

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030418

神奇的費氏數列

學校名稱：臺東縣立新生國民中學

作者： 國二 高崇森 國二 洪稚軒	指導老師： 吳勝芬
---------------------------------	------------------

關鍵詞：數形關係、因數、倍數

壹、研究動機：

曾經在數形關係的章節中，遇到了數列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ ，覺得這數列真是與眾不同，詢問老師後才知道這數列的名稱是斐波那契數列，且這數列是在 13 世紀初的數學著作中被提出的，更有趣的是一開始其實這是個生小兔的問題，於是決定與同學一起研究這特別的數列-----斐波那契數列。

貳、研究目的：

- 一、可用斐波那契數列解釋的應用問題是否具有固定形式？
- 二、斐波那契數列項數與該項的值是否具有因倍數的關係？

參、研究過程或方法：

- 一、存在日常生活中的斐波那契數列的應用問題：

(一) 由兔子的繁衍看斐波那契數列

13 世紀初，義大利人倫納德，綽號斐波那契的數學家在書中提出一個有趣的題目：「假設有一對雄兔與雌兔，需花一個月從幼兔長成成兔，再一個月時便可以生下一對(一雌一雄)兔子。以後，每過足一個月可以生下另一對兔子，如果每隻兔子都能健康存活，一年之後，會有多少對兔子呢？」

* 小兔子經過一個月可成長成大兔子，只有大兔子才可以生育小兔子。

◎第 1 個月：只有一對兔子 a。(幼兔)

◎第 2 個月：仍只一對兔子 a。(長大為成兔)

◎第 3 個月：成兔 a 生下一對兔子 b，共有 2 對兔子。

◎第 4 個月：a 又生下一對兔子 c，加上一對兔子 b，共有 3 對兔子。

◎第 5 個月：a 又生下一對兔子 d，而兔子 b 也生下一對兔子 e，加上一對兔子 c，共有 5 對兔子。

◎第 6 個月：a 又生下一對兔子 f，而這對兔子 c 也生下一對兔子 g，同時這對兔子 b 也生下一對兔子 h，加上一對兔子 d 和一對兔子 e，共有 8 對兔子。

如此下去，每個月兔子的成對個數分別是 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ 。這數列我們稱之為斐波那契數列。

我們將生小兔的問題整理成表格如下：

	1	2	3	4	5	6	7
大兔子	0 對	1 對	1 對	2 對	3 對	5 對	8 對
小兔子	1 對	0 對	1 對	1 對	2 對	3 對	5 對
總數	1 對	1 對	2 對	3 對	5 對	8 對	13 對

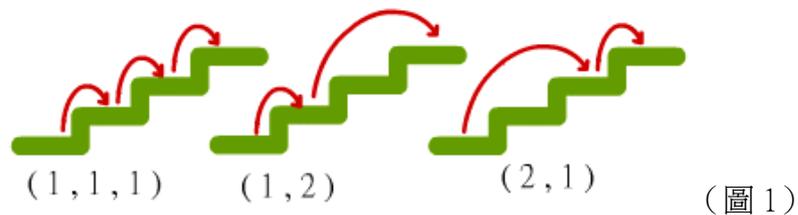
(表 1)

*總數即為前 2 項的和相加，稱之斐波那契數列。

(二) 由樓梯問題看斐波那契數列

上樓梯的走法可以一次一級或一次兩級，若一次三級則太過危險，為了安全起見，我們限定一步只可走一級或兩級。因此如果樓梯只有一級，上樓梯的方法當然只有一種；樓梯有兩級，可以一步一級，也可以一步兩級，如此上樓梯的方法有兩種。但是樓梯三級以上，會有多少種走法呢？

