \rangle]$

(四) 若 $n = P_1^{r_1} \times P_2^{r_2} \times P_3^{r_3} \times \cdots \times P_k^{r_k}$, 則
 $\langle n \rangle = [\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \cdots, \langle p_k \rangle] \times P_1^{r_1-1} \times P_2^{r_2-1} \times P_3^{r_3-1} \times \cdots \times P_k^{r_k-1}$
 (本推論由實驗數據推測, 本作品未有完整論證)
 由於試驗數據眾多, 皆支持此一推測, 故大膽猜測, 其餘數據不一列出。

四 利用循環數作質數判斷

在操作電腦輸入質數 p 找其循環數時, 發現循環數皆為 $p-1$ 的因數, 於是便輸入大量數據檢驗, 結果更顯示其一致性, 當時便想推敲其原因, 但一直未有突破, 後來老師終於在費馬小定理中, 得到此一結果的理論支持, 經老師詳加解說後, 終於解開我們心中的疑惑。

[費馬小定理]: 若 p 為質數, 且 p 不整除 a , 則 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
 故若 p 為非 2, 3, 5 之質數, 取 $a = 10$, 則 $10^{p-1} - 1 = (p-1)$ 個 9 必為 p 的倍數。 $\therefore (p-1)$ 個 1 必為 p 的倍數, 所以 $\langle p \rangle$ 必為 $p-1$ 的因數, 所以若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 不是整數, 則可確定 n 不是質數。

原本我們猜想, 是否所有的合數的 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 值皆非整數, 剛開始輸入許多數據, 如 $13 \times 17, 29 \times 11 \times 53, \cdots$ 等, 皆支持此一推測, 後來終於找到一些反例, 如 11 個 1, \cdots 等, 於是我們便轉而尋找是否在某些特殊情況下, 可藉 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 的值來確定 n 為質數, 終於有些小成果:

(一) 若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 不是整數, 則確定 n 不是質數。

(二) 若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle} = 1$ 或 2 , 則確定 n 為質數。

<證明>

1. 首先證明 $n = p_1 \times p_2$, 其中 p_1, p_2 為相異質數的狀況, 若

$\langle p_1 \rangle = a_1, \langle p_2 \rangle = a_2$, 則 $p_1 = t_1 a_1 + 1, p_2 = t_2 a_2 + 1$, 其中 t_1, t_2 為正整數,

$\frac{n-1}{\langle n \rangle} = \frac{t_1 t_2 a_1 a_2 + t_1 a_1 + t_2 a_2}{[a_1, a_2]} = t_1 t_2 (a_1, a_2) + \frac{t_1 a_1 + t_2 a_2}{[a_1, a_2]}$, 若此數值為整數且

t_1, t_2 不全為 1 , 則此數必大於等於 3 ; 若此數值為整數且 $t_1 = t_2 = 1$, 則因

p_1, p_2 皆為奇數, 故 a_1, a_2 皆為偶數, 所以 $(a_1, a_2) \geq 2, \therefore \frac{n-1}{\langle n \rangle} \geq 3$ 得證。

2. 其次證明一般狀況, $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, 其中 p_i 為相異質數, $1 \leq i \leq k$, 令

$\langle p_i \rangle = a_i$, 則 $p_i = t_i a_i + 1, 1 \leq i \leq k$, 其中 $t_i (1 \leq i \leq k)$ 皆為正整數, 若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$

為整數, 則

$\frac{n-1}{\langle n \rangle} = \frac{(t_1 a_1 + 1)(t_2 a_2 + 1) \cdots (t_k a_k + 1) - 1}{[a_1, a_2, \cdots, a_n]} \geq t_1 t_2 \cdots t_k (a_1, a_2, \cdots, a_k) + 1$, 若

t_1, t_2, \cdots, t_k 不全為 1 , 則 $\frac{n-1}{\langle n \rangle} \geq 3$, 若 $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 1$, 則 a_1, a_2, \cdots, a_k 全為

偶數, 故 $(a_1, a_2, \cdots, a_k) \geq 2$, 故 $\frac{n-1}{\langle n \rangle} \geq 3$ 。

3. 由 1, 2 知, 若 n 非質數, 且 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 為整數, 則 $\frac{n-1}{\langle n \rangle} \geq 3$ 必成立, 所以, 若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle} = 1$

或 2 , 則 n 為質數。

伍. 研究成果：

一. 本作品以設計 Excel 程式每次加一個 1 , 來求 $\underbrace{111 \cdots 111}_{K \text{ 個}}$ (K 個 1) 能被 n 整除

