

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030411

揭曉謎樣般的魔術六芒星

學校名稱：臺中縣立豐南國民中學

| | |
|--|-------------------------|
| <p>作者：</p> <p>國二 廖羿竹</p> <p>國二 湯京祐</p> <p>國二 邱俊銘</p> <p>國二 吳佳璇</p> | <p>指導老師：</p> <p>劉藩郁</p> |
|--|-------------------------|

關鍵詞： 翻轉、重複、取代

摘要

1. 先算出所有數的和及每邊的和
2. 找出所有可能性
3. 將無法成立的刪去
4. 從剩餘解中找出規律
5. 利用規律找出速解法

壹、 研究動機

在剛開始尋找題目時，看到一系列的「星星謎題」，我們以難度適中的題目來研究，希望藉由解題目時，找出它的規律，進而找到速解。

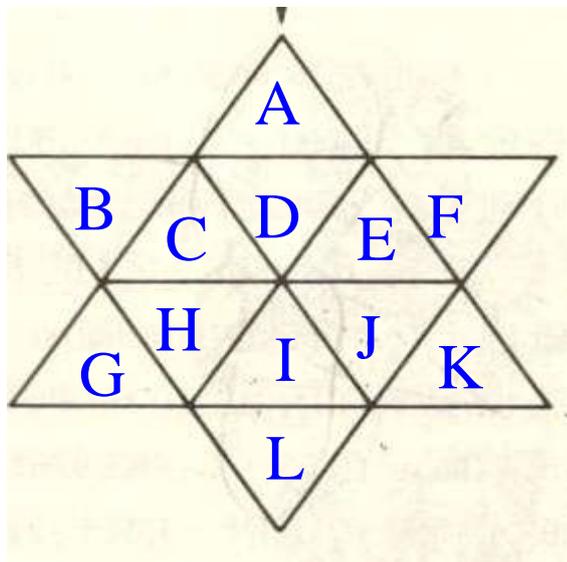
貳、 研究目的

1. 找出正確的解答
2. 利用規律找出速解法
3. 改變題意增加難易度

參、 研究設備與器材

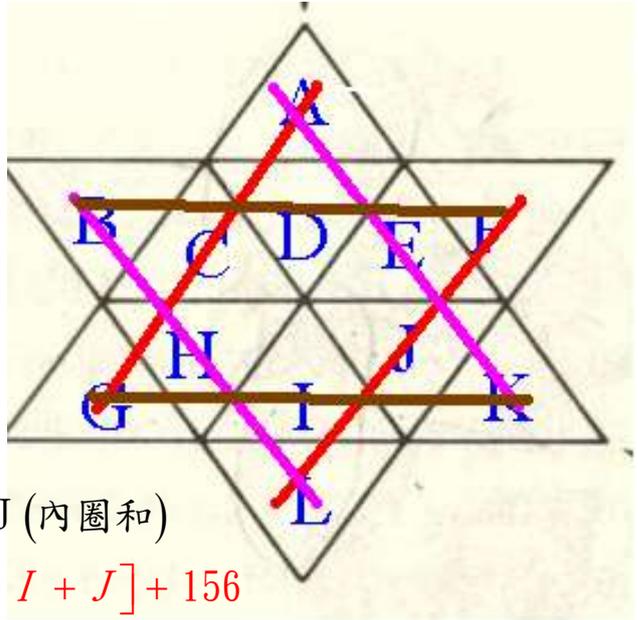
紙、筆、PPT

肆、 研究過程與方法



將 AL、BK、GF 稱為相對角

將 BCDEF、GHIJK、ACDHG、FEJIL、BCHIL、ADEJK 設為邊和



由圖發現 $ABGLKF$ 重複2次

但是 $CDEHIJ$ 重複3次

利用 1~12 的總和為 78

因為重複兩次 $\Rightarrow 78 \times 2 = 156$

因為內圈和多重複一次 $\Rightarrow 156 + CDEHIJ$ (內圈和)

因為共有六條邊 $\Rightarrow \frac{[C + D + E + H + I + J] + 156}{6}$

推得 $\Rightarrow \frac{[C + D + E + H + I + J \text{ (內圈和)}] + 156 \text{ (重複兩次的邊和)}}{6}$

利用 A~L 和 \Rightarrow 邊和 $\times 2 +$ 相對角和

$$78 - 30 \times 2 = A + L = B + K = G + F = 18$$

$$78 - 31 \times 2 = A + L = B + K = G + F = 16$$

$$78 - 32 \times 2 = A + L = B + K = G + F = 14$$

$$78 - 33 \times 2 = A + L = B + K = G + F = 12$$

$$78 - 34 \times 2 = A + L = B + K = G + F = 10$$

$$78 - 35 \times 2 = A + L = B + K = G + F = 8$$

得知

相對角為 8 邊和為 35

相對角為 10 邊和為 34

相對角為 12 邊和為 33

相對角為 14 邊和為 32

相對角為 16 邊和為 31

相對角為 18 邊和為 30

假設 $B + L = G + K$ 則 I H 兩數重複

$\Rightarrow B + C + H + I + L = G + H + I + J + K$

$\Rightarrow C = J$ (填入的數字不能重複) \Rightarrow 不符

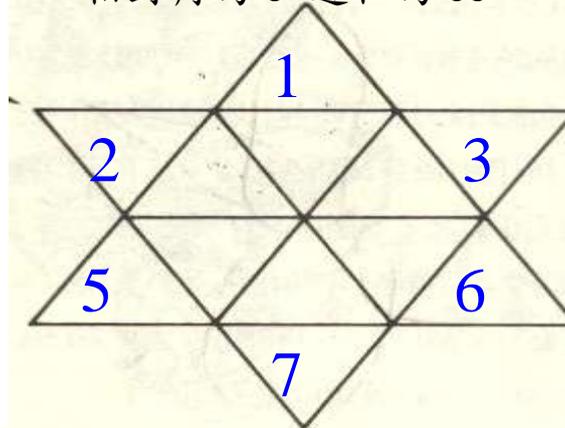
假設 $B + L \neq G + K$

$\Rightarrow B + C + H + I + L = G + H + I + J + K$ (H I 重複)