我們將三級樓梯的走法，圖示如下，可以得到較清楚的概念，至於其他級數樓梯的走法，用表格討論如下，是否能夠像『生小兔』的問題般，得到一個通論性的結論呢？



樓梯級數	各級樓梯走法的組合數	組合數
3	(1,1,1) (2,1) (1,2)	3

4	<p>(1,1,1,1) (1,2,1) (2,1,1)</p> <p>(1,1,2) (2,2)</p> <p>4 階 = 3 階 + 1 階 = 2 階 + 2 階</p> <p>3 種組合 + 2 種組合 = 5 種</p>	5
5	<p>(1,1,1,1,1) (1,2,1,1) (2,1,1,1)</p> <p>(1,1,2,1) (2,2,1)</p> <p>(1,1,1,2) (1,2,2)(2,1,2)</p> <p>5 階 = 4 階 + 1 階 = 3 階 + 2 階</p> <p>5 種組合 + 3 種組合 = 8 種</p>	8
6	<p>(1,1,1,1,1,1) (1,2,1,1,1) (2,1,1,1,1)</p> <p>(1,1,2,1,1) (2,2,1,1) (1,1,1,2,1)</p> <p>(1,2,2,1) (2,1,2,1)</p> <p>(1,1,1,1,2) (1,2,1,2) (2,1,1,2)</p> <p>(1,1,2,2) (2,2,2)</p> <p>6 階 = 5 階 + 1 階 = 4 階 + 2 階</p> <p>8 種組合 + 5 種組合 = 13 種</p>	13

(表 2)

***組合方法即為斐波那契數列**

1. 討論過程：

因為上樓梯的級數規定只能一級或兩級，所以在討論題目時，先將最後的走法固定，再討論其餘階梯的走法譬如走 3 級樓梯，如果固定最後只能走 1 階，那前面的 2 階可以任意走，則為 2 級樓梯的走法；如果固定最後走 2 階，那前面的 1 階走法即為 1 級樓梯的走法；因此 3 級樓梯的走法就是 2 級樓梯的走法加上 1

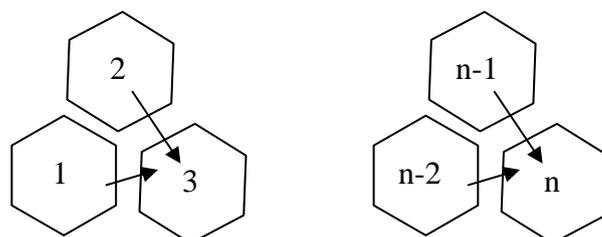
級樓梯的走法。同樣地，4 級樓梯固定最後的 2 種走法時，即可拆為 3 級樓梯和 2 級樓梯的走法，所以我們可以從這個應用問題得到一個通論：

$$\begin{aligned} \text{每一級樓梯 } (n) &= (n-1) \text{ 級} + 1 \text{ 層} \\ &= (n-2) \text{ 級} + 2 \text{ 層} \end{aligned}$$

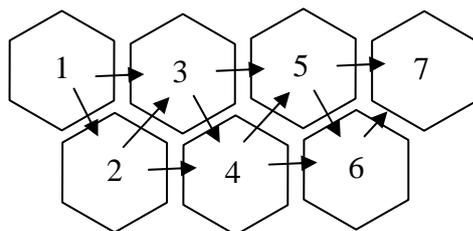
所以每一級樓梯的走法，即為前兩級樓梯走法的總合。而這正是一個斐波那契數列。

(三) 由小蜜蜂回家看斐波那契數列

有一種小蜜蜂回蜂巢的路徑走法如圖所示，那麼從第一格走到至第二格有幾種方法？從第二格走到第三格又有幾種方法？是否能如上的應用問題，得到一個通論，討論如下



(圖 2)



(圖 3)

蜂巢編號	走法	組合數
1	1	1
2	1	1
3	由 1 號向右進：1 種 由 2 號向上進：1 種 $1+1=2$	2
4	由 2 號向右進：1 種 由 3 號向下進：2 種 $1+2=3$	3
5	由 3 號向右進：2 種 由 4 號向上進：3 種 $2+3=5$	5
6	由 4 號向右進：3 種	8

