中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030419

單位分數分解Ⅱ

學校名稱：臺北縣立淡水國民中學

作者：	指導老師：
國二 張展嘉 國二 柯丞舫 國二 簡劭伃	蔡燦輝

關鍵詞：　單位分數、厄多斯與斯特勞斯猜想、因式分解

單位分數分解Ⅱ

壹、摘要：

對於「厄多斯與斯特勞斯猜想」，一直以來皆尚未有人破解。但研究價值未減，我們受其吸引先後做出兩份作品。

第一份針對四十五屆中小學國展第三名作品做改進。發現其內容太複雜，不夠精簡，且過於執著全國第三名作品的部份思維，導致代數衍生過多、計算困難，不夠系統化！

所以今年我們改進前份作品：最初思考以完全代數化來精簡內容，並引用方便閱讀紀錄的數學符號運算。沒想到卻也意外找到「厄多斯與斯特勞斯猜想」更有系統地處理方式！也因架構更系統化，讓我們方便以電腦程式來測試。

雖然最後，我們仍然未解決「厄多斯與斯特勞斯猜想」，不過卻在目前找到的資料中，得到最有系統的解題架構，並將此猜想轉化成另一個存在性問題。

貳、研究動機：

一、作品與教材相關性：

(一) 翰林版第一冊第一章「整數與數線」：應用到「整數的乘除」。

(二) 翰林版第一冊第二章「分數的運算」：應用到「分數的加減」。

(三) 翰林版第三冊第三章「因式分解」：應用到「十字交乘法」。

二、完全的代數化：

最初的想法，是要將去年的科展作品的結果，做到完全的代數化。

看看這樣對於解出「厄多斯與斯特勞斯猜想」，是否有正面的幫助。

三、思考已發表作品爲何無法證實「厄多斯與斯特勞斯猜想」：

看了以前發表過的科展作品或教授、前人在這方面的著作後，發現有下列缺點。

缺點一：過份依賴電腦，通常只聲稱保證在某數以下，此猜想是可以成立的。

缺點二：沒有根本的架構或定理，一步一步來處理這個猜想。

缺點三：分類的方式太細，較難以看出分類的完整性。

缺點四：留下的問題不明確。

參、研究目的：

一、$\frac{v}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，且 a、b、v、$n\in\mathrm{N}$，且 $a<b$，求出$\frac{v}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的通解。

二、若 n、$v\in\mathrm{N}$，且 $v\geqq 2$，真分數$\frac{v}{n}$爲最簡分數，則$\frac{v}{n}$定可分解成 v 個以內單位分數和。

三、若 $n=4k+1$，且 k、$n\in\mathrm{N}$，則$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+f}+\frac{4f-1}{n(k+f)}$，且 $f\in\mathrm{N}$。

四、試圖將$\frac{4}{n}$分解成 3 個單位分數。

肆、器材：紙、筆、電腦。

伍、研究過程或方法：

一、名詞解釋：

(一) 單位分數定義：

分母爲大於 1 的整數，分子爲 1 的分數，稱爲單位分數，因此也被稱爲「單分子分數」或「單分數」；又由於最早在埃及的蘭特紙草書上發現這種分數，所以也叫「古埃及分數」。

(二) 厄多斯與斯特勞斯猜想：

對任意整數 $n \geq 4$ 而言，不定方程 $\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 均有正整數解。

（a、b、c 不一定是互異的。）

二、思維起源：

去年作品字數太多，因此「精簡內容」爲我們再作此科展主題第一要務。

在去年作品的研究過程，其第一、二、四段，討論到 $\frac{2}{n}$、$\frac{3}{n}$、$\frac{4}{n}$ 分解成兩個單位分數，經過思考，可以將分子**代數化**，可以精簡到三段的內容。

由此思維，我們再將去年作品其它內容，加強「代數化」的思維，使得「精簡內容」更能落實。

而充分代數化的過程中，意外發現：**「代數化」**不只能「精簡內容」，更能「擴大適用性」。

三、$\frac{v}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，且 a、b、v、$n \in \mathrm{N}$，且 $a<b$，真分數 $\frac{v}{n}$ 爲最簡分數，

求出 $\frac{v}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的所有解。（v、n 爲已知數，而 a、b 爲未知數。）

(一) 討論 a 的限制：

1. 想法起源：

由經驗得知（詳見工作日誌－去年作品），當 $\frac{3}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 時，a 的範圍爲 $\frac{n}{3}<a$。

設 $v \in \mathrm{N}$，可知當 $\frac{v}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 時，a 的範圍爲 $\frac{n}{v}<a$。

2. 說明 $a>\frac{n}{v}$。

設 $a \leqq \frac{n}{v}$，又 a、v、$n \in \mathrm{N}$，則 $\frac{1}{a} \geqq \frac{v}{n}$，

又 $\frac{1}{b}>0$（$\because b$ 爲正數），$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{v}{n}$（$\rightarrow\leftarrow$），故最初假設不合，$\therefore a>\frac{n}{v}$。

(二) 想法起源：由前一份作品 P3．(四)得知：

若 $n^2=r\times s$，其中 $r<n<s$，且 r、$s\in N$，當 $\frac{2}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，則 $\begin{cases} a=\frac{n+r}{2} \\ b=\frac{n+s}{2} \end{cases}$。

所以推測：若 $n^2=r\times s$，其中 $r<n<s$，且 r、$s\in N$，當 $\frac{v}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，則 $\begin{cases} a=\frac{n+r}{v} \\ b=\frac{n+s}{v} \end{cases}$。

證明以上的推測：

$\because \frac{v}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，　　$\therefore vab=na+nb$，

$\therefore vab-na-nb=0$，　　$\therefore v^2ab-vna-vnb=0$，

$\therefore v^2ab-vna-vnb+n^2=n^2$，　　$\therefore (va-n)(vb-n)=n^2$，

又 $n^2=r\times s$，其中 $r<n<s$，且 r、$s\in \mathrm{N}$，且 $a<b$，

（$\because a>\frac{n}{v}$，$\therefore va>n$，$\therefore va-n>0$，又 $n^2>0$，$\therefore vb-n>0$，故 r、s 爲正數。）

$\therefore \begin{cases} va-n=r \\ vb-n=s \end{cases}$，　　$\therefore \begin{cases} a=\frac{n+r}{v} \\ b=\frac{n+s}{v} \end{cases}$。

（註 1）$\because n$、r、s、$v\in N$，$\therefore$可以得知 a、b 爲正數。

（註 2）$\because$無法得知 a、b 是否爲整數，$\therefore$此時不能保證（a，b）是否有解。

(三) 確認 a、b 何時有正整數解：

1. $\because$已經確認 a、b 爲正數，

　$\therefore$只要再確認在什麼情況下，a、b 可以爲整數。

2. 證明：a、$b\in \mathrm{Z}$。

(1) 設 $n\equiv t \pmod v$，$\therefore n^2\equiv t^2 \pmod v$。

(2) $\because n\equiv t \pmod v$，$a=\frac{n+r}{v}$，　　$\therefore$若 $a\in \mathrm{Z}$，則 $r\equiv -t \pmod v$，

