

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

國中組 數學科

第二名

030417

過河高手

學校名稱：屏東縣立明正國民中學

作者：  國一 邱千津  國一 李淨雯  國一 邱翊婷	指導老師：  林佩伶  陳淑琳
-----------------------------------------------	-----------------------------

關鍵詞： 過河問題、座標圖

# 過河高手

## 摘要

本次研究主要是在探討人狗過河問題，由網路上的 3 對人狗開始探討，並推究到不成對的人狗，找出最少次數的過河方法，歸納過河的規律，並訂出過河策略流程圖。我們發現人狗是否成對、船的乘載數、人狗個數都會影響過河的難易程度，也發現人狗是否成對、乘載數是奇數或偶數時，會有不同的過河模式。

## 研究動機

我們在網路上發現一個「過河遊戲」，這個遊戲共有兩關，第一關很容易就過了，第二關卻一再失敗，最後經過老師的提示才過關。後來，我們在討論過關情形時，發現每次過關的次數都不一樣，大家很想知道以什麼方式過河，才是最少的次數。也有同學提到，如果人、狗的數量增加了，是否可以過關？我們都覺得這些問題很有挑戰性，希望能找出過關的規律，讓自己成為「過河高手」。

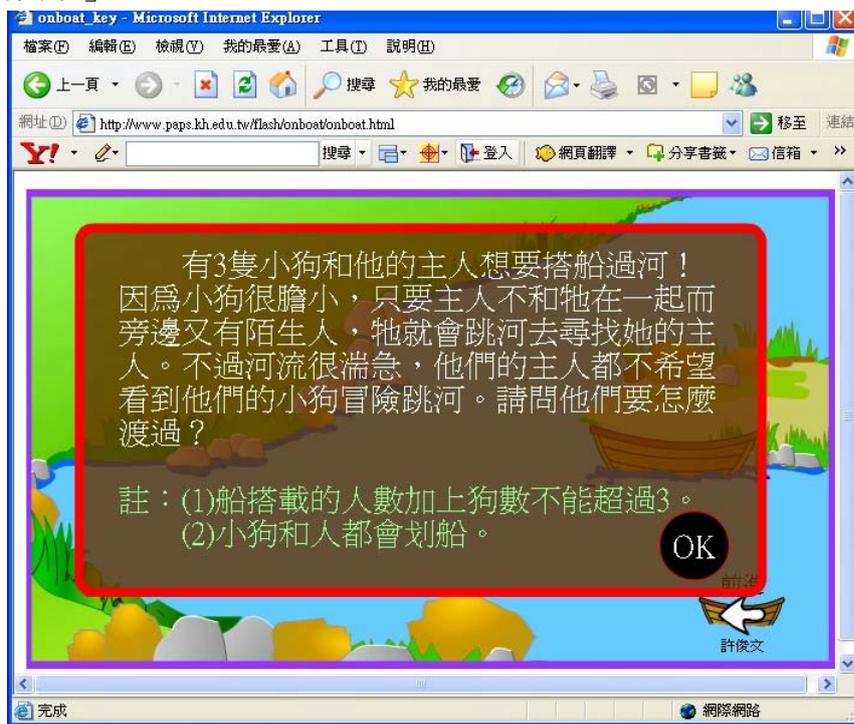


圖 1：第一關的說明畫面(<http://www.paps.kh.edu.tw/flash/onboat/onboat.html>)

## 研究目的

我們想找出可以讓狗和主人全部順利過去而且是次數最少的方法。並且在同樣的規則下，增加人狗的對數以及船的承載數量，看看這些過河方法有沒有規律。除了研究成對的人狗過河以外，我們還想看看人、狗的數量如果不是成對的，過河的方法又是如何呢？

以下是我們的研究問題：

- 一、原問題要如何解？
- 二、如果人狗的對數或船的承載數量改變了，要如何過河？
- 三、不成對的人狗，要用什麼方法過河？
- 四、這些過河的方法有沒有規律？

為了溝通方便，我們使用了一些符號，【】表示用無條件進入法算到整數位。例如：【 $(2m-b) \div (b-2)$ 】表示將 $(2m-b) \div (b-2)$ 的結果用無條件進入法算到整數位。『』表示用無條件捨去法算到整數位，例如：『 $b/2$ 』表示將 $b/2$ 的結果用無條件捨去法算到整數位。

## 研究設備及器材

紙、鉛筆、橡皮擦、電腦。

## 研究過程與結果

### 一、原問題要如何解？

我們把可以順利過河而且是次數最少的快速方法稱為「**飆法**」，就是「**去時盡可能把船坐滿，回來時1個人(或狗)把船划回來的方法**」。

#### (一)船的承載數=3

從網路上首都師範大學數學系馬祖良先生的「從“夫妻過河”談起」的文章，知道了可以用座標的方式來處理。於是我們以X座標表示人數，Y座標表示狗數，把此岸1個人2隻狗的狀態，用座標(1, 2)表示。

再以「-」表示「去」，「+」表示「回」，3對人狗過河就是要從(3, 3)開始，(0, 0)結束，飆法就可以寫成：

$$(3,3)-(0,3)+(0,1)-(3,0)+(1,0)-(1,1)$$

$$\begin{array}{cccccc} \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \\ (3,0) & (3,1) & (0,1) & (1,1) & (0,0) & \end{array}$$

座標圖上的每一點是表示著**此岸**的一種狀態，雖然規則上說的是「**在旁邊有陌生人的情況下，3隻狗必須和它的主人在一起**」，這個條件實際上是和「**在有人的情況下，小狗不能比人多**」一樣，只要注意在一起的狗和人是同一對的即可。例如(1, 2)表示目前此岸有1個人2隻狗，那就是說有一隻狗是沒有和主人在一起的，這隻狗就會跳河去尋找主人，所以這種情況是不允許的。雖然(2, 1)表示目前此岸有2個人1隻狗，這隻狗和主人在一起，但是對岸的狀態卻是1個人2隻狗，對岸就會有一隻狗會跳河，所以這也是不行的。因此，座標上有三條紅線上的紅點是可以允許存在的狀態，其他的點則是不行的，見圖2。把飆法用座標圖畫出來，就是要從(3, 3)開始，往(0, 0)的方向前進，每次

進退最多只能走 3 個格線，而且必須停留在可存在的狀態的點上，見圖 3。

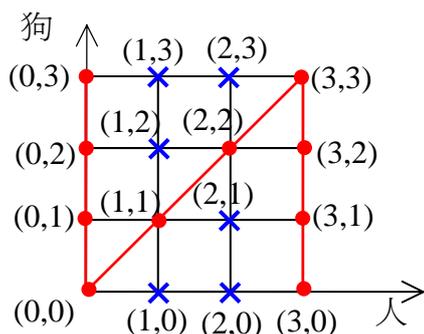


圖 2 紅點為可存在的狀態

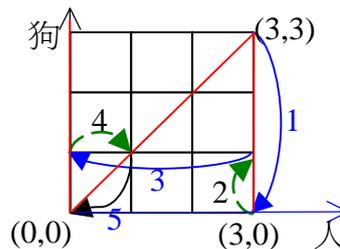


圖 3 實線表示去，虛線表示回

## (二) 船的承載數=2

以下解法是唯一的解法，總共要划 11 次，座標圖的解法見圖 4：

$$(3,3)-(0,2)+(0,1)-(0,2)+(0,1)-(2,0)+(1,1)-(2,0)+(0,1)-(0,2)+(0,1)-(0,2)$$

$$\parallel \parallel \parallel$$

$$(3,1) (3,2) (3,0) (3,1) (1,1) (2,2) (0,2) (0,3) (0,1) (0,2) (0,0)$$

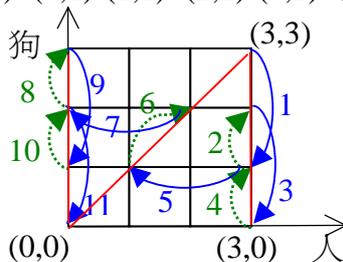


圖 4

## 二、如果船的承載數量或人狗的對數改變了，要如何過河？

### (一) 船的承載數=1

不管人狗有多少對，都是無解。

### (二) 船的承載數=2

1、1 對人狗，一次就解決了。

2、2 對人狗要划 5 次，如圖 5。

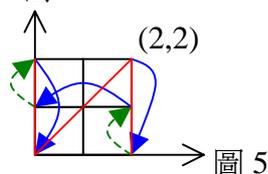


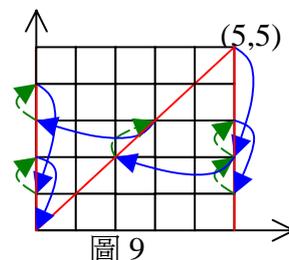
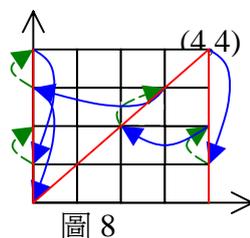
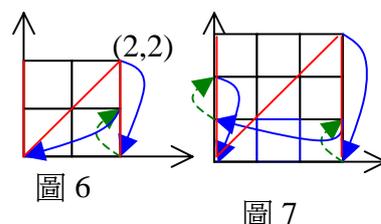
圖 5

3、3 對人狗，見原問題的解法，共要 11 次。

4、4 對以上無解。

### (三) 船的承載數=3

- 1、1 對人狗划 3 次就解決了。
- 2、2 對人狗，要 3 次(圖 6)
- 3、3 對人狗，要 5 次(圖 7)
- 4、4 對人狗，要 9 次(圖 8)
- 5、5 對人狗，要 11 次(圖 9)
- 6、6 對以上無解。



#### (四) 船的承載數=4

以畫座標圖的方法來找出過河的策略，發現飄法是 2 對去 1 對回，見圖 10。過河所需的次數如表 1：

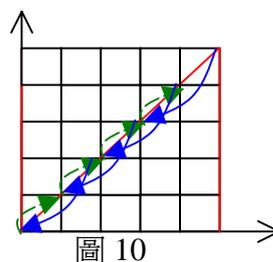


表 1

對數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
次數	1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...