	由 5 號向下進：5 種 3+5=8	
7	由 5 號向右進：5 種 由 6 號向上進：8 種 5+8=13	13

(表 3)

***組合方法即為斐波那契數列**

1. 討論過程：

小蜜蜂回蜂巢的走法，只受前 2 個編號蜂巢走法的影響，所以我們可以从這個應用問題得到一個通論：

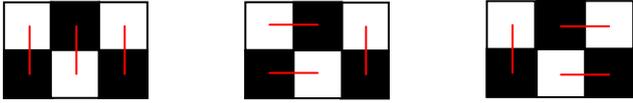
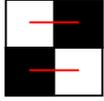
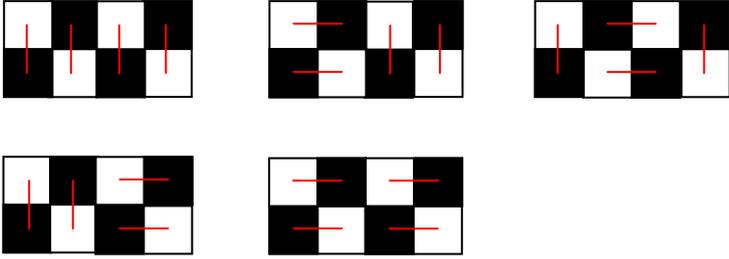
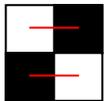
每一個編號 (n) 蜂巢的走法 = (n-1) 號蜂巢走法 + (n-2) 號蜂巢走法
由此可知，蜂巢走法即為斐波那契數列。

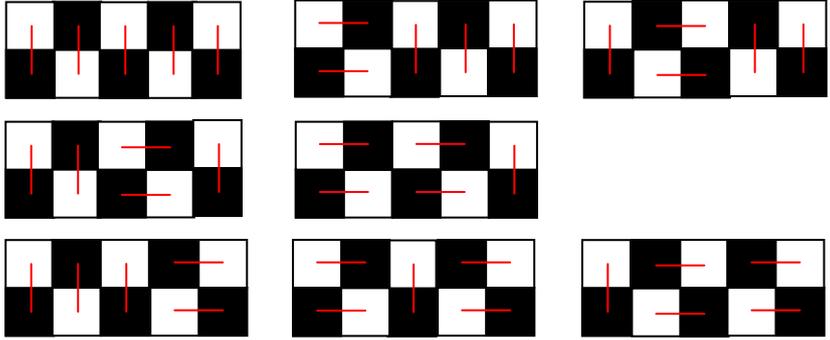
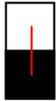
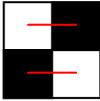
(四) 由骨牌覆蓋棋盤看斐波那契數列

以 2x1 的骨牌  或  覆蓋 2x2, 2x3, 2x4, 2x5 等棋盤，

我們可以動手排排看，並紀錄下不同的覆蓋方式。不同棋盤的所有骨牌覆蓋種類數之間，是否有其特殊關係呢？

編號	棋盤	骨牌覆蓋方式	種類
1	2x1		1
2	2x2		2

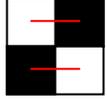
3	2x3	 <p>固定最後直放  則一 2x3 的矩形成為一 2x2 的矩形，</p> <p>若固定最後橫放  則一 2x3 的矩形成為一 2x1 的矩形，</p> <p>因此方法數則為 2x2 矩形的的方法數 + 2x1 矩形的的方法數 $1+2=3$</p>	3
4	2x4	 <p>固定最後直放  則一 2x4 的矩形成為一 2x3 的矩形，</p> <p>，</p> <p>若固定最後橫放  則一 2x4 的矩形成為一 2x2 的矩形</p> <p>因此方法數則為 2x3 矩形的的方法數 + 2x2 矩形的的方法數 $2+3=5$</p>	5

