

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

國中組 數學科

佳作

030409

數字「珠」璣

學校名稱：高雄市立陽明國民中學

作者：  國一 謝易軒  國一 趙子宜  國一 曾至誠  國一 陳亮宇	指導老師：  張智凱
---	------------------

關鍵詞：數形關係、等差級數

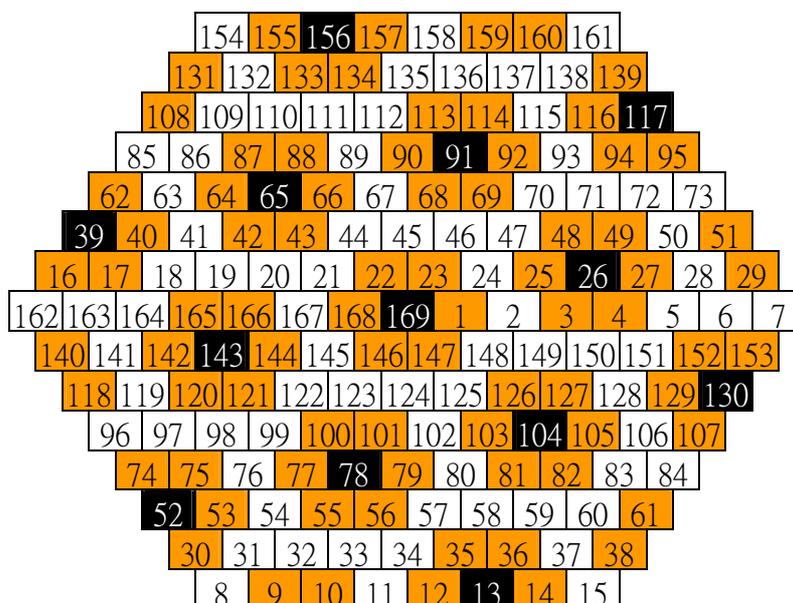
# 數字「珠」璣

## 摘要

本研究源自於某數學問題「王家珠寶盒」，內容為將 1~169 個數字排列成一個正六邊形的形狀，排列完後有數個有趣的規律：169 為 13 的平方，圖中每六個數字圍成小灰色六邊形，數字和是 13 的倍數；黑色部分的數字是 13 的倍數，灰色六邊形外圍的 12 個數字圍成較大的白色六邊形，這 12 個數字數字和也是 13 的倍數；六邊形的數字以對角來看  $154+15=169$ 、 $161+8=169$  為 169……等，所有的規律都圍繞著 13 的倍數。因此研究主軸放在找出各項性質的原因為何？排列方式為何？是否有其他的數字可排列成此種六邊形？經過分析後，利用 excel 計算 1~2000000 的數字，找出 6 個數符合 1、169、32761、6355441、1232922769、239180661721，但尚未能證明是否只有這 6 個數，故未來研究方向應置於證明是否還有其他的解亦或只有這六個解成立。

## 壹、研究動機

本研究始於偶然的情形下，看到了某數學推理書裡有一道題目「王家珠寶盒」，圖形如下。此題目主要是敘述將 1 到 169 的數字，按照某種排列方式排成一個正六邊形後，會有許多有趣的規律，這些特殊的規律包括：169 為 13 的平方，圖中每六個數字圍成小橘色六邊形，數字和是 13 的倍數；黑色部分的數字是 13 的倍數，橘色六邊形外圍的 12 個數字圍成較大的白色六邊形，這 12 個數字數字和也是 13 的倍數；六邊形的數字以對角來看  $154+15=169$ 、 $161+8=169$  為  $169\cdots\cdots$  等，所有的規律都圍繞著 13 的倍數，且書中也並未提及為什麼，因此令我們感到十分的好奇，這 169 的數字到底是怎麼排列的？為什麼會有這些規律？還有其他種的數字拿來排列也會有同樣的情形嗎？