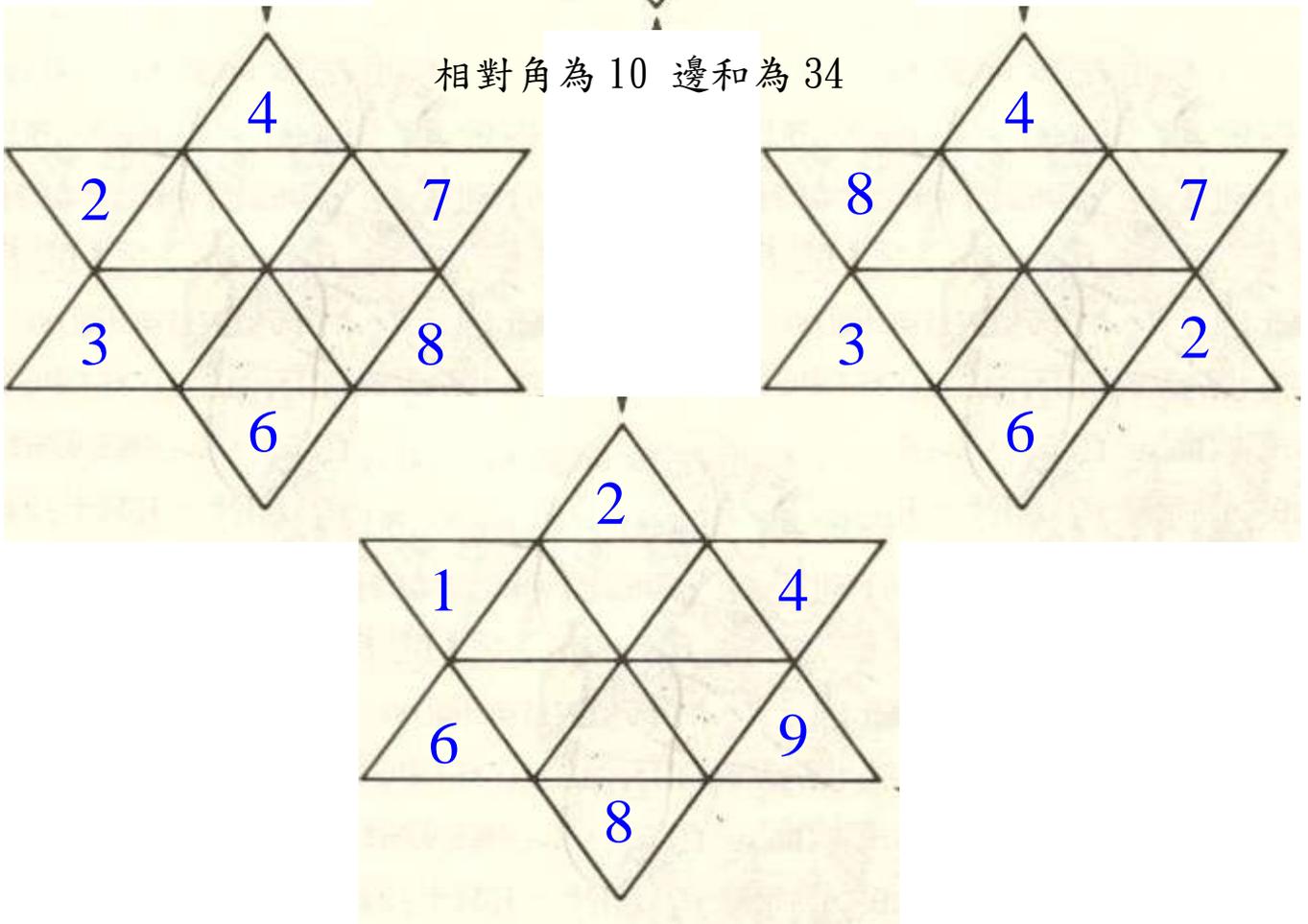
$\Rightarrow (B + L) - (G + K) = |J - C|$ (公式一)

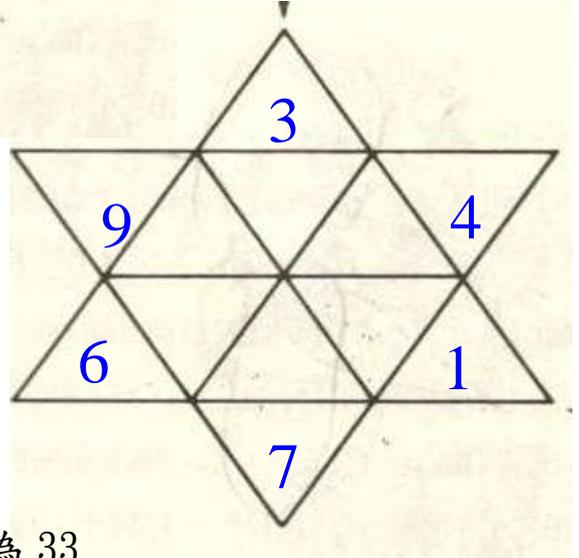
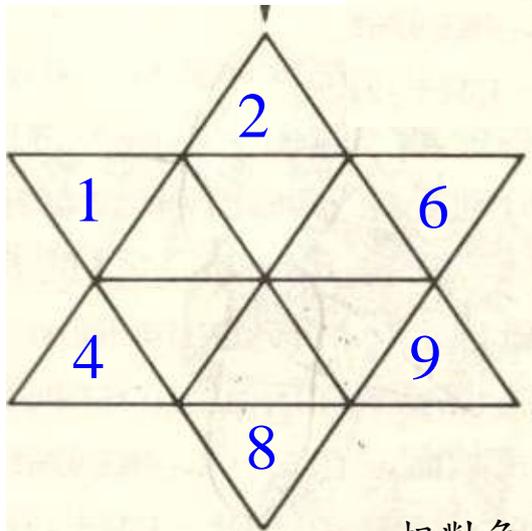
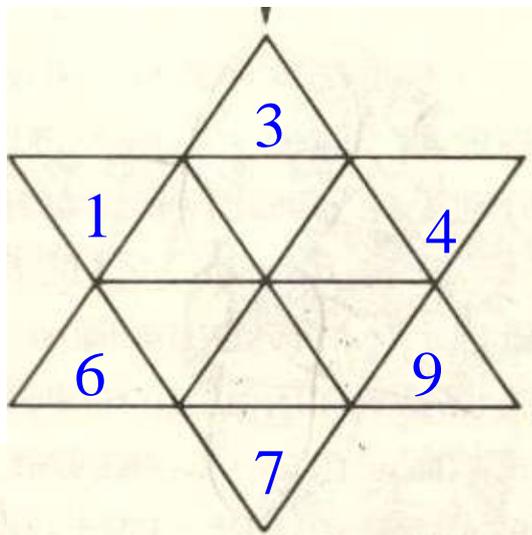
利用上述的方法 下列是剩下的解

相對角為 8 邊和為 35

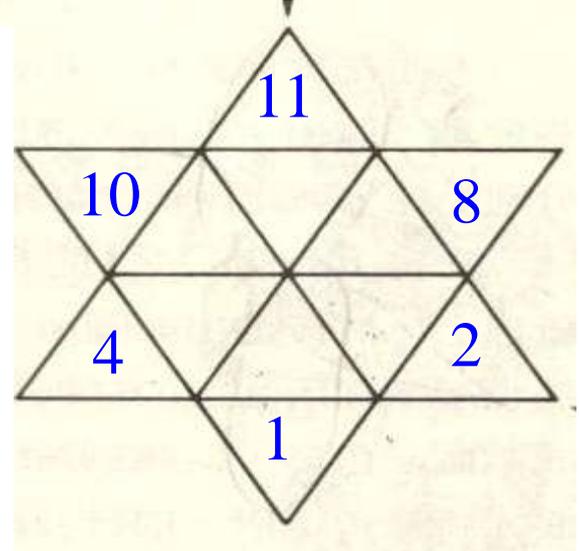
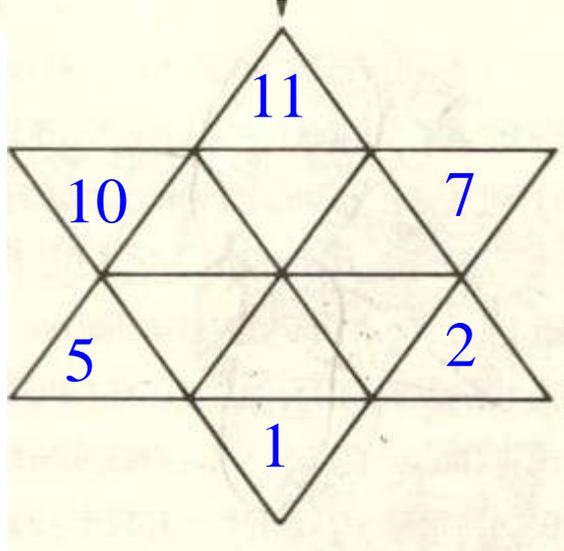
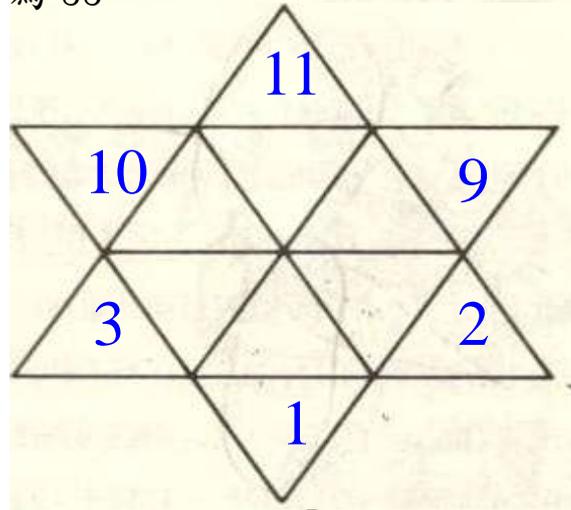
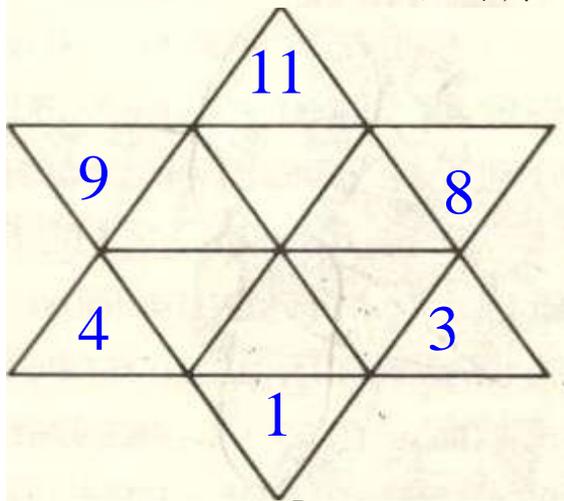