又 $n^2=r\times s$，$n^2\equiv t^2 \pmod v$，　　$\therefore s\equiv -t \pmod v$，

又 $b=\frac{n+s}{v}$，　　$\therefore$此時 $b\in \mathrm{Z}$。

(3) 承上可知：

①若 $\boldsymbol{n\equiv t \pmod v}$，$\boldsymbol{n^2=r\times s}$，$\boldsymbol{r\equiv -t \pmod v}$，則 $\boldsymbol{s\equiv -t \pmod v}$。

②若 $\boldsymbol{n\equiv t \pmod v}$，$\boldsymbol{n^2}$ 有正因數爲 $\boldsymbol{vm-t}$ 的型式，則（$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$）有正整數解。

(四) 結論：

設 v、$n \in \mathrm{N}$ ，真分數 $\frac{v}{n}$ 爲最簡分數，$\boldsymbol{n \equiv t \ (\mathrm{mod}\ v)}$，

若 $\boldsymbol{n^2}$ **有正因數爲** $\boldsymbol{vm-t}$ **的型式**，則 $\frac{v}{n}$ 可分解成兩個單位分數。

四、若 n、$v \in \mathrm{N}$ ，且 $v \geqq 2$，真分數 $\frac{v}{n}$ 爲最簡分數，則 $\frac{v}{n}$ 定可分解成 v 個以內單位分數。

(一) n、v、t 爲已知數，而 x、y 爲未知數。

若 $\boldsymbol{n \equiv t \ (\mathrm{mod}\ v)}$，$v > t \geq 1$，且 n、v、t、x、$y \in \mathrm{N}$ ，真分數 $\frac{v}{n}$ 爲最簡分數，則

$\frac{v}{n} = \frac{1}{x} + \frac{v-k}{y}$ 一定有解。

1. 想法起源：

前一份作品有兩個成功的經驗：

成功經驗①：當 $n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 3)$，則 $\frac{3}{n} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ ；

成功經驗②：當 $n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$，則 $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ 。

由這兩個成功經驗，可以「代數化」成爲以下猜測：

「當 $n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ v)$，則 $\frac{v}{n} = \frac{1}{x} + \frac{v-1}{y}$ 。」

2. 再由第 1 段的猜測，更徹底「代數化」，可延伸出以下猜測：

「當 $n \equiv t \ (\mathrm{mod}\ v)$，形成 $\frac{v}{n} = \frac{1}{x} + \frac{v-t}{y}$ 。」

3. 求出 x、y 解的型態。

$\because \frac{v}{n} = \frac{1}{x} + \frac{v-t}{y}$ ，　　$\therefore vxy = ny + (v-t)nx$ ，

$\therefore vxy - ny - (v-t)nx = 0$ ，　　$\therefore v^2xy - vny - v(v-t)nx = 0$ ，

$\therefore v^2xy - vny - v(v-t)nx + (v-t)n^2 = (v-t)n^2$ ，

又令 $(v-t)n^2 = r \times s$ ，

$\therefore (vx-n)[vy-(v-t)n] = (v-t)n^2 = r \times s$ ，

$\therefore$ 可令 $\begin{cases} vx - n = r \\ vy - (v-t)n = s \end{cases}$ ，　　$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{n+r}{v} \\ y = \dfrac{(v-t)n+s}{v} \end{cases}$ 。

4. 例如：

$\because \dfrac{5}{7}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{5-2}{y}$ ，　　　　$\therefore 5xy=7y+(5-2)\cdot 7x$ ，

$\therefore 5xy-7y-(5-2)\cdot 7x=0$ ，　　　　$\therefore 5^2xy-5\times 7y-5(5-2)\cdot 7x=0$ ，

$\therefore 5^2xy-5\times 7y-5(5-2)\cdot 7x+(5-2)\cdot 7^2=(5-2)\cdot 7^2$ ，

又令 $(5-2)\cdot 7^2=3\times 49$ ，

$\therefore (5x-7)[5y-(5-2)\cdot 7]=(5-2)\cdot 7^2=3\times 49$ ，

$\therefore \begin{cases} 5x-7=3 \\ 5y-(5-2)\cdot 7=49 \end{cases}$ ，　　　　$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{7+3}{5}=2 \\ y=\dfrac{(5-2)\cdot 7+49}{5}=14 \end{cases}$ 。

5. 說明：$vx-n>0$。

設 $x\leqq\dfrac{n}{v}$ ，又 x、v、$n\in \mathrm{N}$ ，則 $\dfrac{1}{x}\geqq\dfrac{v}{n}$ ，

又 $\dfrac{v-t}{y}>0$（$\because y$ 爲正數，且 $v>t$，），

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{v-t}{y}>\dfrac{v}{n}$ （$\rightarrow\leftarrow$），

故最初假設不合，　$\therefore x>\dfrac{n}{v}$，　又 $v\in \mathrm{N}$ ，　$\therefore vx>n$，

$\therefore vx-n>0$。

6. 說明：r、$s\in \mathrm{N}$ 。

(1) $\because (vx-n)[vy-(v-t)n]=(v-t)n^2$ ，且 $r=(vx-n)>0$，$v>t$， $n\in \mathrm{N}$ ，

$\therefore s=[vy-(v-t)n]>0$。

(2) $\because n$、v、t、x、$y\in \mathrm{N}$ ，$r=(vx-n)$、$s=[vy-(v-t)n]$ ，

$\therefore r$、s 爲整數。

(3) 由(1)、(2)可知 r、$s\in \mathrm{N}$ 。

7. 說明：x、$y\in \mathrm{N}$ 。

(1) $\because (v-t)n^2=r\times s$ ，　　　　$\therefore$ 可令 $r=(v-t)$ ， $s=n^2$ ，

又 $n\equiv t \pmod v$，　　　　$\therefore \begin{cases} r\equiv -t \pmod v \\ s\equiv t^2 \pmod v \end{cases}$ 。

(2) $\because n\equiv t \pmod v$，$r\equiv -t \pmod v$，

$\therefore (n+r)\equiv 0 \pmod v$，　　　　$\therefore \dfrac{n+r}{v}$ 是整數，

又 n、r、$v\in \mathrm{N}$ ，　　　　$\therefore x=\dfrac{n+r}{v}\in \mathrm{N}$ 。

(3) $\because n \equiv t \pmod{v}$，

$\therefore (v-t)n \equiv (v-t)t \equiv vt - t^2 \equiv -t^2 \pmod{v}$。

又 $s \equiv t^2 \pmod{v}$，　　　　　$\therefore (v-t)n + s \equiv 0 \pmod{v}$，

$\therefore y = \dfrac{(v-t)n+s}{v}$ 是整數，　　　又 $v > t$，n、s、v 皆爲正數，

$\therefore y \in \mathrm{N}$。

8. 綜上可知：「若 $n \equiv t \pmod{v}$，$v > t > 1$，且 n、v、t、x、$y \in \mathrm{N}$，真分數 $\dfrac{v}{n}$ 爲最簡分數，則 $\dfrac{v}{n} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{v-t}{y}$ 一定有解。」

(二) 證明：

「若 n、$v \in \mathrm{N}$，且 $v \geqq 2$，真分數 $\dfrac{v}{n}$ 爲最簡分數，則 $\dfrac{v}{n}$ 定可分解成 v 個以內單位分數和。」