## 貳、研究目的

- 一、定義名詞
- 二、了解此種排列的規律性
- 三、了解此種排列的排列方式
- 四、探索是否有其他相同規律的數字

## 參、研究設備與器材

一、計算機

二、紙

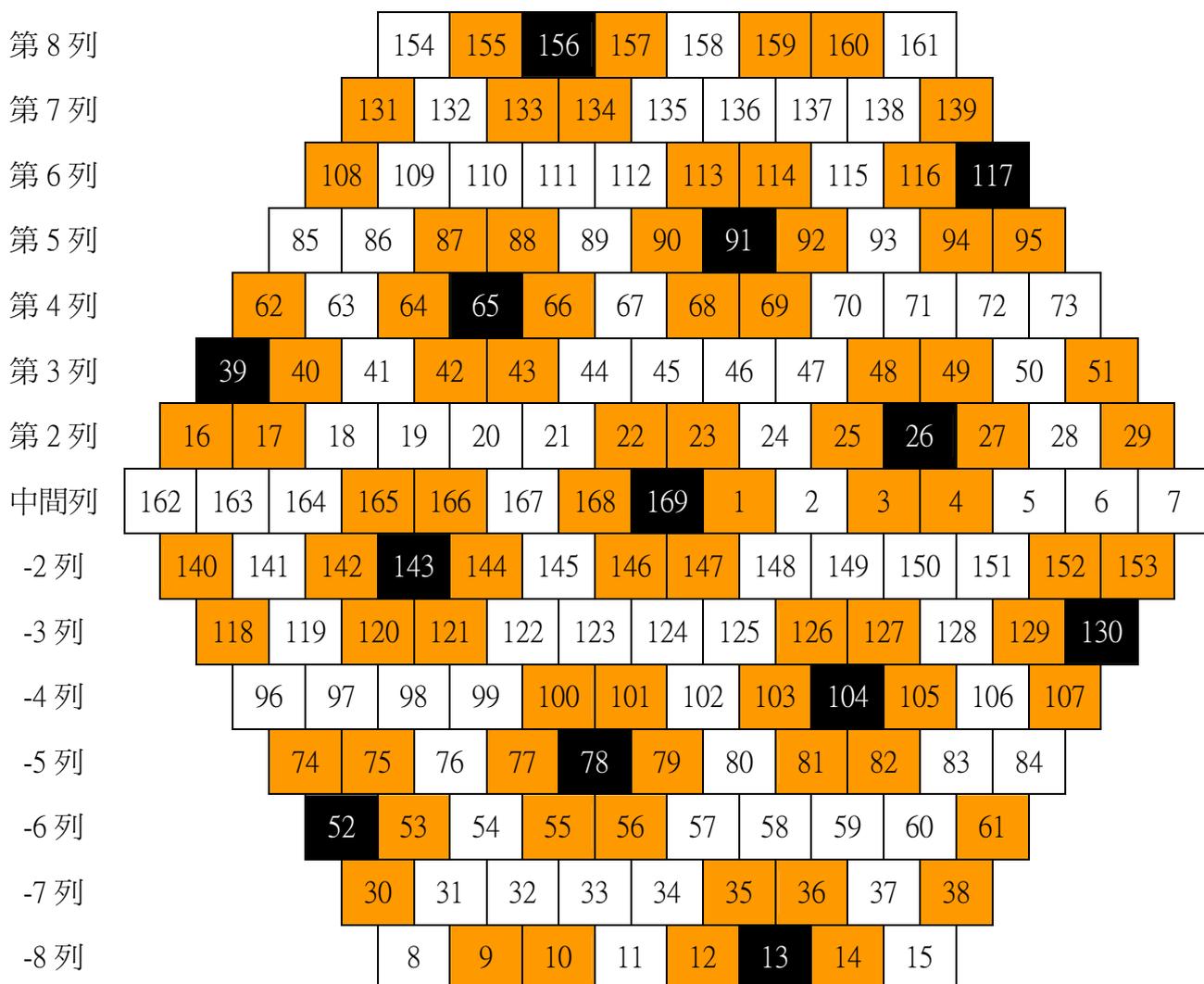
三、筆

四、電腦

## 肆、研究過程

一、定義名詞

### 定義六邊形各列的名稱



二、了解此種排列的規律性

(一)橘色部分所圍成的六邊形所圍起來的黑色部分所顯示的數字為 13 的倍數

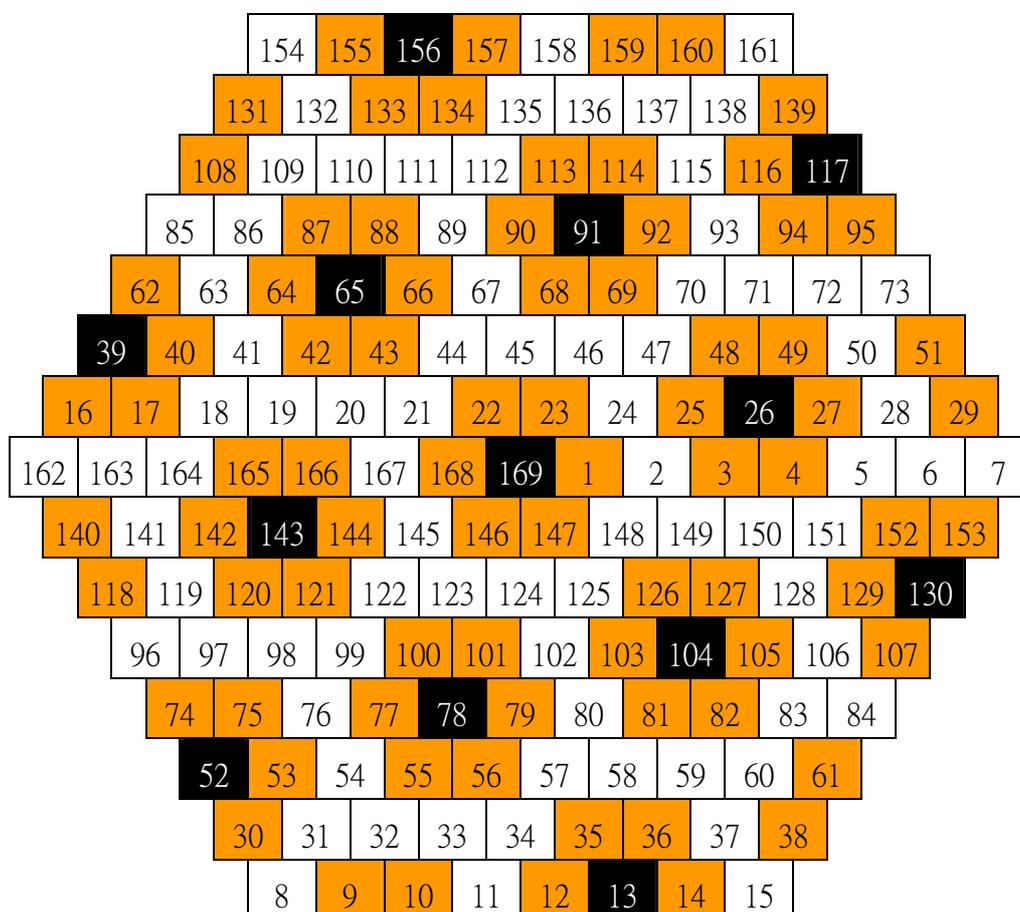
(二)橘色部分所圍成的六邊形所顯示的數字總和為 13 的倍數

(三)白色部分所圍成的六邊形所顯示的數字總和為 13 的倍數

(四)整個正六邊形每一列的開頭如:154、131、108、...、16 等皆差距 23

162、140、118、96、...、8 皆差距 22

(五)154+15=169、161+8=169...對角的數相加和為 169



### 三、研究此種排列的排列方式

(一)橘色六邊形所圍起來的黑色部分所顯示的數字為 13 的倍數

由上排到下 156、117、91、65、39……13

表列如下可發現：

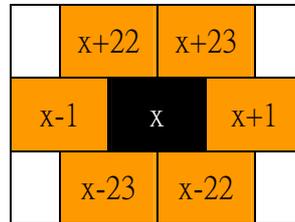