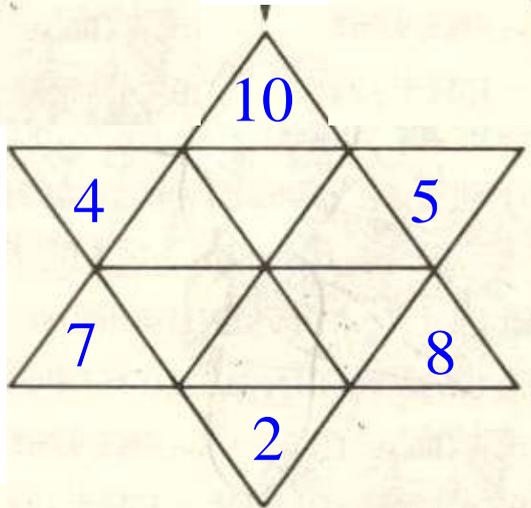
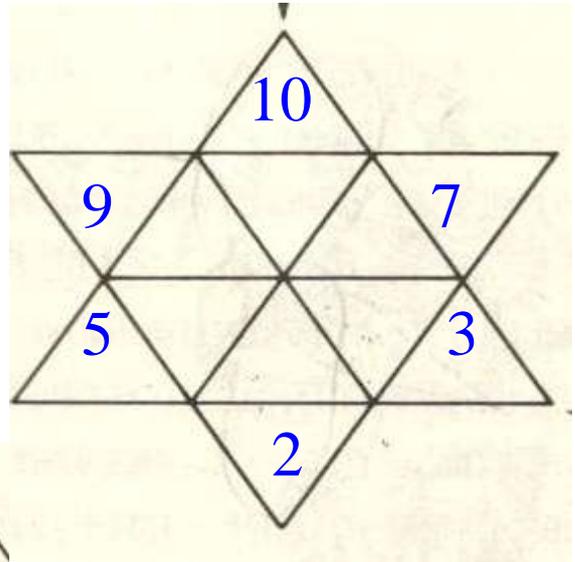
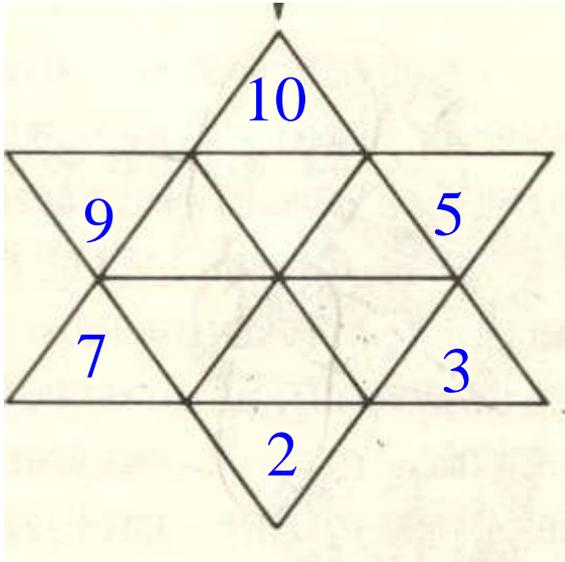
相對角為 10 邊和為 34



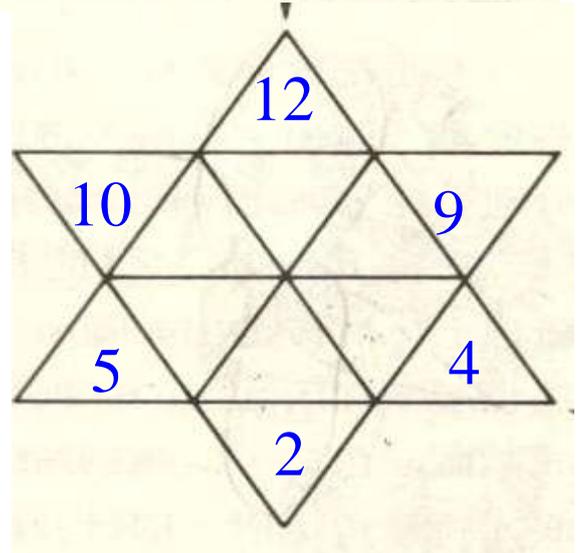
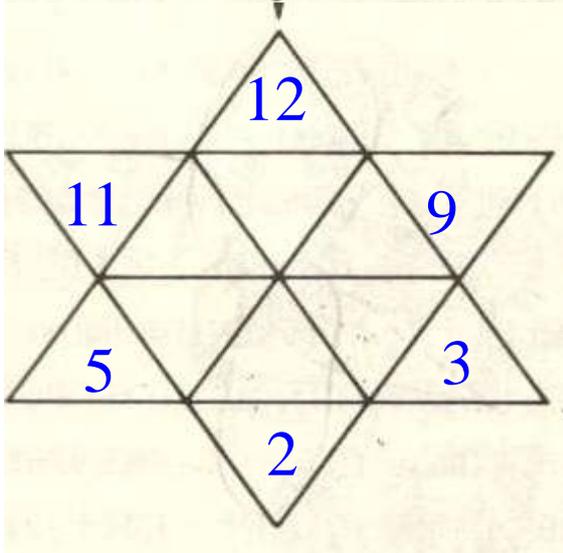
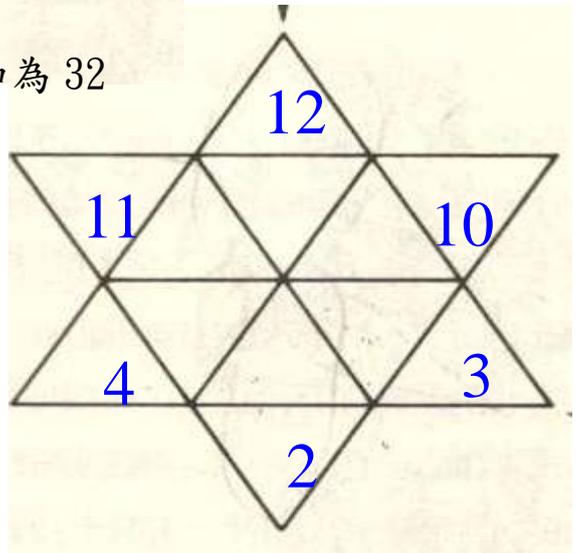
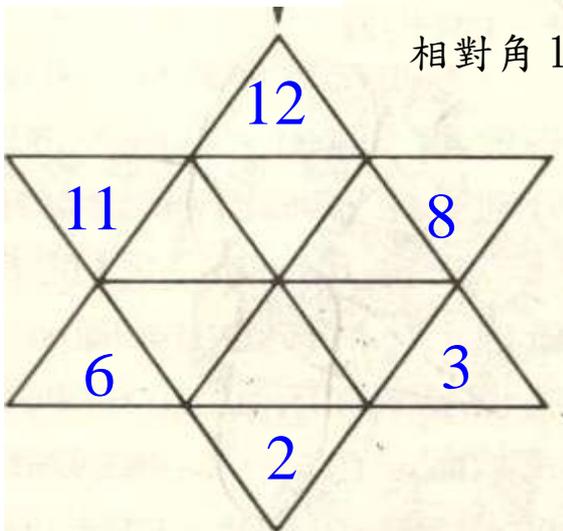