5	2x5	 <p>固定最後直放  則一 2x5 的矩形成爲一 2x4 的矩形，</p> <p>若固定最後橫放  則一 2x5 的矩形成爲一 2x3 的矩形，</p> <p>因此方法數則爲 2x4 矩形的方法數 + 2x3 矩形的方法數</p> $3+5=8$	8
---	-----	--	---

(表 4)

* 組合方法即爲斐波那契數列

1. 討論過程：

上表裡的不同類型的棋盤，骨牌覆蓋種類數分別是 1、2、3、5、8、.....。而斐波那契數列爲 1、1、2、3、5、8、.....。骨牌的第一項和斐波那契數列第二項開始一樣，我們發現棋盤格子旋轉之後的情形和固定不動的情形重複，因此棋盤格子黑白顏色不影響骨牌排列的情形，所以只要觀察骨牌的變化即可。當我們把每個棋盤方格最後放上  或 ，其邊長則減少 1 格或 2 格。當其邊長減少 1 格時，就是前一項的邊長；當其邊長減少 2 格時，就是前二項的邊長。骨牌蓋棋盤的方法，只受前 2 項方格數的影響，所以我們可以從這個應用問題得到一個通論：

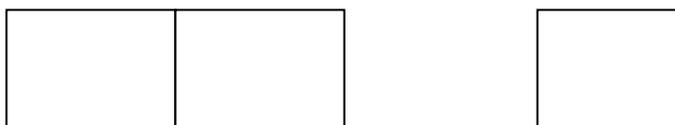
每一種類數 (n) 骨牌的放法 = (n-1) 種放法 + (n-2) 種放法

* 由此可知，骨牌覆蓋棋盤即爲斐波那契數列。

因此我們發現只要一個應用問題的假設條件是項項相扣，並且只受前 2 項結果數的影響，則這個應用問題即可用斐波那契數列來解釋，因此我們試著用斐波那契數列的性質來創造應用問題，並觀察它們種類數的變化：

(五) 由導盲磚看斐波那契數列

學校欲興建一條導盲道，所使用的導盲磚只有 2 種規格：1x1 (1 格) 和 2x1 (2 格) 的 2 種導盲磚，試討論鋪設各種長度導盲道的方法數：



導盲道長度	鋪設方式	方法數
3x1 導盲道	(1.1.1)(2.1) → 最後一塊鋪設 1x1 (1 格) 的導盲磚 (1.2) → 最後一塊鋪設 2x1 (2 格) 的導盲磚	3
4x1 導盲磚	(1.1.1.1)(2.1.1)(1.2.1) → 最後一塊鋪設 1x1 (1 格) 的導盲磚 (1.1.2)(2.2) → 最後一塊鋪設 2x1 (2 格) 的導盲磚	5
5x1 導盲磚	(1.1.1.1.1)(2.1.1.1)(1.2.1.1)(1.1.2.1) (2.2.1) → 最後一塊鋪設 1x1 (1 格) 的導盲磚 (1.1.1.2)(2.1.2)(1.2.2) → 最後一塊鋪設 2x1 (2 格) 的導盲磚	3+5=8
6x1 導盲磚	若固定最後一塊鋪設 1x1 (1 格) 的導盲磚則成爲一 5x1 導盲磚 若固定最後兩塊鋪設 2x1 (2 格) 的導盲磚則成爲一 4x1 導盲磚 因此方法數是 5+8=13	5+8=13

(表 5)

* 排列方法總數即爲斐波那契數列

1.討論過程：

因為導盲磚的種類規定只有兩種，所以在討論題目時，先將最後使用的導盲磚固定，再討論其餘格子數的排法，譬如排 3x1 導盲道，如果固定最後只能排 1 塊，那前面的 2 塊可以任意排，則為 2x1 導盲道的排法；如果固定最後排 2 塊，那前面的 1 塊走法即為 1x1 導盲道的排法；因此 3x1 導盲道的排法就是 2x1 導盲道的排法加上 1x1 導盲道的排法。同樣地，4x1 導盲道若固定最後的 2 種排法時，即可拆為 3x1 導盲道和 2x1 導盲道的排法，所以我們可以從這個應用問題得到一個通論：