黑色部分(x)	156	117	91	65	39	26	169	143	130	104	78	52	13
與 13 的倍數關係	13×12	13×9	13×7	13×5	13×3	13×2	13×13	13×11	13×10	13×8	13×6	13×4	13×1

以上皆為 13 的倍數

(二)橘色部分所圍成的六邊形所顯示的數字總和為何為 13 的倍數？

若假設黑色的方塊數字為  $x$  ( $x$  為 13 的倍數)

則橘色部分的數字可表列如下：

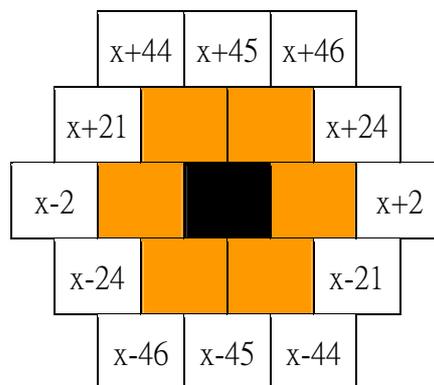


其總和為  $(x+22) + (x+23) + (x-1) + x + (x+1) + (x-23) + (x-22) = 6x$

因為  $x$  為 13 的倍數，故  $6x$  為 13 的倍數

(三)白色部分所圍成的六邊形所顯示的數字總和為何為 13 的倍數？

承上，白色部分的數字也可表列如下：



其總和為  $(x+44) + (x+45) + (x+46) + (x+21) + (x+24) + (x-2) + (x+2) + (x-24) + (x-21) + (x-46) + (x-45) + (x-44) = 12x$