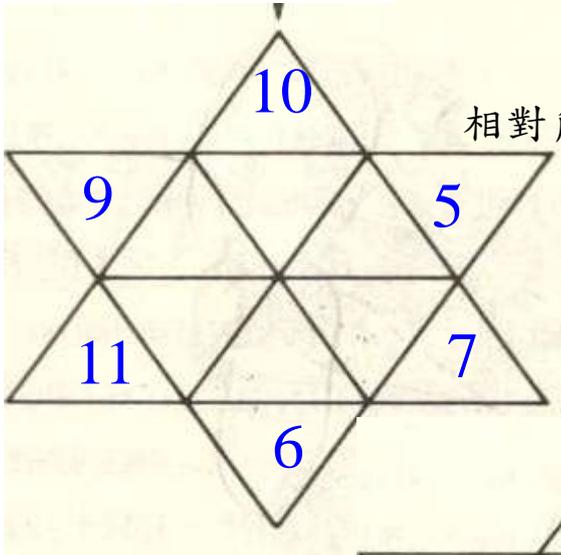
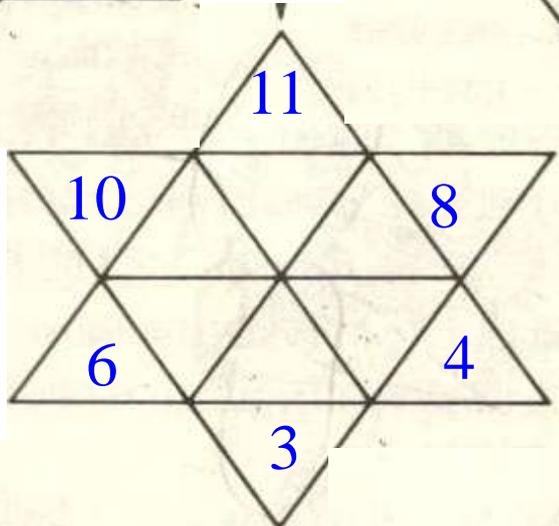
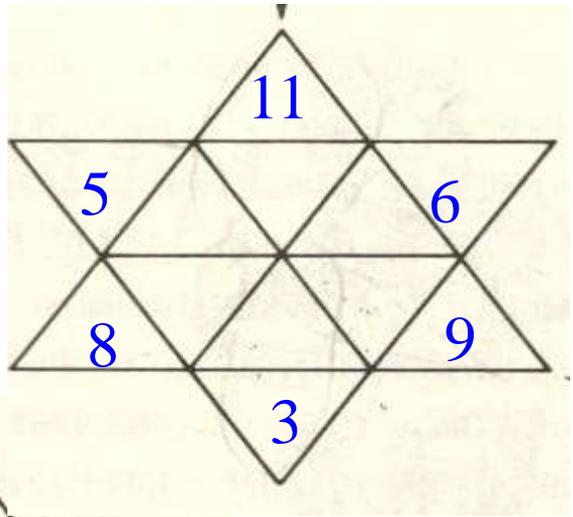
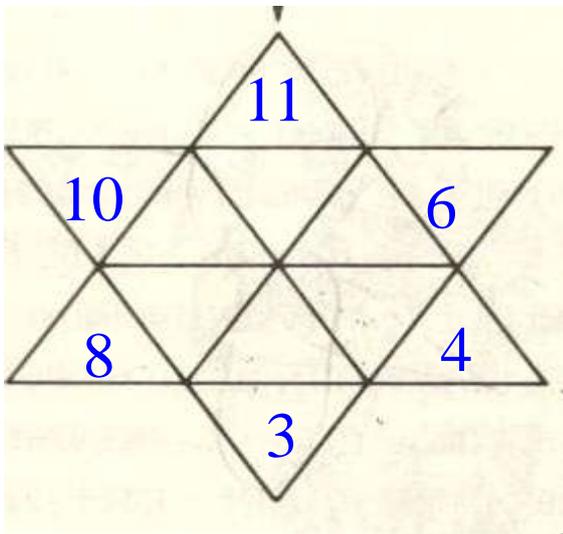
相對角 12 邊和為 33



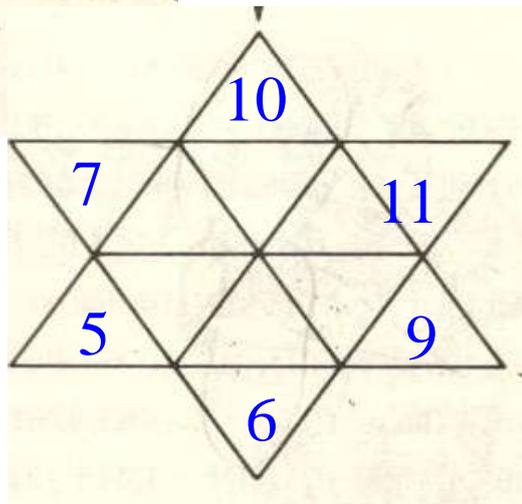
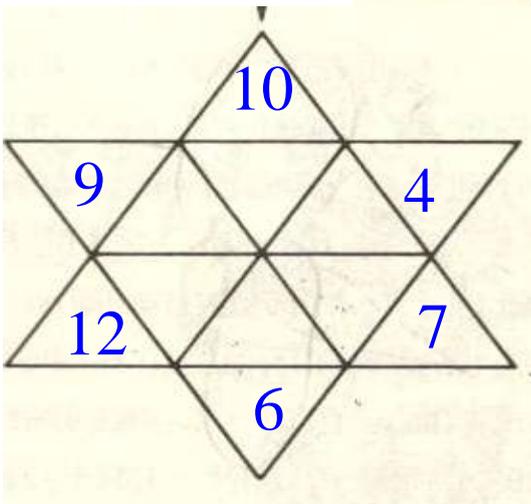
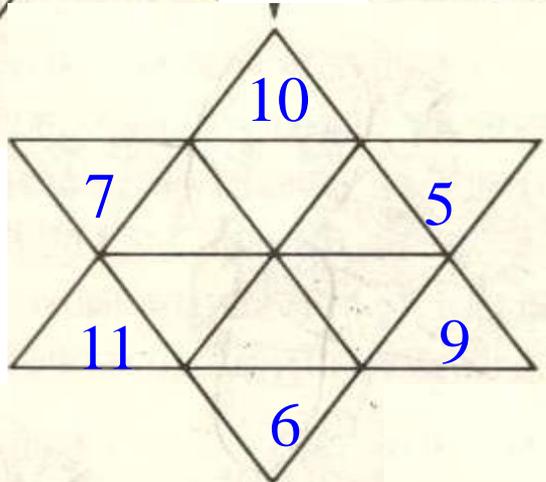
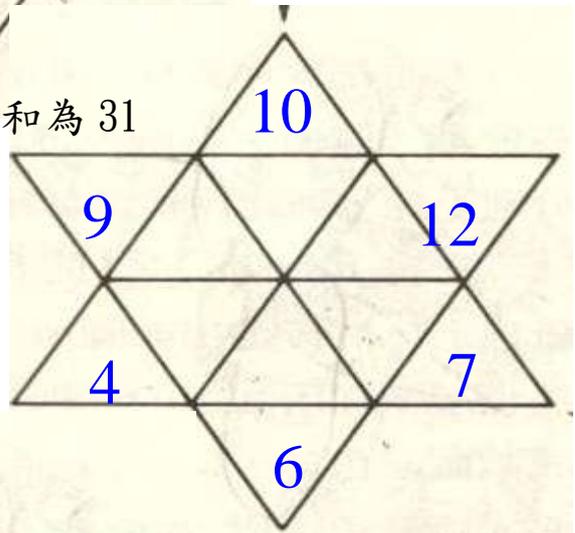