1. 最簡真分數 $\dfrac{2}{n}$ 定可分解成 2 個相異單位分數和。

$\because \dfrac{2}{n}$ 爲最簡真分數，　　　　　　$\therefore\ n \equiv 1 \pmod{2}$，

又 n^2 必有正因數 1 爲 $2m-1$ 的型式，則 $\dfrac{2}{n}$ 可分解成兩個單位分數。

2. 若 $v \leqq p$ 時($p \geqq 2$)，$\dfrac{v}{n}$ 皆可分解成 v 個以內單位分數和。

當 $v = p+1$ 時，

(1) 若 $n \equiv t \pmod{v}$，n^2 有正因數爲 $vm-t$ 的型式，

則 $\dfrac{v}{n}$ 定可分解成 2 個相異單位分數和。（詳見第三段）

(2) 若 $n \equiv t \pmod{v}$，$v > t \geq 1$，n^2 沒有正因數爲 $vm-t$ 的型式，

由(一)段可知：存在 x、$y \in \mathrm{N}$，使得 $\dfrac{v}{n} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{v-t}{y}$，

又 $\dfrac{v-t}{y}$ 定可分解成$(v-t)$個以內單位分數和，

（$\because$ 若 $v \leqq p$ 時，$\dfrac{v}{n}$ 皆可分解成 v 個以內單位分數和，

$v-t < (p+1)-1 = p$）

$\therefore \dfrac{v}{n}$ 定可分解成〔$(v-t)+1$〕個相異單位分數和。

又 $t \geq 1$，

$\therefore \dfrac{v}{n}$ 皆可分解成 v 個以內單位分數和。

3. 承以上三小段，根據「數學歸納法」可得知：

「若 n、$v\in$ N，且 $v\geqq 2$，真分數 $\frac{v}{n}$ 爲最簡分數，則 $\frac{v}{n}$ 定可分解成 v 個以內單位分數和。

五、若 $n=4k+1$，且 k、$n\in$ N，則 $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+f}+\frac{4f-1}{n(k+f)}$，且 $f\in$ N。

(一) 爲什麼會有這一段？

1. 試解「厄多斯與斯特勞斯猜想」時，對於 $n=4k+1$，若 n^2 沒有正因數爲 $4m-1$ 的型式，此時 $\frac{4}{n}$ 無法分解成２個單位分數。

我們直觀地想到以下思維：$\frac{4}{n}=\frac{4z}{zn}=\frac{1}{zn}+\frac{4z-1}{zn}$，$z\in$ N。

先分解出乙個單位分數，$\frac{4z-1}{zn}$ 再應用到第三段的結果，分解成２個單位分數。即可滿足此猜想，分解成３個單位分數。

但問題是：① z 值變化太多，②少部份 z 值太大。（詳見工作日誌）

2. 再次檢視 45 屆科展作品後，發現此手法，我們將其代數化，並應用到第三段的結果。經電腦數據實驗，不僅確定可以避免到第 1 段的問題、甚至比 45 屆科展作品所測試出的 f 值（詳見以下第(三)段）還更小。

(二) 想法起源：45 屆科展作品應用手法。

1. 若 $n=4k+1$，且 k、$n\in$ N，則 $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$。

2. 若 $n=4k+1$，且 k、$n\in$ N，則 $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$。

(三) 由(二)可作出以下猜測：

若 $n=4k+1$，且 k、$n\in$ N，則 $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+f}+\frac{4f-1}{n(k+f)}$，且 $f\in$ N。

(四) 證明(二)的結果：

$$\because \frac{4}{n}-\frac{1}{k+f}=\frac{4(k+f)-(4k+1)}{n(k+f)}=\frac{(4k+4f)-(4k+1)}{n(k+f)}=\frac{4k+4f-4k-1}{n(k+f)}$$

$$=\frac{4f-1}{n(k+f)},$$

$$\therefore \frac{4}{n}=\frac{1}{k+f}+\frac{4f-1}{n(k+f)}。$$

六、試解「厄多斯與斯特勞斯猜想」。

對任意整數$n \geq 4$而言，不定方程$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$均有正整數解。（$a$、$b$、$c$ 不一定是互異的。）

(一) 初步分類：

<table>
<tr><th colspan="2">$\frac{4}{n}$</th><th>$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">非最簡分數</td><td>$n=4k$</td><td>$\frac{4}{n}=\frac{1}{k}=\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k}$</td></tr>
<tr><td>$n=4k+2$</td><td>$\frac{4}{n}=\frac{2}{2k+1}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">最簡分數</td><td>$n=4k+3$</td><td>利用第三段的結論：
$\because n\equiv 3 \pmod 4$，$n^2$ 有正因數爲 $4m-3$ 的型式，如：1，
$\therefore \frac{4}{n}$ 可分解成兩個單位分數，
即存在 x、$y \in \mathrm{N}$，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ，
$\therefore$存在 x、$y \in \mathrm{N}$，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y}$ 。
例如：$11=4\times 2+3$，11^2 有正因數 1，
$\frac{4}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{33}=\frac{1}{3}+\frac{1}{66}+\frac{1}{66}$ 。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$n=4k+1$</td><td>①若 n^2 有正因數爲 $4m-1$ 的型式，如：3、7、11……，
由第三段的結論：存在 x、$y \in \mathrm{N}$，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ，
$\therefore$存在 x、$y \in \mathrm{N}$，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y}$ 。
例如：$21=4\times 5+1$，21^2 有正因數 3，
$\frac{4}{21}=\frac{1}{6}+\frac{1}{42}=\frac{1}{6}+\frac{1}{84}+\frac{1}{84}$ 。</td></tr>
<tr><td>②若 n^2 沒有正因數爲 $4m-1$ 的型式，
此部份在以下討論之。</td></tr>
</table>

(二) 對於「若 $n=4k+1$，且 n^2 沒有正因數爲 $4m-1$ 的型式，則$\frac{4}{n}$是否可分解成三個單位分數的和？」，應如何架構出解題方向？

1. 先設法分解出乙個單位分數。

2. 在第四段有類似的思維：「若 $n \equiv t \pmod v$，$v > t > 1$，且 n、k、v、t、x、$y \in \mathrm{N}$，真分數 $\frac{v}{n}$ 爲最簡分數，則 $\frac{v}{n} = \frac{1}{x} + \frac{v-k}{y}$ 一定有解」，可分解出乙個單位分數 $\frac{1}{x}$。（未分解成單位分數部份，分子的特色是會變小。）

3. 利用上述思維，$n = 4k + 1$，$\frac{4}{n}$ 只能分解成 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y}$（詳見工作日誌－去年作品），若能證明 $\frac{3}{y}$ 可以分解成兩個單位分數，即可成立。

但由去年解題經驗得知，如此會產生以下缺點：

(1) $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{3}{y}$，不容易計算出全部 x、y 的值。

(2)會造成分類太過複雜，且沒有規律。（詳見工作日誌－去年作品）

(3)「未分解完畢分數 $\frac{3}{y}$ 」，分子只能限於 3 ，在此狀況下，不僅**無法完全**利用到第三段的結果：「**若 $n \equiv t \pmod v$，則只有在 n^2 有正因數爲 $vm-t$ 的型式時，$\frac{v}{n}$ 可以分解成兩個單位分數。**」也會浪費掉當初完全代數的思維。

因此決定放棄第 2 段的思維。

4. 我們以第 3 段的缺點反向思考，並斟酌 45 屆科展作品想到以下思維：

若 $n = 4k + 1$，且 k、$n \in \mathrm{N}$，則 $\frac{4}{n} = \frac{1}{k+f} + \frac{4f-1}{n(k+f)}$，且 $f \in \mathrm{N}$。