#### (五) 船的承載數=5

我們發現可用承載數=4 的方法過河，但不是飄法，飄法如下：

- 1、1~2 對人狗一次就解決了。
- 2、3~4 對人狗
  - (1) 全部的人和狗一共 5 個去
  - (2) 1 狗回
  - (3) 狗全去
- 3、5 對人狗
  - (1) 5 狗去
  - (2) 1 狗回
  - (3) 5 人去或 4 人去
  - (4) 1 人回或 1 對人狗回
  - (5) 剩下的全去
- 4、6~7 對人狗
  - (1) 5 狗去
  - (2) 1 狗回

- (3) 4 人去
- (4) 1 對人狗回
- (5) 剩下的人和狗共 5 個去
- (6) 1 狗回
- (7) 狗全去

5、8 對以上人狗

- (1) 5 狗去
- (2) 1 狗回
- (3) 4 人去
- (4) 1 對人狗回
- (5) 2 對人狗去
- (6) 1 對人狗回
- (7) 再重覆(5)(6)的步驟，一直到剩下的人比 5 個少或者是剩下的人狗數小於 5。
- (8) 如果剩下的人狗數小於 5，人狗全去就結束了，不然就要：
  - 1)人和狗共 5 個去
  - 2)1 狗回
  - 3)狗全去

過河所需的次數如表 2：

表 2

對數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
次數	1	1	3	3	5	7	7	9	11	13	15	17	...

**(六)船的承載數=6**

我們發現飄法是 3 對去 1 對回(見附件一)，過河所需的次數如表 3：

表 3

對數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
次數	1	1	1	3	3	5	5	7	7	9	9	11	...

**(七)船的承載數=7**

可以用船的承載數=6 的方法過河，但這不是飄法，飄法如下(見附件三)：

1、1~3 對人狗

因為此岸人狗數 $\leq$ 船的承載數，所以一次就解決了。

2、4~6 對人狗

- (1) 全部的人和狗一共 7 個去
- (2) 1 狗回
- (3) 狗全去

3、7~8 對人狗

- (1) 7 狗去
- (2) 1 狗回
- (3) 6 人去
- (4) 1 對人狗回
- (5) 剩下的全去

4、9~11 對人狗

- (1) 7 狗去
- (2) 1 狗回
- (3) 6 人去
- (4) 1 對人狗回
- (5) 剩下的人和狗共 7 個去
- (6) 1 狗回
- (7) 狗全去

5、12 對以上人狗

- (1) 7 狗去
- (2) 1 狗回
- (3) 6 人去
- (4) 1 對人狗回
- (5) 3 對人狗去
- (6) 1 對人狗回，再重覆(5)(6)的步驟，一直到剩下的人比 7 個少或者是剩下的人狗數小於 7
- (7) 如果剩下的下的人狗數小於 7，人狗全去就結束了，不然就要：
  - 1)剩下的人和狗共 7 個去
  - 2)1 狗回
  - 3)狗全去

過河所需的次數如表 4：

表 4

對數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
次數	1	1	1	3	3	3	5	5	7	7	7	9	...

### (八)結果

由以上的過河策略，我們發現颯法是「盡量走兩邊的鉛垂線」，因為可以 1 個人或狗回來，如果走到中間的斜線上，就得一對人狗回來，m 對人狗過河的颯法與規律如下：

1、當乘載數 b 是大於 2 的偶數時

- (1) 颯法：有兩種颯法：一種是用  $b/2$  對，1 對回的方式(如附件一)；我們發現也可以使用奇數的颯法，這是第二種颯法(如附件二)。
- (2) 過河所需的次數：
  - 1) 當人狗數  $\leq b$ ，一次就可以了。

2) 當人狗數  $> b$ ，就要  $\lfloor (2m-b) \div (b-2) \rfloor \times 2 + 1$  次。

2、 $b$  是大於 3 的奇數時，可以用乘載數是  $b-1$  的方式過河，但這不是飄法。

飄法是：(如附件三)

(1) 如果此岸人狗數  $\leq b$ ，全過去，就結束了。不然就要：

- 1)  $b$  狗去
- 2) 1 狗回
- 3)  $b-1$  人去
- 4) 1 對人狗回

(2) 再檢查如果此岸人狗數  $\leq b$ ，全過去就結束了。不然就要檢查剩下的人是不是比  $b$  個少，如果是，就：

- 1) 剩下的人和狗共  $b$  個去
- 2) 1 狗回
- 3) 狗全去，就結束了。

如果是剩下的人比  $b$  個多，就要

- 1)  $(b-1) \div 2$  對人狗去
- 2) 1 對人狗回

3) 重覆 1) 2) 一直到此岸人狗數  $\leq b$ ，或者是剩下的人比  $b$  個少為止。

### 三、不成對的人狗，要用什麼方法過河？

#### (一) 人比狗多

##### 1、人比狗多 1 個

當人比狗多 1 時，在圖 11 中兩條紅色斜線及兩條紅色直線通過的紅點，都是可以停留的點，例如  $(2, 1)$  表示目前此岸有 2 個人 1 隻狗，對岸的狀態則是兩對人狗，所以此岸的這 2 個人中必有 1 個人是這隻狗的主人，因此這種情況是被允許的。

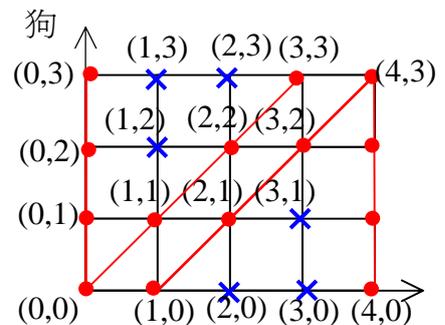


圖 11

有  $m$  個人  $m-1$  隻狗要過河，所以人狗數是  $2m-1$ ，我們把船的可乘載數以  $b$  來表示，找出了以下的過河規律。

(1)  $b$  為奇數

1)  $b=1$ ，無解。

2)  $b > 1$ ，飄法是： $(b-1) \div 2$  對人狗加多的那一人過去，然後多的那一人回來，以此類推，即可過關(見附件四)。過河所需的次數是：

① 若  $(2m-1) \leq b$ ，1 次。

②若 $(2m-1) > b$ ， $\lceil (2m-1-b) \div (b-1) \rceil \times 2 + 1$  次。

(2)  $b$  為偶數

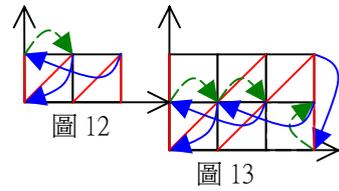
1)  $b=2$

①1 人 0 狗，1 次完成。

②2 人 1 狗，3 次完成，見圖 12。

③3 人 2 狗，7 次完成，見圖 13。

④4 人 3 狗以上，無解。



2)  $b \geq 4$ ，可以用成對人狗過河的策略，但不是飄法，飄法和成對人狗、乘載數為奇數的飄法策略很類似：

①如果此岸人狗數  $\leq b$ ，就全過去結束了。不然就要

- (i)  $b$  狗去
- (ii) 1 狗回
- (iii)  $b$  人去(包含無狗的人)
- (iv) 多的那人回

②再檢查如果此岸人狗數  $\leq b$ ，全過去就結束了。不然就

- (i)  $b/2$  對人狗去
- (ii) 1 對人狗回
- (iii) 重覆 (i) (ii) 步驟一直到此岸人狗數  $\leq b$ ，或者是剩下的人比  $b$  個少為止。

## 2、人比狗多 2 個

人比狗多 2 時的座標圖上所允許的狀態，和人比狗多 1 的情形相比，會在原來兩斜線右下方，再多一條平行線(如圖 14)，這條平行線上的點也是允許的，當人比狗多三人，再往右下加一條平行線，依此類推。

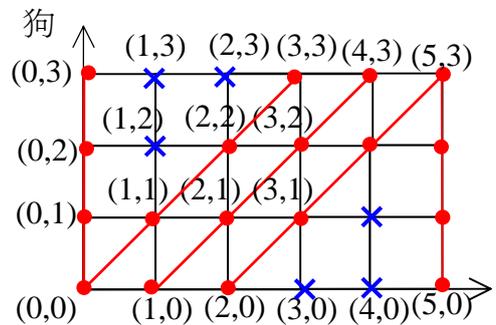


圖 14

當有  $m$  個人  $m-2$  隻狗要過河(所以人狗數共是  $2m-2$ )，船的可乘載數為  $b$ ，我們找出了以下的過河規律。

(1)  $b$  為奇數時，飄法、次數都和人比狗多 1 且  $b$  為奇數的情形一樣。

(2)  $b$  為偶數

1) 飄法

①如果此岸人狗數  $\leq b$ ，全過去就結束了。不然就要

- (i)  $(b/2-1)$  對人狗和 2 個無狗的人去
- (ii) 1 個無狗的人回

②再檢查是否此岸人狗數  $\leq b$ ，是就全部過去結束了。不然就

- (i)  $(b/2)$  對人狗去
- (ii) 另外 1 個無狗的人回

③重覆以上 1)、2)的步驟，直到過完為止。

2)次數

① $2m-2 \leq b$ ，一次完成。

② $2m-2 > b$ 時， $\lfloor (2m-2-b) \div (b-1) \rfloor \times 2 + 1$ 次。

$\lfloor (2m-2-b) \div (b-1) \rfloor$ 表示將 $(2m-2-b) \div (b-1)$ 的結果用無條件進入法算到整數位。

### 3、人比狗多 3 個以上

飄法和人比狗多二的飄法一樣。

## (二)狗比人多

由於主人不在，小狗會跳河的緣故，因此，小狗必須有主人在場，所以，考慮**一個人最多有兩隻狗的情況**，為了溝通方便，我們稱「一個主人和兩隻狗」為「**一組人狗**」，以便和「一對人狗」有所區隔。