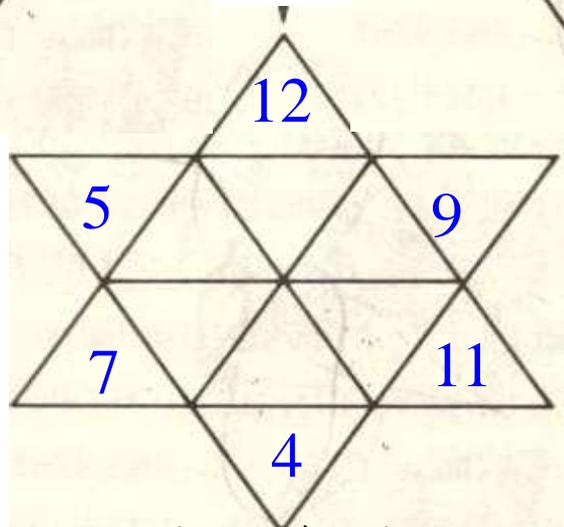
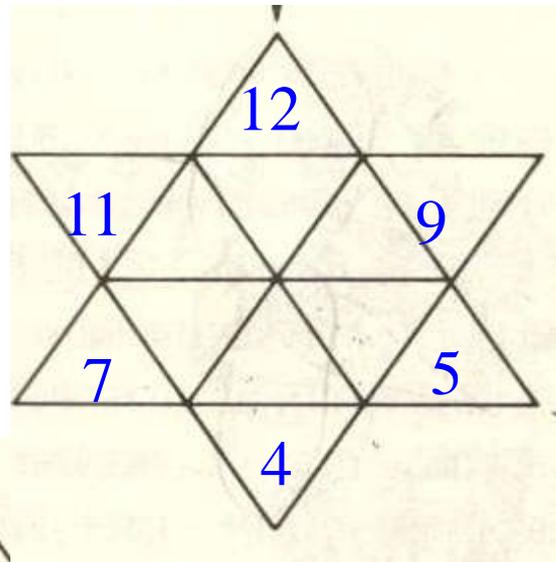
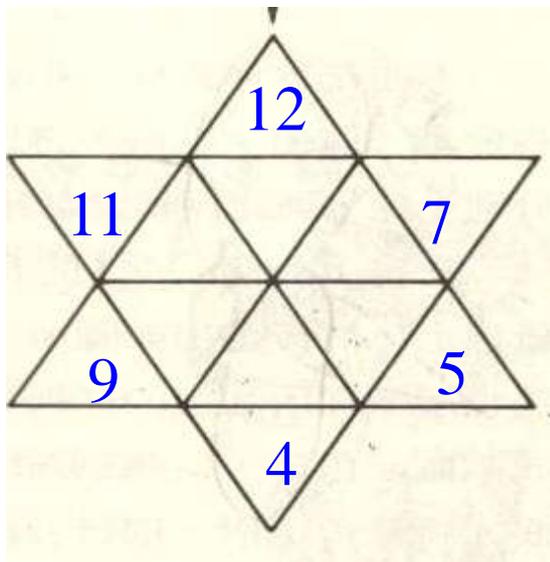
相對角 14 邊和為 32



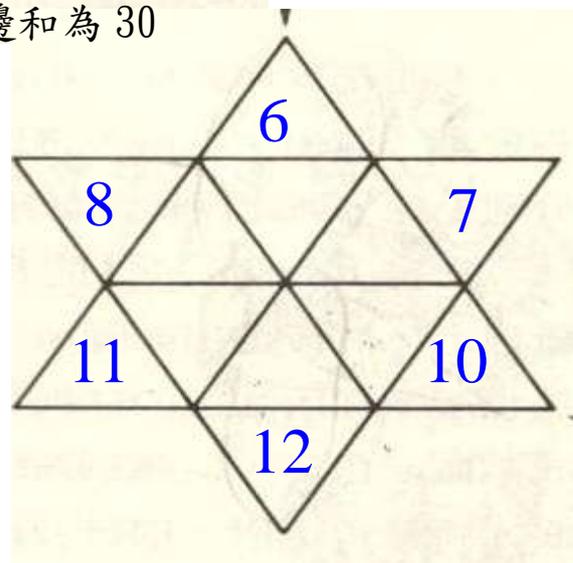
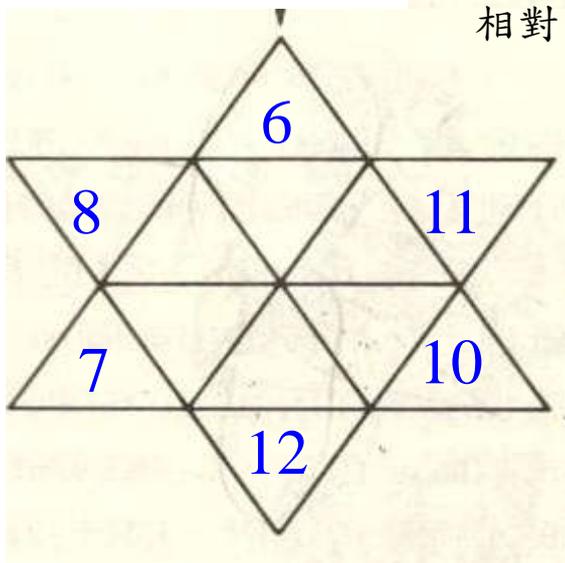