雖然分子有可能會變大，但有以下優點：

(1)「未分解完畢分數 $\frac{4f-1}{n(k+f)}$ 」，分子、分母的值容易確定。

(2) 以 f 爲基準分類，不僅更爲**容易**、且有規律。（詳見以下第(三)段）

(3)「未分解完畢分數 $\frac{4f-1}{n(k+f)}$ 」，分子爲 $4f-1$。

在此狀況下，分子是可變動的，較能利用到前面第三段的結果。

5. 承上思維，

$\because \frac{4}{n} = \frac{1}{k+f} + \frac{4f-1}{n(k+f)}$，其中 $f \in \mathrm{N}$，

$\therefore$此問題可轉化成新問題「**是否存在 x、$y \in \mathrm{N}$，使得** $\frac{4f-1}{n(k+f)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ？」。

而我們可利用**第三段的結果**測試之。

(三) 當 $n=4k+1$，$k\in\mathrm{N}$，且 n^2 沒有正因數為 $4m-1$ 的型式，
承接第(二)段思維，以下就 f 值變化討論之。

1. $f=1$ 時，$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{3}{n(k+1)}$ ，

若 $n(k+1)$有下列條件，即可得證 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 有正整數解。

(1) 若 $n(k+1)\equiv 2 \pmod 3$，則存在 x、$y\in\mathrm{N}$，使得 $\dfrac{3}{n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 。

(2) 若 $n(k+1)\equiv 1 \pmod 3$，$[n(k+1)]^2$ 有正因數為 $3m-1$ 的型式時，
則存在 x、$y\in\mathrm{N}$，使得 $\dfrac{3}{n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 。

2. $f=2$ 時，$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{7}{n(k+2)}$ ，

若 $n(k+2)$有下列條件，即可得證 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 有正整數解。

(1) 若 $n(k+2)\equiv 6 \pmod 7$，則存在 x、$y\in\mathrm{N}$，使得 $\dfrac{7}{2n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 。

(2) 若 $n(k+2)\equiv 5 \pmod 7$，$[n(k+2)]^2$ 有正因數為 $7m-5$ 的型式時，
則存在 x、$y\in\mathrm{N}$，使得 $\dfrac{7}{2n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 。

(3) 若 $n(k+2)\equiv 4 \pmod 7$，$[n(k+2)]^2$ 有正因數為 $7m-4$ 的型式時，
則存在 x、$y\in\mathrm{N}$，使得 $\dfrac{7}{2n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 。

(4) 若 $n(k+2)\equiv 3 \pmod 7$，$[n(k+2)]^2$ 有正因數為 $7m-3$ 的型式時，
則存在 x、$y\in\mathrm{N}$，使得 $\dfrac{7}{2n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 。

(5) 若 $n(k+2)\equiv 2 \pmod 7$，$[n(k+2)]^2$ 有正因數為 $7m-2$ 的型式時，
則存在 x、$y\in\mathrm{N}$，使得 $\dfrac{7}{2n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 。

(6) 若 $n(k+2)\equiv 1 \pmod 7$，$[n(k+2)]^2$ 有正因數為 $7m-1$ 的型式時，
則存在 x、$y\in\mathrm{N}$，使得 $\dfrac{7}{2n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 。

3. 承接以上思維，又因$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+f}+\dfrac{4f-1}{n(k+f)}$，再測試到$f$是否有下列條件：

「存在 $f\in \mathrm{N}$，使得 $n(k+f)\equiv t \pmod{4f-1}$，$[n(k+f)]^2$有正因數爲 $(4f-1)m-t$ 的型式。」

若能測試到f符合以上條件，利用第三段的結果，則可得知存在x、$y\in \mathrm{N}$，使得$\dfrac{4f-1}{n(k+f)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$。如此一來，只要找到$f$符合以上條件，$\dfrac{4}{n}$便可分解成 3 個單位分數。

4. 實例：將$\dfrac{4}{169}$分解成三個單位分數。

(1) 由「若 $n=4k+1$，且 k、$n\in \mathrm{N}$，則$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+f}+\dfrac{4f-1}{n(k+f)}$，且 $f\in \mathrm{N}$。」

(2) $\because 169=4\times 42+1$，　$\therefore n=169$，$k=42$。

(3)$f=1$ 時，$\dfrac{4}{169}=\dfrac{1}{43}+\dfrac{3}{169\times 43}$，

$\therefore$未分解成單位分數的分母$=169\times 43$，未分解成單位分數的分子$=3$，

又$169\times 43\equiv 1 \pmod 3$，$(169\times 43)^2$沒有正因數爲 $3m-1$ 的型式，

$\therefore\dfrac{3}{169\times 43}$無法分解成兩個單位分數。

(4)$f=2$ 時，$\dfrac{4}{169}=\dfrac{1}{44}+\dfrac{7}{169\times 44}$，

$\therefore$未分解成單位分數的分母$=169\times 44$，未分解成單位分數的分子$=7$，

又$169\times 44\equiv 2 \pmod 7$，$(169\times 44)^2$有正因數爲 $7m-2$ 的型式：26，

$\therefore\dfrac{7}{169\times 44}$可以分解成兩個單位分數($\dfrac{7}{169\times 44}=\dfrac{1}{1066}+\dfrac{1}{304876}$)。

(5) 註：分解$\dfrac{7}{169\times 44}$成 2 個單位分數。（以下算式是利用第三段的結果。）

① $n=169\times 44$，$v=7$，

② $\boldsymbol{n\equiv 2 \pmod 7}$，

③令 $r=26$，$s=2126696$（即$n^2=(169\times 44)^2=r\times s$），

④承上可知：$\begin{cases} a=\dfrac{n+r}{v}=\dfrac{169\times 44+26}{7}=1066 \\ b=\dfrac{n+s}{v}=\dfrac{169\times 44+2126696}{7}=304876 \end{cases}$，

$\therefore\dfrac{7}{169\times 44}=\dfrac{1}{1066}+\dfrac{1}{304876}$。

(四) 結果的差異：主要的差別在於 $n=4k+1$，$k\in\mathrm{N}$ 這個部份。

1. 去年作品未能完全描述出可以直接分解成兩個單位分數的樣式，然而可分解成兩個單位分數的 $\frac{4}{n}$ ，自然也可以分解成三個單位分數。(詳見第(一)段)

2. 去年作品對於 $\frac{4}{n}$ 無法直接分解成兩個單位分數的部份，解題架構太複雜。

(1) 去年作品解題架構如下：(詳見工作日誌)

當 $n=4k+1$ 時，我們做了五個步驟的討論：

①步驟１：$k=3m$、$3m+1$、$3m+2$，

②步驟２：$m=2t$、$2t+1$，

③步驟３：當 $k=3m$，$m=2t$ 時，則在 $t=5q+1$、$5q+3$、$5q+4$ 時，$\frac{4}{n}$ 可以分解成三個單位分數。

④步驟４：當 $k=3m$，$m=10q$ 時，則在 $q=7r+3$、$7r+1$、$7r+6$ 時，$\frac{4}{n}$ 可以分解成三個單位分數。

⑤步驟５：當 $k=3m$，$m=10q+4$ 時，則在 $q=7r$、$7r+2$、$7r+4$ 時，$\frac{4}{n}$ 可以分解成三個單位分數。

(2) 在５個步驟的架構下，雖然找到可分解三個單位分數的 n 愈來愈多，但同時最大的問題也出現：變數愈來愈多、整體算式愈來愈複雜。

(3) 而此次作品解題架構明顯改善此問題：更有系統、更為簡潔。

(詳見第 11 頁・(三) ・3)