不管是幾乘幾的導盲道都只有 2 種選擇來排列最後一塊導盲磚。

$$\begin{aligned} n \times 1 \text{ 的導盲道} &= (n-1) \text{ 的導盲道} + 1 \text{ 塊導盲磚} \\ &= (n-2) \text{ 的導盲道} + 2 \text{ 塊導盲磚} \end{aligned}$$

(六) 由小蜜蜂的繁衍看斐波那契數列

假設雄蜂與雌蜂的交配方式不同，一隻雄蜂的親代只需要一隻雌蜂，而一隻雌蜂的親代需要一隻雄蜂和一隻雌蜂。那請問一隻雄蜂的第 2、3、8 親代分別有幾隻呢？

親代	雌蜂 與雄蜂的數目	親代蜜蜂總數
3	一隻雄蜂 \longrightarrow 0 雄 1 雌 一隻雌蜂 1 雄 1 雌 $0+1+1+1=3$	3
4	一隻雄蜂 0 雄 1 雌 二隻雌蜂 2 雄 2 雌 $0+1+2+2=5$	5
5	二隻雄蜂 0 雄 2 雌 三隻雌蜂 3 雄 3 雌 $0+2+3+3=8$	8
6	三隻雄蜂 0 雄 3 雌 五隻雌蜂 5 雄 5 雌 $0+3+5+5=13$	13

7	五隻雄蜂 \longrightarrow 0 雄 5 雌 八隻雌蜂 \longrightarrow 8 雄 8 雌 $0+5+8+8=21$	21
8	八隻雄蜂 \longrightarrow 0 雄 8 雌 十三隻雌蜂 \longrightarrow 13 雄 13 雌 $0+8+13+13=34$	34
9	十三隻雄蜂 \longrightarrow 0 雄 13 雌 二十一隻雌蜂 \longrightarrow 21 雄 21 雌 $0+13+21+21=55$	55

(表 6)

1. 討論過程：

因為第 n 親代的雄蜂數目為第 $(n-1)$ 親代的雌蜂數量，亦等於第 $(n-2)$ 親代的蜜蜂總數，而第 n 親代的雌蜂等於第 $(n-1)$ 親代的蜜蜂總數。

因此我們可以看出：

$$\begin{aligned}
 & \text{第 } n \text{ 親代的蜜蜂總數} \\
 &= \text{第 } n \text{ 親代的雄蜂數目} + \text{第 } n \text{ 親代的雌蜂數目} \\
 &= \text{第 } (n-1) \text{ 親代的蜜蜂總數} + \text{第 } (n-2) \text{ 親代的蜜蜂總數}
 \end{aligned}$$

二、斐波那契數列項數與該項的值是否具有因倍數的關係？

(以下我們將分成兩種斐波那契數列來討論)

(一) 第一種斐波那契數列：

$$1. \quad a_1 = 1 ; a_2 = 1 ; a_3 = 2 ; a_4 = 3 ; a_5 = 5 ; a_6 = 8 ; a_7 = 13 ; a_8 = 21 ; a_9 = 34 ;$$

$$a_{10} = 55 ; a_{11} = 89 ; a_{12} = 144 \cdots \cdots ..$$

2. 斐波那契數列的定義：

$$\mathbf{a_1 = a_2} \quad a_1 = 1 ; a_2 = 1 ; \quad a_{n-1} + a_{n-2} = a_n \quad n \geq 3$$

3. 項數與因倍數的關聯：

(1) 斐波那契數列 a_n 當 $n=3k$ ， k 為任意正整數時 a_n 為偶數。

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1, & \text{奇數} \\ a_2 = 1, & \text{奇數} \\ a_3 = 1+1=2, & \longrightarrow \text{偶數} \\ a_4 = 2+1=3, & \text{奇數} \\ a_5 = 3+2=5, & \text{奇數} \end{array}$$