相對角 16 邊和為 31





相對角 18 邊和為 30



為了刪去其他組解，將原本的公式一加以修正

如右圖可列出 3 式

$$|(8+5)-(11+7)| = 5 \dots\dots \alpha$$

$$|(11+7)-(8+12)| = 8 \dots\dots \beta$$

$$|(7+4)-(8+12)| = 1 \dots\dots \chi$$

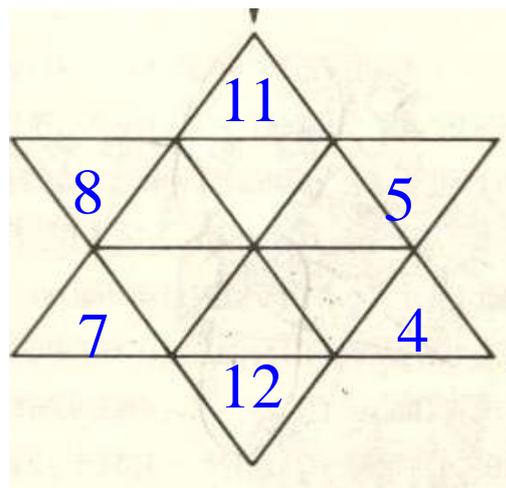
扣除右圖所剩下的數有 1、3、6、9、10、2

α 式中只有 (1, 6) 可帶入

β 式中只有 (1, 9) 可帶入

χ 式中沒辦法帶入任何數

⇒ 無法成立



如右圖 可列出 3 式

$$|(12+9)-(11+7)| = 3 \dots\dots \alpha$$

$$|(11+4)-(12+9)| = 6 \dots\dots \beta$$

$$|(9+5)-(11+4)| = 1 \dots\dots \chi$$

扣除右圖所剩下的數有 1、2、3、6、8、10

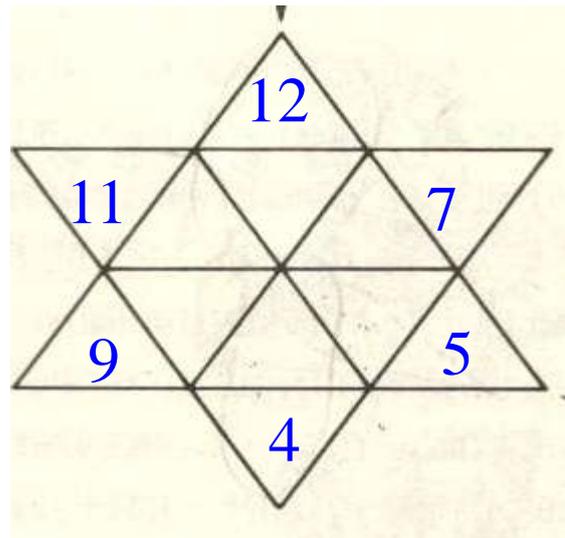
α 式中只有 (3, 6) 可帶入

β 式中只有 (2, 8) 可帶入

χ 式中有 (1, 2) (2, 3) 可帶入

雖然 3 式都成立

但是 2 只能出現一次 \Rightarrow 無法成立



如右圖 可列出 3 式

$$|(11+4)-(10+1)| = 4 \dots\dots \alpha$$

$$|(10+8)-(11+4)| = 3 \dots\dots \beta$$

$$|(10+1)-(4+2)| = 5 \dots\dots \chi$$

扣除右圖所剩下的數有 3、5、6、7、9、12

α 式中有 (3, 7) (5, 9) 可帶入

β 式中有 (6, 9) (3, 6) (9, 12) 可帶入

χ 式中有 (7, 12) 可帶入

因為 χ 式只有一組可能解

所以 α β 兩式中有 7 和 12 的可能解需刪除

α 式剩 (5, 9) 一組可能解

β 式剩 (6, 9) (3, 6) 兩組可能解

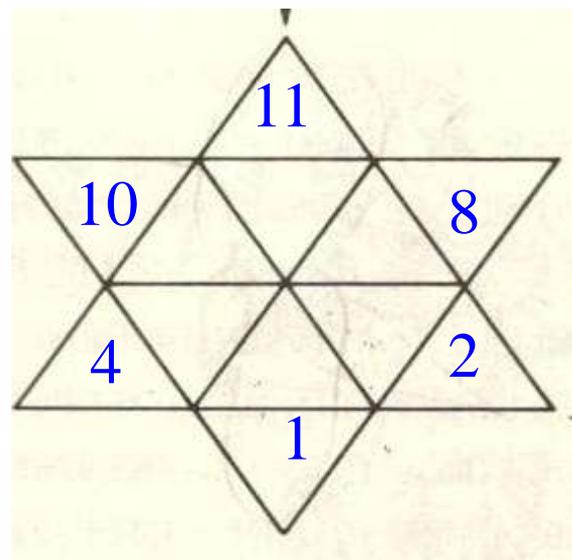
α 式剩一組解

β χ 兩式中有 5 和 9 需刪除

β 式則剩 (3, 6) 一組解

在刪去 α χ 兩式中有 3 和 6 的可能解

發現都餘一組解 \Rightarrow 正解



如右圖列三式

$$|(11+2)-(12+5)| = 4 \dots\dots \alpha$$

$$|(11+9)-(12+5)| = 3 \dots\dots \beta$$

$$|(5+3)-(11+2)| = 5 \dots\dots \chi$$

扣除右圖所剩下的數有 1、4、6、7、8、10

α 式中有 (4, 8) (6, 10) 可帶入

β 式中有 (1, 4) (4, 7) (7, 10) 可帶入

χ 式中有 (1, 6) 可帶入

χ 式只有一組可能數

α β 兩式中有1和6需刪除

α 式剩 (4, 8) 一組可能解

β 式剩 (4, 7) (7, 10) 兩組解

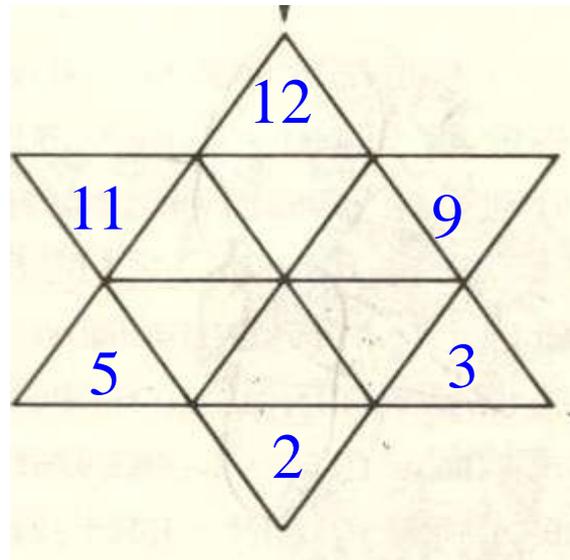
α 式剩一組解

β χ 兩式中有4和8需刪除

β 式則剩 (7, 10) 一組解

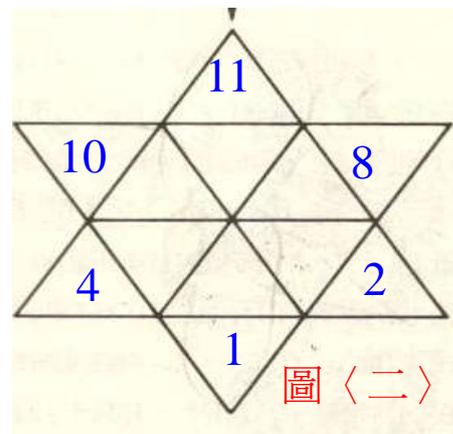
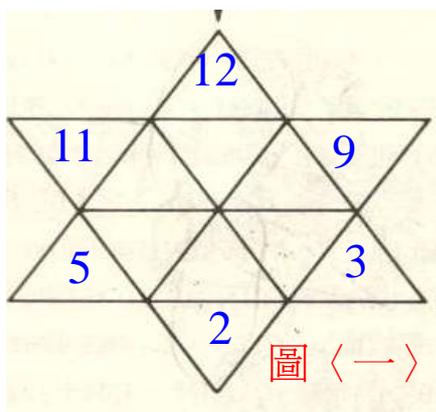
刪去 α χ 兩式中有7和10的可能解