之最小整數 K , 並紀錄所求得之商, 所以商 $\times 9$, 即得循環節之內容, 例如將

$n = 13$ 輸入, 得 $\langle 13 \rangle = 6$, 6 個 1 除以 13 的商為 8547 , 將之乘以 9 , 得 76923

所以 $\frac{1}{13} = \overline{0.076923}$ 。

二. 若 p_1, p_2, \cdots, p_k 皆為質數, 則

(一) $\langle P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots \times P_k \rangle = [\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \cdots, \langle p_k \rangle]$

(二) (推測) $\langle P_1^{r_1} \times P_2^{r_2} \times P_3^{r_3} \times \cdots \times P_k^{r_k} \rangle = [\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \cdots, \langle p_k \rangle]$

$\times p_1^{r_1-1} \times p_2^{r_2-1} \times \cdots \times p_k^{r_k-1}$ 。

三. (一) 若 n 為質數, 則 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 必為整數, 故若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 非整數, 則確定 n 不是質數。

(二) 若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle} = 1$ 或 2 , 則確定 n 為質數。

(三) 若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 為大於 2 的整數, 本作品無法立即確定其為質數否。

四. 藉由參閱高中教材第一冊第一章(龍騰版)得知, 若 n 非質數, 則 n 必有小於或等於 \sqrt{n} 的質因數, 原本要確認 n 為質數, 必須要檢查小於或等於 \sqrt{n} 的質數都不能整除 n , 但由本作品之結果, 要檢驗 n 為質數, 只需檢查小於或等於 \sqrt{n} 內所有循環數整除 $\langle n \rangle$ 的質數都不能整除 n , 即可確定 n 為質數。

陸. 討論

一. 我們藉由嘗試因數分解 $\underbrace{111 \cdots 111}_{K \text{ 個}}$ (K 個 1) 來尋找循環數為 K 的質數, 發現

一些有趣的現象。在以下例子中, 我們將循環數以括弧標記在質數下方, (請運用“數學科展環數驗證”的 Excel 檔驗證)

例如 37 ← 質數

(3) ← 循環數

$$\begin{array}{l} \langle \text{例} \rangle \quad 111 = 3 \times 37 \qquad 1111 = 11 \times 101 \qquad 11111 = 41 \times 271 \\ \qquad \qquad \qquad (3) \qquad \qquad \qquad (2) \quad (4) \qquad \qquad \qquad (5) \quad (5) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6 \text{ 個 } 1 = 3 \times 11 \times 37 \times 7 \times 13 \qquad 7 \text{ 個 } 1 = 239 \times 4649 \\ \qquad \qquad \qquad (2) \quad (3) \quad (6) \quad (6) \qquad \qquad \qquad (7) \quad (7) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 \text{ 個 } 1 = 11 \times 101 \times 73 \times 137 \qquad 9 \text{ 個 } 1 = 3^2 \times 37 \times 333667 \\ \qquad \qquad \qquad (2) \quad (4) \quad (8) \quad (8) \qquad \qquad \qquad (3) \quad (9) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10 \text{ 個 } 1 = 11 \times 41 \times 271 \times 9091 \qquad 11 \text{ 個 } 1 = 21649 \times 513239 \\ \qquad \qquad \qquad (2) \quad (5) \quad (5) \quad (10) \qquad \qquad \qquad (11) \quad (11) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12 \text{ 個 } 1 = 3 \times 11 \times 37 \times 101 \times 7 \times 13 \times 9901 \\ \qquad \qquad \qquad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (6) \quad (6) \quad (12) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 13 \text{ 個 } 1 = 53 \times 79 \times 265371653 \\ \qquad \qquad \qquad (13) \quad (13) \quad (13) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 14 \text{ 個 } 1 = 11 \times 239 \times 4649 \times 909091 \\ \qquad \qquad \qquad (2) \quad (7) \quad (7) \quad (14) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 15 \text{ 個 } 1 = 3 \times 37 \times 41 \times 271 \times 31 \times 2906161 \\ \qquad \qquad \qquad (3) \quad (5) \quad (5) \quad (15) \quad (15) \end{array}$$

16 個 $1=11 \times 101 \times 73 \times 137 \times 17 \times 5882353$

(2) (4) (8) (8) (16) (16)

18 個 $1=9 \times 11 \times 37 \times 7 \times 13 \times 333667 \times 19 \times 52579$

(2) (3) (6) (6) (9) (18) (18)