3. 在此次作品解題架構下，亦可輕易造出電腦程式，來分解無法直接分解成兩個單位分數的 $\frac{4}{n}$ 。

(五) 猜想解題架構進步原因：

將去年作品有關於 $\frac{2}{n}$ 、$\frac{3}{n}$ 、$\frac{4}{n}$ 分解成 2 個單位分數的結果，完全地代數化，成功地確定 $\frac{v}{n}$ 可以分解成 2 個單位分數的條件。

原先這樣做只是為了精簡內容，然而卻意外地發現：分子可以不再局限。

利用 $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+f}+\frac{4f-1}{n(k+f)}$ ，先設法將 $\frac{4}{n}$ 分解出 1 個單位分數；此時未分解的分數 $\frac{4f-1}{n(k+f)}$ ，分子便不再被局限。

$\frac{4f-1}{n(k+f)}$ 再以第三段的結果應用，便可討論其是否分解成 2 個單位分數。

(六) 未來展望：

若能證明以下存在性問題，此猜想便可獲得解決。

「若 $n=4k+1$，且 n^2 沒有正因數爲 $4m-1$ 的型式，存在 $f\in \mathrm{N}$，

使得 $n(k+f)\equiv t \pmod{4f-1}$，$[n(k+f)]^2$ 有正因數爲 $(4f-1)m-t$ 的型式。」

雖然在解題架構有進步，但此題尚未破解成功，還望教授予以高見，以爲晚輩改進的方向與指引。

陸、結論：

一、設 v、$n\in \mathrm{N}$，真分數 $\frac{v}{n}$ 爲最簡分數，$\boldsymbol{n\equiv t \pmod{v}}$，

若 $\boldsymbol{n^2}$ **有正因數爲** $\boldsymbol{vm-t}$ **的型式**，則 $\frac{v}{n}$ 可分解成兩個單位分數。

二、若 n、$v\in \mathrm{N}$，且 $v\geqq 2$，真分數 $\frac{v}{n}$ 爲最簡分數，則 $\frac{v}{n}$ 定可分解成 v 個以內單位分數和。

三、厄多斯與斯特勞斯猜想：

(一) 對於大部份的整數 n（$n\ge 4$）來說，以下這句話是正確的。

「對任意整數 $n\ge 4$ 而言，不定方程 $\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 均有正整數解。（a、b、c 不一定是互異的。）」

1. $n=4k$ 時，$\frac{4}{n}=\frac{1}{k}=\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k}$。

2. $n=4k+2$ 時，$\frac{4}{n}=\frac{2}{2k+1}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+2}$。

3. $n=4k+3$ 時，存在 x、$y\in \mathrm{N}$，使得 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y}$。。

4. $n=4k+1$ 時，若 n^2 有正因數爲 $4m-1$ 的型式，存在 x、$y\in \mathrm{N}$，

使得 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y}$。

(二) 無法分解成 2 個單位分數的 $\frac{4}{n}$（$n=4k+1$ 時，若 n^2 沒有正因數爲 $4m-1$ 的型式），可利用 $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+f}+\frac{4f-1}{n(k+f)}$，再測試到 f 是否有下列條件：「存在 $f\in \mathrm{N}$，使得 $n(k+f)\equiv t \pmod{4f-1}$，$[n(k+f)]^2$ 有正因數爲 $(4f-1)m-t$ 的型式。」

若找到符合這樣條件的 f，即可將 $\frac{4}{n}$ 分解成 3 個單位分數。

(三) 若能證明以下存在性問題，此猜想便可獲得解決。

「若 $n=4k+1$，且 n^2 沒有正因數為 $4m-1$ 的型式，存在 $f\in \mathrm{N}$，
使得 $n(k+f)\equiv t \pmod{4f-1}$，$[n(k+f)]^2$ 有正因數為$(4f-1)m-t$ 的型式。」

柒、參考資料：

一、花蓮縣立花崗國中，將選平、李奕璟、陳彥家（民 94）。四十五屆中小學科展，國中組全國第三名作品「單位分數的探密」。

二、國立屏東高級中學，李孟修、劉琦崴（民 95）。臺灣 2006 年國際科學展覽會，數學科參展作品「埃及分數之固定項數分解問題」。

三、文耀光（民 91）。古埃及的單位分數問題，（數學傳播）第 26 卷第 4 期 p52~p59。

四、文耀光（民 92）。Golomb 算法與埃及單位分數，（數學傳播）第 27 卷第 2 期 p24~p26。

捌、附表：

表一、「最簡分數 $\frac{v}{n}$ 分解成２個單位分數」與 45 屆第三名作品比較表。

表二、無法分解成２個單位分數的 $\frac{4}{n}$，取第 1 個單位分數不同手法比較表。

表三、「最簡分數 $\frac{4}{n}$ $(n=4k+1, k\in \mathrm{N})$分解成單位分數的和」與 45 屆第三名作品比較表。

表四、討論子題與 45 屆第三名作品比較表。

玖、工作日誌：

一、去年科展作品。

二、無法分解成 2 個單位分數的 n 分之 4-取第 1 個單位分數不同手法比較表。

三、$n=4k+3$，$\frac{4}{n}$ 分解成 2 個單位分數的例子。

四、$n=4k+1$，n^2 有 $4m+3$ 型式的正因數，$\frac{4}{n}$ 分解成 2 個單位分數的例子。

五、$n=4k+1$，n^2 沒有 $4m+3$ 型式的正因數，$\frac{4}{n}$ 分解成 3 個單位分數的例子。

六、$\frac{4}{n}$ 分解成２個單位分數的電腦程式（Excel 函數程式），
其中「$n=4k+3$」或「$n=4k+1$，n^2 有 $4m-1$ 型式的正因數」。

七、當 $n=4k+1$，且 n^2 沒有正因數為 $4m-1$ 的型式，測試「存在 $f\in \mathrm{N}$，使得 $n(k+f)\equiv t \pmod{4f-1}$，$[n(k+f)]^2$ 有正因數為$(4f-1)m-t$ 的型式」的電腦程式（Excel 函數程式）。