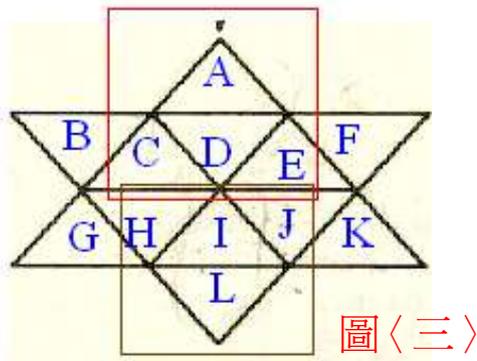
發現各式皆餘一組解 \Rightarrow 正解



伍、 結果

一、 刪去所有不可能的解之後，剩餘的解只有兩組





二、證明： $A+C+D+E=G+H+I+C=E+J+I+K$ （上三角形）

$B+C+D+H=H+I+J+L=D+E+J+F$ （下三角形）

說明： $A+D+E+J+K=邊和$ ， $G+H+I+J+K=邊和$ （邊和相等）

$$\Rightarrow A+D+E+J+K=G+H+I+J+K$$

$$\Rightarrow A+D+E+C=G+H+I+C \quad \text{同理可得其他結果}$$

三、找尋上、下三角形的總和

（一）如圖〈三〉扣除掉框框內的數，剩下 BGFK（兩倍的相對角）

因此推得 $\Rightarrow 1\sim 12$ 總合扣除相對角的兩倍

（二）運用圖〈一〉： $78-14\times 2=50$ 上、下三角形和 $=50$

四、解法（利用圖〈一〉及證明）

（一）因為上、下三角形之和不一定相等，故先找出關聯的數

1. 三個上三角形和若等於 78（與總和相同），

$$\text{則 } C+E+I(\text{上三角形重複的})=B+F+L$$

得到 上三角形和為 26 代入（下三角形則為 24）

（二）ACDE 和為 26（上述）圖〈一〉已知 A 為 12

$$\Rightarrow C+D+E=14$$

HIJL 和為 24（上述）圖〈一〉已知 L 為 2

$$\Rightarrow H+I+J=22$$

1 $C+E+I=B+F+L \quad \therefore C+E+I=22$ （下三角形）

在圖〈一〉剩餘數 1、4、6、7、8、10 中，三數總和為 22

只有 4、8、10

2 $C+D+E=14$ 圖〈一〉剩餘數 1、4、6、7、8、10

沒有三數相加為 14 得出上三角形 $\neq 26$

改設下三角形=26 代入(上三角形變為 24)

(三) $C+D+E=12$ (上三角形和改為 24)

$H+I+J=22$ (下三角形和改為 26)

1. $D+H+J=A+G+K=20$

在剩餘數 1、4、6、7、8、10 中

三數總和為 20 的組合只有 4、6、10。

2. 由 $C+D+E=12$ 來看，剩餘數 1、4、6、7、8、10 中，

三數總和為 20 只有 1、4、7

3. 1、4、7 中，有一數須填入 D 中，只有 4 符合

結論 C、E 已知為 1 或 7 (尚未確定位置)

4. $B+C+D+H=H+I+J+L=26 \rightarrow C+D+H=15$

$C+D+H=15$ ，且已知 D 為 4 $\Rightarrow C+H=11$

在剩餘數 1、6、7、8、10 中，總和為 11 的只有 1、10

結論 C、H 已知為 1 或 10。(尚未確定位置)

5 由 3 及 4 的結論可知：C 為 1，E 為 7，H 為 10

6 D、H、J 中，只有 J 未填入數，最後 4、6、10 中只剩 6 未填，故 J 為 6。

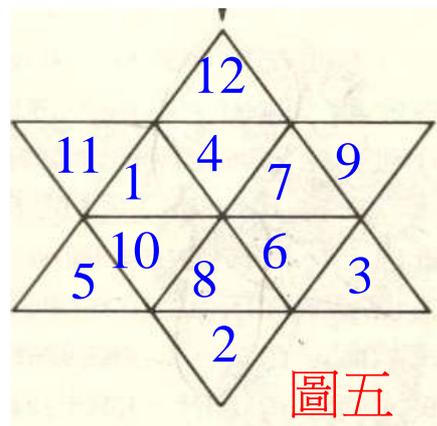
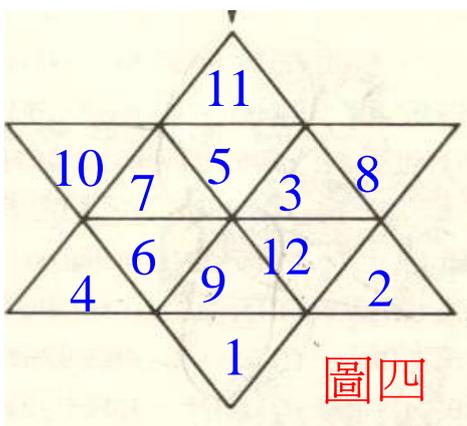
7 最後一格 I 則是最後所剩的數字 8，故 I 為 8

\Rightarrow 得出正解

利用同樣的方法

填入了另一個解的答案

圖〈四〉及圖〈五〉答案如下



陸、推廣

推廣一.

若每邊和改為連續整數

因為 Q 是 B+C+D+E+F 和

若設 B+C = E+F (紅色方格)

V W X Y Z 以此類推

可得 B+C = E+F = G+H = J+K = I+L = A+D

$$\Rightarrow \frac{78(1\sim 12\text{總和})}{6(6\text{個紅色方格})} = 13 \Rightarrow \text{每個方格和皆為 } 13$$

$$\text{設 } Q=R \quad V=R+1 \quad \dots \quad Z=R+5 \Rightarrow \frac{(R+R+5) \times 6}{2} = 6R+15$$

$$6R+15-156(兩倍的1\sim 12\text{總和}) = 6R-141(內圈和)$$

$$78(1\sim 12\text{總和}) - (6R-141) = 219-6R(外圈和)$$

$$\left. \begin{array}{l} 57 \geq 6R-141 \geq 21 \\ 57 \geq 219-6R \geq 21 \end{array} \right\} \Rightarrow 33 \geq R \geq 27$$

以 $Q = R = 27$ (最小可能) 來看

$$Q = R \Rightarrow B+C+D+E+F = 27 \Rightarrow B+C+E+F=26(利用兩個方格和為26)$$

$$D=1 \quad \text{因為 } A+D=13 \quad \text{推得 } A=12$$

$$V = R+1 \Rightarrow G+H+I+J+K = 28 \Rightarrow G+H+J+K=26(利用兩個方格和為26)$$

$$I=2 \quad \text{因為 } I+L=13 \quad \text{推得 } L=11$$

$$W = R+2 \Rightarrow G+H+C+D+A = 29 \Rightarrow A+D+H+G=26(利用兩個方格和為26)$$

$$C=3 \quad \text{因為 } C+B=13 \quad \text{推得 } B=10$$

$$X = R+3 \Rightarrow F+E+J+I+L = 30 \Rightarrow F+E+I+L=26(利用兩個方格和為26)$$

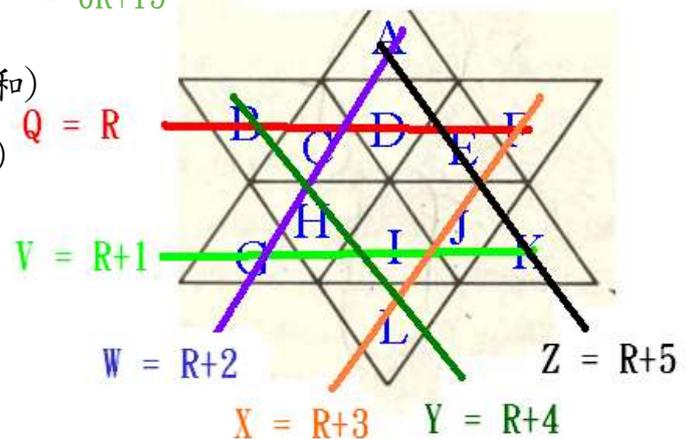
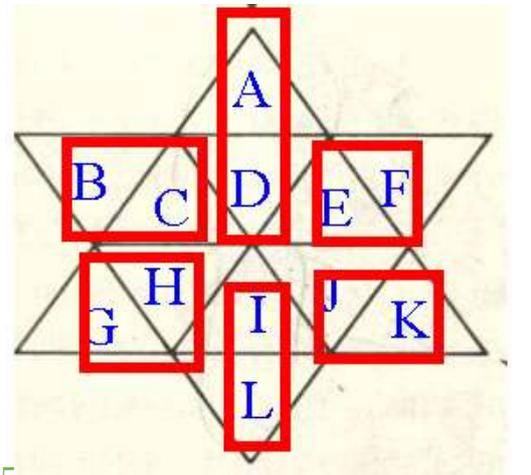
$$J=4 \quad \text{因為 } J+K=13 \quad \text{推得 } K=9$$