### 1、狗比人多 1 個

當狗比人多 1 時，如 4 人 5 狗在圖 15 中，兩條紅色斜線及兩條紅色鉛垂線通過的紅點，是可允許存在的狀態，但實際過河時，未必是可以停留的點，飄法如下：

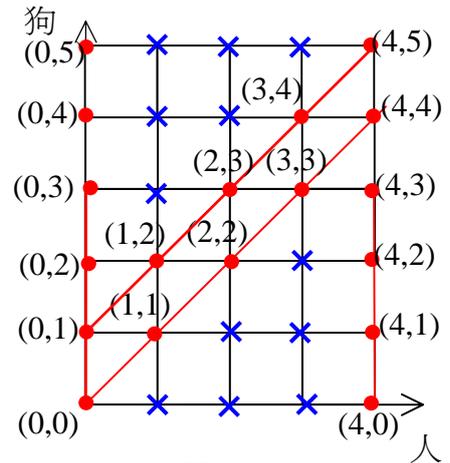


圖 15

(1)  $b=1$ ，無解。

(2)  $b=2$

1) 1 人 2 狗，7 次完成，見圖 16。

2) 2 人 3 狗，13 次完成，見圖 17。

3) 3 人 4 狗以上，無解。

(3)  $b=3$

1) 1 人 2 狗，1 次完成。

2) 2 人 3 狗，3 次完成，見圖 18。

3) 3 人 4 狗，5 次完成，見圖 19。

4) 4 人 5 狗，9 次完成，見圖 20。

5) 5 人 6 狗，11 次完成，見圖 21。

6) 6 人 7 狗以上，無解。

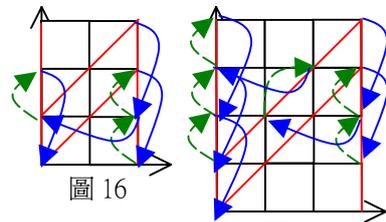


圖 16

圖 17

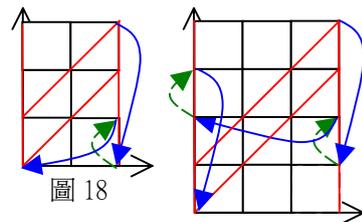


圖 18

圖 19

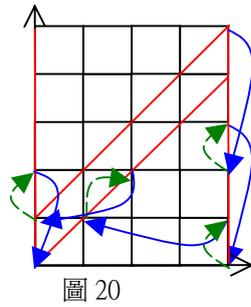


圖 20

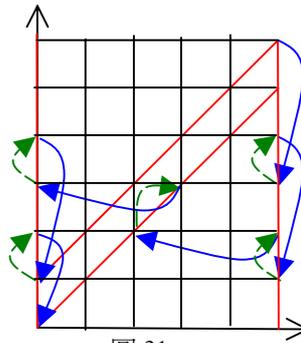


圖 21

(4)  $b > 3$ , 飄法是：

1) 若此岸人狗數  $\leq b$ , 全過去就結束了。不然要檢查狗數, 如果狗數  $< b$ , 就

① 人全去 + 狗共  $b$  個去。

② 1 狗回。

③ 狗全過去, 就結束了。

如果狗數  $\geq b$ , 就要

①  $b$  狗去。

② 1 狗回。

2) 再檢查此岸人數, 如果人數  $\leq b$

① 人全去 + 狗共  $b$  個去 (如果人全去 + 狗比  $b$  個少, 這一趟過去就結束了。)

② 重覆 1 狗回,  $b$  狗去, 直到狗全過完為止就結束了。

如果人數  $> b$

①  $b-1$  人 + 1 狗去 (此時一組人狗必須都過去了)。

② 1 對人狗回。

3) 如果人數  $> b$ , 再重覆『 $b/2$ 』對人狗去, 1 對人狗回, 直到人數  $\leq b$  後, 依 2) 人數  $\leq b$  的方式處理。

## 2、狗比人多 2 個

由於一人最多有兩隻狗, 所以必須從 2 組人狗開始探究。當狗比人多 2 時, 如 4 人 6 狗在圖 22 中, 三條紅色斜線及兩條紅色鉛垂線通過的紅點, 是可允許存在的狀態, 但實際過河時, 未必是可以停留的點。其中上下兩條斜線沒有將兩條鉛垂線連接起來, 過河飄法如下：

- (1)  $b=1$ ，無解。
- (2)  $b=2$ 
  - 1) 2 人 4 狗，9 次完成，見圖 23。
  - 2) 3 人 5 狗，15 次完成，見圖 24。
  - 3) 4 人 6 狗以上，無解。
- (3)  $b=3$ 
  - 1) 2 人 4 狗，5 次完成，見圖 25。
  - 2) 3 人 5 狗，7 次完成，見圖 26。
  - 3) 4 人 6 狗，9 次完成，見圖 27。
  - 4) 5 人 7 狗，11 次完成，見圖 28。
  - 5) 6 人 8 狗以上，無解。

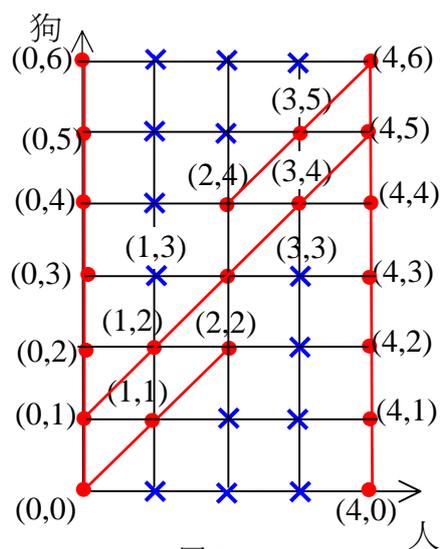
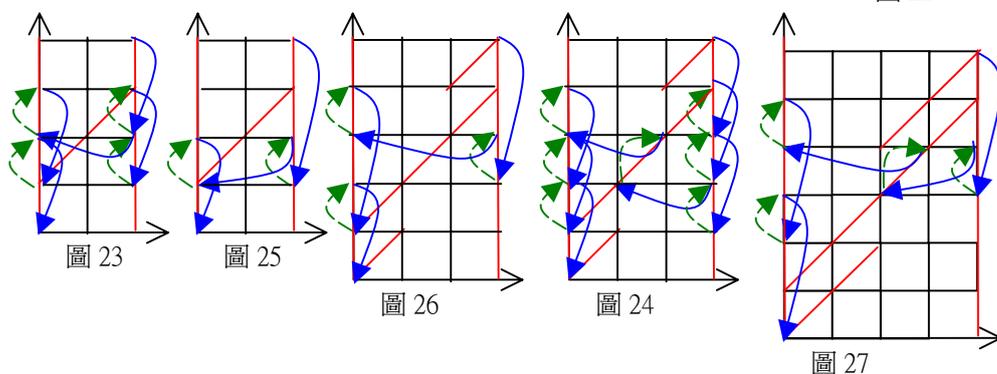


圖 22



- (4)  $b$  為  $\geq 4$  的偶數，飆法和狗比人多 1 一樣。
- (5)  $b$  為  $\geq 5$  的奇數，飆法是：
  - 1) 同狗比人多 1 的 1)。
  - 2) 同狗比人多 1 的 2)。
  - 3) 若人數  $\leq b$ ，依 2) 人數  $\leq b$  的方式處理；不然就  $(b-3)/2$  對人狗 + 1 組人狗過去，1 對人狗回。
  - 4) 如果人數  $> b$ ，再重覆『 $b/2$ 』對人狗去，1 對人狗回，直到人數  $\leq b$  後，依 2) 人數  $\leq b$  的方式處理。

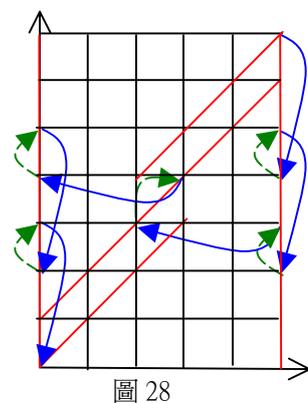


圖 28

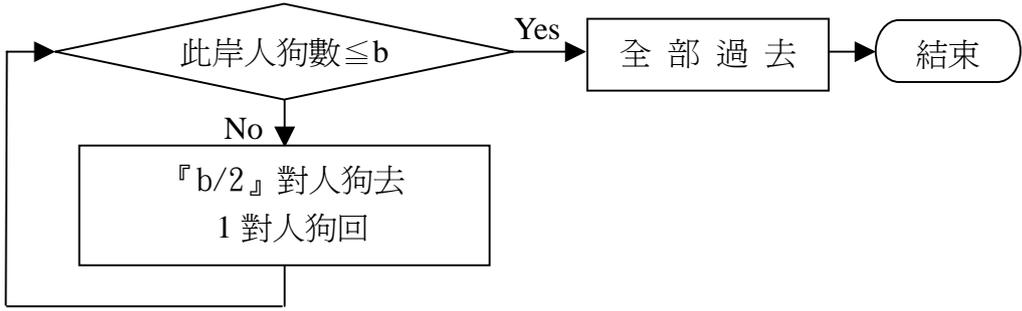
### 3、狗比人多 3 個

由於一個人最多只有兩隻狗，所以，狗比人多 3 個必須從 3 組人狗開始探究；狗比人多 4 個必須從 4 組人狗開始探究，以此類推。當狗比人多 3 時，在座標圖中會有四條紅色斜線及兩條紅色鉛垂線通過的紅點，是可允許存在的狀態，實際過河時，未必是可以停留的點，但四條紅色斜線不是都有連接兩條鉛垂線；狗比人多 4 個時，就會有五條紅色斜線及兩條紅色鉛垂線通過的紅點，是可允許存在的狀態，以此類推，過河飆法如下：