因為  $x$  為 13 的倍數，故  $12x$  為 13 的倍數。

(四) 整個正六邊形每一列的開頭為何會差距 23 呢？

由上面 1.2.3 點等數據排列發現：

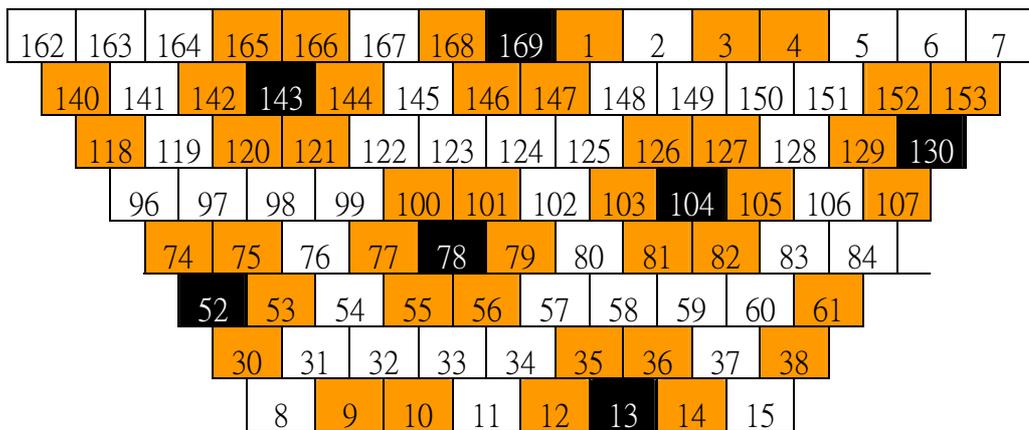


會發現形狀類似平行四邊形，且由排列的順序可發現此平行四邊形的排列也是由 1 到 169 依序排列的，由下而上，每 23 個數字即成一列，若由第二列來看：

16、17、.18、.19、.20、.21、.22、……、32、33、34、35、36、37、38

此平行四邊形每列皆為 23 個數字，所以右上及左下的數字為一組對應的數字，皆相差 23(例如：16、39)。

而六邊形下半部-2 列~-8 列



每列開頭皆差 22 的原因亦可說明：如 53 及 30 為一組差 23 的數字，故 52 和 30 相差 22。

#### 四、探索是否有其他相同規律的數字

(一)若以每邊幾個數字來代表邊長（此研究最初的圖形是 169 個數字所排成的正六邊形，則此正六邊形的邊長為 8 個數字），可發現如下的排列方式：

$$\begin{aligned}
 & \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{2} \\
 & 3 + \boxed{4} + \boxed{5} + \boxed{4} + 3 \\
 & 4 + 5 + \boxed{6} + \boxed{7} + \boxed{6} + 5 + 4 \\
 & 5 + 6 + 7 + \boxed{8} + \boxed{9} + \boxed{8} + 7 + 6 + 5 \\
 & 6 + 7 + 8 + 9 + \boxed{10} + \boxed{11} + \boxed{10} + 9 + 8 + 7 + 6 \\
 & 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + \boxed{12} + \boxed{13} + \boxed{12} + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 \\
 & \mathbf{8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + \boxed{14} + \boxed{15} + \boxed{14} + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8} \\
 & \vdots \\
 & x + \dots + \boxed{2x-2} + \boxed{2x-1} + \boxed{2x-2} + \dots + x \\
 & \qquad \qquad \qquad x-1 \text{ 列} \qquad \qquad \qquad x-1 \text{ 列}
 \end{aligned}$$

此列的數字個數相加和為題目的 169 個數字

觀察上列數據，可發現：

- 1.最中間一列的數字個數為奇數
- 2.每列的個數是以中間列來對稱的
- 3.六邊形的邊長若為  $x$  個數字，則中間列個數為  $2x-1$
- 4.若以中間列為分界，六邊形第 2 到第 8 列、-2 到-8 列各有  $x-1$  列、 $x-1$  列