20 個 $1=11 \times 101 \times 41 \times 271 \times 9091 \times 3541 \times 27961$

(2) (4) (5) (5) (10) (20) (20)

除了 K 為 3 的倍數外, $\underbrace{111 \cdots 111}_{K \text{ 個}}$ (K 個 1) 即分解為所有循環數為 K 的因數者

的質因數乘積。

二. 在一. 的作法中, 我們利用本作品所得結論, 加速確定質數的速度, 現引幾個例子說明之:

(一). 9 個 1 明顯為 9 及 37 的倍數, 將其除以 9×37 得

9 個 $1 = 3^2 \times 37 \times 333667$, $\sqrt{333667}$ 約為 577, 但在循環數為 3 或 9 的質

數中, 找不到小於或等於 577 的質數, 故可立刻判斷 333667 為質數。(因若它非質數, 必有一個小於或等於 577 且循環數為 $\langle 333667 \rangle = 9$ 的因數的質因數, 但由本作品所附 30000 內的循環數表, 顯示它是不存在的)。

在找 9 個 1 的質因數過程中, 若我們的推測理論

$$\langle P_1^{r_1} \times P_2^{r_2} \times P_3^{r_3} \times \cdots \times P_k^{r_k} \rangle = [\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle \cdots, \langle p_k \rangle] \times p_1^{r_1-1} \times p_2^{r_2-1} \times \cdots \times p_k^{r_k-1}$$

是正確的, 則質因數 37 不必重複檢驗, 因若 37^2 為 9 個 1 因數, 則 9 個 1 的循環數必為 3×37 的倍數, 這是矛盾的。

(二). 在分解 13 個 1 的過程中, 找到質因數 53, 79,

13 個 $1 = 53 \times 79 \times 265371653$, 由於 30000 內的質數, 除了 53, 79 外, 已無循環數為 13 者, 且 13 個 1 不可能有 $53^2, 79^2$ 之因數, 故確定 265371653 為質數。

三. 我們嘗試利用循環數來研究兩數的最大公因數與最小公倍數的問題。請參考 $\langle\langle$ 求最大公因數和最小公倍數 $\rangle\rangle$ 。

\langle 法 1 \rangle 要算 $[p, q]$ 及 (p, q) , 在循環數表中找兩質數 a, b 使 $\langle a \rangle = p, \langle b \rangle = q$, 則程

式中 $\langle ab \rangle$ 即為 $[p, q]$, 而欄位 $\frac{\langle a \rangle \times \langle b \rangle}{\langle ab \rangle}$ 即顯示 (p, q) 。

\langle 例 1 \rangle 求 $[316, 708]$ 及 $(316, 708)$

在循環數表中找到 $\langle 709 \rangle = 708, \langle 5689 \rangle = 316$, 取 $a = 5689, b = 709$, 輸入即讀得 $[316, 708] = 55932, (316, 708) = 4$ 。

\langle 例 2 \rangle 求 $[1788, 4596]$ 及 $(1788, 4596)$

在循環數表中找到 $\langle 1789 \rangle = 1788, \langle 14869 \rangle = 4596$, 取 $a = 1789, b = 14869$, 輸入即讀得 $[1788, 4596] = 26600641, (1788, 4596) = 12$ 。

循環數表越完全, 本方法才越能顯示其效用。

<法 2><例 1>要算 $d=(613,5517)$

在程式中輸入 $a=613, b=5517$ ，欄位 $\frac{\langle ab \rangle}{[\langle a \rangle, \langle b \rangle]}$ 即為 d ，因 $\langle a \rangle=51, \langle b \rangle=153$ ，

$\therefore [\langle a \rangle, \langle b \rangle]=153 \therefore \frac{93789}{153}=613$ ，即為 $(613,5517)$ 。

<例 2>要算 $(1771,3353)$

輸入 $a=1771, b=3353$ ，得 $\langle a \rangle=66, \langle b \rangle=1434, \langle ab \rangle=110418$ 。所以，欄位

$\frac{\langle ab \rangle}{[\langle a \rangle, \langle b \rangle]} = \frac{110418}{15774} = 7$ 即為 $(1771,3353)$ 。