設 當 $n=3k$ ， $a_n = a_{3k}$ 為偶數 (a_{3k-1} 與 a_{3k+1} 為奇數)
則

$$\begin{aligned} n=3(k+1), \quad a_n &= a_{3k+3} \\ &= a_{3k+1} + a_{3k+2} \\ &= a_{3k} + a_{3k-1} + a_{3k+1} + a_{3k} \\ &= 2a_{3k} + a_{3k-1} + a_{3k+1} \\ &= \text{偶數} + \text{奇數} + \text{奇數} \end{aligned}$$

故 當 $n=3(k+1)$ ， a_n 為偶數 得證

(2) 斐波那契數列 a_n ，當 $n=4k$ ， k 為任意正整數時 $a_n \in 3m$ ，

m 為任意正整數。

$$\begin{array}{l} a_1 = 1, \\ a_2 = 1, \\ a_3 = 1+1=2, \\ a_4 = 2+1=3, \\ a_5 = 3+2=5, \\ a_6 = 8, \quad a_7 = 13 \end{array}$$

且 $a_8 = 1a_6 + 1a_7 = 1a_5 + 2a_6 = 2a_4 + 3a_5 = 21$

$$a_{12} = 1a_{10} + 1a_{11} = 1a_9 + 2a_{10} = 2a_8 + 3a_9 \quad (\text{其中 } 2a_8 \mid 3, 3a_9 \mid 3)$$

$$a_{16} = 1a_{14} + 1a_{15} = 1a_{13} + 2a_{14} = 2a_{12} + 3a_{13}$$

依照相同的討論法則，我們發現

$$\begin{aligned} a_{4k} &= 1a_{4k-2} + 1a_{4k-1} \\ &= 1a_{4k-3} + 2a_{4k-2} \\ &= 2a_{4k-4} + 3a_{4k-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow a_{4k} = 2a_{4k-4} + 3a_{4k-3}, \\ &\rightarrow 2a_{4k-4} \in 3p, \quad 3a_{4k-3} \in 3q \\ &\therefore 3p + 3q \in 3m \\ &\text{故 } a_{4k} \in 3m \end{aligned}$$

(3) 斐波那契數列 a_n ，當 $n=5k$ ， k 為任意正整數時 a_n ， $5 \mid a_n$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1,$$

$$a_3 = 1+1=2,$$

$$a_4 = 2+1=3,$$

$$a_5 = 3+2=5, \quad (\text{即 } 5 \mid a_5) \quad \longleftarrow$$

$$a_6 = 5+3=8$$

$$\text{且 } a_{10} = 1a_8 + 1a_9 = 1a_7 + 2a_8 = 2a_6 + 3a_7 = 3a_5 + 5a_6 = 55 \quad \longleftarrow$$

$$a_{15} = 1a_{13} + 1a_{14} = 1a_{12} + 2a_{13} = 2a_{11} + 3a_{12} = 3a_{10} + 5a_{11}$$

$$a_{20} = 1a_{18} + 1a_{19} = 1a_{17} + 2a_{18} = 2a_{16} + 3a_{17} = 3a_{15} + 5a_{16}$$

依照相同的討論法則，我們發現

$$\begin{aligned} a_{5k} &= 1a_{5k-2} + 1a_{5k-1} \\ &= 1a_{5k-3} + 2a_{5k-2} \\ &= 2a_{5k-4} + 3a_{5k-3} \\ &= 3a_{5k-5} + 5a_{5k-4} \\ &\rightarrow a_{5k} = 3a_{5k-5} + 5a_{5k-4}, \end{aligned}$$

$$\therefore 5 \mid 3a_{5k-5}, \quad 5 \mid 5a_{5k-4}.$$

$$\therefore 5 \mid a_{5k}.$$

4. 因此我們推想著那麼是不是當 $n=6k$ ， k 為任意正整數時 $a_n \in 8m$ ， m 為任意正整數？我們發現將斐波那契數列中的任一數拆解為前幾項的和時，係數本身也是一個斐波那契數列。