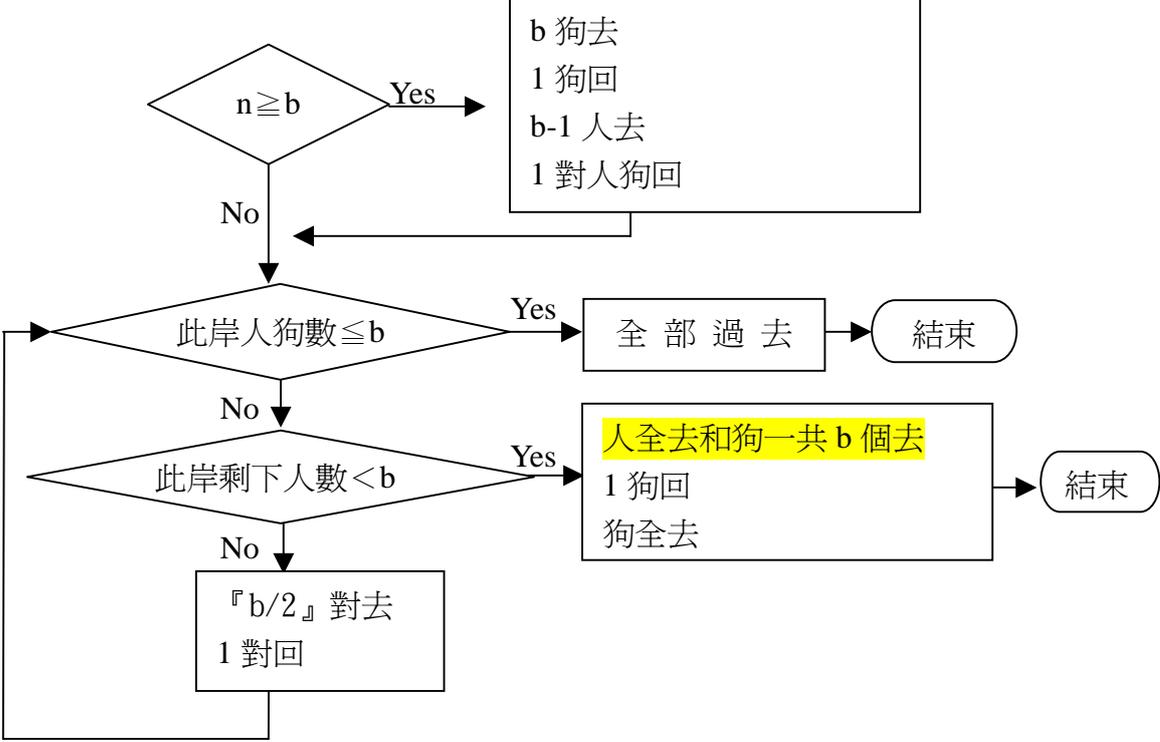
- (1)  $b \leq 2$ ，無解。
- (2)  $b=3$



策略一



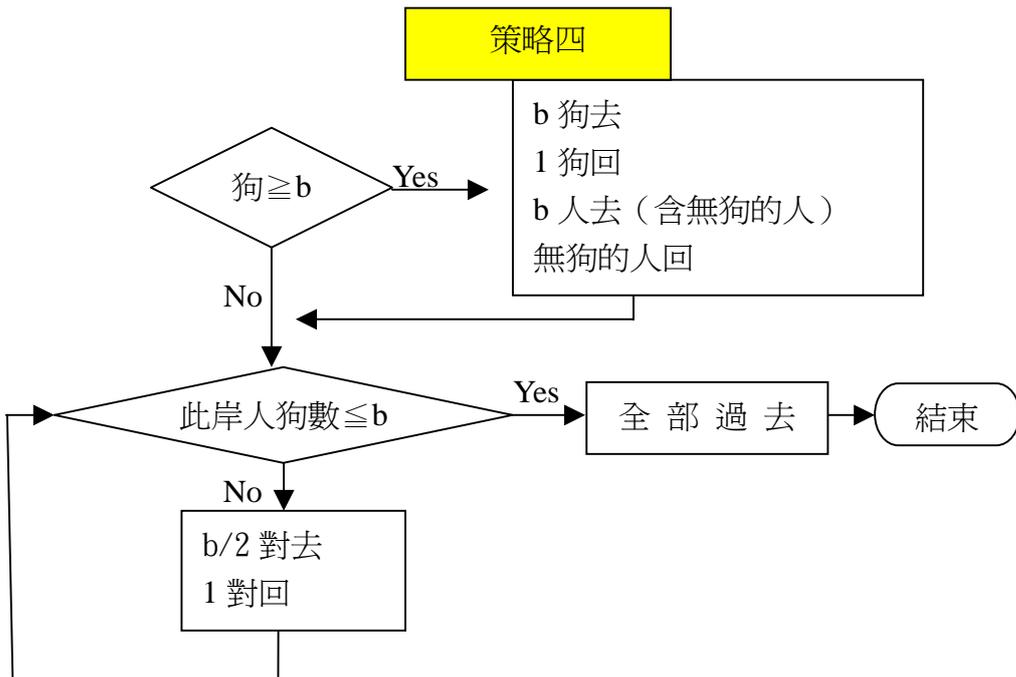
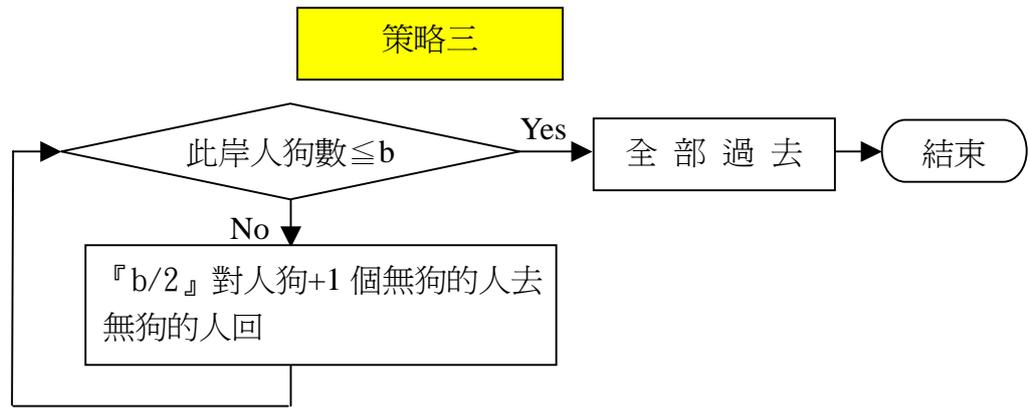
策略二