八、$\frac{4}{n}$ 分解成３個單位分數的電腦程式（Excel 函數程式），
其中「$n=4k+1$，n^2 沒有 $4m-1$ 型式的正因數」。

表一：「最簡分數$\frac{v}{n}$分解成 2 個單位分數」與 45 屆第三名作品比較表。

比較項目	45 屆第三名作品	單位分數分解 II
想法架構	由特例：$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$開始， 再計算出$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{k}{n(n+k)}$， 又$\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{\frac{n(n+k)}{k}}=\frac{1}{n+\frac{n^2}{k}}$， $\therefore \frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n+\frac{n^2}{k}}$， $\therefore \frac{v}{n}=\frac{v}{n+k}+\frac{v}{n+\frac{n^2}{k}}$， $\therefore \frac{v}{n}=\frac{1}{\frac{n+k}{v}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{v}}$ 註：有判定出k是n^2的正因數， **但未確認$\frac{n+k}{v}$、$\frac{n+\frac{n^2}{k}}{v}$何時爲正整數。**	利用因式分解將$\frac{v}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 化成$(va-n)(vb-n)=n^2$， 又令$n^2=r\times s$，r、$s\in N$， $\therefore (va-n)(vb-n)=r\times s$， 再利用整數對加法、減法、乘法的封閉性， $\therefore \begin{cases} va-n=r \\ vb-n=s \end{cases}$， （$va-n$、$vb-n$爲何是正整數，請參閱第 3 頁。） $\therefore \begin{cases} a=\frac{n+r}{v} \\ b=\frac{n+s}{v} \end{cases}$， 後證實當$n\equiv t \pmod v$時， 配合以上結果，得到以下兩項事實： ①當$a\in N$，則$r\equiv -t \pmod v$， ②當$r\equiv -t \pmod v$，則$s\equiv -t \pmod v$， 故當$n\equiv t \pmod v$，$n^2=r\times s$， r、$s\in N$，$r\equiv -t \pmod v$， 此時（$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$）有正整數解。
$\frac{3}{n}=\frac{3}{6t+7}$ （n是奇數)	在$\frac{3}{n}$中，除了$n=6t+7$($t\in\{0\}\cup N$)時爲三項表達式外，其餘皆可將$\frac{3}{n}$化成兩項的表達式。	**$\frac{3}{6t+7}$分解成 2 個單位分數的例子：** ①當$n=25$時， $n\equiv 1 \pmod 3$， n^2有$3m-1$的正因數，如：5， 令$n^2=r\times s$，其中$r=5$，$s=125$， $\therefore \begin{cases} a=\frac{25+5}{3}=10 \\ b=\frac{25+125}{3}=50 \end{cases}$， $\therefore \frac{3}{25}=\frac{1}{10}+\frac{1}{50}$。 ②當$n=6t+7$時，$n\equiv 1 \pmod 3$， n^2有$3m-1$的正因數， **則$\frac{3}{n}$可分解成 2 個單位分數，** 如：$n=55$、85、121…時。

表二：無法分解成２個單位分數的$\frac{4}{n}$，取第 1 個單位分數不同手法比較表：

<table>
<tr><td>比較項目</td><td>（直觀手法）
$\frac{4}{n}=\frac{4z}{zn}=\frac{1}{zn}+\frac{4z-1}{zn}$</td><td>（將 45 屆作品手法代數化）
$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+f}+\frac{4f-1}{n(k+f)}$
此時 $n=4k+1$，且 n、k、$f\in\mathrm{N}$。</td></tr>
<tr><td>取出第一個
單位分數分母</td><td>如：n、$2n$、$3n$、$4n$、$5n$、⋯</td><td>如：$k+1$、$k+2$、$k+3$、$k+4$、$k+5$、⋯
優點：①可以測試到最小的分母；
②可以測試到連續的正整數。</td></tr>
<tr><td>測試次數統計</td><td>當 $n=4k+1$，$k\leqq 1000$，$k\in\mathrm{N}$，共有 452 個無法分解成２個單位分數的$\frac{4}{n}$，而在以下測試某 z 值可以成功分解出３個單位分數。
<table>
<tr><td>測試 z 值</td><td>合計</td></tr>
<tr><td>1</td><td>303</td></tr>
<tr><td>2</td><td>85</td></tr>
<tr><td>3</td><td>19</td></tr>
<tr><td>4</td><td>26</td></tr>
<tr><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>8</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1</td></tr>
<tr><td>12</td><td>2</td></tr>
<tr><td>21</td><td>1</td></tr>
<tr><td>25</td><td>1</td></tr>
<tr><td>總計</td><td>452</td></tr>
</table></td><td>當 $n=4k+1$，$k\leqq 1000$，$k\in\mathrm{N}$，共有 452 個無法分解成２個單位分數的$\frac{4}{n}$，而在以下測試某 f 值可以成功分解出３個單位分數。
<table>
<tr><td>測試 f 值</td><td>合計</td></tr>
<tr><td>1</td><td>409</td></tr>
<tr><td>2</td><td>36</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>2</td></tr>
<tr><td>總計</td><td>452</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td rowspan="4">測試次數比較</td><td>$\frac{4}{3361}$經此法測試，
z 值需測試到 25。</td><td>$\frac{4}{3361}$經此法測試，f 值只需測試到 1。</td></tr>
<tr><td>$\frac{4}{1381}$經此法測試，
z 值需測試到 21。</td><td>$\frac{4}{1381}$經此法測試，f 值只需測試到 1。</td></tr>
<tr><td>$\frac{4}{3889}$經此法測試，
z 值需測試到 12。</td><td>$\frac{4}{3889}$經此法測試，f 值只需測試到 3。</td></tr>
<tr><td>$\frac{4}{541}$經此法測試，
z 值需測試到 10。</td><td>$\frac{4}{541}$經此法測試，f 值只需測試到 1。</td></tr>
</table>

表三之 1：最簡分數$\frac{4}{n}$（n＝4k＋1，$k\in$N）分解成單位分數的和比較表：

n	45 屆第三名作品	單位分數分解 II
k＝6t＋1 n＝24t＋5	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{\frac{n(k+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{n^2(k+1)^2+2n(k+1)}{6}}$	①若 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$， n^2有正因數為 4m－1 的型式， 如：n＝77、245、341、…， 此時∃x、$y\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$。 ② $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$， 又 $n(k+1)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$， $[n(k+1)]^2$有正因數 2 為 3m－1 的型式， ∴ $\frac{3}{n(k+1)}$可以分解成 2 個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$， ∴$\frac{4}{n}$可以分解成 3 個單位分數。
k＝6t＋2 n＝24t＋9	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n(k+1)}$	$n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$， n^2有正因數為 4m－1 的型式：3， 此時存在x、$y\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$。
k＝6t＋3 n＝24t＋13	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{\frac{n(k+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{n^2(k+1)^2+2n(k+1)}{6}}$	①若 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$， n^2有正因數為 4m－1 的型式， 如：n＝133、253、301、…， 此時∃x、$y\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$。 ② $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$， 又 $n(k+1)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$， $[n(k+1)]^2$有正因數 2 為 3m－1 的型式， ∴ $\frac{3}{n(k+1)}$可以分解成 2 個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$， ∴$\frac{4}{n}$可以分解成 3 個單位分數。

k＝6t＋4 n＝24t+17	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{\frac{(k+1)(n+1)}{3}}+\frac{1}{\frac{n(k+1)(n+1)}{3}}$	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝665、737、833、…， 此時∃x、y ∈N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$。 ② $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$， 又 $n(k+1)\equiv 1 \pmod 3$， $[n(k+1)]^2$有正因數$(\boldsymbol{k+1})$爲 3m－1 的型式， ∴$\frac{3}{n(k+1)}$可以分解成２個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$， ∴$\frac{4}{n}$可以分解成３個單位分數。
k＝6t＋5 n＝24t＋21	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{\frac{n(k+1)}{3}}$	$n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式：3， 此時存在x、y ∈N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$。
k＝6t＋6 n＝24t+25	詳見表三之 2。	①$n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝49、121、217、…， 此時∃x、y ∈N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$。 ②更細部分類，詳見表三之 3。