例如：

$$\textcircled{1} a_{3k} = 1a_{3k-2} + 1a_{3k-1} = 1a_{3k-3} + 2a_{3k-2}$$

拆解為前 2 項時，係數是 $(1, 1)$ ；拆解為更前 2 項時，係數是 $(1, 2)$ ； \dots a_{3k-3} ，

$$- a_{3k-2} - , - a_{3k-1} - , - a_{3k} - (1, 2)(1, 1)$$

拆解至前3項 a_{3k-3} 係數是1，前2項 a_{3k-2} 係數是2，前3項 a_{3k-3} 一定是 $a_3=2$ 的倍數，前2項 a_{3k-2} 係數就是2，所以 a_{3k} 一定是 $a_3=2$ 的倍數。

$$\textcircled{2} a_{4k} = 1a_{4k-2} + 1a_{4k-1} = 1a_{4k-3} + 2a_{4k-2} = 2a_{4k-4} + 3a_{4k-3}$$

拆解為前2項時，係數是(1, 1)；拆解為更前2項時，係數是(1, 2)；
拆解為更前2項時，係數是(2, 3)；
 $- a_{4k-4} - , - a_{4k-3} - , - a_{4k-2} - ,$
 $- a_{4k-1} - , - a_{4k} - (2, 3)(1, 2)(1, 1)$

拆解至前4項 a_{4k-4} 係數是2，前3項 a_{4k-3} 係數是3，

前4項 a_{4k-4} 一定是 $a_4=3$ 的倍數，前3項 a_{4k-3} 係數就是3，

所以 a_{4k} 一定是 $a_4=3$ 的倍數。

同樣地，

$$\textcircled{3} a_{6k} = 1a_{6k-2} + 1a_{6k-1} = 1a_{6k-3} + 2a_{6k-2} = 2a_{6k-4} + 3a_{6k-3}$$

$$= 3a_{6k-5} + 5a_{6k-4} = 5a_{6k-6} + 8a_{6k-5}$$

拆解至前6項 a_{6k-6} 係數是5，前5項 a_{6k-5} 係數是8，

前6項 a_{6k-6} 一定是 $a_6=8$ 的倍數，前5項 a_{6k-5} 係數就是8，

所以 a_{6k} 一定是 $a_6=8$ 的倍數。

④根據拆解的原理， $a_{nk} = a_{n-1} \times a_{n(k-1)} + a_n \times a_{n(k-1)+1}$ n, k 皆為正整數

又 $a_{a(k-1)}$ 一定是 a_n 的倍數， $a_n \times a_{n(k-1)+1}$ 也一定是 a_n 的倍數，

所以 a_{nk} 一定是 a_n 的倍數。

*斐波那契數列項數與該項的值確實具有因倍數的關係。

(二) 第二種斐波那契數列：

1. 斐波那契數列的定義：

$$a_1 \neq a_2 \quad a_{n-1} + a_{n-2} = a_n \quad n \geq 3$$

2. 項數與因倍數的關聯：

(1) 斐波那契數列 a_n ，設 $a_1 = p$ ， $a_2 = q$ ，且 p 為奇數， q 為偶數當 $n=3k+2$ ，

$k=0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 時， a_n 為偶數。

$a_1 = p$ ，	奇數	
$a_2 = q$ ，	偶數	←—————
$a_3 = p + q$ ，	奇數	

$$\begin{aligned}
a_4 &= p + 2q, && \text{奇數} \\
a_5 &= 2p + 3q, && \text{偶數} \longleftarrow \\
a_6 &= 3p + 5q, && \text{奇數} \\
a_7 &= 5p + 8q, && \text{奇數} \\
a_8 &= 8p + 13q, && \text{偶數} \longleftarrow \\
a_9 &= 13p + 21q, && \text{奇數} \\
a_{3k+2} &= a_{3k} + a_{3k+1} \\
&= \text{奇數} + \text{奇數} = \text{偶數} \\
\text{故 當 } n=3k+2 \text{ 時 } a_n &= \text{爲偶數}
\end{aligned}$$