(二)  $m=n+1$

- 1、 $b=1$  時，無解。
- 2、 $b=2$  時， $m \geq 4$ ，無解。
- 3、 $b > 2$  時

策略一和策略二都可以過河，但都不是飄法。 $b$  為奇數時，飄法是策略三，如附件四； $b$  為偶數時的飄法為策略四，如附件五。

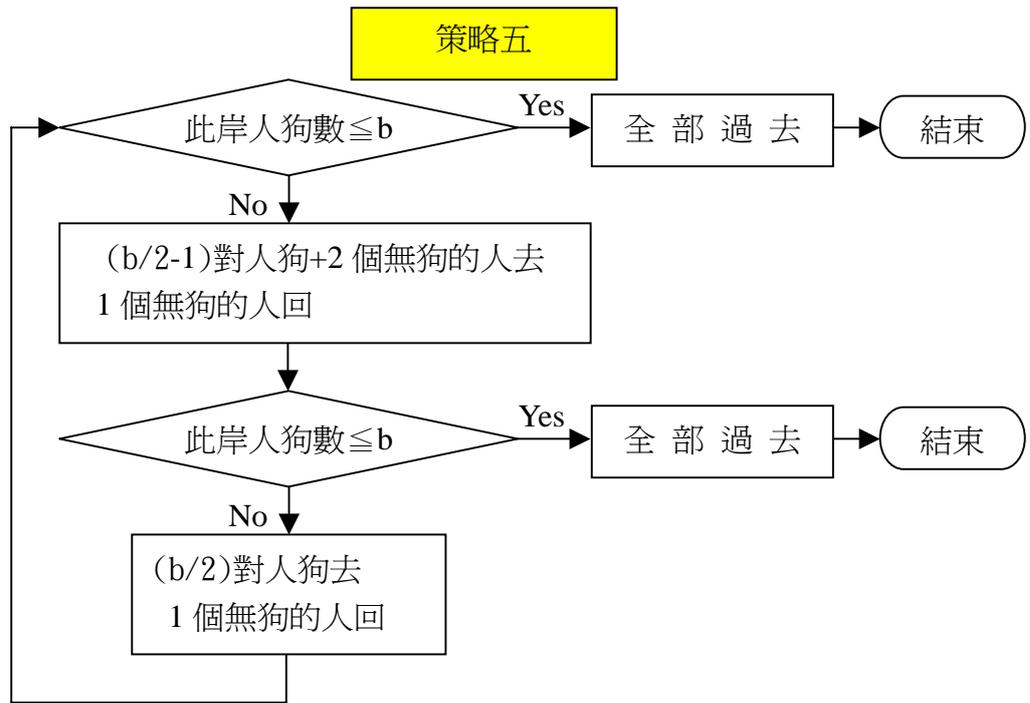


(三)  $m \geq n + 2$

1、 $b = 1$  時，無解。

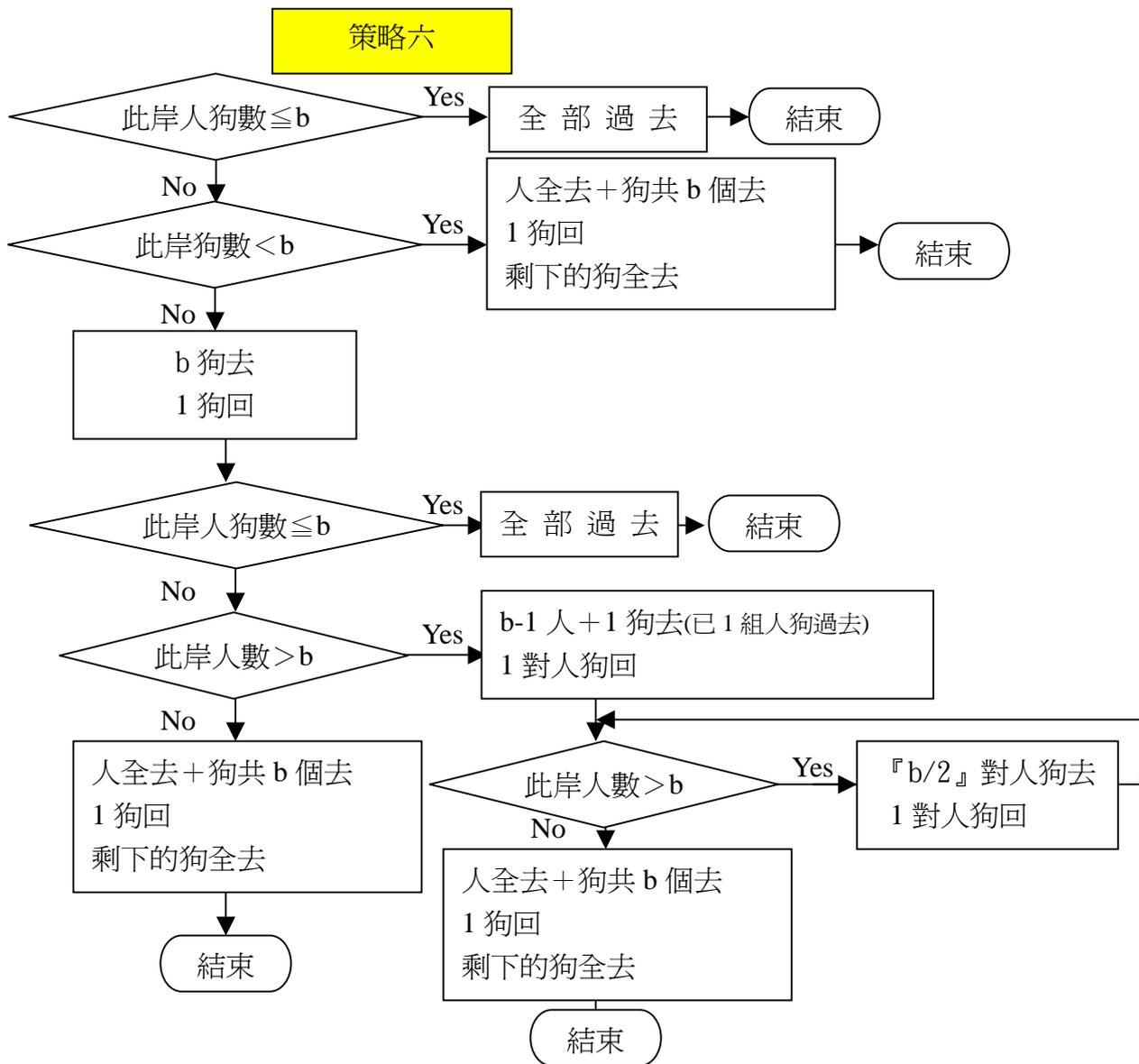
2、 $b > 1$  時

策略一和策略二都可以過河，但都不是飄法。 $b$  為奇數時，策略三是飄法，如附件六， $b$  為偶數時，也可以用策略四過河，但仍不是飄法，飄法為策略五，如附件七。



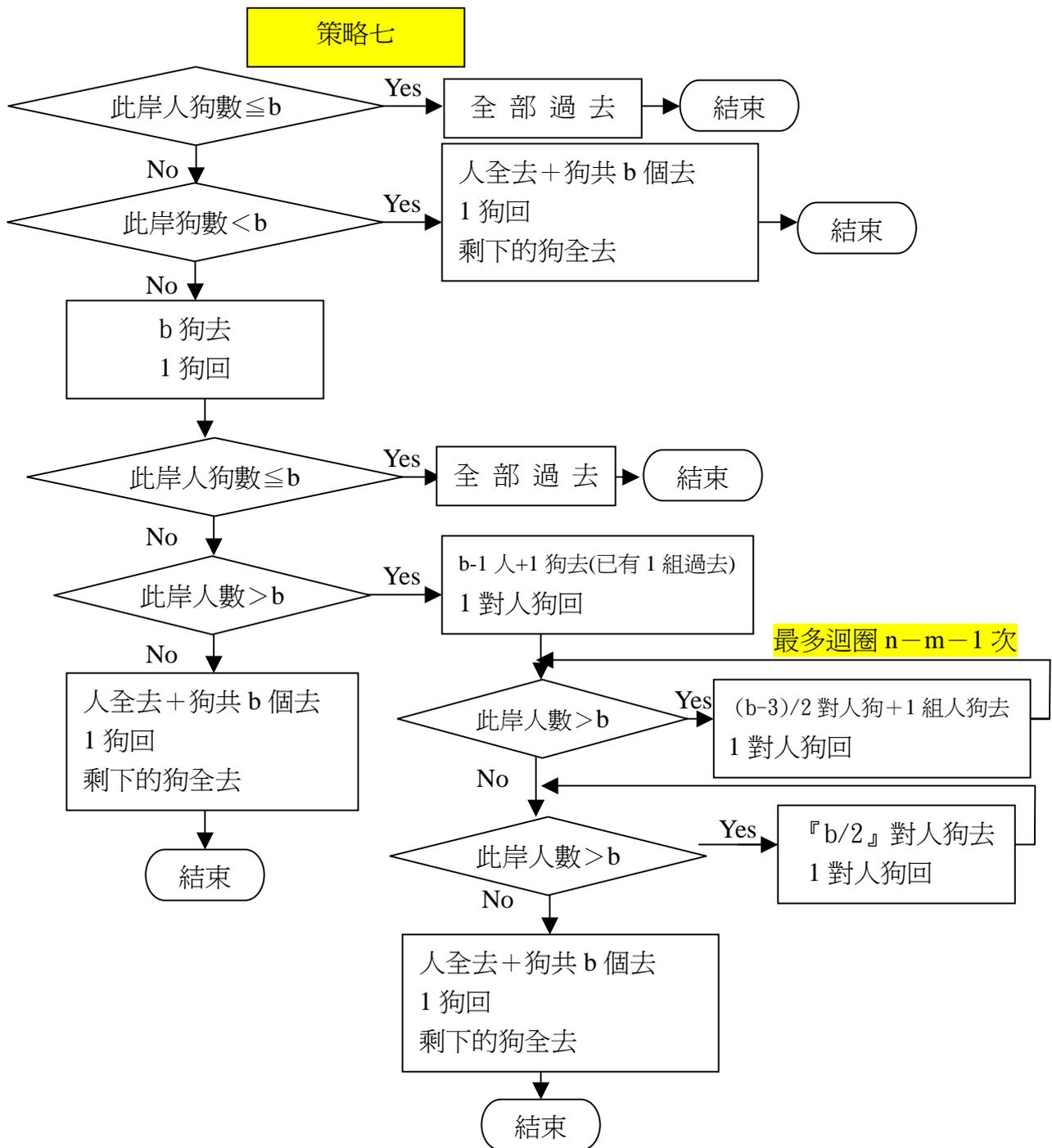
(四)  $m=n-1$

- 1、 $b=1$  時，無解。
- 2、 $b=2$  時， $m \geq 3$ ，無解。
- 3、 $b=3$  時， $m \geq 6$ ，無解。
- 4、 $b > 3$  時，飄法為策略六，如附件八。



(五)  $m=n-2$

- 1、 $b=1$  時，無解。
- 2、 $b=2$  時， $m \geq 4$ ，無解。
- 3、 $b=3$  時， $m \geq 6$ ，無解。
- 4、 $b > 3$  時， $b$  為偶數的飄法為策略六； $b$  為奇數的飄法為策略七。



## 五、討論

- (一) 在  $b > 3$  的情形下，成對人狗和人比狗多的情況，都可以使用策略一和策略二的方法順利過河。
- (二) 乘載數越小越困難，乘載數為 1 時，不管人狗數是多少都無解；乘載數為 2 時，4 對人狗、4 人 3 狗、3 人 4 狗、4 人 6 狗以上無解；乘載數為 3 時，人數為 6 人以上無解。在有解的情況下，以乘載數為 2 時，3 對人狗過河最困難。
- (三) 人比狗多的情況過河比較容易；人比狗多 1 的情形較人比狗多 2 以上的情形為難。