表三之 2：最簡分數$\frac{4}{n}$（n＝24t＋25，$k\in$ N）分解成單位分數的和比較表：

n	45 屆第三名作品	單位分數分解 II
t＝5e k＝30e+6 n＝120e+25	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+4}+\frac{1}{\frac{n(k+4)+5}{15}}+\frac{1}{\frac{n(k+4)[n(k+4)+5]}{75}}$ 註：可以不用測試到 k＋4， 以右欄爲例， 只要測試到 k＋1 即可。	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝385、1225、1705、⋯， 此時∃x、y $\in$ N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ② $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$ ， 又 $n(k+1)\equiv 1 \pmod 3$， $[n(k+1)]^2$有正因數 5 爲 3m－1 的型式， ∴ $\frac{3}{n(k+1)}$可以分解成 2 個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$ ， ∴ $\frac{4}{n}$可以分解成 3 個單位分數。
t＝5e+1 k＝30e+12 n＝120e+49	詳見表三之 3。	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝529、649、889、⋯， 此時∃x、y $\in$ N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ②更細部分類，詳見表三之 3。
t＝5e+2 k＝30e+18 n＝120e+73	詳見表三之 4。	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝553、913、1273、⋯， 此時∃x、y $\in$ N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ②更細部分類，詳見表三之 4。
t＝5e+3 k＝30e+24 n＝120e+97	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+4}+\frac{1}{\frac{n(k+1)+5}{3}}+\frac{1}{\frac{n(k+1)[n(k+1)+5]}{15}}$ 註：可以不用測試到 k＋4， 以右欄爲例， 只要測試到 k＋1 即可。	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝217、817、1057、⋯， 此時∃x、y $\in$ N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ② $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$ ， 又 $n(k+1)\equiv 1 \pmod 3$， $[n(k+1)]^2$有正因數 5 爲 3m－1 的型式， ∴ $\frac{3}{n(k+1)}$可以分解成 2 個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$ ， ∴ $\frac{4}{n}$可以分解成 3 個單位分數。

t＝5e+4 k＝30e+30 n＝120e+121	詳見表三之 5。	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 $4m-1$ 的型式， 如：n＝121、1081、2761、…， 此時∃x、y ∈N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ②更細部分類，詳見表三之 5。

表三之 3：最簡分數$\frac{4}{n}$（n＝120e+49，$k\in$N）分解成單位分數的和比較表：

n	45 屆第三名作品	單位分數分解 II
e＝7h k＝210h+12 n＝840h+49	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+2)}{7}}$	$n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式：7， 此時存在 x、y $\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。
e＝7h+1 k＝210h+42 n＝840h+169	無固定表達式。	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝1849、6049、6889、…， 此時∃x、y $\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ②測定結果，f 不是定值，但大部份爲 1。
e＝7h+2 k＝210h+72 n＝840h+289	無固定表達式。	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝1969、4489、6169、…， 此時∃x、y $\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ②測定結果，f 不是定值，但大部份爲 1。
e＝7h+3 k＝210h+102 n＝840h+409	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+3)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(k+2)(k+3)}{7}}$	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝217、817、1057、…， 此時∃x、y $\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ② $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ， 又 $n(k+2)\equiv 4 \pmod 7$， $[n(k+2)]^2$有正因數 n 爲 7m－4 的型式， $\therefore \frac{7}{n(k+2)}$ 可以分解成 2 個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ， $\therefore \frac{4}{n}$可以分解成 3 個單位分數。
e＝7h+4 k＝210h+132 n＝840h+529	無固定表達式。	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝529、2209、7249、…， 此時∃x、y $\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ②測定結果，f 不是定值，但大部份爲 1。

e＝7h+5 k＝210h+162 n＝840h+649	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+6)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(k+2)(k+6)}{28}}$	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝649、4009、9889、⋯， 此時∃x、y ∈N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ②$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ， 又 $n(k+2)\equiv 1 \pmod 7$， $[n(k+2)]^2$有正因數 6 爲 7m－1 的型式， ∴$\frac{7}{n(k+2)}$可以分解成 2 個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ， ∴$\frac{4}{n}$可以分解成 3 個單位分數。
e＝7h+6 k＝210h+192 n＝840h+769	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+4)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(k+2)(k+4)}{14}}$	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝2449、3289、10849、⋯， 此時∃x、y ∈N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ②$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ， 又 $n(k+2)\equiv 2 \pmod 7$， $[n(k+2)]^2$有正因數$(k+2)$爲 7m－2 的型式， ∴$\frac{7}{n(k+2)}$可以分解成 2 個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ， ∴$\frac{4}{n}$可以分解成 3 個單位分數。

表三之 4：最簡分數$\frac{4}{n}$（n＝120e+73，$k\in$N）分解成單位分數的和比較表：

n	45 屆第三名作品	單位分數分解 II
e＝7h k＝210h+18 n＝840h+73	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+2)+10}{7}}+\frac{1}{\frac{n(k+2)+\frac{n^2(k+2)}{10}}{7}}$	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝913、9313、10153、…， 此時∃x、y $\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$。 ②$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$， 又 $n(k+2)\equiv 4 \pmod 7$， $[n(k+2)]^2$有正因數 n 爲 7m－4 的型式， ∴$\frac{7}{n(k+2)}$可以分解成 2 個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$， ∴$\frac{4}{n}$可以分解成 3 個單位分數。
e＝7h+1 k＝210h+48 n＝840h+193	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+2)+10}{7}}+\frac{1}{\frac{n(k+2)+\frac{n^2(k+2)}{10}}{7}}$	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝5508、5928、6138、…， 此時∃x、y $\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$。 ②$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$， 又 $n(k+2)\equiv 4 \pmod 7$， $[n(k+2)]^2$有正因數 10 爲 7m－4 的型式， ∴$\frac{7}{n(k+2)}$可以分解成 2 個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$， ∴$\frac{4}{n}$可以分解成 3 個單位分數。
e＝7h+2 k＝210h+78 n＝840h+313	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+2)+20}{7}}+\frac{1}{\frac{n(k+2)+\frac{n^2(k+2)^2}{20}}{7}}$	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 4m－1 的型式， 如：n＝1969、4489、6169、…， 此時∃x、y $\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$。 ②$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$，又 $n(k+2)\equiv 1 \pmod 7$， $[n(k+2)]^2$有正因數 125 爲 7m－1 的型式， ∴$\frac{7}{n(k+2)}$可以分解成 2 個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$， ∴$\frac{4}{n}$可以分解成 3 個單位分數。

e＝7h+3 k＝210h+108 n＝840h+433	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+2)+5}{7}}+\frac{1}{\frac{n(k+2)+\frac{n^2(k+2)^2}{5}}{7}}$	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 $4m-1$ 的型式， 如：n＝1273、6313、7153、…， 此時∃x、y ∈N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ②$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$，又 $n(k+2)\equiv 2 \pmod 7$， $[n(k+2)]^2$有正因數$(k+2)$爲 $7m-2$ 的型式， ∴$\frac{7}{n(k+2)}$可以分解成2個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ， ∴$\frac{4}{n}$可以分解成3個單位分數。
e＝7h+4 k＝210h+138 n＝840h+553	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+2)}{7}}$	若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 $4m-1$ 的型式， 如：n＝553、1393、2233、…， 此時∃x、y ∈N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。
e＝7h+5 k＝210h+168 n＝840h+673	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+2)+5}{7}}+\frac{1}{\frac{n(k+2)+\frac{n^2(k+2)^2}{5}}{7}}$	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 $4m-1$ 的型式， 如：n＝3193、4873、9073、…， 此時∃x、y ∈N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ②$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$，又 $n(k+2)\equiv 2 \pmod 7$， $[n(k+2)]^2$有正因數 5 爲 $7m-2$ 的型式， ∴$\frac{7}{n(k+2)}$可以分解成2個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ， ∴$\frac{4}{n}$可以分解成3個單位分數。
e＝7h+6 k＝210h+198 n＝840h+793	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+2)+5}{7}}+\frac{1}{\frac{n(k+2)+\frac{n^2(k+2)^2}{5}}{7}}$	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2有正因數爲 $4m-1$ 的型式， 如：n＝1633、5833、7513…， 此時∃x、y ∈N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ②$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$，又 $n(k+2)\equiv 1 \pmod 7$， $[n(k+2)]^2$有正因數 $10n$ 爲 $7m-1$ 的型式， ∴$\frac{7}{n(k+2)}$可以分解成2個單位分數， 又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ， ∴$\frac{4}{n}$可以分解成3個單位分數。