由上面的歸納我們可以計算整個六邊形的數字總個數為：

$$2 \times \frac{(x+2x-2)(x-1)}{2} + (2x-1) = 3x^2 - 3x + 1$$

(二)而如果要如原題目一般將全部的數排列成六邊形，而這些數的個數又是某個數的平方，顯然  $3x^2 - 3x + 1$  要為某數的平方，但  $x$  要為多少才會符合這種條件呢？經過繁複冗長的紙筆計算後，我們決定利用 excel 軟體來計算，設計當  $x$  為多少時， $3x^2 - 3x + 1$  為某數的平方：

- 1.從  $x=1$  開始，依序計算  $x^2$ 、 $3x^2 - 3x + 1$  的值

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	x	$x^2$	$3x^2-3x+1$			
2	1	1	1	1			
3	2	2	4	7			
4	3	3	9	19			
5	4	4	16	37			
6	5	5	25	61			
7	6	6	36	91			
8	7	7	49	127			
9	8	8	64	169			
10	9	9	81	217			
11	10	10	100	271			
12	11	11	121	331			
13	12	12	144	397			

## 2. 計算 $3x^2-3x+1$ 的平方根

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	x	$x^2$	$3x^2-3x+1$	平方根			
2	1	1	1	1	1			
3	2	2	4	7	2.64575131			
4	3	3	9	19	4.35889894			
5	4	4	16	37	6.08276253			
6	5	5	25	61	7.81024968			
7	6	6	36	91	9.53939201			
8	7	7	49	127	11.2694277			
9	8	8	64	169	13			
10	9	9	81	217	14.7309199			
11	10	10	100	271	16.4620776			
12	11	11	121	331	18.1934054			
13	12	12	144	397	19.9248588			
14	13	13	169	469	21.6564078			

計算完平方根後，遇到數據十分龐大，要過濾平方根為整數的工作十分的困難

3. 因此將 E 欄的數字四捨五入，預備進行篩選：由 excel 內建的篩選功能，我們設計將全部的平方根加以四捨五入到整數位，若代表平方根的 E 欄會等於四捨五入後的值 F 欄，則數值顯示 1，反之，數值顯示為 0，篩選範圍由  $x=1$  到  $x=2000000$ 。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	x	$x^2$	$3x^2-3x+1$	平方根	四捨五入到整數位	若E欄=F欄，顯示1，否則顯示0		
2	1	1	1	1	1	1	1		
3	2	2	4	7	2.64575131	3	0		
4	3	3	9	19	4.35889894	4	0		
5	4	4	16	37	6.08276253	6	0		
6	5	5	25	61	7.810249676	8	0		
7	6	6	36	91	9.539392014	10	0		
8	7	7	49	127	11.26942767	11	0		
9	8	8	64	169	13	13	1		
10	9	9	81	217	14.73091986	15	0		
11	10	10	100	271	16.46207763	16	0		
12	11	11	121	331	18.1934054	18	0		
13	12	12	144	397	19.92485885	20	0		
14	13	13	169	469	21.65640783	22	0		
15	14	14	196	547	23.38803113	23	0		

#### 4.篩選結果如下

	A	B	C	D	E	F	G
	x	x	$x^2$	$3x^2-3x+1$	平方根	四捨五入到整數位	若B欄=F欄，顯示1，否則顯示0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	8	8	64	169	13	13	1
3	105	105	11025	32761	181	181	1
4	1456	1456	2119936	6355441	2521	2521	1
5	20273	20273	410994529	1232922769	35113	35113	1
6	282360	282360	79727169600	2.39181E+11	489061	489061	1
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

我們發現 1~2000000 的數字中，只有 1、8、105、1456、20273、282360 符合此性質，也就是今天若將六邊形的邊長取 1、8、105、1456、20273、282360 時，六邊形中心的數字為  $1^2$ 、 $13^2$ 、 $181^2$ 、 $2521^2$ 、 $35113^2$ 、 $489061^2$ ；且六邊形的總個數為 1、169、32761、6355441、1232922769、239180661721。我們可找出六種數符合此性質。

#### 伍、結論

##### 一、1~169 的數字的排列方法

(一) 將 169 置於六邊形的正中央，並計算中間列應該排列的數字，填入下列的數字：

1.169 個數中間列為 15 個數

162	163	164	165	166	167	168	169	1	2	3	4	5	6	7
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---	---	---	---	---	---	---

2.再依序補上六邊形第八列需 8 個數，將數字填到 15

162	163	164	165	166	167	168	169	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----

3.依序往上在每列填上 23 個數字

.....