$$Y = R+4 \Rightarrow B+C+H+I+L = 31 \Rightarrow B+C+I+L=26(利用兩個方格和為26)$$

$$H=5 \quad \text{因為 } H+G=13 \quad \text{推得 } G=8$$

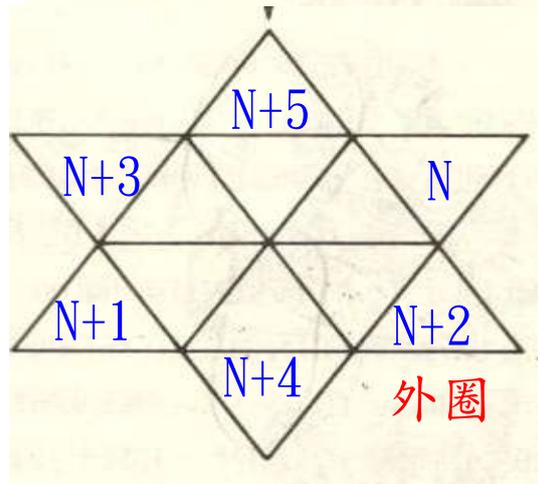
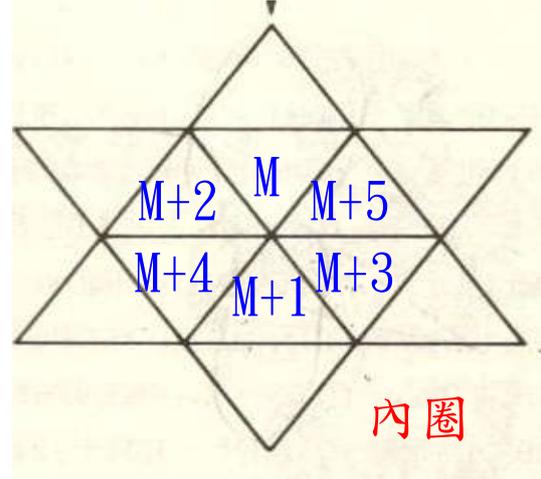
$$Z = R+5 \Rightarrow A+D+E+J+K = 32 \Rightarrow A+D+J+K=26(利用兩個方格和為26)$$

$$E=6 \quad \text{因為 } E+F=13 \quad \text{推得 } F=7$$



由上述可得規律—

範圍 { 若 $M=1$
 N 就為 7
 若 $M=7$
 N 就為 1



推廣二

若每邊和改為等差數列

證明

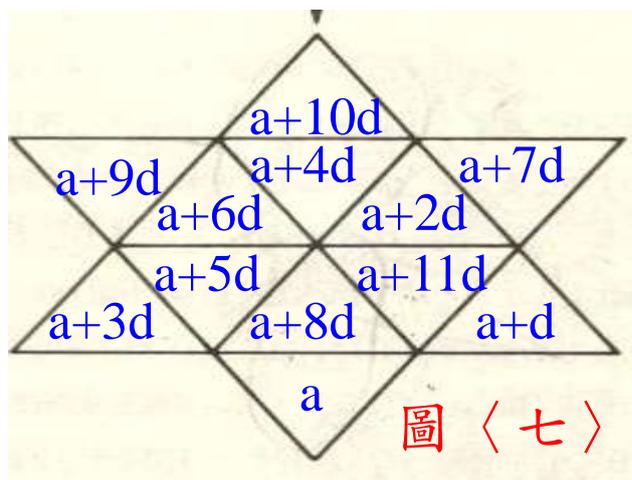
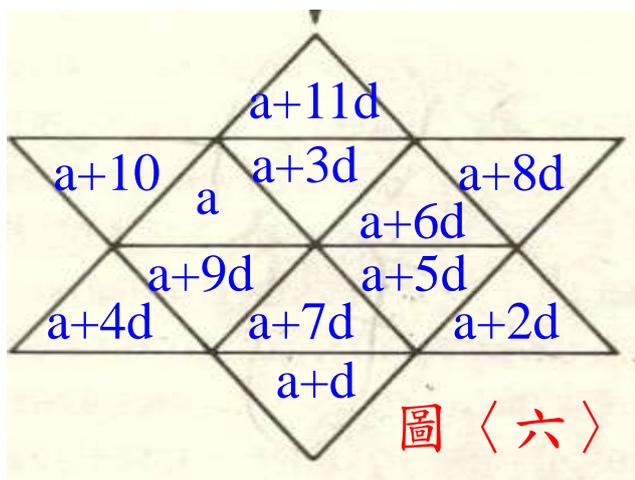
若將 1 ~ 12 改為等差數列

答案是否會改變？

先將 1 ~ 12 換成

$$a \quad a+d \quad a+2d \quad \sim \quad a+11d$$

利用解答將 $a \quad a+d \quad a+2d \quad \sim \quad a+11d$ 排入星星中



$$\begin{aligned}
 (a + 11d) + (a + 3d) + (a + 6d) + (a + 5d) + (a + 2d) &= 5a + 27d \\
 (a + 10d) + (a) + (a + 9d) + (a + 7d) + (a + d) &= 5a + 27d \\
 (a + 10d) + (a) + (a + 3d) + (a + 6d) + (a + 8d) &= 5a + 27d \\
 (a + 4d) + (a + 9d) + (a + 7d) + (a + 5d) + (a + 2d) &= 5a + 27d \\
 (a + d) + (a + 7d) + (a + 9d) + (a) + (a + 10d) &= 5a + 27d \\
 (a + 2d) + (a + 5d) + (a + 6d) + (a + 3d) + (a + 11d) &= 5a + 27d
 \end{aligned}$$

由此可得證：正解亦可改為等差數列

柒、心得感想

選此題目因為題目很吸引人，雖然研究的過程十分的艱難，不過好奇心和興趣贏過了當時我們的理性，憑著這股熱誠，就這樣研究了三分之一。但是研究過程中所遇到的瓶頸，使我們的熱誠冷化、懶惰化，有幾個月完全沒有進展。找不到刪去的方法及正確的答案，使得我們信心銳減，陪著我們已不是熱誠而是流不完的汗和那不斷流失的自信心。我們只能犧牲午休和假日的零碎時間，一點一滴的慢慢完成。找到新方法、新刪法的心情成為了我們的動力。沒有放棄的我們，在最後期限內，完成了遙不可及目標，成功的研究完畢。

捌、參考資料與其他

“神機妙算”

P. 1 <星星謎題 1>

p. 30 <星星謎題 2>

“趣味數學三百題”

【評語】 030411

1. 數字編排解說清晰。
2. 作者說理能力佳。
3. 研究目的提及” 改變題意，增加難易度” 之部分可再加以闡述。
4. 參考文獻宜詳列說明。
5. 宜加強列式表達。