<說明>：以 $P_0^{r_0}, Q_0^{t_0}$ 為 (a,b) 為例來說明：

設 a, b 的標準分解式分別為

$$a = P_0^{r_0} Q_0^{t_0} P_1^{r_1} P_2^{r_2} \cdots P_k^{r_k}, \text{ 則 } \langle a \rangle = [\langle P_0 \rangle, \langle Q_0 \rangle, \langle P_1 \rangle, \cdots, \langle P_k \rangle] P_0^{r_0-1} Q_0^{t_0-1} P_1^{r_1-1} \cdots P_k^{r_k-1}$$

$$b = P_0^{r_0+l_1} Q_0^{t_0+l_2} Q_1^{t_1} Q_2^{t_2} \cdots Q_m^{t_m}, \text{ 則}$$

$$\langle b \rangle = [\langle P_0 \rangle, \langle Q_0 \rangle, \langle Q_1 \rangle, \cdots, \langle Q_m \rangle] P_0^{r_0-1+l_1} Q_0^{t_0-1+l_2} Q_1^{t_1-1} \cdots Q_m^{t_m-1}$$

其中 $l_1 \geq 0, l_2 \geq 0$

令 $[\langle P_0 \rangle, \langle Q_0 \rangle, \langle P_1 \rangle, \cdots, \langle P_k \rangle] = dh$

$[\langle P_0 \rangle, \langle Q_0 \rangle, \langle Q_1 \rangle, \cdots, \langle Q_m \rangle] = dk$ 且 $(h,k)=1$ ，

$$\text{且令 } P_1^{r_1-1} P_2^{r_2-1} \cdots P_k^{r_k-1} = P, Q_1^{t_1-1} Q_2^{t_2-1} \cdots Q_m^{t_m-1} = Q$$

$$\text{則 } \langle ab \rangle = [\langle P_0 \rangle, \langle Q_0 \rangle, \langle P_1 \rangle, \cdots, \langle P_k \rangle, \langle Q_1 \rangle, \cdots, \langle Q_m \rangle] P_0^{2r_0+l_1-1} Q_0^{2t_0+l_2-1} P Q$$

$$= dhk \times P_0^{2r_0+l_1-1} \times Q_0^{2t_0+l_2-1} \times P \times Q$$

$$[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = dhk \times P_0^{r_0-1+l_1} \times Q_0^{t_0-1+l_2} \times P \times Q$$

$$\therefore \frac{\langle ab \rangle}{[\langle a \rangle, \langle b \rangle]} = \frac{dhk P_0^{2r_0+l_1-1} Q_0^{2t_0+l_2-1} P Q}{dhk P_0^{r_0-1+l_1} Q_0^{t_0-1+l_2} P Q} = P_0^{r_0} Q_0^{t_0} \quad \text{得證}$$

四. 分解 $\underbrace{111 \cdots 111}_{K \text{ 個}}$ (K 個 1), 是否必能找到循環數為 K 質數? 此問題本作品無法

證明為真, 也無法找到反例。

其次, 對任意整數 K , 是否必有一循環數為 K 的質數?

五. 使 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 為大於 2 之整數的合數 n , 是否有其規律性可篩選?

柒. 結論

一.藉由循環數的性質,我們可以快速得知 $\frac{1}{13^2 \times 19 \times 333667}$ 化為循環小數
(6) (18) (9)

後,循環節 $[6,9,18] \times 13 = 18 \times 13 = 234$ 位並可得知其循環數內容。

二.藉由 $\frac{n-1}{\langle n \rangle} = 1$ 或 2 可立刻確定 n 為質數。

三.若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 不是整數,可確定 n 非質數,並藉由找出小於或等於 \sqrt{n} 且循環數為

$\langle n \rangle$ 的因數者來除 n ,可一一找出 n 的質因數,從而將 n 分解成標準分解式。

四.若 $\frac{n-1}{\langle n \rangle}$ 為大於 2 的整數,亦可藉同三.之方法找出 n 的質因數將之分解或

確定 n 為質數。

五.循環數表建立得越完全,則功能越大,找質數越快,但質數有無限多個,所以我們的工作是永無止境,且希望是眾志成城的,希望大家一起幫忙,讓本作品更加完整充實。

捌. 參考書目

1. Ivan Niven Herbert S.Zuckerman Hugh L.Montgomery. THE THEORY OF NUMBERS。
- 2.高中數學第一冊(龍騰版)。
- 3.作者:波莎曼提爾著,葉偉文譯,神奇數學 117,天下文化出版社。

【評語】 030420

1. 以國中數學探討 $\langle n \rangle$ 與 n 之間的關係，努力值得肯定。
2. 團隊合作良好。
3. $(n - 1 / \langle n \rangle) > 2$ 的情形時，判別 n 是否為質數的計算速度不明顯會比古法快，因為 $\langle n \rangle$ 的數值表的建立已頗費時。
4. $\langle 487 \rangle = \langle 487^2 \rangle = 486$ 推翻”推測結論”。