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
162	163	164	165	166	167	168	169	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

4. 填到 162、163、...、7 重複後依粗線切開，即中間列若為 15 個數，由第二列只需 14 個數，故 16、17、.....、29 即為第二列所需的數，以此類推。

154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	1	2	3	4	5	6	7
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153
108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107
62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
162	163	164	165	166	167	168	169	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

5. 合併中間列即可得到此六邊形

154	155	156	157	158	159	160	161							
131	132	133	134	135	136	137	138	139						
108	109	110	111	112	113	114	115	116	117					
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95				
62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73			
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51		
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
162	163	164	165	166	167	168	169	1	2	3	4	5	6	7
140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	
118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130		
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107			
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84				
52	53	54	55	56	57	58	59	60	61					
30	31	32	33	34	35	36	37	38						
8	9	10	11	12	13	14	15							

此種六邊形的規律性如研究過程（一）所述

二、故符合此性質的六個數 1、169、32761、6355441、1232922769、239180661721 亦可使用此種方法：

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	x	x^2	3x^2-3x+1	平方根	四捨五入到整數位	若B欄=F欄，顯示1，否則顯示0
2	1	1	1	1	1	1	1
3	8	8	64	160	13	13	1
4	105	105	11025	32761	181	181	1
5	1456	1456	2119936	6355441	2521	2521	1
6	20273	20273	410994529	1232922769	35113	35113	1
7	282360	282360	79727169600	2.39181E+11	489061	489061	1
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

先利用 excel 得知六邊形每列應有的數字個數以及中間列的數字個數，如 32761 分成各列的數字排列，中間列共  $105 \times 2 - 1 = 209$  個數，六邊形邊長需 105 個數，故先填中間列 209 個數，如果以上圖框起來的數字，用我們所歸納出的規律排列出正六邊形的中間列，如下：

32658	.....	32760	32761	1	2	.....	104
-------	-------	-------	-------	---	---	-------	-----

在右邊補上 105 個數(104 後再加上 105~209)後，以每列  $209 + 105 = 314$  個數排成一個平行四邊形，依上列步驟分割合併即可。

三、受限於所學的內容範圍以及時間的限制，即使將數據利用 excel 計算出 2000000 以上的數字，雖然有 6 個數符合，但尚未能證明是否只有這 6 個數，故未來研究方向應置於證明是否還有其他的解亦或只有這 6 個解成立。

## 陸、研究心得

爲了有所結果，我們利用所剩不多的課餘時間，才完成這些成果。剛開始做時，因爲不知該如何開始研究，在討論幾次後較無明顯進展下，於是就請教老師，經過了一些關鍵點提示後，才找到大概的方向。再藉由每週兩次的討論時間，以及將指導老師提示下給我們各週的進度，一一的完成之後，我們才發現可由一些小東西和一些小線索，知道更多的資料與知識，而在研究的過程也瞭解到了做筆記以及討論的重要性。在討論有哪些其他可能的數字時，遇到了極大的瓶頸，紙筆的運算無法提供很大的用途，因此在老師的指點下，我們嘗試使用 excel 軟體來幫助我們找可能的結果，終於在透過電腦運算及老師幫我們加強一些必要的概念後，我們找到了其他的可能，而在時間限制的情況下，我們僅能找出排列的方法及某些規律，尙未能證明是否還有其他解亦或只有這 6 個解，也希望將來有機會能夠再重新檢視這個題目，將此次未完成的部分完成。

## 柒、參考書目：

1. 洪有情，「康軒版國中數學第 1 冊」，康軒文教事業股份有限公司，台北，民 96。
2. 鄭國順等，「部編版國中數學第 3 冊」，國立教育研究院籌備處，台北，民 96。
3. 王登傳，「數學遊戲大觀第四集」，前程出版社，高雄，民 91。

【評語】 030409

一個可愛的問題，作者對數字所造成的奇妙現象的原因做了仔細的分析討論，並給出了建構這樣奇妙的數字規律方法。同時，也進一步的分析了滿足條件的數字的可能值。作品完整，對於問題的分析也十分清楚。可惜的是，對於可能的延伸問題缺少進一步的討論。對於可以構造的六邊型的類別也無法給出清楚的刻劃。作者或許可以嘗試將結果推廣到一般的多邊形，如果能得出一般多邊形的結果，會更為有趣。