(四) 飄法依(1)人狗是否成對與(2)乘載數為奇數或偶數等這兩項因素而有不同的策略。

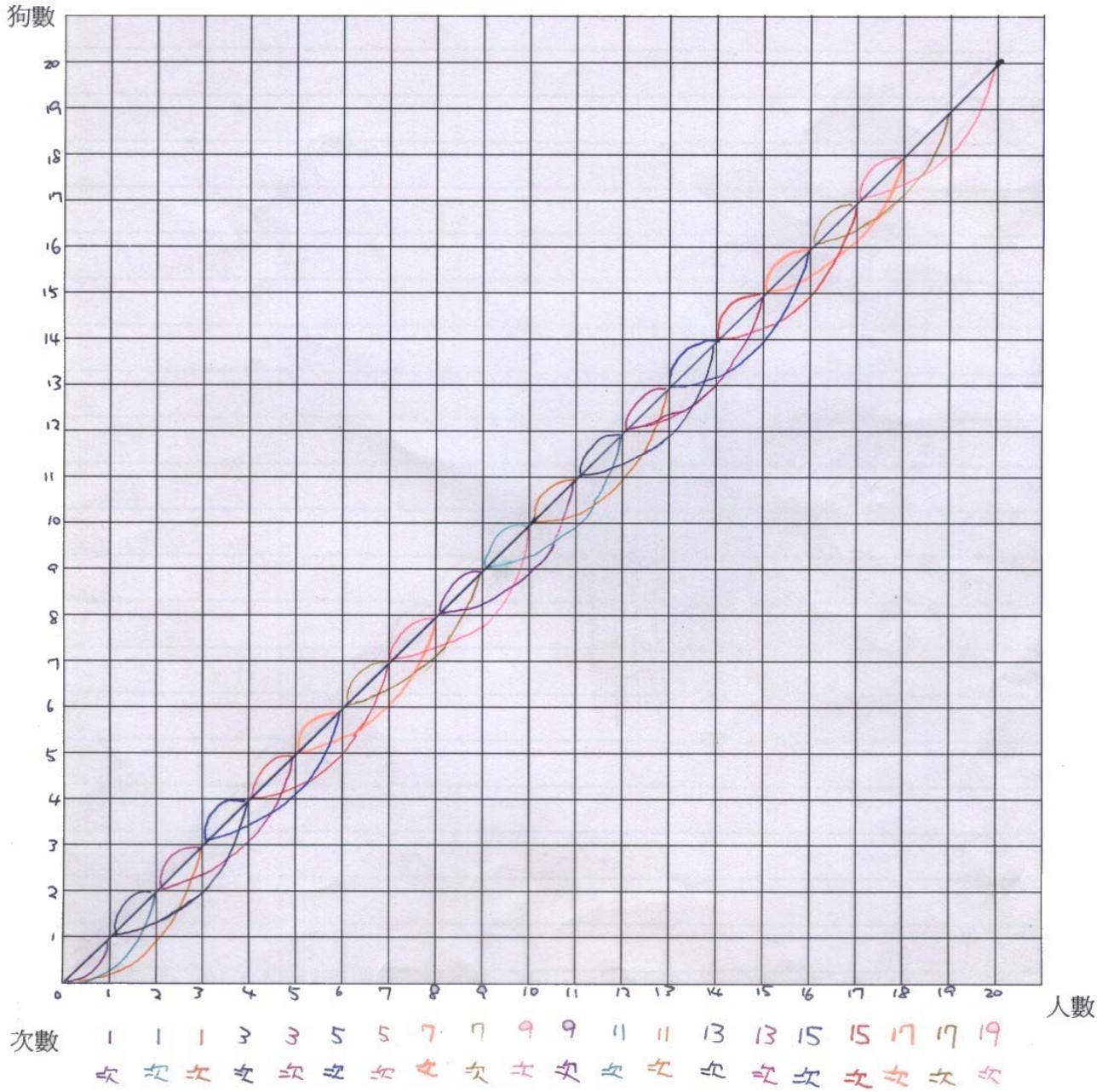
## 參考資料

1. 馬祖良-從“夫妻過河”談起：[http://www.chinaschool.org/sgzy/yjcx/04-0209\\_fqgh.htm](http://www.chinaschool.org/sgzy/yjcx/04-0209_fqgh.htm)  
(中國教育曙光網-曙光資源)

附件一

人狗成對，船的承載數=6 的過河規律(一)

◆ 策略一(飆法)

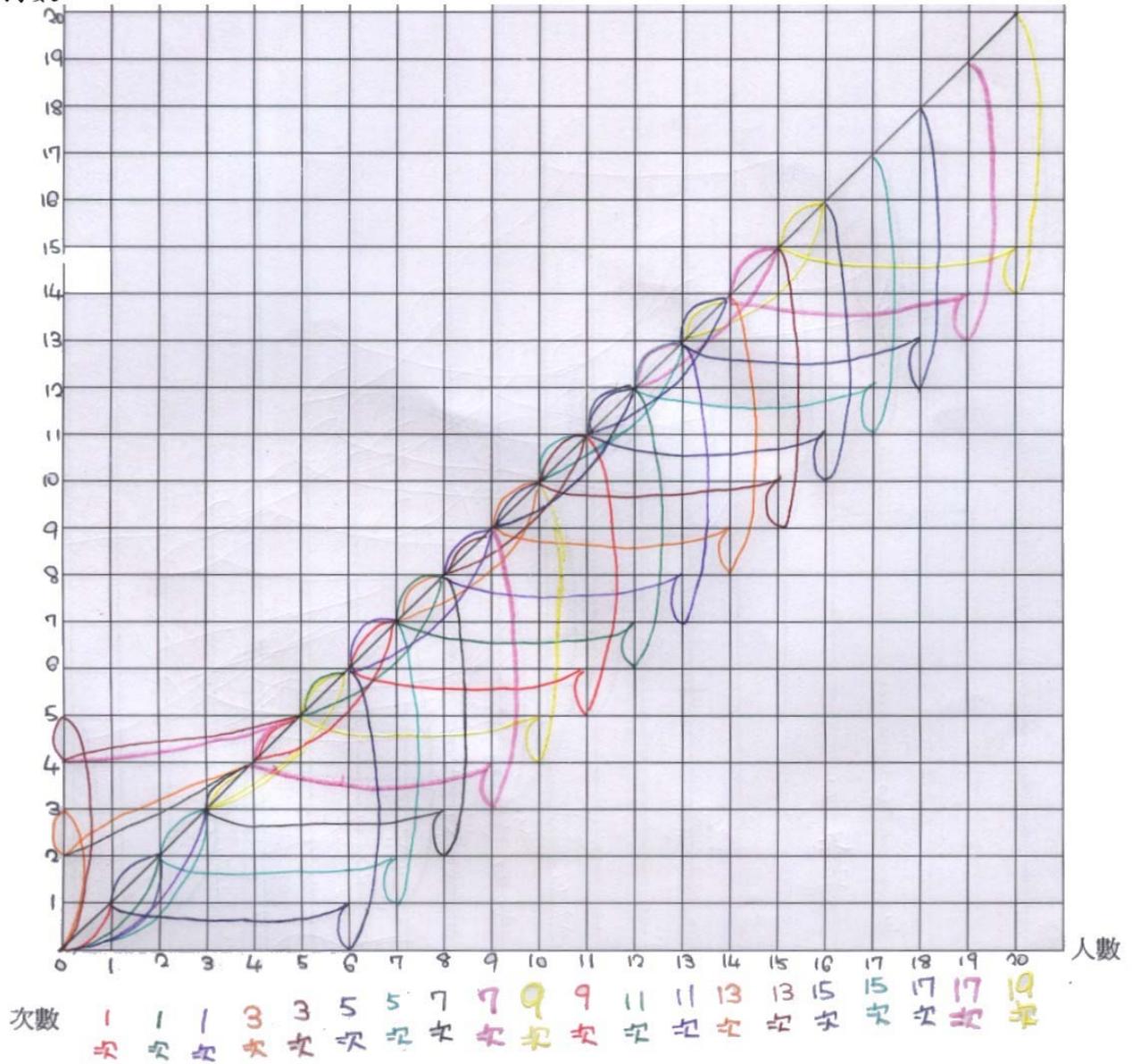


附件二

人狗成對，船的承載數=6 的過河規律(二)

◆ 策略二(飆法)