(2) 斐波那契數列 a_n 當 $n=4k$, k 爲任意正整數時 $a_n \notin 3m$, m 爲任意正整數。

(3) a_n 當 $n=5k$, k 爲任意正整數時 a_n , $a_n \notin 5r$, r 爲任意正整數。

肆、研究結果：

- 一、可用斐波那契數列解釋的應用問題具有一定形式,我們發現只要一個應用問題的假設條件是項項相扣,並且只受前 2 項結果數的影響,則這個應用問題即可用斐波那契數列來解釋,所以我們可以自行設計組合數符合斐波那契數列的應用問題。
- 二、斐波那契數列各項項數之間如爲因倍數的關係,則其值亦必有因倍數的關係。

伍、討論：

- 一、我們發現可用斐波那契數列解釋的應用問題具有一定形式,縱然生活中存在許多斐波那契數列,譬如：*花瓣、葉序、波蘿鱗片、琴鍵*…等等,其數目都是斐波那契數列中的各項,但是真要像生小兔那樣環環相扣的應用問題,必須有著嚴格的規定,因此可用斐波那契數列解釋的應用問題實數少數,但是當我們能掌握,隱含在應用問題中的此種規律性時,便能輕易將看似困難的題目解決,譬如樓梯問題、骨牌問題、甚或方塊問題,這種發展性看似無法掌握的應用問題,如果一項項的做下去,便會沒完沒了,不得其解,但是當我們發覺其間隱含著斐波那契數列的寓意時,便能輕易的解決它了。在掌握斐波那契數列的屬性之後,的確更易於觀察應用問題,但是由於可用斐波那契數列解釋的應用問題具有一定形式,在我們自行創造應用問題的過程中,確實容易落入方格問題的窠臼。
- 二、因爲斐波那契數列的屬性即是下一項爲前兩項之和,所以我們就試著將各項一步步拆成前 2 項或相鄰的任 2 項之和,驚奇地發現拆解的各項係數居然是斐波那契數列中相鄰的 2 項,如此的分解下去,因爲間隔數的關係,產生了 $a_{nk} = a_{n-1} \times a_{a(k-1)} + a_n \times a_{n(k-1)+1}$ n, k 皆爲正整數,這樣的式子,所以斐波那契數列各項之間如爲因倍數的關係,則其值亦必有因倍數的關係。
- 三、在研究斐波那契數列的過程中,我們發現後項和前項的比值幾乎都爲 1.6 左右,因此

和老師討論是否無論斐波那契數列發展至何項，其比值都如是呢？在觀察過程中學到收斂及發散的性質，也得知其比值的確是趨近一個定值，更有趣的是這個比值正是達文西密碼中所提人體的完美比例，而以此比值裁剪分割的幾何圖形，都能繼續維持一完美完整的形狀，如上我們所討論的應用問題，當然也包含曾在課本上看到的黃金矩形、黃金三角形，都依舊能維持一完美完整的圖形。

陸、結論：

一、存在日常生活中的斐波那契數列的應用問題：

(一) 樓梯問題方法數是一斐波那契數列

(二) 蜂巢路徑方法數是一斐波那契數列

(三) 骨牌問題方法數是一斐波那契數列

斐波那契數列的應用問題具有一定形式

二、斐波那契數列各項項數之間如為因倍數的關係，則其值亦必有因倍數的關係。

【評語】 030418

對於可利用遞迴概念求解的問題做一些整理，對於理解這樣的概念是一個不錯的做法。但過份強調這些內容，反而呈現不出屬於自己創作的部分。費氏數列其實有許多有趣的性質（如作者在作品中討論的一些倍數關係）。如果能在這些方向上多作著墨，將會更好。