表三之 5：最簡分數$\frac{4}{n}$（n＝120e+121，$k\in$N）分解成單位分數的和比較表：

<table>
<tr><th>n</th><th>45 屆第三名作品</th><th>單位分數分解 II</th></tr>
<tr><td>e＝7h
k＝210h+30
n＝840h+121</td><td>無固定表達式。</td><td>①若 $n\equiv 1 \pmod 4$，
n^2有正因數爲 4m－1 的型式，
如：n＝121、961、2641、…，
此時∃x、y $\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。
②測定結果，f 不是定值，但大部份爲 1。</td></tr>
<tr><td>e＝7h+1
k＝210h+60
n＝840h+241</td><td>$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+3)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(k+2)(k+3)}{7}}$</td><td>①若 $n\equiv 1 \pmod 4$，
n^2有正因數爲 4m－1 的型式，
如：n＝1081、2761、9481、…，
此時∃x、y $\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。
② $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ，
又 $n(k+2)\equiv 4 \pmod 7$，
$[n(k+2)]^2$有正因數 n 爲 7m－4 的型式，
∴$\frac{7}{n(k+2)}$ 可以分解成 2 個單位分數，
又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ，
∴$\frac{4}{n}$可以分解成 3 個單位分數。</td></tr>
<tr><td>e＝7h+2
k＝210h+90
n＝840h+361</td><td>無固定表達式。</td><td>①若 $n\equiv 1 \pmod 4$，
n^2有正因數爲 4m－1 的型式，
如：n＝361、2881、5401、…，
此時∃x、y $\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。
②測定結果，f 不是定值，但大部份爲 1。</td></tr>
<tr><td>e＝7h+3
k＝210h+120
n＝840h+481</td><td>$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+6)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(k+2)(k+6)}{28}}$</td><td>①若 $n\equiv 1 \pmod 4$，
n^2有正因數爲 4m－1 的型式，
如：n＝3841、4681、7201、…，
此時∃x、y $\in$N，使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。
② $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$，又 $n(k+2)\equiv 1 \pmod 7$，
$[n(k+2)]^2$有正因數 2(k+2)爲 7m－1
的型式，
∴$\frac{7}{n(k+2)}$ 可以分解成 2 個單位分數，
又$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ，
∴$\frac{4}{n}$可以分解成 3 個單位分數。</td></tr>
</table>

$e=7h+4$ $k=210h+150$ $n=840h+601$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+4)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(k+2)(k+4)}{14}}$	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2 有正因數爲 $4m-1$ 的型式， 如：$n=1441$、10681、12361、…， 此時∃x、y $\in$N，使得 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ② $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$，又 $n(k+2)\equiv 2 \pmod 7$， $[n(k+2)]^2$ 有正因數 $(k+2)$ 爲 $7m-2$ 的型式， ∴ $\frac{7}{n(k+2)}$ 可以分解成 2 個單位分數， 又 $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$ ， ∴ $\frac{4}{n}$ 可以分解成 3 個單位分數。
$e=7h+5$ $k=210h+180$ $n=840h+721$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{\frac{n(k+2)}{7}}$	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2 有正因數爲 $4m-1$ 的型式， 如：$n=721$、1561、2401、…， 此時∃x、y $\in$N，使得 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。
$e=7h+6$ $k=210h+210$ $n=840h+841$	無固定表達式。	①若 $n\equiv 1 \pmod 4$， n^2 有正因數爲 $4m-1$ 的型式， 如：$n=5041$、6721、8401、…， 此時∃x、y $\in$N，使得 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 。 ②測定結果，f 不是定值，但大部份爲 1。

表四：討論子題與 45 屆第三名作品比較表。

<table>
<tr><td rowspan="2">子題</td><td>45 屆第三名作品</td></tr>
<tr><td>單位分數分解 II</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{v}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，
且 a、b、v、$n\in$ N，且 $a<b$，求出$\frac{v}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的通解。</td><td>$\frac{v}{n}=\frac{1}{\frac{n+k}{v}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{v}}$，
有判定出 k 是 n^2 的正因數，
但未確認$\frac{n+k}{v}$、$\frac{n+\frac{n^2}{k}}{v}$何時爲正整數。
註：其符號較爲煩雜。</td></tr>
<tr><td>當 $n\equiv t\ (\mathrm{mod}\ v)$，$n^2=r\times s$，$r$、$s\in N$，$r\equiv -t(\mathrm{mod}\ v)$，
此時（$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$）有正整數解爲（$\frac{n+r}{v}$，$\frac{n+s}{v}$）。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">若 n、v 爲正整數，且 $v\geqq 2$，真分數$\frac{v}{n}$爲最簡分數，則$\frac{v}{n}$定可分解成 v 個以內單位分數和。</td><td>以數學歸納法證明之。
證明過程複雜，代數太多，令人難以理解。</td></tr>
<tr><td>同樣以數學歸納法證明之。
反覆應用先前思維，如因式分解手法、$\frac{v}{n}$何時可分解成２個單位分數，想法有系統。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">若 $n=4k+1$，且 k、$n\in$ N，則$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+f}+\frac{4f-1}{n(k+f)}$，且 $f\in$ N。</td><td>解「厄多斯與斯特勞斯猜想」的應用手法，但未將其代數化，只寫下列２個例子：
若 $n=4k+1$，且 k、$n\in$ N，則$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$；
若 $n=4k+1$，且 k、$n\in$ N，則$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$。</td></tr>
<tr><td>有將左列證明完成。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">試解「厄多斯與斯特勞斯猜想」。
對任意整數 $n\geq 4$ 而言，不定方程 $\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 均有正整數解。
（a、b、c 不一定是互異的。）</td><td>①沒有明確提出系統性的解題方式。
②過程複雜、凌亂，算式冗長。
③計算困難。</td></tr>
<tr><td>①有提出系統化的解題方式，較爲淺顯易懂。
②過程簡潔。
③計算容易。
④將系統化解題方式製作成電腦程式。
⑤將此猜想轉化成另一個存在性問題。</td></tr>
</table>

【評語】030419

利用所發現的一些特別規則，作者將形如４／ｎ的真分數是否可以分解為至多三個單位分數和的猜想做了一番分析，成功的解決了此猜想大部分的情況。所引用的討論方式頗有新意，不僅改進了之前的結果，在表達方式上也較前人來的簡潔清楚，是不錯的作品。比較可惜的是，大部分的想法還是依循之前作品的概念，以致於無法對整個猜想給出突破性的結論，或許，跳脫前人處理此問題的典型手法重新思考問題，會有完全不同的全新進展。