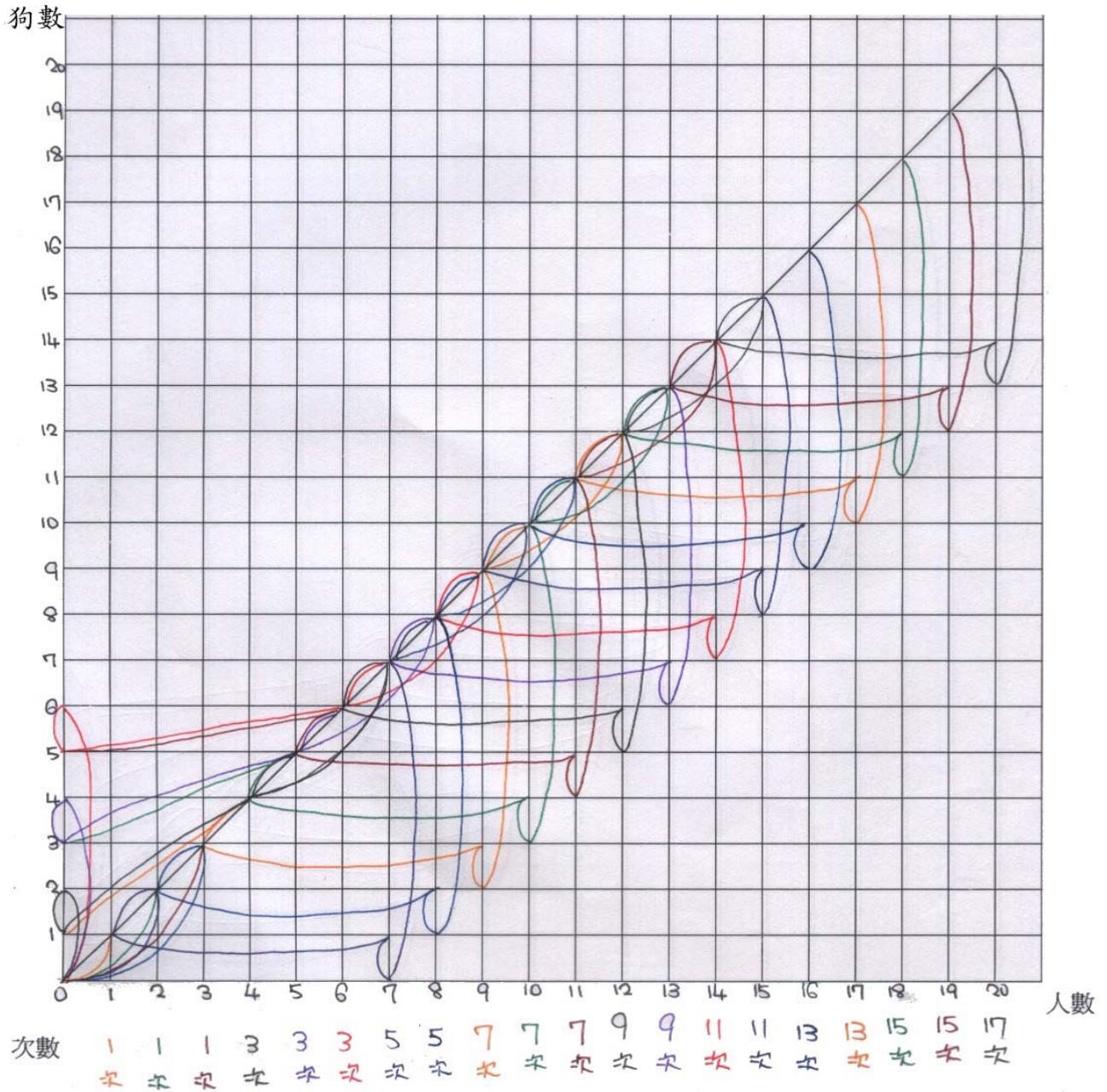
狗數



附件三

人狗成對，船的承載數=7 的過河規律

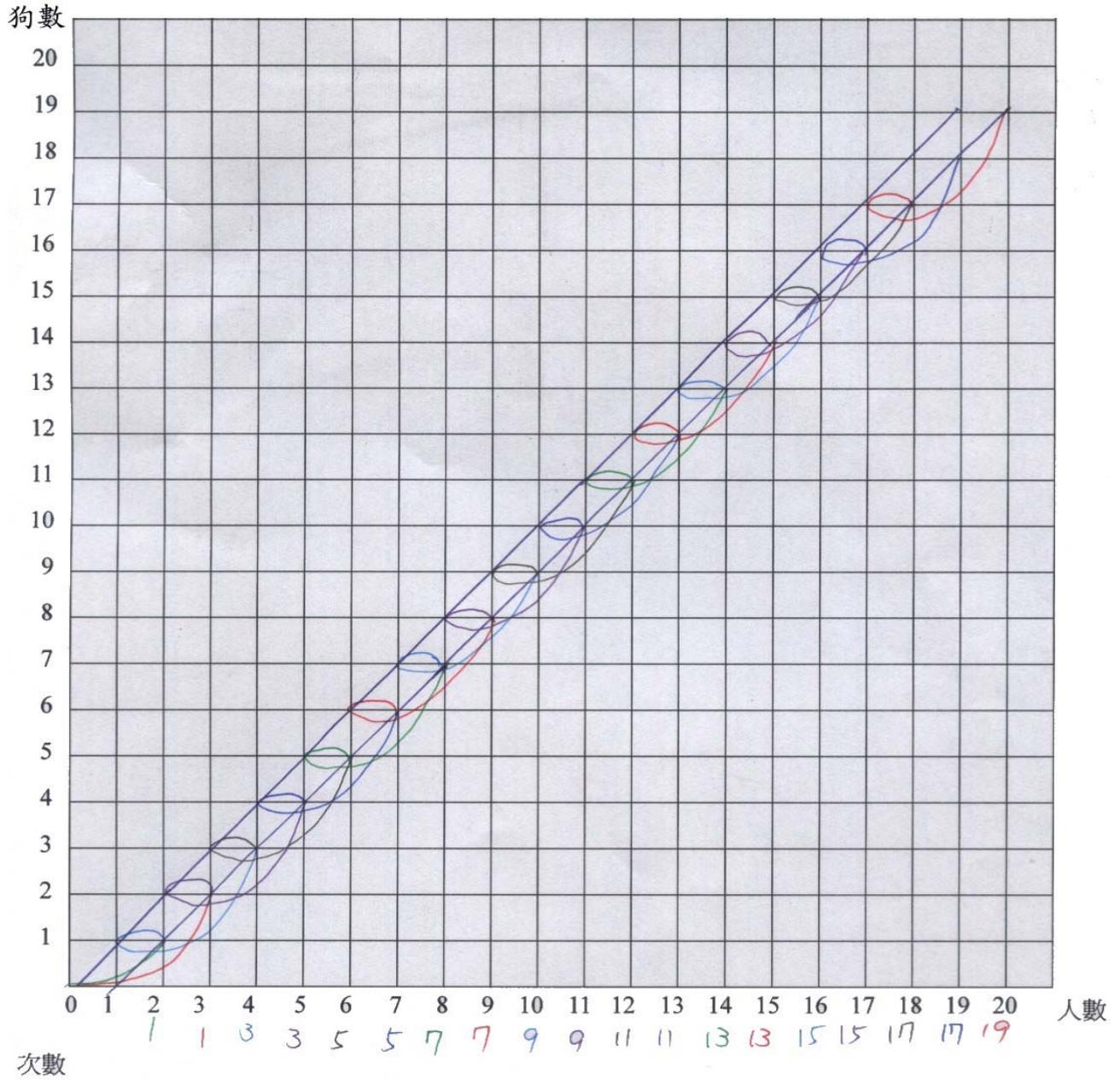
◆ 策略二(飆法)



附件四

人比狗多 1，船的承載數=5 的過河規律

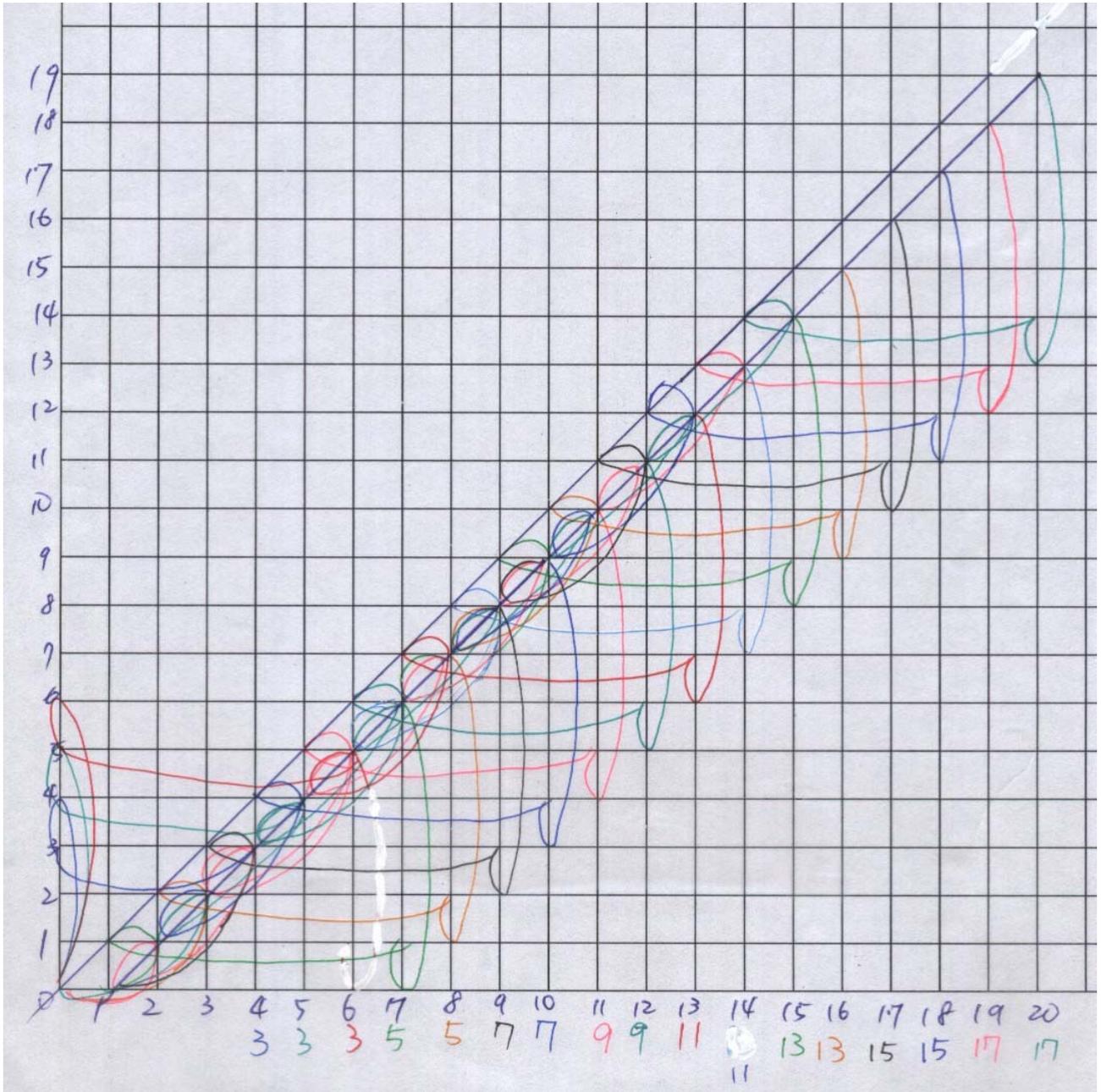
◆ 策略三(飆法)



附件五

人比狗多 1，船的承載數=6 的過河規律

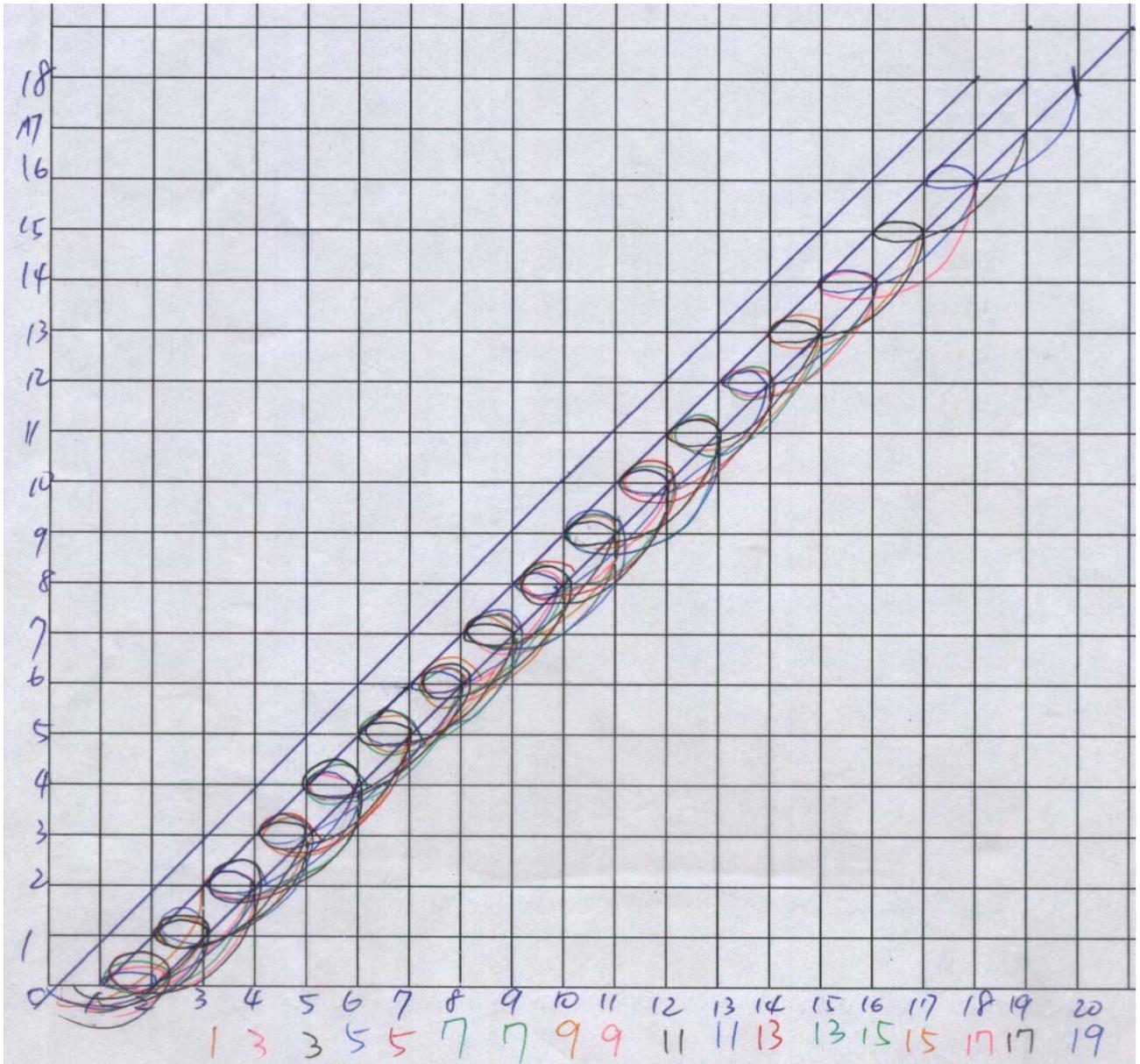
◆ 策略四(飆法)



附件六

人比狗多 2，船的承載數=5 的過河規律

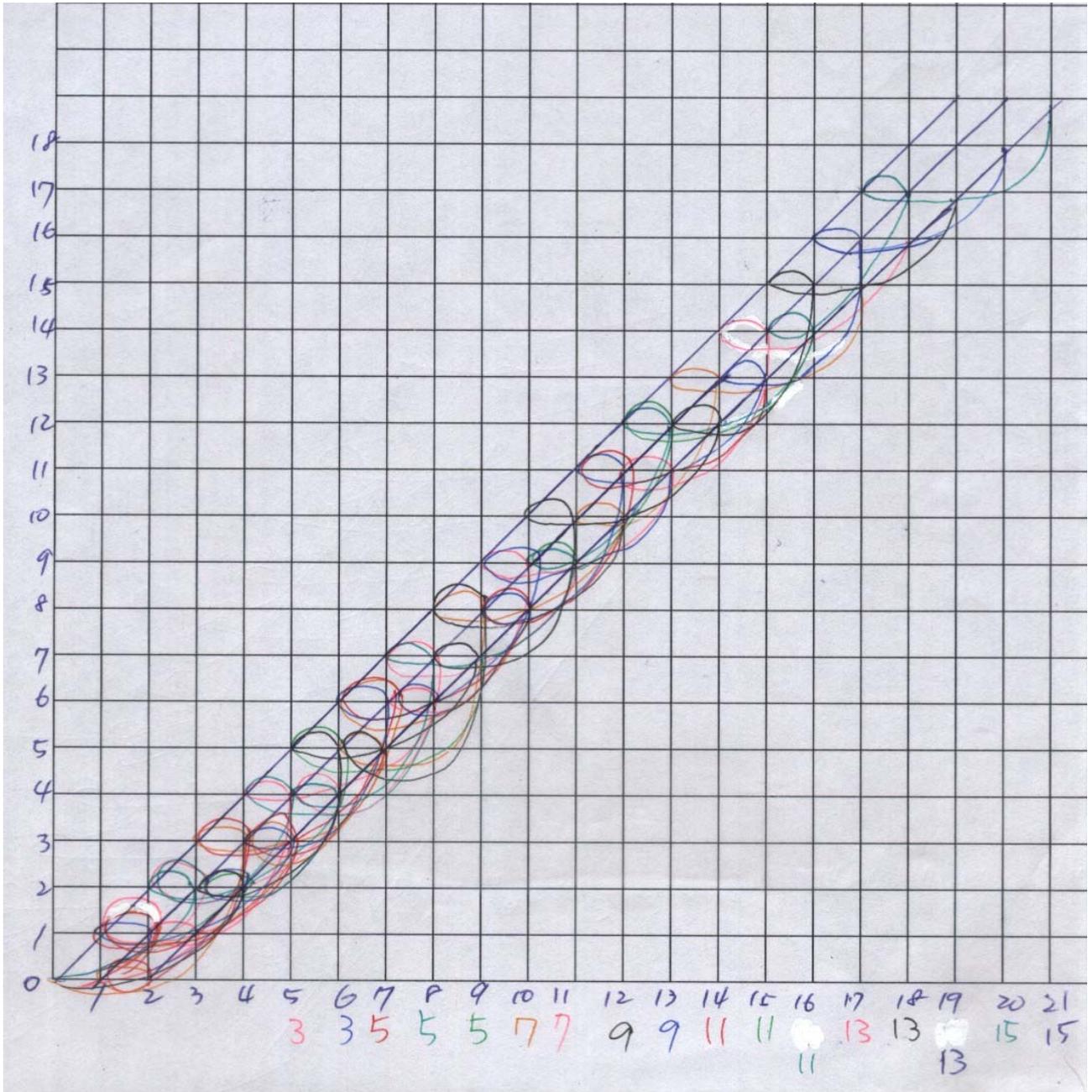
◆ 策略三(飆法)



附件七

人比狗多 2，船的承載數=6 的過河規律

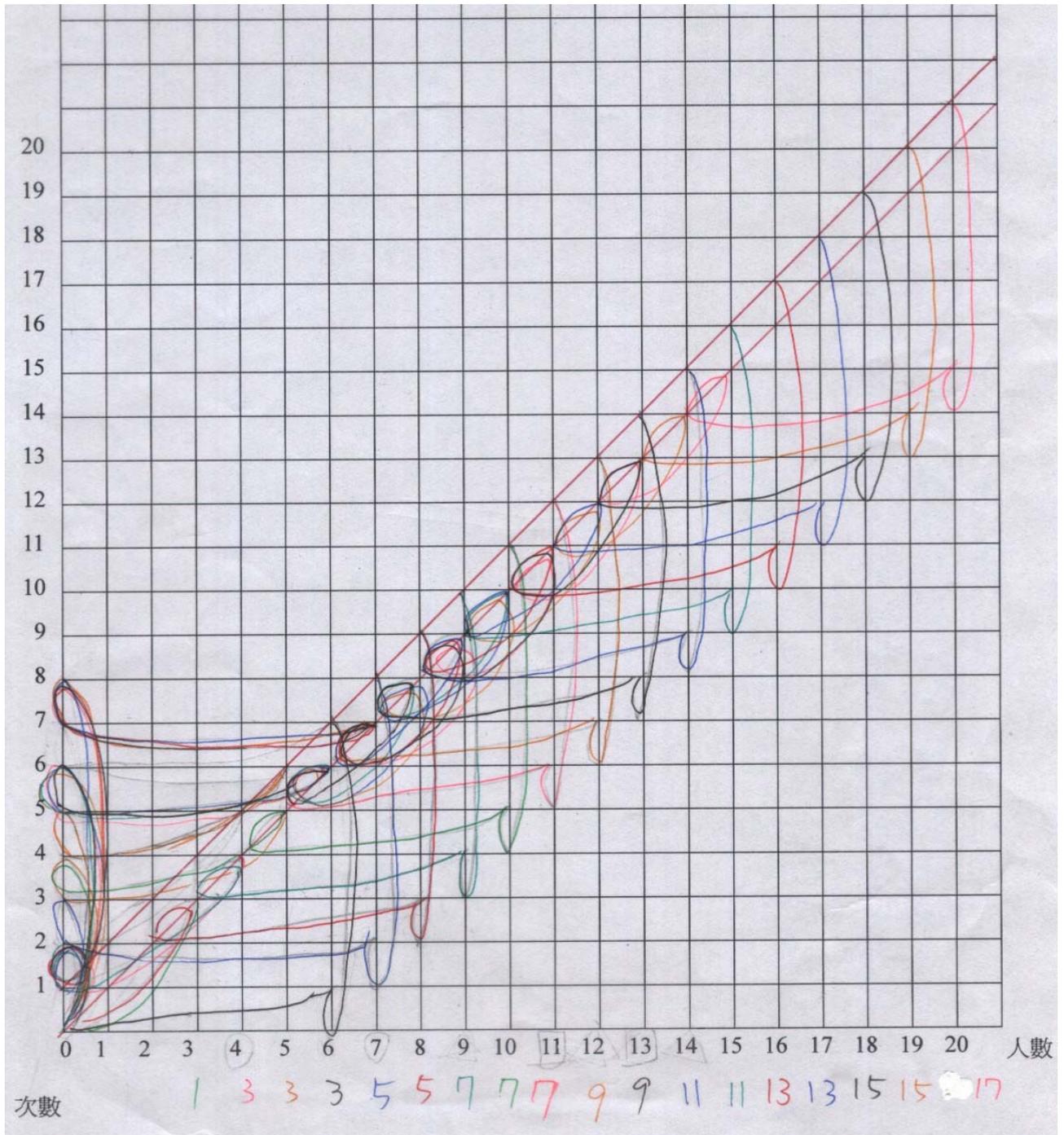
◆ 策略五(飄法)



附件八

狗比人多 1，船的承載數=7 的過河規律

◆ 策略六(飆法)



【評語】 030417

1. 這是一個很有意思的問題，作者能跳脫 3 人 3 狗的原型，導向  $m$  人  $n$  狗， $b$  載量的一般解，已經向數學研究的精神走了一大步。
2. 清楚的歸納出一般解的做法，是相當不錯的結果。
3. 可再研究人數比狗數少的一般情況，使結果更完整。
4. 狀態圖的表示方法頗有創意，最好能用此說明為何所得答案為最佳。